Глава 1

Интегралы по бесконечному промежутку, интегралы, зависящие от параметра, Эйлеровы интегралы

Обобщенный интеграл Римана на бесконечном промежутке можно определять через интегральные суммы следуя той же схеме, что и на конечном промежутке, добавляя бесконечно удаленную точку к разбиению. Но можно, используя теорему Хейка, определять интеграл как предел интегралов по конечному промежутку. Мы будем использовать второй способ.

1 Обобщенный интеграл Римана на бесконечном промежутке. Основные свойства

Определение 1.1 *Пусть f определена на бесконечном промежутке $[a, +\infty)$. Если $f \in R^*(a, c)$ при любом $c > a$ и существует конечный предел*

$$\lim_{c \to +\infty} \int_a^c f, \tag{1.1}$$

то f называют интегрируемой в обобщенном римановском смысле или R^*-интегрируемой на бесконечном промежутке $[a, +\infty)$, а сам предел (1.1) – обобщенным интегралом Римана и обозначают через

$$\int_a^{+\infty} f \quad \text{или} \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Если f R^*-интегрируема на бесконечном промежутке $[a, +\infty)$,то будем писать $f \in R^*(a, +\infty)$. Таким образом, по определению

$$\int_a^{+\infty} f = \lim_{c \to +\infty} \int_a^c f. \tag{1.2}$$

Если предел в (1.2) существует, то интеграл (1.2) называют также сходящимся.

Аналогично определяется интеграл

$$\int_{-\infty}^a f = \lim_{c \to -\infty} \int_c^a f. \tag{1.3}$$

Если f определена на всей числовой прямой, то f называется интегрируемой на $(-\infty, +\infty)$, если для любого действительного a существуют интегралы (1.2) и (1.3). При это полагают

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = \int_{-\infty}^{a} f + \int_{a}^{+\infty} f.$$

Мы остановимся на рассмотрении интегралов вида (1.2).

Теорема 1.1 (критерий Коши) *Интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *существует тогда и только тогда, когда*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > a,\ \ \forall\, b', b'' > \delta, \quad \left| \int\limits_{b'}^{b''} f(x)dx \right| < \varepsilon. \tag{1.4}$$

Доказательство. Обозначим

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt.$$

По критерию Коши $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ существует тогда и только тогда, когда

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \ \exists\, \delta > a,\ \ \forall\, x', x'' > \delta, \quad |F(x') - F(x'')| < \varepsilon. \tag{1.5}$$

Пусть для определенности $x' < x''$. Так как

$$|F(x') - F(x'')| = \left| \int\limits_a^{x''} f(t)dt - \int\limits_a^{x'} f(t)dt \right| = \left| \int\limits_{x'}^{x''} f(t)dt \right|,$$

то из (1.5) следует (1.4).$\square$

Замечание 1. Из определения интеграла следуют простейшие свойства интеграла:

1) Если $f, g \in R^*(a, +\infty)$, то $f \pm g \in R^*(a, +\infty)$, $\lambda f \in R^*(a, +\infty)$ и

$$\int\limits_a^{+\infty} (f \pm g)dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \pm \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx, \quad \int\limits_a^{+\infty} \lambda f dx = \lambda \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx.$$

2) Если f интегрируема на $[a, +\infty)$, то f интегрируема на любом отрезке $[c, d] \subset [a, +\infty)$ и, если дано конечное число точек

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n < x_{n+1} = +\infty,$$

то

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n+1} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx.$$

Замечание 2. Не любая непрерывная, и не каждая монотонная функция будет интегрируемой на бесконечном промежутке $[a, +\infty)$. Например, если $f(x) = x$, то

$$\lim_{c\to+\infty} \int\limits_a^c x dx = \lim_{c\to+\infty} \frac{x^2}{2}\Big|_a^c = \frac{1}{2} \lim_{c\to+\infty} (c^2 - a^2) = +\infty.$$

Это означает, что $f(x)=x$, непрерывная и монотонная на $[a,+\infty)$ не интегрируема. Тем не менее, для интеграла на бесконечном промежутке справедливы многие теоремы о предельном переходе. Докажем одну из них, а именно, теорему Леви.

Теорема 1.2 (теорема Леви) *Пусть* $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ *– возрастающая последовательность функций на* $[a,+\infty)$*, удовлетворяющая условиям*
1) $f_n(x)\in R^*(a,+\infty) \quad \forall\, n\in\mathbb{N}$,
2) $\forall\, x\in[a,\infty)\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$.
3) Последовательность интегралов $\int\limits_a^{\infty} f_n(x)dx$ *ограничена.*

Тогда
1) $f(x)\in R^*(a,+\infty)$,
2) $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^{+\infty} f_n(x)dx$.

Доказательство. Будем считать, что $f_n(x)\geq 0$, так как в противном случае можно заменить $f_n(x)$ на $f_n(x)-f_1(x)$. Так как последовательность $\int\limits_a^{\infty} f_n(x)dx$ ограничена и возрастает, то существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^{+\infty} f_n(x)dx=I.$$

Покажем, что $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx=I$, т.е.

$$I=\lim_{c\to+\infty}\int_a^{c} f(x)dx. \tag{1.6}$$

Отметим, что по теореме Леви, доказанной для конечного отрезка, интегралы $\int\limits_a^{c} f(x)dx$ существуют при любом $c>a$. Рассмотрим разность

$$0\leq I-\int_a^{c} f(x)dx=\left(I-\int_a^{+\infty} f_n(x)dx\right)+\left(\int_a^{+\infty} f_n(x)dx-\int_a^{c} f_n(x)dx\right)+$$

$$+\left(\int_a^{c} f_n(x)dx-\int_a^{c} f(x)dx\right)\leq$$

$$\leq\left(I-\int_a^{+\infty} f_n(x)dx\right)+\left(\int_a^{+\infty} f_n(x)dx-\int_a^{c} f_n(x)dx\right). \tag{1.7}$$

Из определения числа I следует, что

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\, n\in\mathbb{N},\quad I-\int_a^{+\infty} f_n(x)dx<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.8}$$

При этом фиксированном n

$$\exists\, c' > a, \;\; \forall\, c > c', \quad \int\limits_a^{+\infty} f_n(x)dx - \int\limits_a^{c} f_n(x)dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.9}$$

Подставляя (1.8) и (1.9) в (1.7), получим (1.6). $\square$

Отметим, что остаются также справедливыми теоремы Фату и Лебега о предельном переходе, а теорема о предельном переходе в случае равномерной сходимости теряет свою силу.

В заключение приведем признак сравнения интегрируемости на бесконечном промежутке.

Теорема 1.3 (признак сравнения) *Пусть*
1) $f, |f| \in R^*(a,b)$ при любом $b > a$;
2) для всех $x \in [a,+\infty)$ $|f(x)| \le g(x)$;
3) $g(x) \in R^*(a,+\infty)$.
Тогда f и $|f| \in R^*(a,+\infty)$.

Доказательство. Так как $|f| \in R^*(a,b)$ при любом $b > a$, то

$$\int\limits_a^b |f| \le \int\limits_a^b g \le \int\limits_a^{+\infty} g.$$

Поэтому существует предел

$$\lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b |f| = \int\limits_a^{+\infty} |f|,$$

т.е. $|f| \in R^*(a,+\infty)$.

Так как $g \in R^*(a,+\infty)$, то по критерию Коши

$$\forall\, \varepsilon > 0, \; \exists\, b > a, \; \forall\, b', b'' \ge b, \quad \int\limits_{b'}^{b''} g < \varepsilon.$$

Но f и $|f| \in R^*(b', b'')$. Поэтому

$$\left| \int\limits_{b'}^{b''} f \right| \le \int\limits_{b'}^{b''} |f| \le \int\limits_{b'}^{b''} g < \varepsilon,$$

т.е. выполнен критерий Коши интегрируемости функции f на $[a,+\infty)$. Таким образом, f и $|f| \in R^*(a,+\infty)$. $\square$

2 Признак Абеля интегрируемости на бесконечном промежутке

Теорема 2.1 *Пусть f и g определены на $[a,+\infty)$ и удовлетворяют условиям*
1) $f \in R^*(a,+\infty)$;
2) g ограничена и монотонна на $[a,+\infty)$.
Тогда $fg \in R^*(a,+\infty)$.

Доказательство. Пусть для определенности $g(x)$ возрастает. Будем доказывать, что для произведения fg выполняется критерий Коши. Выберем произвольные пока $b'' > b' > a$. По второй теореме о среднем

$$\int_{b'}^{b''} fg = g(b') \int_{b'}^{\xi} f + g(b'') \int_{\xi}^{b''} f \tag{2.1}$$

Из ограниченности g следует $|g(x)| \leq M$. Так как $f \in R^*(a, +\infty)$, то по критерию Коши

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists c > a,\ \forall b'' > b' > c \quad \left| \int_{b'}^{b''} f \right| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Выбирая в (2.1) $b'' > b' > c$, получаем оценку

$$\left| \int_{b'}^{b''} fg \right| \leq M \frac{\varepsilon}{2M} + M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon,$$

т.е. критерий Коши выполнен, и теорема доказана. $\square$

3 Признак Дирихле интегрируемости на бесконечном промежутке

Теорема 3.1 *Пусть f и g определены на $[a, +\infty)$ и удовлетворяют условиям*
1) $f \in R^*(a, c)$ при всех $c > a$ и функция $F(x) = \int_a^x f$ ограничена на $[a, +\infty)$,
2) g монотонна на $[a, +\infty)$ и $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$.
Тогда $fg \in R^*(a, +\infty)$.

Доказательство. По теореме о сведении обобщенного Римановского интеграла к интегралу Стилтьеса $fg \in R^*(a, c)$ при всех $c > a$. Снова запишем равенство (2.1) и выразим интегралы в правой части через $F(x)$. Обозначая $M = \sup |F(x)|$, получим

$$\left| \int_{b'}^{b''} fg \right| = |g(b')(F(\xi) - F(b')) + g(b'')(F(b'') - F(\xi))| \leq 4M(|g(b')| + |g(b'')|).$$

Так как $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$, то из последнего неравенства следует выполнение критерия Коши для функции fg, что и доказывает теорему. $\square$

Пример. Исследуем на сходимость интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x+1}} dx. \tag{3.1}$$

1)$f(x) = \cos x \in R^*(0, c)$ при всех $c > 0$,
2)функция $F(x) = \int_0^x \cos t dt = \sin x$ ограничена на $[0, +\infty)$,
3)$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 0$.

Поэтому по признаку Дирихле интеграл (3.1) сходится.

4 Интегралы, зависящие от параметра. Предельный переход под знаком интеграла

Определение 4.1 *Пусть $f(x,t)$ определена в прямоугольнике $\Pi = [a,b] \times [\alpha, \beta]$ и при каждом $t \in [\alpha, \beta]$ функция $f_t(x) = f(x,t) \in R^*(a,b)$. Тогда интеграл*

$$\Phi(t) = \int\limits_a^b f(x,t)dx$$

называют интегралом, зависящим от параметра t.

Задача, которую мы будем обсуждать, заключается в следующем. Когда справедливо равенство

$$\lim_{t \to t_0} \int\limits_a^b f(x,t)dx = \int\limits_a^b \lim_{t \to t_0} f(x,t)dx?$$

Теорема 4.1 *Пусть $f(x,t)$ удовлетворяют условиям*
1) $\forall\, t \in [\alpha, \beta]$ функция $f(x,t) \in R^*(a,b)$;
2) при всех $x \in [a,b]$ существует предел

$$\lim_{t \to t_0} f(x,t) = \psi(x);$$

3) существуют функции $\omega(x), \Omega(x) \in R^*(a,b)$ такие, что

$$\forall\, (x,t) \in \Pi, \;\; \omega(x) \le f(x,t) \le \Omega(x).$$

Тогда
1) функция $\psi(x) \in R^*(a,b)$;
2) справедливо равенство

$$\lim_{t \to t_0} \int\limits_a^b f(x,t)dx = \int\limits_a^b \psi(x)dx = \int\limits_a^b \lim_{t \to t_0} f(x,t)dx.$$

Доказательство. Выберем произвольную последовательность $t_n \to t_0$ и обозначим $f_n(x) = f(x,t_n)$. По условию $f_n(x) \in R^*(a,b), \; f_n(x) \to \psi(x)$ и

$$\omega(x) \le f_n(x) \le \Theta(x).$$

Теорема Лебега о предельном переходе дает нам, что $\psi(x) \in R^*(a,b)$ и

$$\int\limits_a^b \psi(x)dx = \lim_{n \to \infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx = \lim_{t_n \to t_0} \int\limits_a^b f(x,t_n)dx.$$

Так как последнее равенство справедливо для любой последовательности $t_n \to t_0$, то, согласно определению предела по Гейне, мы имеем

$$\int\limits_a^b \psi(x)dx = \lim_{t \to t_0} \int\limits_a^b f(x,t)dx,$$

и теорема доказана. $\square$
Следствие. *Пусть* $f(x,t)$ *определена в прямоугольнике* $\Pi = [a,b] \times [\alpha,\beta]$ *и выполнены следующие условия*
1) $\forall\, t \in [\alpha,\beta]$ *функция* $f(x,t) \in R^*(a,b)$*;*
2) при каждом $x \in [a,b]$ *функция* $f(x,t)$ *непрерывна в точке* $t_0 \in [\alpha,\beta]$*;*
3) существуют функции $\omega(x), \Theta(x) \in R^*(a,b)$*, что*

$$\forall\, (x,t) \in [a,b] \times [\alpha,\beta], \quad \omega(x) \le f(x,t) \le \Theta(x).$$

Тогда функция

$$\Phi(t) = \int\limits_a^b f(x,t)dx$$

непрерывна в точке $t_0 \in [\alpha,\beta]$.
Доказательство. Это очевидное следствие предыдущей теоремы, так как непрерывность в точке t_0 означает, что

$$\lim_{t\to t_0} f(x,t) = f(x,t_0),$$

и, значит,

$$\Phi(t_0) = \int\limits_a^b f(x,t_0)dx = \int\limits_a^b \lim_{t\to t_0} f(x,t)dx = \lim_{t\to t_0} \int\limits_a^b f(x,t)dx =$$
$$= \lim_{t\to t_0} \Phi(t). \square$$

Замечание. В теореме 2.1 и в следствии можно заранее не требовать, чтобы при каждом t функция $f(x,t)$, как функция переменной x была бы интегрируемой. Достаточно потребовать, чтобы при каждом $t \in [\alpha,\beta]$ функция $f(x,t)$ была измеримой. Тогда из неравенства

$$\omega(x) \le f(x,t) \le \Theta(x)$$

следует и интегрируемость.

5 Интегралы по бесконечному промежутку, зависящие от векторного параметра. Предельный переход под знаком интеграла

В этом параграфе мы рассмотрим более общий случай интеграла от параметра, имеющего вид

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,\mathbf{t})\, dx \tag{5.1}$$

Мы будем предполагать, что $f(x,\mathbf{t})$ определена на множестве $[a,+\infty) \times [\mathbf{A},\mathbf{B}]$ и при каждом $\mathbf{t} \in [\mathbf{A},\mathbf{B}]$ функция $f_{\mathbf{t}}(x) = f(x,\mathbf{t}) \in R^*(a,+\infty)$. Интеграл (5.1) будем называть в этом случае интегралом от векторного параметра $\mathbf{t}$ на бесконечном промежутке $[a,+\infty)$. Для такого интеграла справедлива как теорема 4.1 так и следствие из нее.

Теорема 5.1 *Пусть* $f(x,\mathbf{t})$ *удовлетворяет условиям*
1) $\forall\, \mathbf{t} \in [\mathbf{A},\mathbf{B}]$ *функция* $f(x,\mathbf{t}) \in R^*(a,+\infty)$*;*
2) при всех $x \in [a,+\infty)$ *в точке* $\mathbf{t}_0 \in [\mathbf{A},\mathbf{B}]$ *существует предел*

$$\lim_{\mathbf{t}\to\mathbf{t}_0} f(x,\mathbf{t}) = \psi(x);$$

3) существуют функции $\omega(x), \Omega(x) \in R^*(a,+\infty)$ *такие, что*

$$\forall\, x,\mathbf{t} \in [a,+\infty)\times[\mathbf{A},\mathbf{B}],\ \ \omega(x) \le f(x,\mathbf{t}) \le \Omega(x).$$

Тогда
1) функция $\psi(x) \in R^*(a,+\infty)$*;*
2) справедливо равенство

$$\lim_{\mathbf{t}\to\mathbf{t}_0} \int\limits_a^{+\infty} f(x,\mathbf{t})\,dx = \int\limits_a^{+\infty} \psi(x)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} \lim_{\mathbf{t}\to\mathbf{t}_0} f(x,\mathbf{t})\,dx.$$

Доказательство этой теоремы полностью повторяет доказательство теоремы 4.1, и мы его опускаем. Отметим лишь, что оно использует теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла на бесконечном промежутке. □
Замечание. Доказанная теорема остается справедливой и в случае, когда функция $f(x,\mathbf{t})$ определена в прямоугольнике $[a,b]\times[\mathbf{A},\mathbf{B}]$. Это происходит потому, что теорема Лебега о предельном переходе верна как на конечном промежутке, так и на бесконечном. Это в полной мере относится и в приводимому ниже следствию.
Следствие. *Пусть* $f(x,\mathbf{t})$ *определена на множестве* $[a,+\infty)\times[\mathbf{A},\mathbf{B}]$ *и выполнены следующие условия:*
1) $\forall\, \mathbf{t} \in [\mathbf{A},\mathbf{B}]$ *функция* $f(x,\mathbf{t}) \in R^*(a,+\infty)$*;*
2) при каждом $x \in [a,+\infty)$ *функция* $f(x,\mathbf{t})$ *непрерывна в точке* $\mathbf{t}_0 \in [\mathbf{A},\mathbf{B}]$*;*
3) существуют функции $\omega(x), \Omega(x) \in R^*(a,+\infty)$ *такие, что*

$$\forall\, x,\mathbf{t} \in [a,+\infty)\times[\mathbf{A},\mathbf{B}],\ \ \omega(x) \le f(x,\mathbf{t}) \le \Omega(x).$$

Тогда функция

$$\Phi(\mathbf{t}) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,\mathbf{t})\,dx$$

непрерывна в точке $\mathbf{t}_0 \in [\mathbf{A},\mathbf{B}]$.
Доказательство проходит также как и в случае интеграла по конечному промежутку. □

6 Дифференцирование интеграла по параметру

В этом параграфе мы будем обсуждать следующую задачу: когда справедливо равенство

$$\frac{d}{dt}\int\limits_a^b f(x,t)dx = \int\limits_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)dx\ ?$$

Теорема 6.1 *Пусть $f(x,t)$ определена на $\Pi = [a,b]\times[\alpha,\beta]$ и удовлетворяет условиям*
1) $\forall\, t \in [\alpha,\beta]$ функция $f(x,t) \in R^*(a,b)$;
2) $\forall\, t \in [\alpha,\beta]$, $\forall\, x \in [a,b]$ существует частная производная $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}$;
3) существуют функции $\omega(x), \Theta(x) \in R^*(a,b)$ такие, что

$$\forall\ (x,t) \in \Pi, \quad \omega(x) \le \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} \le \Omega(x).$$

Тогда
1) частная производная $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} \in R^*(a,b)$ при каждом $t \in [\alpha,\beta]$,
2) функция

$$\Phi(t) = \int\limits_a^b f(x,t)dx$$

дифференцируема на $[\alpha,\beta]$ и справедливо равенство

$$\Phi'(t) = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx.$$

Доказательство. Выберем произвольно $t_0 \in [\alpha,\beta]$. По определению частной производной при каждом x

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \lim_{t\to t_0}\frac{f(x,t)-f(x,t_0)}{t-t_0}.$$

По теореме Коши существует $\tau \in (t,t_0)$ такое, что

$$\frac{f(x,t)-f(x,t_0)}{t-t_0} = \frac{\partial f(x,\tau)}{\partial t}$$

и поэтому $\forall\ (x,t) \in \Pi$

$$\omega(x) \le \frac{f(x,t)-f(x,t_0)}{t-t_0} \le \Omega(x).$$

Кроме того,

$$\lim_{t\to t_0}\frac{f(x,t)-f(x,t_0)}{t-t_0} = \frac{\partial f(x,t_0)}{\partial t}$$

при всех x. Поэтому по теореме 4.1 о предельном переходе производная $\frac{\partial f(x,t_0)}{\partial t} \in R^*(a,b)$ и

$$\int\limits_a^b \frac{\partial f(x,t_0)}{\partial t}dx = \lim_{t\to t_0}\int\limits_a^b \frac{f(x,t)-f(x,t_0)}{t-t_0}dx =$$

$$= \lim_{t\to t_0}\frac{1}{t-t_0}\left(\int\limits_a^b f(x,t)dx - \int\limits_a^b f(x,t_0)dx\right) = \lim_{t\to t_0}\frac{\Phi(t)-\Phi(t_0)}{t-t_0} = \Phi'(t_0).\square$$

Замечание. Последнюю теорему можно формулировать и для случая, когда функция f зависит не от одного параметра t, а от нескольких параметров $t_1, t_2, ..., t_n$. В этом случае теорема будет гарантировать существование частных производных и возможность дифференцирования интеграла по каждой переменной.

На практике часто бывает полезной теорема Лейбница о дифференцируемости интеграла по параметру, у которого верхний и нижний пределы зависят от этого параметра.

Теорема 6.2 (формула Лейбница) *1) Пусть $f(x,t)$ определена в прямоугольнике $[A,B]\times[\alpha,\beta]$ и $\forall t\in[\alpha,\beta]$ функция $F(x,t)$ есть первообразная по переменной x для $f(x,t)$ на отрезке $[A,B]$;*
2) функции $a(t)$ и $b(t)$ дифференцируемы на $[\alpha,\beta]$ и $A\le a(t)\le b(t)\le B$;
3) частные производные $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}$, $\frac{\partial F(x,t)}{\partial t}$ и $\frac{\partial F(x,t)}{\partial x}$ непрерывны в прямоугольнике $[A,B]\times[\alpha,\beta]$.
Тогда справедливо равенство

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx=\int\limits_{a(t)}^{b(t)}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx+f(b(t),t)b'(t)-f(a(t),t)a'(t). \tag{6.1}$$

Доказательство. По формуле Ньютона-Лейбница при каждом $t\in[\alpha,\beta]$

$$\int\limits_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx=F(b(t),t)-F(a(t),t). \tag{6.2}$$

Так как $F(x,t)$ имеет непрерывные частные производные, то правая часть в формуле (6.2) дифференцируема по t. Дифференцируя по t и используя правило дифференцирования сложной функции, получаем

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx=\frac{\partial F(b(t),t)}{\partial x}\cdot b'(t)+\frac{\partial F(b(t),t)}{\partial t}-\frac{\partial F(a(t),t)}{\partial x}a'(t)-\frac{\partial F(a(t),t)}{\partial t}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}(F(b(t),t)-F(a(t),t))+f(b(t),t)\cdot b'(t)-f(a(t),t)a'(t)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx+f(b(t),t)b'(t)-f(a(t),t)a'(t).$$

По условию $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}$ непрерывна, а значит, и ограничена в $[A,B]\times[\alpha,\beta]$. Поэтому для $f(x,t)$ выполнены условия теоремы 6.1 о дифференцируемости интеграла по параметру, согласно которой

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx=\int\limits_{a(t)}^{b(t)}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx.$$

Соединяя последние равенства, получаем формулу Лейбница (6.1). □

7 Эйлеровы интегралы

Определение 7.1 *Пусть f определена на отрезке $[A,B]$. Точку $x_0\in[a,b]$ будем называть особой, если в некоторой $O(x_0)$ функция f неограничена.*

Пример 1. Определим функцию f на отрезке $[0, 1]$ равенством

$$f(x) = \begin{cases} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, & x \in (0,1), \\ 0, & x = 0 \text{ или } x = 1 \end{cases}$$

Если $a < 1$, то точка $x = 0$ – особая точка функции $f(x)$. Если $b < 1$, то точка $x = 1$ – особая точка.

Определение 7.2 *Если функция f определена на бесконечном промежутке $[a, +\infty)$, то точку $x = \infty$ всегда считаем особой.*

Пример 2. *Функция* $g(x) = \begin{cases} e^{-x}x^{a-1}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
имеет две особые точки: $x = 0$ (при $a < 1$) и $x = +\infty$.

Теорема 7.1 *Если $a > 0$ и $b > 0$, то функция f из примера 1 (R^*)-интегрируема на $[0, 1]$.*

Доказательство. Выберем точку $x_0 = \frac{1}{2}$ и рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\, dx.$$

Если $a > 0$, то интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}\, dx$ существует, т.к. $F(x) = \frac{1}{a}x^a$ есть f-первообразная на $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ для функции x^{a-1}. Кроме того, $\forall\, x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ $(1-x)^{b-1} \le \max(1, 2^{1-b}) = 2^{1-b}$. Таким образом

$$0 \le x^{a-1}(1-x)^{b-1} \le 2^{1-b} \cdot x^{a-1}. \tag{7.1}$$

Функция x^{a-1} интегрируема на $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, следовательно, x^{a-1} измерима. Функция $(1-x)^{b-1}$ непрерывна на отрезке $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ и следовательно тоже измерима. Поэтому функция $x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ измерима. Так как функция $2^{1-b}x^{a-1} \in R^* \left[0, \frac{1}{2}\right]$, то по критерию интегрируемости измеримой функции из (7.1) следует, что функция $x^{a-1}(1-x)^{b-1} \in R^* \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Аналогично,

$$x^{a-1}(1-x)^{b-1} \in R^* \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Но тогда по теореме 10.1 из главы 1 $x^{a-1}(1-x)^{b-1} \in R^*[0, 1]$. □

Определение 7.3 *Функция* $B(\alpha, \beta) = \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\, dx$ *называется Эйлеровым интегралом I рода или бета-функцией. В соответствии с определением функции f подинтегральную функцию в граничных точках считаем равной нулю.*

Теорема 7.2 *Функция $B(\alpha, \beta)$ непрерывна в каждой точке области определения, т.е. при всех $\alpha, \beta > 0$.*

Доказательство. Рассмотрим векторный параметр (α, β) в прямоугольнике

$$[\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2] \ \ (\alpha_j > 0, \beta_j > 0).$$

Для всех (α, β) из этого прямоугольника

$$0 \leq x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \leq \Omega_{\alpha_1,\beta_1}(x) = x^{\alpha_1-1}(1-x)^{\beta_1-1}.$$

При каждом фиксированном $x \in [0,1]$ функция $f(x,\alpha,\beta) = x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$ непрерывна как функция переменных (α,β) в прямоугольнике $[\alpha_1,\alpha_2] \times [\beta_1,\beta_2], \Omega_{\alpha_1,\alpha_2}(x) \in R^*[0,1]$. Поэтому по следствию из теоремы 5.1 функция $B(\alpha,\beta)$ непрерывна в прямоугольнике $[\alpha_1,\alpha_2] \times [\beta_1,\beta_2]$. В силу произвольности прямоугольника отсюда следует непрерывность при всех $\alpha, \beta > 0$. $\square$

Теорема 7.3 *Функция $B(\alpha,\beta)$ дифференцируема в каждой точке области определения, точнее, ее частные производные $\frac{\partial B(\alpha,\beta)}{\partial \alpha}$ и $\frac{\partial B(\alpha,\beta)}{\partial \beta}$ существуют и непрерывны при всех $\alpha, \beta > 0$. При этом справедливы равенства*

$$\frac{\partial B(\alpha,\beta)}{\partial \alpha} = \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \ln x \, dx,$$

$$\frac{\partial B(\alpha,\beta)}{\partial \beta} = \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \ln(1-x) \, dx.$$

Доказательство. Обозначим

$$f(x,\alpha,\beta) = \begin{cases} 0, & x = 0, 1; \\ x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Если $x = 0$ или 1, то $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$ при любом α. Если $x \neq 0$, то

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = (1-x)^{\beta-1} x^{\alpha-1} \ln x.$$

Обозначим

$$\omega(x,\alpha,\beta) = \begin{cases} 0, & x = 0, 1; \\ 2^{1-\beta} x^{\alpha-1} \ln x, & x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]; \\ 2^{1-\alpha} \ln \frac{1}{2} (1-x)^{\beta-1}, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right). \end{cases}$$

Тогда при всех $x \in [0,1], \alpha \in [\alpha_1,\alpha_2], \beta \in [\beta_1,\beta_2]$

$$\omega(x,\alpha_1,\beta_1) \leq \frac{\partial f(x,\alpha,\beta)}{\partial \alpha} \leq 0. \tag{7.2}$$

Покажем, что $\omega(x,\alpha,\beta) \in R^*(0,1)$ при всех $\alpha, \beta > 0$. При $\varepsilon > 0$ записываем формулу интегрирования по частям

$$\int\limits_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x^\alpha}{\alpha} \ln x \right)' dx = \int\limits_\varepsilon^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1} \ln x \, dx + \int\limits_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{x^{\alpha-1}}{\alpha} \, dx. \tag{7.3}$$

При $\alpha > 0$ существует предел

$$\lim_{x\to 0+0} x^\alpha \ln x = 0.$$

Доопределяем функцию $\frac{x^\alpha}{\alpha}\ln x$ в нуле, полагая равной нулю. Тогда функция $\frac{x^\alpha}{\alpha}\ln x$ непрерывна на $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ и, значит, функция $\left(\frac{x^\alpha \ln x}{\alpha}\right)' \in R^*\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Функция $\frac{x^{\alpha-1}}{\alpha} \in R^*\left(0, \frac{1}{2}\right)$, т.к. она имеет f-первообразную $\frac{x^\alpha}{\alpha^2}$. Таким образом, из равенства (7.3) следует, согласно теореме Хейка, что существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1}\ln x\,dx,$$

который равен интегралу $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1}\ln x\,dx$. Функция $(1-x)^{\beta-1} \in R^*\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, т.к. она имеет f-первообразную. Таким образом, $\omega(x,\alpha,\beta) \in R^*(0,1)$ при любых $\alpha > 0, \beta > 0$. По теореме 6.1 отсюда с учетом (7.2) следует, что производная $\frac{\partial B}{\partial \alpha}$ существует в любом прямоугольнике $[\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2]$, а значит и при всех $\alpha > 0, \beta > 0$, и справедливы формулы для вычисления производных.

Используя следствие из теоремы 5.1 и снова применяя неравенство (7.2), получаем, что $\frac{\partial B}{\partial \alpha}$ непрерывна в любом прямоугольнике $[\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2]$, а значит и при всех $\alpha, \beta > 0$.

Аналогично доказывается, что $\frac{\partial B}{\partial \beta}$ тоже существует и непрерывна. $\square$

Определение 7.4 *Интеграл*

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx \ \ (\alpha > 0)$$

называют Эйлеровым интегралом II рода или гамма-функцией. Как и ранее полагаем, что $x^{\alpha-1}e^{-x} = 0$ *в точке* $x = 0$.

Теорема 7.4 $\Gamma(\alpha)$ *определена при всех* $\alpha > 0$.

Доказательство. Обозначим $g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ x^{\alpha-1}e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$

Определим функцию $\Omega_\alpha(x)$ равенством

$$\Omega_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ x^{\alpha-1}, & x \in (0,1]; \\ \frac{x^{\alpha-1}}{e^n}, & x \in (n, n+1]. \end{cases}$$

Очевидно, что 1) $\Omega_\alpha(x) \in R^*(0,1)$, 2) $\Omega_\alpha(x) \in R^*(1,b)$ при любом $b > 1$. Используя критерий Коши, убеждаемся, что $\Omega_\alpha(x) \in R^*(1,+\infty)$. Таким образом, $\Omega_\alpha(x) \in R^*(0,+\infty)$ и $\forall\, x \in [0,+\infty)$

$$0 \le x^{\alpha-1}e^{-x} \le \Omega_\alpha(x).$$

Отсюда по признаку сравнения и следует, что $g \in R^*[0,+\infty)$. $\square$

Теорема 7.5 $\Gamma(\alpha)$ *непрерывна в области определения, т.е. при всех* $\alpha > 0$.

Доказательство. Пусть $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$, где $\alpha_1 > 0, \alpha_2 < \infty$. Определяем функцию $\Omega(x)$ равенством

$$\Omega(x) = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ x^{\alpha_1 - 1}, & x \in (0, 1]; \\ \frac{x^{\alpha_2 - 1}}{e^x}, & x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Очевидно, что $\Omega(x) \in R^*(0, 1)$ и $\Omega(x) \in R^*(1, b)$ при всех $b > 1$. Как и в предыдущей теореме убеждаемся, что $\Omega(x) \in R^*(1, +\infty)$ и, значит, $\Omega(x) \in R^*(0, +\infty)$ и при всех $x \in [0, +\infty)$, при всех $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$

$$0 \le x^{\alpha - 1} e^{-x} \le \Omega(x).$$

Используя следствие из теоремы 5.1 получаем непрерывность $\Gamma(\alpha)$ на отрезке $[\alpha_1, \alpha_2]$. Ввиду произвольности α_1 и α_2 отсюда следует утверждение теоремы. $\square$

Теорема 7.6 $\Gamma(\alpha)$ *дифференцируема в области определения, т.е. при* $\alpha > 0$, *и справедливо равенство*

$$\Gamma'(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha - 1} e^{-x} \ln x \, dx.$$

Доказательство этой теоремы мало отличается от доказательства теоремы 7.3 и мы его опускаем.
Замечание. Нетрудно заметить, что доказательства теорем 7.3 и 7.6 содержат фактически следующий результат:

Теорема 7.7 *Функции* $B(\alpha, \beta)$ *и* $\Gamma(\alpha)$ *имеют непрерывные производные любого порядка в области определения.*

Отметим некоторые свойства Эйлеровых интегралов, которые выражаются формулами
1. $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \ \ (\alpha > 0)$.
Доказательство. Записывая формулу интегрирования по частям на конечном промежутке $[0, b]$, имеем равенство

$$\int\limits_0^b x^{\alpha - 1} e^{-x} \, dx = \frac{x^\alpha}{\alpha} e^{-x} \Big|_0^b + \int\limits_0^b \frac{x^\alpha}{\alpha} e^{-x} \, dx.$$

Переходя к пределу при $b \to +\infty$, получаем $\Gamma(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \Gamma(\alpha + 1)$. $\square$
2) $\Gamma(1) = 1$.
3) $\Gamma(n + 1) = n!$ при натуральном n.
4) $B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$.
Для доказательства достаточно сделать замену $1 - x = y$.
5) $B(\alpha, \beta) = \frac{\beta - 1}{\alpha + \beta - 1} B(\alpha, \beta - 1)$ при $\alpha > 0, \beta > 1$.
Доказательство. Так как $\beta > 1$, то можно воспользоваться формулой интегрирования по частям

$$B(\alpha, \beta) = \int\limits_0^1 x^{\alpha - 1} (1 - x)^{\beta - 1} \, dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} x^{\alpha - 1} \, dx = du & u = \frac{x^\alpha}{\alpha} \\ (1 - x)^{\beta - 1} = v & dv = (1 - x)^{\beta - 2} (1 - \beta) \, dx \end{array} \right| =$$

$$= uv\big|_0^1 + \int\limits_0^1 \frac{x^\alpha}{\alpha}(1-x)^{\beta-2}(\beta-1)\,dx =$$

$$= \frac{\beta-1}{\alpha}\left(\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(x-1+1)(1-x)^{\beta-2}\,dx\right) =$$

$$= \frac{\beta-1}{\alpha}\left(\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx\cdot(-1) + \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-2}\,dx\right) =$$

$$= \frac{\beta-1}{\alpha}B(\alpha,\beta)\cdot(-1) + \frac{\beta-1}{\alpha}B(\alpha,\beta-1).$$

Отсюда

$$B(\alpha,\beta)\left(1+\frac{\beta-1}{\alpha}\right) = \frac{\beta-1}{\alpha}B(\alpha,\beta-1),$$

следовательно,

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\beta-1}{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta-1).\ \square$$

Глава 2

Криволинейные и поверхностные интегралы

1 Вариация вектор-функции

Определение 1.1 *Пусть* $\mathbf{x}(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ *вектор-функция с компонентами* $\mathbf{x}(t) = (x^{(j)}(t))_{j=1}^m$. *Обозначим* $\mathcal{P} = (t_k)_{k=0}^n$ *разбиение отрезка* $[a,b]$:

$$a = t_0 < \ldots < t_n = b.$$

Число

$$\bigvee_a^b \mathbf{x}(t) \stackrel{df}{=} \sup_{\mathcal{P}} \sum_{k=1}^n ||\mathbf{x}(t_n) - \mathbf{x}(t_{n-1})||_2 = \sup_{\mathcal{P}} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m (x^{(j)}(t_k) - x^{(j)}(t_{k-1}))^2 \right)^{1/2}$$

называется вариацией вектор функции $\mathbf{x}(t)$ *на отрезке* $[a,b]$. *Если* $\bigvee\limits_a^b \mathbf{x}(t) < +\infty$, *то* $\mathbf{x}(t)$ *называется функцией ограниченной вариации.*

Предложение 1.1 $\forall\, c \in (a,b)$, $\bigvee\limits_a^b \mathbf{x}(t) = \bigvee\limits_a^c \mathbf{x}(t) + \bigvee\limits_c^b \mathbf{x}(t)$.

Доказательство. 1) Пусть $\mathcal{P} = (t_n)_{k=0}^n$ – разбиение отрезка $[a,b]$ и пусть $c \in (t_l, t_{l+1})$. Тогда

$$\sum_{k=1}^n ||\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t_{k-1})||_2 = \sum_{k=1}^l ||\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t_{k-1})||_2 + ||\mathbf{x}(t_{l+1}) - \mathbf{x}(t_l)||_2 + \sum_{k=l+2}^n ||\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t_{k-1})||_2 \le$$

$$\le \left(\underbrace{\sum_{n=1}^l ||\mathbf{x}(t_n) - \mathbf{x}(t_{n-1})||_2 + ||\mathbf{x}(c) - \mathbf{x}(t_l)||_2}_{\le \bigvee_a^c \mathbf{x}(t)} \right) + \left(\underbrace{||\mathbf{x}(t_{l+1}) - \mathbf{x}(c)||_2 + \sum_{k=l+2}^n ||\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t_{k-1})||_2}_{\le \bigvee_c^b \mathbf{x}(t)} \right) \le$$

$$\le \bigvee_a^c \mathbf{x}(t) + \bigvee_c^b \mathbf{x}(t) \Rightarrow \bigvee_a^b \mathbf{x}(t) = \sup_{\mathcal{P}} \sum_{k=1}^n ||\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t_{k-1})||_2 \le \bigvee_a^c \mathbf{x}(t) + \bigvee_c^b \mathbf{x}(t).$$

2) Покажем противоположное неравенство. Выберем разбиение $\mathcal{P} = (t_n)_{n=0}^{l}$, содержащее точку c, и пусть $c = t_l$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{l} ||\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t_{k-1})||_2 + \sum_{k=l+1}^{n} ||\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t_{k-1})||_2 = \sum_{k=1}^{n} ||\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t_{k-1})||_2 \leq$$

$$\leq \sup_{\mathcal{P}} \sum_{k=1}^{n} ||\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t_{k-1})||_2 = \bigvee_{a}^{b} \mathbf{x}(t).$$

Переходя в левой части к sup по $(t_l, t_{l+1}, \ldots, t_n)$, получаем

$$\sum_{k=1}^{l} ||\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t_{k-1})||_2 + \bigvee_{c}^{b} \mathbf{x}(t) \leq \bigvee_{a}^{b} \mathbf{x}(t).$$

Переходя к sup по $(t_0, t_1, \ldots, t_l)$, получаем неравенство

$$\bigvee_{a}^{c} \mathbf{x}(t) + \bigvee_{c}^{b} \mathbf{x}(t) \leq \bigvee_{a}^{b} \mathbf{x}(t). \ \square$$

Следствие 1. *Если* $\bigvee\limits_{a}^{b} \mathbf{x}(t) < \infty$, *то* $\forall\, [a', b'] \subset (a, b)$, $\bigvee\limits_{a'}^{b'} \mathbf{x}(t) < +\infty$.

Следствие 2. *Если* $\bigvee\limits_{a}^{c} \mathbf{x}(t) < +\infty$ *и* $\bigvee\limits_{c}^{b} \mathbf{x}(t) < +\infty$, *то* $\bigvee\limits_{a}^{b} \mathbf{x}(t) < +\infty$.

Теорема 1.2 *Если* $\bigvee\limits_{a}^{b} \mathbf{x}(t) < +\infty$ *и вектор-функция* $\mathbf{x}(t)$ *непрерывна, то*

$$\bigvee_{a}^{b} \mathbf{x}(t) = \lim_{d(\mathcal{P}) \to 0} \sum_{k=1}^{n} ||\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t_{k-1})||_2,$$

где $d(\mathcal{P}) = \max\limits_{k=\overline{1,n}} |t_k - t_{k-1}|$ *– диаметр разбиения* $\mathcal{P}$, *т.е.*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \forall\, \mathcal{P}, d(\mathcal{P}) < \delta \ \left| \bigvee_{a}^{b} \mathbf{x}(\mathbf{t}) - \sum_{k=1}^{n} ||\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t_{k-1})||_2 \right| < \varepsilon$$

.

Доказательство. Выберем $\varepsilon > 0$ произвольное. Из определения $\bigvee\limits_{a}^{b} \mathbf{x}(t)$ следует, что существует разбиение $\mathcal{P}' = (t'_k)_{k=0}^{n'}$ такое, что

$$\bigvee_{a}^{b} \mathbf{x}(t) - \sum_{k=1}^{n'} ||\mathbf{x}(t'_k) - \mathbf{x}(t'_{k-1})||_2 < \varepsilon. \tag{1.1}$$

Обозначим $\delta' = \frac{1}{2} \min(t'_k - t'_{k-1})$. Так как $\mathbf{x}(t)$ непрерывная вектор-функция, то ее компоненты $x^{(j)}(t)$ непрерывны на $[a, b]$, значит равномерно непрерывны на $[a, b]$, следовательно, $\exists\, \delta'' > 0$ такое, что $\forall\, t', t''$ таких, что $|t' - t''| < \delta'' \Rightarrow |x^{(j)}(t') - x^{(j)}(t'')| < \frac{\varepsilon}{n'\sqrt{m}}$ а значит и $\|\mathbf{x}(t') - \mathbf{x}(t'')\| < \frac{\varepsilon}{n'}$.

Выберем теперь разбиение $\mathcal{P} = (t_j)_{j=1}^n$ такое, что $d(\mathcal{P}) < \delta = \min(\delta', \delta'')$. Добавим к разбиению $\mathcal{P}$ точки разбиения $\mathcal{P}'$. Получим разбиение

$$\mathcal{P}'' = \mathcal{P} \bigcup \mathcal{P}' = (t_i'')_{i=0}^{n''}.$$

Тогда для разбиения $\mathcal{P}''$ справедливо

$$0 \le \bigvee_a^b \mathbf{x}(t) - \sum_{i=1}^{n''} ||\mathbf{x}(t_i'') - \mathbf{x}(t_{i-1}'')||_2 < \varepsilon. \tag{1.2}$$

Так как $d(\mathcal{P}) < \delta \le \frac{1}{2} \min\limits_k |t_k' - t_{k-1}'|$, то точки t_k' попадают ровно в один отрезок $[t_{j_k}, t_{j_k+1}]$ и справедливо равенство

$$\sum_{j=1}^{n} ||\mathbf{x}(t_j) - \mathbf{x}(t_{j-1})||_2 = \sum_{i=1}^{n''} ||\mathbf{x}(t_i'') - \mathbf{x}(t_{i-1}'')||_2 + \sum_{k=1}^{n'} \underbrace{||\mathbf{x}(t_{j_k+1}) - \mathbf{x}(t_{j_k})||_2}_{<\varepsilon/n'} -$$

$$\sum_{k=1}^{n'} \underbrace{||\mathbf{x}(t_k') - \mathbf{x}(t_{j_k})||_2}_{<\varepsilon/n'} - \sum_{k=1}^{n'} \underbrace{||\mathbf{x}(t_{j_k+1}) - \mathbf{x}(t_k')||_2}_{<\varepsilon/n'}.$$

Но тогда

$$\bigvee_a^b \mathbf{x}(t) - \sum_{j=1}^{n} ||\mathbf{x}(t_j) - \mathbf{x}(t_{j-1})||_2 = \underbrace{\bigvee_a^b \mathbf{x}(t) - \sum_{i=1}^{n''} ||\mathbf{x}(t_i'') - \mathbf{x}(t_{i-1}'')||_2}_{\ge 0} - \sum_{k=1}^{n'} ||\mathbf{x}(t_{j_k+1}) - \mathbf{x}(t_{j_k})||_2 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n'} ||\mathbf{x}(t_{j_k+1}) - \mathbf{x}(t_k')||_2 + \sum_{k=1}^{n'} ||\mathbf{x}(t_k') - \mathbf{x}(t_{j_k})||_2 \overset{(1.2)}{\le} \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

□

2 Непрерывная кривая в $\mathbb{R}^m$, длина кривой и ее вычисление

Определение 2.1 *Множество $L \subset \mathbb{R}^m$ называется непрерывной кривой в $\mathbb{R}^m$, если существует непрерывная на $[a, b]$ вектор-функция $\mathbf{x}(t)$ такая, что область значений функции $\mathbf{x}(t)$ совпадает с множеством L. Если $\forall\, t' \ne t''$, $\mathbf{x}(t') \ne \mathbf{x}(t'')$ (т.е. кривая не имеет самопересечений), то ее называют* **простой**. *Если $\mathbf{x}(a) = \mathbf{x}(b)$, то она называется замкнутой кривой. Точку $A = \mathbf{x}(a)$ называют началом кривой, точку $B = \mathbf{x}(b)$ – концом кривой. Вектор-функцию $\mathbf{x}(t)$ называют параметрическим заданием кривой L и пишут $L:\ \mathbf{x} = \mathbf{x}(t)\ a \le t \le b$.*

Замечание 1. Очевидно, что если $\varphi:\ [a, b] \overset{\text{на}}{\to} [a, b]$ строго возрастает и непрерывна, то $L:\ \mathbf{x} = \mathbf{x}(\varphi(\tau))\ a \le \tau \le b$ тоже параметрическое задание этой же кривой.
Замечание 2. Два параметрических представления $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1(t)$ и $\mathbf{x} = \mathbf{x}_2(t)$ называются эквивалентными, если $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(\varphi(t))$, где $\varphi(t)$ – строго возрастающая непрерывная функция на $[a, b]$. Совокупность всех эквивалентных параметрических представлений кривой называется ориентацией.

Определение 2.2 *Пусть $L: \ \mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ $a \le t \le b$ – непрерывная кривая. Тогда число*

$$|L| = \bigvee_a^b \mathbf{x}(t)$$

называется длиной кривой L. Если $|L| < +\infty$, то кривая L называется спрямляемой.

Замечание. Для любых двух эквивалентных параметризаций $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_2(t)$, $\bigvee\limits_a^b \mathbf{x}_1(t) = \bigvee\limits_a^b \mathbf{x}_2(t)$, т.е. длина кривой не зависит от параметризации. Доказать самостоятельно.

Определение 2.3 *Кривая L называется гладкой, если в ее параметрическом представлении*

$$L: \ \mathbf{x} = \mathbf{x}(t), \ a \le t \le b,$$

ее компоненты $x^{(j)}(t)$ имеют непрерывные частные производные $\frac{d\,x^{(j)}(t)}{dt}$.
Вектор $\left(\frac{d\,x^{(1)}(t)}{dt}, \frac{d\,x^{(2)}(t)}{dt}, \dots, \frac{d\,x^{(m)}(t)}{dt}\right)$ будем обозначать $\frac{d\,\mathbf{x}(t)}{dt}$.

Теорема 2.1 *Если $L: \ \mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $a \le t \le b$ простая гладкая кривая, то кривая L спрямляемая и*

$$|L| = \int\limits_a^b \left\| \frac{d\,\mathbf{x}(t)}{dt} \right\|_2 dt = \int\limits_a^b \sqrt{\sum_{j=1}^m \left(\frac{d\,x^{(j)}(t)}{dt} \right)^2} \, dt. \tag{2.1}$$

Доказательство. 1) Покажем, что L спрямляемая. Так как L гладкая кривая, то

$$\exists\, M > 0, \ \forall\, t \in [a,b], \ \forall\, j = \overline{1,m} \quad \left| \frac{dx^{(j)}(t)}{dt} \right| \le M.$$

Поэтому для любого разбиения $\mathcal{P} = (t_k)_{k=0}^n$ имеем по теореме Лагранжа

$$||\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t_{k-1})||_2^2 = \sum_{j=1}^m (x^{(j)}(t_k) - x^{(j)}(t_{k-1}))^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^m \left(\frac{d\,x^{(j)}(\xi_{k,j})}{dt} \right)^2 \cdot (t_k - t_{k-1})^2 \le |t_k - t_{k-1}|^2 \cdot M^2 \cdot m^2$$

и значит

$$\sum_{k=1}^n ||\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t_{k-1})||_2 \le \sum_{k=1}^n m \cdot \sqrt{M} \cdot |t_k - t_{k-1}| = m \cdot M \cdot (b-a) \Rightarrow$$

$$\bigvee_a^b (\mathbf{x}(t)) \le m \cdot M \cdot (b-a),$$

т.е. L – спрямляема.
2) Докажем равенство (2.1). Отметим, что интеграл в правой части равенства (2.1) существует, т.к подинтегральная функция непрерывна на отрезке $[a,b]$, т.е. обе части в

(2.1) существуют и надо доказывать только равенство. Для этого достаточно доказать, что
$$\int\limits_a^b \left\| \frac{d\,\mathbf{x}(t)}{dt} \right\|_2 dt = \lim_{d(\mathcal{P})\to 0} \sum_{k=1}^n ||\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t_{k-1})||_2.$$

Пусть $\mathcal{P} = (t_k)_{k=0}^n$ разбиение отрезка $[a,b]$ и $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $\overset{\circ}{\mathcal{P}} = ([t_{k-1}, t_k], \xi_k)_{k=1}^n$ – отмеченное разбиение, $S\left(\left\|\frac{d\,\mathbf{x}(t)}{dt}\right\|_2, \overset{\circ}{\mathcal{P}}\right) = \sum\limits_{k=1}^n \left\|\frac{d\,\mathbf{x}(\xi_k)}{dt_k}\right\|_2 \cdot \Delta t_k$ – интегральная сумма, построенная по разбиению $\overset{\circ}{\mathcal{P}}$. Тогда для разности имеем
$$\left| S\left(\left\|\frac{d\,\mathbf{x}(t)}{dt}\right\|_2, \overset{\circ}{\mathcal{P}}\right) - \sum_{k=1}^n ||\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t_{k-1})||_2 \right| =$$
$$= \left| \sum_{k=1}^n \left\|\frac{d\,\mathbf{x}(\xi_k)}{dt}\right\|_2 \cdot \Delta t_k - \sum_{k=1}^n ||\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t_{k-1})||_2 \right| =$$
$$= \left| \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \left(\frac{d\,x^{(j)}(\xi_k)}{dt} \right)^2 \right)^{1/2} \cdot \Delta t_k - \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \underbrace{(x^{(j)}(t_k) - x^{(j)}(t_{k-1}))^2}_{=\frac{dx^{(j)}(\xi_{k,j})}{dt}\cdot\Delta t_k} \right)^{1/2} \right| =$$
$$= \left| \sum_{k=1}^n \Delta t_k \left(\sum_{j=1}^m \left(\frac{d\,x^{(j)}(\xi_k)}{dt} \right)^2 \right)^{1/2} - \left(\sum_{j=1}^m \left(\frac{d\,x^{(j)}(\xi_{k,j})}{dt} \right)^2 \right)^{1/2} \right| =$$
$$= \left| \sum_{k=1}^n \Delta t_k \frac{\sum_{j=1}^m \left[\left(\frac{d\,x^{(j)}(\xi_k)}{dt} \right)^2 - \left(\frac{d\,x^{(j)}(\xi_{k,j})}{dt} \right)^2 \right]}{\left(\sum_{j=1}^m \left(\frac{d\,x^{(j)}(\xi_k)}{dt} \right)^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{j=1}^m \left(\frac{d\,x^{(j)}(\xi_{k,j})}{dt} \right)^2 \right)^{1/2}} \right| \le$$

по неравенству Коши-Буняковского
$$\le \sum_{k=1}^n \Delta t_k \frac{\left(\sum\limits_{j=1}^m \left(\frac{d\,x^{(j)}(\xi_k)}{dt} - \frac{d\,x^{(j)}(\xi_{k,j})}{dt} \right)^2 \right)^{1/2} \left(\sum\limits_{j=1}^m \left(\frac{d\,x^{(j)}(\xi_k)}{dt} + \frac{d\,x^{(j)}(\xi_{k,j})}{dt} \right)^2 \right)^{1/2}}{\left(\sum\limits_{j=1}^m \left(\frac{d\,x^{(j)}(\xi_k)}{dt} \right)^2 \right)^{1/2} + \left(\sum\limits_{j=1}^m \left(\frac{d\,x^{(j)}(\xi_{k,j})}{dt} \right)^2 \right)^{1/2}} \le$$
$$\le \sum_{k=1}^n \Delta t_k \frac{\left(\sum\limits_{j=1}^m \left(\frac{d\,x^{(j)}(\xi_k)}{dt} - \frac{d\,x^{(j)}(\xi_{k,j})}{dt} \right)^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\left(\sum\limits_{j=1}^m \left(\frac{d\,x^{(j)}(\xi_k)}{dt} \right)^2 \right)^{1/2} + \left(\sum\limits_{j=1}^m \left(\frac{d\,x^{(j)}(\xi_{k,j})}{dt} \right)^2 \right)^{1/2} \right)}{\left(\sum\limits_{j=1}^m \left(\frac{d\,x^{(j)}(\xi_k)}{dt} \right)^2 \right)^{1/2} + \left(\sum\limits_{j=1}^m \left(\frac{d\,x^{(j)}(\xi_{k,j})}{dt} \right)^2 \right)^{1/2}} =$$
$$= \sum_{k=1}^n \Delta t_k \left(\sum_{j=1}^m \left(\frac{d\,x^{(j)}(\xi_k)}{dt} - \frac{d\,x^{(j)}(\xi_{k,j})}{dt} \right)^2 \right)^{1/2}. \qquad (2.2)$$

По условию L – гладкая кривая, значит,

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ \forall\,t', t'',\ |t' - t''| < \delta \Rightarrow \left|\frac{d\,x^{(j)}(t')}{dt} - \frac{d\,x^{(j)}(t'')}{dt}\right| < \varepsilon/\sqrt{m}.$$

Пусть теперь $\overset{\circ}{\mathcal{P}}$ такое, что $d(\mathcal{P}) < \delta \Rightarrow$

$$\forall\,j = \overline{1,m}\quad \left|\frac{d\,x^{(j)}(\xi_k)}{dt} - \frac{d\,x^{(j)}(\xi_{k,j})}{dt}\right| < \varepsilon/\sqrt{m}.$$

Подставляя в (2.2), получаем

$$\left|S\left(\left\|\frac{d\,\mathbf{x}}{dt}\right\|_2, \overset{\circ}{\mathcal{P}}\right) - \sum_{k=1}^{n}\|\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t_{k-1})\|_2\right| \leq \sum_{k=1}^{n}\Delta t_k \cdot \varepsilon = \varepsilon(b-a).$$

Но тогда

$$\left|\int_a^b \left\|\frac{d\,\mathbf{x}}{dt}\right\|_2 dt - \sum_{k=1}^{n}\|\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t_{k-1})\|_2\right| \leq \left|\int_a^b \left\|\frac{d\,\mathbf{x}}{dt}\right\|_2 dt - S\left(\left\|\frac{d\,\mathbf{x}}{dt}\right\|_2, \overset{\circ}{\mathcal{P}}\right)\right| +$$

$$+\left|S\left(\left\|\frac{d\,\mathbf{x}}{dt}\right\|_2, \overset{\circ}{\mathcal{P}}\right) - \sum_{k=1}^{n}\|\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t_{k-1})\|_2\right| = E_1 + E_2. \tag{2.3}$$

Так как $\left\|\frac{d\,\mathbf{x}}{dt}\right\|_2$ непрерывна, значит, интегрируема в смысле Римана, т.е. найдется функция $\delta(x) \equiv \delta = \mathrm{const} \Rightarrow$

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta_1 > 0\ \forall\ \overset{\circ}{\mathcal{P}} \ll \delta_1\quad \left|\int_a^b \left\|\frac{d\,\mathbf{x}(t)}{dt}\right\|_2 dt - S\left(\left\|\frac{d\,\mathbf{x}}{dt}\right\|_2, \overset{\circ}{\mathcal{P}}\right)\right| < \varepsilon.$$

Можно считать, что $\delta_1 < \delta$. Тогда в (2.3) $E_1 < \varepsilon(b-a)$, $E_2 < \varepsilon$ и теорема доказана. $\square$

3 Криволинейный интеграл 1 рода. Определение, свойства и вычисление

Определение 3.1 *Пусть $L:\ \mathbf{x} = \mathbf{x}(t)\ a \leq t \leq b$ непрерывная спрямляемая кривая и пусть $(t_k)_{k=0}^{n} = \mathcal{P}$ – разбиение. Пусть $L_k:\ \mathbf{x} = \mathbf{x}(t),\ a \leq t \leq t_k$ – часть кривой и $\Delta L_k = L_k \setminus L_{k-1}$, $|\Delta L_k|$ – длина части кривой L между точками $\mathbf{x}_{k-1} = \mathbf{x}(t_{k-1})$ и $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k)$. Пусть функция $f(\mathbf{x})$ определена на кривой L. Выберем точку $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$ и рассмотрим интегральные суммы*

$$\sigma(f) = \sum_{k=1}^{n} f(\mathbf{x}(\xi_k)) \cdot |\Delta L_k|.$$

Если существует

$$\lim_{d\to 0}\sigma(f) = I(f) \neq \infty\ \ (d = \max|\Delta L_k|),$$

то f называется интегрируемой вдоль кривой L, а сам предел называют криволинейным интегралом 1 рода и обозначают

$$\int\limits_L f(\mathbf{x})\,ds \overset{df}{=} \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\mathbf{x}(\xi_k))|\Delta L_k|. \tag{3.1}$$

Свойство 1. Интеграл $\int\limits_L f(\mathbf{x})\,ds$ не зависит от ориентации кривой.

Свойство . Если f и g интегрируемы вдоль кривой L, то

$$\int\limits_L (\alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{x}))\,ds = \alpha\int\limits_L f(\mathbf{x})\,ds + \beta\int\limits_L f(\mathbf{x})\,ds$$

Теорема 3.1 *Если L – гладкая простая кривая, $\left\|\frac{d\,\mathbf{x}(t)}{dt}\right\|_2 \neq 0$ на $[a,b]$ и $f(\mathbf{x})$ непрерывна на кривой L, то криволинейный интеграл (3.1) существует, и справедливо равенство*

$$\int\limits_L f(\mathbf{x})\,ds = \int\limits_a^b f(\mathbf{x}(t))\left\|\frac{d\,\mathbf{x}(t)}{dt}\right\|_2\,dt.$$

.

Доказательство. 1) Так как $\left\|\frac{d\,\mathbf{x}(t)}{dt}\right\|_2 \neq 0$ на $[a,b]$, то $\left\|\frac{d\,\mathbf{x}(t)}{dt}\right\|_2 \geq \delta_1 > 0$ на $[a,b]$. Поэтому

$$|\Delta L_k| = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\left\|\frac{d\,\mathbf{x}(t)}{dt}\right\|_2\,dt \geq \delta_1\cdot|t_k - t_{k-1}| \Rightarrow |t_k - t_{k-1}| \leq \frac{1}{\delta_1}\cdot|\Delta L_k|.$$

Так как $f(\mathbf{x}(t))$ непрерывна на $[a,b]$, то

$$\forall\,\varepsilon > 0\;\exists\,\delta > 0\;\forall\,t', t'', |t' - t''| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}(t')) - f(\mathbf{x}(t''))| < \varepsilon.$$

Выберем разбиение $\mathcal{P} = (t_k)_{k=0}^n$ так, чтобы

$$\frac{1}{\delta_1}|\Delta L_k| < \delta \Rightarrow |t_k - t_{k-1}| < \delta.$$

Тогда для такого разбиения имеем

$$\left|\int\limits_a^b f(\mathbf{x}(t))\left\|\frac{d\,\mathbf{x}(t)}{dt}\right\|_2\,dt - \sum_{k=1}^{n} f(\mathbf{x}(\xi_k))|\Delta L_k|\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f(\mathbf{x}(t))\left\|\frac{d\,\mathbf{x}(t)}{dt}\right\|_2\,dt - \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f(\mathbf{x}(\xi_k))\left\|\frac{d\,\mathbf{x}(t)}{dt}\right\|_2\,dt\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\underbrace{|f(\mathbf{x}(t)) - f(\mathbf{x}(\xi_k))|}_{<\varepsilon}\left\|\frac{d\,\mathbf{x}(t)}{dt}\right\|_2\,dt < \varepsilon\sum_{k=1}^{n}|\Delta L_k| = \varepsilon\cdot|L|.\;\square$$

Свойство 3. В условиях теоремы 3.1. $\left|\int\limits_L f(\mathbf{x})\,ds\right| \le \int\limits_L |f(\mathbf{x})|\,ds.$

Доказательство.

$$\left|\int\limits_L f(\mathbf{x})\,ds\right| = \left|\int\limits_a^b f(\mathbf{x}(t))\left\|\frac{d\,\mathbf{x}(t)}{dt}\right\|_2 dt\right| \le \int\limits_a^b |f(\mathbf{x}(t))|\left\|\frac{d\,\mathbf{x}(t)}{dt}\right\|_2 dt = \int\limits_L |f(\mathbf{x})|\,ds.$$

Свойство 4. В условиях теоремы 3.1. если $M = \sup\limits_{\mathbf{x}\in[a,b]} |f(\mathbf{x})|$, то $\left|\int\limits_a^b f(\mathbf{x})\,dS\right| \le M\cdot|L|$.

Доказательство. Аналогично свойству 3. □

Свойство 5. Если $L : x = x(t), y = y(t)$, $a \le t \le b$ простая гладкая кривая на плоскости и f непрерывна на плоскости, то

$$\int\limits_L f(x,y)\,ds = \int\limits_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2}\,dx$$

Доказательство. Очевидно, т.к. $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$.

Свойство 6. Если гладкая кривая L задана в явном виде $L:\ y = y(x)\ a \le x \le b$, то

$$\int\limits_L f(x,y)\,ds = \int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+|y'(x)|^2}\,dx.$$

Свойство 7.(Смысл выражения ds) Пусть L – спрямляемая кривая и пусть $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \in L$. Тогда $\int\limits_a^t \left\|\frac{d\mathbf{x}(\tau)}{d\tau}\right\|_2 d\tau$ есть длина кривой от точки A до точки $C = \mathbf{x}(t) \in L$. Обозначим эту длину через $s(t)$, тогда функция

$$s(t) = \int\limits_a^t \left\|\frac{d\mathbf{x}(\tau)}{d\tau}\right\|_2 d\tau,$$

дифференцируема по верхнему пределу, $s'(t) = \left\|\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}\right\|_2$ и

$$ds(t) = \left\|\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}\right\|_2 dt.$$

Поэтому для длины кривой L можно записать равенство

$$|L| = \int\limits_a^b ds(t).$$

Выражение $ds(t) = \left\|\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}\right\|_2 dt$ называется дифференциалом дуги. Поэтому для вычисления интеграла $\int\limits_L f(\mathbf{x})ds$ необходимо:

1) заменить $\mathbf{x}$ на уравнение кривой L, т.е. $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{t})$;

2) заменить ds на его выражение $ds(t) = \left\| \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \right\|_2 dt$.

Свойство 8. (Механический смысл криволинейного интеграла I рода) Пусть L – плоская кривая $L : x = x(t), y = y(t)$, $a \le t \le b$, и пусть $\rho(x, y)$ – плотность кривой L в точке $(x, y) \in L$. Найдем массу кривой L. Обозначим ее через m. Разобьем отрезок $[a, b]$ на элементарные части $a = t_0 < \ldots < t_n = b$ и пусть $L_k : x = x(t), y = y(t), t_{k-1} \le t \le t_k$. Выберем точки $(\xi_k, \eta_k) \in L_k$. Обозначим через m_k массу кривой L_k. Если разбиение достаточно малое, то $m_k \approx m(\xi_k, \eta_k) \cdot |L_k| \Rightarrow m \approx \sum\limits_{k=1}^{n} m(\xi_k, \eta_k) \cdot |L_k|$. Переходя к пределу, получаем $m = \int\limits_L m(x, y) ds$, т.е. криволинейный интеграл – это масса кривой.

4 Криволинейный интеграл II рода

Определение 4.1 *Пусть $L: \ \mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ $a \le t \le b$ – непрерывная спрямляемая кривая. $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f^{(1)}\mathbf{x}, f^{(2)}\mathbf{x}, \ldots, f^{(m)}\mathbf{x})$ – вектор-функция, определенная на L. Выберем разбиение $\mathcal{P} = (t_k)_{k=0}^n$ отрезка (a, b) и пусть $\overset{\circ}{\mathcal{P}} = ([t_{k-1}, t_k], \tau_k)_{k=1}^n$ отмеченное разбиение отрезка $[a, b]$, и $\xi_k = \mathbf{x}(\tau_k) \in L$. Обозначим $M_k = \mathbf{x}(t_k)$ и пусть $L_k: \ \mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $t_{k-1} \le t \le t_k$ – часть кривой между точками M_{k-1} и M_k. Пусть $d = \max |L_k|$. При фиксированном $j = \overline{1, m}$ рассмотрим интегральную сумму*

$$S_j(f_j, \overset{\circ}{\mathcal{P}}) = \sum_{k=1}^{n} f^{(j)}(x^{(j)}(t_k) - x^{(j)}(t_{k-1})),$$

т.е. при определении интегральной суммы для интеграла I рода $f_j(\xi_k)$ умножается на $|L_k|$, то здесь – на длину проекции на ось $x^{(j)}$. Если существует предел $\lim\limits_{d \to 0} S_j(f_j, \overset{\circ}{\mathcal{P}})$, не зависящий от выбора точек $\xi_k \in L_k$, то его называют криволинейным интегралом II рода и обозначают $\int\limits_L f^{(j)}(\mathbf{x})\, dx^{(j)}$. На языке $\varepsilon - \delta$:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0, \ \forall \ \overset{\circ}{\mathcal{P}} \ \max |L_k| < \delta \Rightarrow \left| \int\limits_L f^{(j)}(\mathbf{x})\, dx^{(j)} - S_j(f_j, \overset{\circ}{\mathcal{P}}) \right| < \varepsilon.$$

Сумму

$$\sum_{j=1}^{m} \int\limits_L f^{(j)}(\mathbf{x})\, dx^{(j)}$$

называют криволинейным интегралом II рода общего вида и обозначают

$$\int\limits_L \sum_{j=1}^{m} f^{(j)}(\mathbf{x})\, dx^{(j)} = \int\limits_L (\mathbf{f}, d\mathbf{x}).$$

Замечание. Криволинейный интеграл II рода зависит от направления кривой, т.к. при изменении направления обхода нумерация точек $M_k \in L_k$ $(k = \overline{0, n})$ меняется на противоположное, разность $x^{(j)}(t_k) - x^{(j)}(t_{k-1})$ меняет знак на противоположный, интегральные суммы

$$\sum_{k=1}^{n} f^{(j)}(\xi_k)(x^{(j)}(t_k) - x^{(j)}(t_{k-1}))$$

изменят знак на противоположный. Значит, изменится знак интеграла. Поэтому часто интеграл записывают в виде

$$\int\limits_{L^+} (\mathbf{f}, d\mathbf{x}),$$

где L^+ – выбранное направление кривой, которое называется направлением. Отсюда

$$\int\limits_{L^-} (\mathbf{f}, d\mathbf{x}) = -\int\limits_{L^+} (\mathbf{f}, d\mathbf{x}).$$

Теорема 4.1 *Пусть 1)* $L: \ \mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ $a \le t \le b$ *– гладкая кривая.*
2) $\left\|\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}\right\|_2 \ne 0$ *на* $[a, b]$.
3) Вектор-функция $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f^{(j)}\mathbf{x})_{j=1}^{m}$ *– непрерывна на* L.
Тогда криволинейный интеграл $\int\limits_L (\mathbf{f}(\mathbf{x}), d\mathbf{x})$ *существует и справедливо равенство*

$$\int\limits_L (\mathbf{f}(\mathbf{x}), d\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{m} \int\limits_a^b f^{(j)}(\mathbf{x}(t)) \frac{dx^{(j)}(t)}{dt} dt.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что существуют интегралы

$$\int\limits_L f^{(j)}(\mathbf{x})\, dx^{(j)} = \int\limits_a^b f^{(j)}(\mathbf{x}(t)) \frac{dx^{(j)}(t)}{dt}\, dt. \tag{4.1}$$

Интеграл в правой части (4.1) существует, т.к. подинтегральная функция непрерывна, следовательно, достаточно доказать, что

$$\lim_{d\to 0} \sum_{n=1}^{n} f^{(j)}(\xi_k)(x^{(j)}(t_k) - x^{(j)}(t_{k-1})) = \int\limits_a^b f^{(j)}(\mathbf{x}(t)) \frac{dx^{(j)}(t)}{dt}\, dt.$$

Выберем разбиение $\mathcal{P}_1 = (t_k)_k = (a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b)$, $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $\xi_k = \mathbf{x}(\tau_k)$, $L_k: \ \mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $t_{k-1} \le t \le t_k$, $d = \max |L_k|$. Рассмотрим разность

$$\left| \sum_{n=1}^{n} f^{(j)}(\mathbf{x}(\tau_k))(x^{(j)}(t_k) - x^{(j)}(t_{k-1})) - \int\limits_a^b f^{(j)}(\mathbf{x}(t)) \frac{dx^{(j)}(t)}{dt}\, dt \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f^{(j)}(\mathbf{x}(\tau_k)) \frac{dx^{(j)}(t)}{dt}\, dt - \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f^{(j)}(t) \frac{dx^{(j)}(t)}{dt}\, dt \right| \le$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} |f^{(j)}(\mathbf{x}(\tau_k)) - f^{(j)}(t))| \left|\frac{dx^{(j)}(t)}{dt}\right| dt \leq \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} |f^{(j)}(\mathbf{x}(\tau_k)) - f^{(j)}(t))| \left\|\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}\right\|_2 dt.$$

После чего доказательство завершается как в теореме 3.1. □

Свойства.

1) $\int\limits_L (\mathbf{f}+\mathbf{g}, d\mathbf{x}) = \int\limits_L (\mathbf{f}, d\mathbf{x}) + \int\limits_L (\mathbf{g}, d\mathbf{x})$.

2) $\int\limits_L (\mathbf{f}, d\mathbf{x}) = \int\limits_{L_1} (\mathbf{f}, d\mathbf{x}) + \int\limits_{L_2} (\mathbf{f}, d\mathbf{x})$.

3) Если размерность $m = 2$, то криволинейный интеграл II рода обычно записывают в виде $\int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$, где $L: \begin{array}{c} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \quad a \leq t \leq b$.

В этом случае

$$\int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_a^b (P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t))dt.$$

4) Физический смысл криволинейного интеграла II рода. Рассмотрим движение точки M на плоскости вдоль кривой $L: \begin{array}{c} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \quad a \leq t \leq b$ под действием силы $\mathbf{F} = F_1(x,y)\mathbf{i} + F_2(x,y)\mathbf{j}$. где $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ – единичные векторы на осях OX и OY соответственно. Вычислим работу A силы $\mathbf{F}$ по перемещению точки из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$ вдоль L. Разобьем $[a,b]$ на элементарные части $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$. Обозначим $M_k = (x(t_k), y(t_k)) \in L$, L_k – часть кривой L между M_{k-1} и M_k, A_k – работу по перемещению точки из M_{k-1} в M_k. Если $|L_k|$ меньше, то L_k примерно совпадает с вектором (M_{k-1}, M_k) и работа A_k приблизительно равна работе по перемещению вдоль вектора (M_{k-1}, M_k). Вектор (M_{k-1}, M_k) имеет координаты $(x_k - x_{k-1}, y_k - y_{k-1})$, значит,

$$A_k = ((M_{k-1}, M_k), \mathbf{F}) = ((M_{k-1}, M_k), F_1(\xi_k, \eta_k)\mathbf{i} + F_2(\xi_k, \eta_k)\mathbf{j}) =$$

$$F_1(\xi_k, \eta_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) + F_2(\xi_k, \eta_k) \cdot (y_k - y_{k-1}).$$

$$A \cong \sum A_k = \sum_{k=1}^{n} F_1(\xi_k, \eta_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) + F_2(\xi_k, \eta_k) \cdot (y_k - y_{k-1}).$$

Переходя к пределу при $\max(|L_k|) \to 0$ получаем

$$A = \lim \sum_{k=1}^{n} A_k = \int\limits_L (\mathbf{F}(\mathbf{x}), d\mathbf{x}).$$

Таким образом, криволинейный интеграл II рода – это работа силы по перемещению точки вдоль кривой.

5 Поверхность в пространстве

Определение 5.1 *Открытое ограниченное множество $G \subset \mathbb{R}^2$ называется областью в $\mathbb{R}^2$.*

Определение 5.2 *Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ область и $\Phi \subset \mathbb{R}^3$. Отображение $\mathbf{f} : G \to \Phi$ называется гомеоморфизмом, если $\mathbf{f}$ отображает G на Φ взаимно однозначно и взаимно непрерывно. Множества G и Φ называются гомеоморфными, если существует гомеоморфизм $\mathbf{f} : G \to \Phi$.*

Определение 5.3 *Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ и $\Phi \subset \mathbb{R}^3$. Отображение $\mathbf{f} : G \to \Phi$ называется локально гомеоморфным, если для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ существует окрестность $O(x_0, y_0)$, которую $\mathbf{f}$ гомеоморфно отображает на ее образ $\mathbf{f}(O(x_0, y_0))$.*

Определение 5.4 *Множество $S_3 \subset \mathbb{R}^3$ называется поверхностью в $\mathbb{R}^3$ если S_3 локально гомеоморфно некоторой области $G \subset \mathbb{R}_2$.*

Теорема 5.1 *Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные в области $G \subset \mathbb{R}^2$. Тогда множество $S_3 = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in G\}$ есть поверхность.*

Доказательство. Рассмотрим вектор-функцию $\mathbf{f}(u, v)$ определенную равенством

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases} .$$

Тогда вектор-функция $\mathbf{f}(u, v) = (u, v, f(u, v))$ отображает G на S_3 взаимно однозначно и непрерывно. Так как

$$\|(u, v) - (u_0, v_0)\|_2 \leq \|(u, v, f(u, v)) - (u_0, v_0, f(u_0, v_0))\|_2,$$

то обратная функция $(u, v, f(u, v)) \mapsto (u, v)$ также непрерывна. $\square$

6 Альтернативное определение поверхности

Определение 6.1 *Множество $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ будем называть поверхностью в пространстве $\mathbb{R}^3$, если существует область $G \subset \mathbb{R}^2$ и непрерывная вектор функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ ($\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$) на G, для которой $\mathbf{r}(G) = \Phi$. Поверхность Φ называется гладкой, если функции $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ имеют непрерывные частные производные в G. Точка $M_0 = \mathbf{r}(u_0, v_0) \in \Phi$ называется особой точкой поверхности Φ, если в этой точке ранг матрицы $\left.\frac{D(\mathbf{r}(u,v))}{D(u,v)}\right|_{(u,v)=(u_0,v_0)}$ меньше 2. Здесь*

$$\frac{D(\mathbf{r}(u, v))}{D(u, v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Если в каждой точке $M_0 = \mathbf{r}(u_0, v_0) \in \Phi$ ранг матрицы $\frac{D(\mathbf{r}(u,v))}{D(u,v)}$ равен 2, то говорят, что поверхность Φ не имеет особых точек.

Теорема 6.1 *Пусть функция $z = f(x, y)$ непрерывна в области $G \subset \mathbb{R}^2$. Тогда график функции f, т.е. множество $\Gamma(f) = \{M(x, y, z) : (x, y) \in G, z = f(x, y)\}$ есть поверхность.*

Доказательство. Рассмотрим вектор-функцию $\mathbf{r}(u,v)$ определенную равенством

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u,v) \end{cases}.$$

Тогда вектор-функция $\mathbf{r}(u,v) = (u, v, f(u,v))$ непрерывна и $\mathbf{r}(G) = \Phi$. $\Box$

Теорема 6.2 *Пусть* $\Phi: \ \mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v), (u,v) \in G$ *– гладкая поверхность в* $\mathbb{R}^3$ *без особых точек. Тогда* $\forall\, \mathbf{p}_0 \in \Phi$, $\exists\, O_\delta(\mathbf{p}_0)$, *такая, что* $O_\delta(\mathbf{p}_0) \bigcap \Phi$ *однозначно проектируется на одну из координатных плоскостей.*

Доказательство. Выбираем точку $\mathbf{p}_0 \in \Phi$. В точке $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ранг матрицы $\left.\frac{D\mathbf{r}(u,v)}{D(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}$ равен 2. Пусть для определенности $\begin{vmatrix} x'_u(u_0,v_0) & y'_u(u_0,v_0) \\ x'_v(u_0,v_0) & y'_v(u_0,v_0) \end{vmatrix} \neq 0$. Рассмотрим систему уравнений $\begin{matrix} x(u,v) = x \\ y(u,v) = y \end{matrix}$. Так как $\begin{matrix} x(u_0,v_0) = x_0 \\ y(u_0,v_0) = y_0 \end{matrix}$ и $\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)} \neq 0$ то по теореме о неявных функциях $\exists\, O_\delta(x_0,y_0)$ такая, что в $O_\delta(x_0,y_0)$ система $\begin{matrix} x(u,v) = x \\ y(u,v) = y \end{matrix}$ имеет единственное решение $\begin{matrix} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{matrix}$ и при этом $\begin{matrix} u_0 = u(x_0,y_0) \\ v_0 = v_0(x_0,y_0) \end{matrix}$. Тогда для $(x,y) \in O_\delta(x_0,y_0): \ z = z(x(u,v), y(u,v)) = z(x,y)$. Следовательно, поверхность Φ задана в явном виде: $z = z(x,y)$, и значит, однозначно проектируется на координатную плоскость XOY. $\Box$

В дальнейшем будем рассматривать гладкие поверхности без особых точек. Определим понятие односторонней и двусторонней поверхности $\Phi: \ \mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v) \ (u,v) \in G$. Выберем точку $\mathbf{p}_0 = \mathbf{r}(u_0,v_0)$. Зафиксируем $v = v_0$. Равенство $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v_0)$ определяет гладкую кривую на поверхности Φ. Тогда $\mathbf{r}'_u(u_0,v_0)$ есть вектор касательной к кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v_0)$ в точке $\mathbf{p}_0$. Зафиксируем $u = u_0$, тогда $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0,v)$ – уравнение гладкой кривой, проходящей через точку $\mathbf{p}_0$ и лежит на поверхности $\Phi \Rightarrow$ вектор $\mathbf{r}'_v(u_0,v_0)$ – это вектор касательной к кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0,v)$. Тогда векторное произведение $[\mathbf{r}'_u(u_0,v_0), \mathbf{r}'_v(u_0,v_0)] \neq 0$ есть вектор нормали к векторам $\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v$, значит, он вектор нормали к поверхности. Вектор

$$\mathbf{n}(\mathbf{p}_0) = \frac{[\mathbf{r}'_u(u_0,v_0), \mathbf{r}'_v(u_0,v_0)]}{||[\mathbf{r}'_u(u_0,v_0), \mathbf{r}'_v(u_0,v_0)]||_2}$$

есть единичный вектор нормали.

Определение 6.2 *Гладкая поверхность* Φ *без особых точек называется двусторонней, если вектор нормали* $\mathbf{n}(\mathbf{p})$ *есть непрерывная функция точки* $\mathbf{p} \in \Phi$.

Замечание. Если поверхность Φ односторонняя, то двигаясь по любой непрерывной замкнутой кривой на поверхности Φ, мы, выходя из точки $\mathbf{P}_0$, вернемся в эту точку с тем же направлением нормали.
Пример. Лист Мебиуса не односторонняя поверхность.

Теорема 6.3 *Пусть* $\Phi: \ \ \mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$, $(u, v \in G)$ *– непрерывная поверхность. Если вектор функция* $\mathbf{r}(u,v)$ *равномерно непрерывна в* G, *то ее можно продолжить на замыкание* $\bar{G}$ *с сохранением непрерывности.*

Доказательство. Ясно, что $\bar{G} = G \bigsqcup \partial G$. Поэтому надо определять $\mathbf{r}(u, v)$ в точках $(u, v) \in \partial G$. Пусть $(u_0, v_0) \in \partial G$. Тогда существует последовательность $(u_n, v_n)_{n=1}^{\infty}$, которая сходится к (u_0, v_0) и $(u_n, v_n) \in G$. Поэтому (u_n, v_n) – фундаментальная последовательность. Покажем, что последовательность $\mathbf{r}(u_n, v_n)$ – фундаментальна в $\mathbb{R}^3$. По условию $\mathbf{r}(u, v)$ равномерно непрерывна, значит,

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall (u', v'), (u'', v''), \|(u', v') - (u'', v'')\|_2 < \delta \Rightarrow \|\mathbf{r}(u', v') - \mathbf{r}(u'', v'')\|_2 < \varepsilon.$$

Для выбранного $\delta > 0$ в силу фундаментальности $(u_n, v_n)_{n=1}^{\infty}$ найдется номер n_0, что $\forall n \geq n_0, \forall m \geq n_0 \; \|(u_n, v_n) - (u_m, v_m)\|_2 < \delta$. Тогда $\forall n, m \geq n_0$, $\|\mathbf{r}(u_n, v_n) - \mathbf{r}(u_m, v_m)\|_2 < \varepsilon$. Это означает, что последовательность $(\mathbf{r}(u_n, v_n))_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальна. Поэтому существует $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbf{r}(u_n, v_n) = \mathbf{r}_0$. Положим по определению $\mathbf{r}(u_0, v_0) = \mathbf{r}_0 = \lim\limits_{n \to \infty} \mathbf{r}(u_n, v_n)$. Таким образом, мы определили $\mathbf{r}(u, v)$ на границе ∂G. Покажем, что это определение не зависит от выбора последовательности. Выберем две последовательности $(u'_n, v'_n) \to (u_0, v_0)$ и $(u''_n, v''_n) \to (u_0, v_0)$. Построим новую последовательность (u_n, v_n) по правилу: $(u_{2n}, v_{2n}) = (u'_n, v'_n)$, $(u_{2n+1}, v_{2n+1}) = (u''_n, v''_n)$. Тогда $(u_n, v_n) \to (u_0, v_0)$, и, значит, существует предел $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbf{r}(u_n, v_n) = \mathbf{r}_0$. Но предел по любой подпоследовательности тот же самый, т.е.

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{r}(u_{2n}, v_{2n}) = \lim_{n \to \infty} \mathbf{r}(u_{2n+1}, v_{2n+1}) = \mathbf{r}_0, \text{ т.е. } \lim \mathbf{r}(u'_n, v'_n) = \lim \mathbf{r}(u''_n, v''_n).$$

Осталось проверить непрерывность в точках $(u_0, v_0) \in \partial G$. Для этого надо проверить равенство $\mathbf{r}(u_0, v_0) = \lim\limits_{n \to \infty} \mathbf{r}(u_n, v_n)$. Если $(u_n, v_n) \in G$, то это верно по определению. Поэтому надо рассмотреть случай, когда $(u_n, v_n) \in \partial G_n$. В этом случае при каждом $n \in \mathbb{N}$ выбираем $(u'_n, v'_n) \in G_n$ так, чтобы $\|(u_n, v_n) - (u'_n, v'_n)\|_2 < \frac{1}{n} \to 0$ и $\|\mathbf{r}(u_n, v_n) - \mathbf{r}(u'_n, v'_n)\|_2 < \frac{1}{n}$. В этом случае $(u'_n, v'_n) \to (u_0, v_0)$ и поэтому $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbf{r}(u'_n, v'_n) = \mathbf{r}(u_0, v_0)$. Но тогда

$$\|\mathbf{r}(u_n, v_n) - \mathbf{r}(u_0, v_0)\|_2 \leq \|\mathbf{r}(u_n, v_n) - \mathbf{r}(u'_n, v'_n)\|_2 + \|\mathbf{r}(u'_n, v'_n) - \mathbf{r}(u_0, v_0)\|_2 \to 0. \; \square$$

Теорема 6.4 *Пусть $F \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченное замкнутое множество и $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) : F \to \mathbb{R}^3$ непрерывна в F. Тогда множество $\mathbf{r}(F)$ замкнуто в $\mathbb{R}^3$.*

Доказательство. Пусть M_0 – предельная точка множества $\mathbf{r}(F)$, т.е. существует последовательность $M_n \to M_0$, $M_n \in \mathbf{r}(F)$. Так как $M_n \in \mathbf{r}(F)$, то $M_n = \mathbf{r}(u_n, v_n)$ и $(u_n, v_n) \in F$. Так как F компактно, то существует последовательность $(u_{n_k}, v_{n_k}) \to (u_0, v_0) \in F$. Ввиду непрерывности вектор-функции в точке (u_0, v_0) имеем равенство $\mathbf{r}(u_0, v_0) = \lim\limits_{k \to \infty} \mathbf{r}(u_{n_k}, v_{n_k}) = M_0$. $\square$

Вывод. Если вектор функция $\mathbf{r}(u, v)$ равномерно непрерывна в $G \subset \mathbb{R}^2$, то можно считать, что $\mathbf{r}(u, v)$ определена и непрерывна в замкнутой области $\bar{G} = G \bigsqcup \partial G$. При этом образ $\mathbf{r}(\bar{G})$ будет ограниченным замкнутым множеством в $\mathbb{R}^3$. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать вектор функции $\mathbf{r}(u, v)$, определенные и непрерывные в замкнутой области $\bar{G} \subset \mathbb{R}^2$. Образ $\mathbf{r}(\bar{G})$ в этом случае будем называть замкнутой поверхностью, а множество $\mathbf{r}(\partial G)$ – краем поверхности.

7 Свойства поверхностей

Теорема 7.1 *Пусть $\Phi :\; \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $u, v \in G$, гладкая односторонняя поверхность без особых точек. Тогда*

$$\forall \mathbf{p}_0 \in \Phi, \; \exists O_\delta(\mathbf{p}_0), \; \forall \mathbf{p} \in \Phi \bigcap O_\delta(\mathbf{p}_0), \; \textit{поверхность } \Phi \bigcap O_\delta(\mathbf{p}_0)$$

однозначно проектируется на касательную плоскость, проведенную в точке $\mathbf{p}$.

Доказательство. Выбираем точку $\mathbf{p}_0 \in \Phi$. Так как поверхность Φ двусторонняя, то $\exists\, O_\delta(\mathbf{p}_0)$, что $\forall\, M', M'' \in \Phi \bigcap O_\delta(\mathbf{p}_0)$ угол между $\mathbf{n}(M')$ и $\mathbf{n}(\mathbf{p}_0) < \frac{\pi}{4}$ и угол между $\mathbf{n}(M'')$ и $\mathbf{n}(\mathbf{p}_0) < \frac{\pi}{4}$, значит, угол между $\mathbf{n}(M')$ и $\mathbf{n}(M'') < \frac{\pi}{2}$. По теореме 6.2 δ можно выбрать так, что $\Phi \bigcap O_\delta(\mathbf{p}_0)$ однозначно проектируется на одну из координатных плоскостей, пусть для определенности – на плоскость $X0Y$. Покажем, что $\Phi \bigcap O_\delta(\mathbf{p}_0)$ однозначно проектируется на касательную плоскость к поверхности, проведенную в любой точке $\mathbf{p} \in \Phi \bigcap O_\delta(\mathbf{p}_0)$.

От противного, пусть это не так, т.е. $\exists\, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \Phi \bigcap O_\delta(\mathbf{p}_0)$, которые проектируются в одну точку $\tilde{\mathbf{p}} \in \Pi$. Тогда точки $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, и $\tilde{\mathbf{p}}$ лежат на перпендикуляре к поверхности Φ, проведем через него плоскость, параллельную оси $0Z$. Она пересечет поверхность Φ по кривой L. Т.к. кривая L непрерывна, то по теореме Лагранжа существует точка $\mathbf{p}_3$, лежащая на L между $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$, в которой касательная параллельна хорде $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ и поэтому параллельна нормали в точке $\mathbf{p}$ что невозможно. $\square$

Теорема 7.2 *Пусть Φ – ограниченная, замкнутая, гладкая, двусторонняя поверхность без особой точки. Тогда $\exists\, \delta > 0$, $\forall\, \mathbf{p}$, $\forall\, O_\delta(\mathbf{p})$, часть поверхности $\Phi \bigcap O_\delta(\mathbf{p})$ однозначно проектируется на касательную плоскость, проведенную в любой точке, принадлежащей $\Phi \bigcap O_\delta(\mathbf{p})$.*

Доказательство. Пусть это не так, т.е. $\forall\, \delta = \frac{1}{n}$, $\exists\, \mathbf{p}_n$, $\Phi \bigcap O_{\frac{1}{n}}(\mathbf{p}_n)$ не проектируется однозначно на касательную плоскость. Рассмотрим последовательность точек $(\mathbf{p}_n)$. Т.к. Φ – ограниченное множество, то из $\mathbf{p}_n$ можно выделить подпоследовательность $(\mathbf{p}_{n_k}) \to \mathbf{p}_0 \in \mathbb{R}^3$. Но Φ – замкнуто, значит, $\mathbf{p}_0 \in \Phi$, следовательно, по теореме 7.1 $\exists\, O_\delta(\mathbf{p}_0)$, которая однозначно проектируется на касательную к любой точке Φ, в частности, на касательную в точке $(\mathbf{p}_{n_k}) \in O_\delta(\mathbf{p}_0)$, что противоречит выбору точек $\mathbf{p}_{n_k}$. $\square$

Теорема 7.3 *Пусть Φ – ограниченная, замкнутая, гладкая, двусторонняя поверхность без особых точек. Тогда $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$, что $\forall\, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \Phi$, $d(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) < \delta$, для угла φ между векторами $\mathbf{n}(\mathbf{p}_1)$ и $\mathbf{n}(\mathbf{p}_2)$ справедливо неравенство $|\cos\varphi - 1| < \varepsilon$.*

Доказательство. Так как поверхность Φ двусторонняя, то вектор нормали $\mathbf{n}(\mathbf{p})$ непрерывен. Т.к. Φ замкнутая, то функция $\mathbf{n}(\mathbf{p})$ равномерно непрерывна следовательно, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$, что $\forall\, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \Phi$, $||\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2||_2 < \delta \Rightarrow ||\mathbf{n}(\mathbf{p}_1) - \mathbf{n}(\mathbf{p}_2)||_2 < \sqrt{2\varepsilon}$. Вычисляем

$$||\mathbf{n}(\mathbf{p}_1) - \mathbf{n}(\mathbf{p}_2)||_2^2 = (\mathbf{n}(\mathbf{p}_1) - \mathbf{n}(\mathbf{p}_2), \mathbf{n}(\mathbf{p}_1) - \mathbf{n}(\mathbf{p}_2)) = (\mathbf{n}(\mathbf{p}_1), \mathbf{n}(\mathbf{p}_1))^2 + (\mathbf{n}(\mathbf{p}_2), \mathbf{n}(\mathbf{p}_2))^2 -$$

$$-2(\mathbf{n}(\mathbf{p}_1), \mathbf{n}(\mathbf{p}_2))) = 2 - 2\cos\varphi \Rightarrow 2(1 - \cos\varphi) < 2\varepsilon \Rightarrow |1 - \cos\varphi| < \varepsilon \ \square$$

8 Площадь поверхности и ее вычисление

Определение 8.1 *Пусть $\Phi:\ \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in G$ – гладкая, ограниченная, замкнутая, двусторонняя поверхность без особых точек. Разобьем поверхность Φ гладкими кривыми на элементарные части Φ_i $(i = \overline{1, n})$ так, чтобы Φ_i однозначно проектировались на касательную плоскость, проведенную в любой точке $\mathbf{p} \in \Phi_i$. Выберем точку $\mathbf{p}_i \in \Phi_i$ и пусть $\Pi_i = pr\Phi_i$ – проекция Φ_i на касательную плоскость в точке $\mathbf{p}_i$ и* *пусть $\mu\Pi_i$ – мера этой проекции. Обозначим через $d(\Phi)$ наибольший из диаметров Φ_i. Если существует положительный предел*

$$\lim_{d(\Phi)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu\Pi_i,$$

не зависящий от выбора точек $\mathbf{p}_i$, то поверхность Φ называется квадрируемой, а этот предел – площадью поверхности Φ и обозначается $|\Phi|$.

Теорема 8.1 *Пусть $\Phi:\ \mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v),\ (u,v)\in\bar{G}$ – гладкая, ограниченная, замкнутая, двусторонняя поверхность без особых точек. Тогда Φ – гладкая и*

$$|\Phi| = \iint_{\bar{G}} \|[\mathbf{r}'_u,\mathbf{r}'_v]\|_2\,dudv. \tag{8.1}$$

Доказательство. $\mathbf{r}'_u,\mathbf{r}'_v$ – непрерывны на $\bar{G}$, значит, $\|[\mathbf{r}'_u,\mathbf{r}'_v]\|_2$ непрерывна на $\bar{G}$, и т.к. $\bar{G}$ – ограниченное замкнутое множество, то интеграл в (8.1) существует. Поэтому надо доказывать, что

$$\lim_{d(\Phi)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu\Pi_i = \iint_{\bar{G}} \|[\mathbf{r}'_u,\mathbf{r}'_v]\|_2\,dudv.$$

Выберем $\varepsilon>0$ и найдем $\delta>0$ так, чтобы (см. теоремы 7.2 и 7.3)
1) $\forall\, O_\delta(\mathbf{p})\bigcap\Phi$ однозначно проектировалось на касательную плоскость, проведенную в любой точке, принадлежащей $O_\delta(\mathbf{p})\bigcap\Phi$ (по теореме 7.2);
2) $\forall\,\mathbf{p}',\mathbf{p}''$, $||\mathbf{p}'-\mathbf{p}''||_2<\varepsilon$ (по теореме 7.3);
Выберем разбиение поверхности Φ гладкими кривыми на элементарные части Φ_i, т.е. $\Phi=\bigsqcup_{i=1}^{n}\Phi_i$, $d(\Phi)<\delta$ и пусть $\Phi_i=\mathbf{r}(\bar{G}_i)$, и, значит, $\bar{G}=\bigsqcup_{i=1}^{n}\bar{G}_i$.

Выберем точки $\mathbf{p}_i\in\Phi_i$, проведем касательную плоскость $\Pi(\mathbf{p}_i)$ к Φ_i в точке $\mathbf{p}_i$. Спроектируем Φ_i на $\Pi(\mathbf{p}_i)$, получим плоское множество Π_i и пусть $\mu\Pi_i$ – его мера. Вычислим меру Π_i. Для этого выберем локальную систему координат OXYZ так, что
1) $\mathrm{O}=\mathbf{p}_i$;
2) ось OZ перпендикулярна $\Pi(\mathbf{p}_i)$ и вектор $\mathbf{k}$ совпадает с вектором нормали $\mathbf{n}(\mathbf{p}_i)$;
3) оси OX и OY лежат в плоскости $\Pi(\mathbf{p}_i)$ так, что OXYZ образуют правую тройку.

В этой системе координат элементарные поверхности Φ_i задаются равенствами $\begin{array}{r}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\\ z=z(u,v)\end{array}$

$(u,v)\in\bar{G}_i$ и $\mu\Pi_i=\iint\limits_{\Pi_i}dxdy$. Выполним замену переменных $\begin{array}{l}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{array}\Rightarrow\mu\Pi_i=\iint\limits_{G_i}\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|dxdy$. Вычислим определитель $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$. Для этого запишем вектор нормали

$$\mathbf{n}=[\mathbf{r}'_u,\mathbf{r}'_v]=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ x'_u&y'_u&z'_u\\ x'_v&y'_v&z'_v\end{vmatrix}=\mathbf{i}\underbrace{\begin{vmatrix}y'_u&z'_u\\ y'_v&z'_v\end{vmatrix}}_{=A}-\mathbf{j}\underbrace{\begin{vmatrix}x'_u&z'_u\\ x'_v&z'_v\end{vmatrix}}_{=B}+\mathbf{k}\underbrace{\begin{vmatrix}x'_u&y'_u\\ x'_v&y'_v\end{vmatrix}}_{=C}$$

и пусть γ_i – угол между вектором $\mathbf{k}$ и вектором $\mathbf{n}$. Тогда $\mu\Pi_i=\iint\limits_{G_i}|C|\,dudv$ и $C>0$.

$$\frac{(\mathbf{n},\mathbf{k})}{||[\mathbf{r}'_u,\mathbf{r}'_v]||_2}=\cos\gamma_j=\frac{C}{||[\mathbf{r}'_u,\mathbf{r}'_v]||_2}\Rightarrow C=\cos\gamma_i||[\mathbf{r}'_u,\mathbf{r}'_v]||_2\Rightarrow\mu\Pi_i=\iint\limits_{G_i}\cos\gamma_j||[\mathbf{r}'_u,\mathbf{r}'_v]||_2dudv\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mu\Pi_i = \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{G_i} \cos\gamma_j ||[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]||_2 dudv \Rightarrow \iint\limits_{G_i} ||[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]||_2 dudv - \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{G_i} \cos\gamma_j ||[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]||_2 dudv =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{G_i} ||[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]||_2 (1 - \cos\gamma_i)\, dudv < \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{G_i} ||[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]||_2 dudv = \varepsilon \cdot \iint\limits_{G} ||[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]||_2 dudv. \ \square$$

Замечание 1. Получим формулу вычисления площади поверхности в $\mathbb{R}^3$.

Пусть $\Phi: \ \mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v) \in \mathbf{G}$, $\mathbf{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. Преобразуем $|\Phi| = \iint\limits_{\mathbf{G}} ||[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]||_2 dudv$. Для этого запишем

$$||[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]||_2^2 + |(\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v)|^2 = (||\mathbf{r}'_u||_2 \cdot ||\mathbf{r}'_v||_2 \cdot \sin\varphi)^2 + (||\mathbf{r}'_u||_2 \cdot ||\mathbf{r}'_v||_2 \cdot \cos\varphi)^2 = ||\mathbf{r}'_u||_2^2 \cdot ||\mathbf{r}'_u||_2^2 \Rightarrow$$

$$||[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]||_2 = \sqrt{||\mathbf{r}'_u||_2^2 \cdot ||\mathbf{r}'_u||_2^2 - |(\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v)|^2}.$$

Если обозначить $E = ||\mathbf{r}'_u||_2^2$, $F = ||\mathbf{r}'_v||_2^2$, $G = |(\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v)|$, получим

$$|\Phi| = \iint\limits_{\mathbf{G}} \sqrt{EF - G^2}\, dudv.$$

Замечание 2. Пусть Φ задана в явном виде: $\Phi: \ z = z(x,y)$, $(x,y) \in \mathbf{G}$. Запишем функцию Φ в параметрическом виде: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$, где $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = z(u,v) \end{cases}$ $(u,v) \in \mathbf{G} \Leftrightarrow (x,y) \in \mathbf{G}$. Тогда

$$E = ||\mathbf{r}'_u||_2^2 = |x'_u|^2 + |y'_u|^2 + |z'_u|^2 = 1^2 + 0^2 + |z'_u|^2 = 1 + |z'_u|^2,$$
$$F = ||\mathbf{r}'_v||_2^2 = |x'_v|^2 + |y'_v|^2 + |z'_v|^2 = 0^2 + 1^2 + |z'_v|^2 = 1 + |z'_v|^2,$$
$$G^2 = (\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v)^2 = |z'_u|^2 \cdot |z'_v|^2 \Rightarrow$$

$$EF - G^2 = (1 + |z'_u|^2)(1 + |z'_v|^2) - |z'_u|^2 |z'_v|^2 = 1 + |z'_u|^2 + |z'_v|^2 \Rightarrow |\Phi| = \iint\limits_{\mathbf{G}} \sqrt{1 + |z'_x|^2 + |z'_y|^2}\, dxdy.$$

9 Поверхностные интегралы I и II рода

Определение 9.1 *Пусть* $\Phi: \ \mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v) \ (u,v) \in \mathbf{G}$ *– гладкая, ограниченная, замкнутая, двусторонняя поверхность без особых точек и пусть на поверхности* Φ *заданы функции:* $f(M)$, $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$. *Разобьем поверхность* Φ *гладкими кривыми на элементарные части:* $\Phi = \bigsqcup_{i=1}^{n} \Phi_i$ *– непересекающиеся. Выберем точку* $M_i \in \Phi_i$, *в точке* M_i *проведем касательную поверхность* $\Pi(M_i)$ *и пусть* $\mathbf{n}(M_i)$ *– единичная нормаль к поверхности* Φ_i *в точке* M_i, *и пусть* $\mathbf{n}(M_i) = (\cos\alpha_i, \cos\beta_i, \cos\gamma)$, *где* $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$*- углы между вектором* $\mathbf{n}(M_i)$ *и осью* OX, OY *и* OZ *соответственно. Образуем интегральные суммы*

$$\sigma(f, (\Phi_i)) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot |\Phi_i|,$$

$$\sigma_x(P, (\Phi_i)) = \sum_{i=1}^{n} P(M_i) \cos\alpha_i |\Phi_i|,$$

$$\sigma_y(Q,(\Phi_i)) = \sum_{i=1}^{n} Q(M_i)\cos\beta_i|\Phi_i|,$$

$$\sigma_z(R,(\Phi_i)) = \sum_{i=1}^{n} R(M_i)\cos\gamma_i|\Phi_i|.$$

1) Если существует предел $\lim\limits_{d(\Phi)\to 0}\sigma(f,(\Phi_i))$*, не зависящий от выбора точек* $M_i \in \Phi_i$*, то он называется поверхностным интегралом I рода и обозначается* $\iint\limits_{\Phi} f(M)\,ds \overset{df}{=} \lim\limits_{d(\Phi)\to 0}\sigma(f,(\Phi))$.

2) Если существует предел $\lim\limits_{d(\Phi)\to 0}\sigma_x(P,(\Phi_i))$*, то он называется интегралом II рода и обозначается* $\iint\limits_{\Phi} P(M)\cos\alpha\,ds$*, т.е.* $\iint\limits_{\Phi} P(M)\cos\alpha\,ds \overset{df}{=} \lim\limits_{d(\Phi)\to 0}\sigma_x(P,(\Phi_i))$.

3) Аналогично определяются интегралы

$$\iint\limits_{\Phi} Q(M)\cos\beta\,ds \overset{df}{=} \lim_{d(\Phi)\to 0}\sigma_y(Q,(\Phi_i))$$

и

$$\iint\limits_{\Phi} R(M)\cos\gamma\,ds \overset{df}{=} \lim_{d(\Phi)\to 0}\sigma_z(R,(\Phi_i)).$$

Теорема 9.1 *Пусть* $\Phi:\ \mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)\ (u,v)\in\mathbf{G}$ *– гладкая, ограниченная, замкнутая, двусторонняя поверхность без особых точек и пусть на поверхности* Φ *заданы функции:* $f(M)$, $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$ *– непрерывны на* Φ*. Тогда поверхностные интегралы существуют, и справедливы равенства*

1) $\iint\limits_{\Phi} f(M)\,ds = \iint\limits_{\mathbf{G}} f(\mathbf{r}(u,v))\sqrt{EF-G^2}\,dudv$;

2) $\iint\limits_{\Phi} P(M)\cos\alpha\,ds = \iint\limits_{\mathbf{G}} P(\mathbf{r}(u,v))\cos\alpha\sqrt{EF-G^2}\,dudv$;

3) $\iint\limits_{\Phi} Q(M)\cos\beta\,ds = \iint\limits_{\mathbf{G}} Q(\mathbf{r}(u,v))\cos\beta\sqrt{EF-G^2}\,dudv$;

4) $\iint\limits_{\Phi} R(M)\cos\gamma\,ds = \iint\limits_{\mathbf{G}} R(\mathbf{r}(u,v))\cos\gamma\sqrt{EF-G^2}\,dudv$.

Доказательство. Докажем 1). Интеграл справа в 1) существует, т.к. он интеграл по компактному множеству от непрерывной функции. Поэтому надо доказать, что

$$\lim_{d(\Phi)\to 0}\sigma(f,(\Phi_i)) = \iint\limits_{\mathbf{G}} f(\mathbf{r}(u,v))\sqrt{EF-G^2}\,dudv.$$

Т.к. f непрерывна на Φ, то f равномерно непрерывна на Φ, значит,

$$\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\delta>0\;\forall\,\mathbf{p}',\mathbf{p}''\in\Phi,\ ||\mathbf{p}'-\mathbf{p}''||_2<\delta \Rightarrow |f(\mathbf{p}')-f(\mathbf{p}'')|<\frac{\varepsilon}{|\Phi|}.$$

Выберем разбиение $\Phi=\bigsqcup\limits_{i=1}^{n}\Phi_i$ так, что $d|\Phi_i|<\delta$. Тогда

$$\left|\sigma(f,(\Phi_i)) - \iint\limits_{\mathbf{G}} f(\mathbf{r}(u,v))\sqrt{EF-G^2}\,dudv\right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} f(M_i)|\Phi_i| - \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{\mathbf{G}} f(\mathbf{r}(u,v))\sqrt{EF-G^2}\,dudv \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{\mathbf{G}} f(M_i)\sqrt{EF-G^2} - f(\mathbf{r}(u,v))\sqrt{EF-G^2}\,dudv \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{\mathbf{G}_i} |f(M_i) - f(\mathbf{r}(u,v))|\sqrt{EF-G^2}\,dudv < \frac{\varepsilon}{|\Phi|} \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{\mathbf{G_i}} \sqrt{EF-G^2}\,dudv =$$

$$= \frac{\varepsilon}{|\Phi|} \sum_{i=1}^{n} |\Phi_i| = \frac{\varepsilon}{|\Phi|}|\Phi_i| = \varepsilon.$$

2) Остальные равенства 2)–4) доказываются аналогично. □

Замечание 1. Интеграл II рода зависит от параметризации, которая определяет вектор нормали. Если выберем параметризацию, при которой вектор нормали $\mathbf{n}(M)$ изменит знак на противоположный, то интеграл II рода зависит от направления нормали. Так как поверхность вместе с выбранным направлением нормали есть сторона поверхности, то интеграл меняет знак при переходе на другую сторону поверхности. Выбранную сторону называют обычно положительной стороной и обозначают Φ^{+}, противоположную сторону – Φ^{-}.

Замечание 2. Если поверхность Φ задана в явном виде $\Phi:\ z = \varphi(x,y)\ (x,y) \in \mathbf{G}$, то

$$\iint\limits_{\Phi} R(M)\cos\gamma\,ds = (\pm 1) \iint\limits_{\mathbf{G}} R(x,y,\varphi(x,y))\,dxdy,$$

при этом выбираем знак $(+1)$, если выбрана сторона поверхности Φ, для которой угол γ между вектором нормали $\mathbf{n}(M)$ и осью OZ – острый.

Доказательство. Пусть поверхность $\Phi:\ x = u, y = v, z = \varphi(u,v),\ (u,v) \in \mathbf{G}$. Тогда

$$\iint\limits_{\Phi} R(M)\cos\gamma\,ds = \iint\limits_{\mathbf{G}} R(x,y,\varphi(x,y))\cos\gamma||\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v||_2^2\,dxdy \Rightarrow$$

$$((0,0,1),[\mathbf{r}'_u,\mathbf{r}'_v]) = 1 = 1 \cdot ||[\mathbf{r}'_u,\mathbf{r}'_v]||_2 \cdot \cos\gamma. \ \square$$

Глава 3

Элементы теории поля

1 Биортонормированные системы и базисы

Определение 1.1 *Система векторов* $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ *из* $\mathbb{R}^m$ *называется линейно независимой, если из условия* $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{e}_j = 0$ *следует, что* $\lambda_j = 0$.

Определение 1.2 *Максимальная линейно независимая система векторов в* $\mathbb{R}^m$ *называется базисом.*

Из линейной алгебры известна

Теорема 1.1 *Система векторов* $(\mathbf{e}_j)_{j=1}^m$ *базис в* $\mathbb{R}^m$ *тогда и только тогда, когда* $(\mathbf{e}_j)_{j=1}^m$ *– линейно независима.*

Теорема 1.2 *Система векторов* $(\mathbf{e}_j)_{j=1}^m$ *базис в* $\mathbb{R}^m$ *тогда и только тогда, когда любой вектор* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ *единственным образом представим в виде* $\mathbf{x} = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{e}_j$.

Определение 1.3 *Система векторов* $(\mathbf{e}_j)_{j=1}^n$ *называется ортогональной, если* $\forall\, i \neq j$ $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$ *и* $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) \neq 0$.

Если $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{i,j}$, *то система* $(\mathbf{e}_j)_{j=1}^n$ *называется ортонормированной системой.*

Теорема 1.3 *Ортонормированная система* $(\mathbf{e}_j)_{j=1}^m$, *состоящая из* m *векторов, базис в* $\mathbb{R}^m$.

Определение 1.4 *Совокупность двух систем* $(\mathbf{e}_i)_{i=1}^m$, $(\mathbf{e}_j^*)_{j=1}^m$ *называется биортонормированной системой, если* $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j^*) = \delta_{i,j}$. *Обозначается* $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j^*)$.

Теорема 1.4 *Если* $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j^*)$ *– биортонормированная система, то* $(\mathbf{e}_i)$ *и* $(\mathbf{e}_i^*)$ *– линейно независимы.*

Доказательство. Покажем, что система $(\mathbf{e}_i)$ линейно независима. Имеем

$$0 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{e}_i \Rightarrow (0, \mathbf{e}_j^*) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \underbrace{(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j^*)}_{\delta_{i,j}} = \lambda_j \Rightarrow \lambda_j = 0. \ \square$$

Аналогично доказываем, что система $(\mathbf{e}_i^*)$ – линейно независима. Т.е. если $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j^*)$ – биортонормированная система, то $(\mathbf{e}_i)$ и $(\mathbf{e}_j^*)$ образуют базис в $\mathbb{R}^m$.

Теорема 1.5 *Пусть даны две биортонормированные системы:* $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j^*)$ *и* $(\mathbf{g}_k, \mathbf{g}_l^*)$ *и пусть*

$$g_k = \sum_{i=1}^{m} a_{k,i}\mathbf{e}_i,$$

$$g_l^* = \sum_{j=1}^{n} b_{l,j}\mathbf{e}_j^*.$$

Тогда матрицы $A = (a_{k,i})$ *и* $B^T = (b_{l,j})^T$ *– взаимно обратны.*

Доказательство.

$$\delta_{k,l} = (\mathbf{g}_k, \mathbf{g}_l^*) = \left(\sum_{i=1}^{m} a_{k,i}\mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^{m} b_{l,j}\mathbf{e}_j^*\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_{k,i}b_{l,j}\underbrace{(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j^*)}_{\delta_{i,j}} = \sum_{i=1}^{m} a_{k,i}b_{l,i} = \sum_{i=1}^{m} a_{k,i}b'_{i,l},$$

где $b'_{i,l} = b_{l,i}$, т.е. элементы матрицы $B^T \Rightarrow A$ и B^T – взаимно обратны, т.к. $E = AB^T$. □

2 Инварианты линейного преобразования в $\mathbb{R}^m$

Определение 2.1 *Линейным преобразованием в* $\mathbb{R}^m$ *называется отображение* $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *такое, что*
$A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y})$,
$A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A\mathbf{x}$.

Теорема 2.1 *Пусть* A *– линейное преобразование в* $\mathbb{R}^m$*. Выражение* $\sum\limits_{i=1}^{m}(\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}_i^*)$*, где* $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j^*)$ *– биортонормированный базис, является инвариантом, т.е. не зависит от выбора биортонормированного базиса* $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j^*)$.

Доказательство. Пусть $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j^*)$ и $(\mathbf{g}_k, \mathbf{g}_l^*)$ – два биортонормированных базиса и пусть

$$\mathbf{g}_k = \sum_{i=1}^{m} a_{k,i}\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{g}_l^* = \sum_{j=1}^{m} b_{l,j}\mathbf{e}_j^*.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{m}(\mathbf{g}_k, A\mathbf{g}_k^*) = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{k,i}\mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^{m} b_{k,j}A\mathbf{e}_j^*\right) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_{k,i}b_{k,j}(\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}_j^*) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}_j^*)\underbrace{\sum_{k=1}^{m} a_{k,i}b_{k,j}}_{=\delta_{i,j}} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}_j^*)\delta_{i,j} = \sum_{i=1}^{m}(\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}_i^*). \ \square$$

Определение 2.2 *Инвариант* $\sum_{i=1}^{m}(\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}_i^*)$ *называется дивергенцией преобразования* A *и обозначается* $\operatorname{div} A$*, т.е. по определению*

$$\operatorname{div} A = \sum_{i=1}^{m}(\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}_i^*).$$

Замечание. Определение 2.2 корректно, т.к div не зависит от выбора конкретного биортонормированного базиса.

Найдем выражение div$A$ в ортонормированном базисе. Пусть $(\mathbf{e}_i)_{i=1}^m$ – ортонормированный базис в $\mathbb{R}^m$, т.е. например, $\mathbf{e}_i = (0, \ldots, 0, 1_i, 0, \ldots, 0)$ и A – линейное преобразование. В этом случае $\mathbf{e}_i^* = \mathbf{e}_i$. Тогда $A\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^m \Rightarrow A\mathbf{e}_i = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{i,j}\mathbf{e}_j$. Числа $a_{i,j}$ определены преобразованием A. Матрица $(a_{i,j})$ называется матрицей линейного оператора A в ортонормированном базисе $\mathbf{e}_i$. Вычислим

$$\sum_{i=1}^{m}(\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}_i^*) = \sum_{i=1}^{m}(\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^{m}\left(\mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^{m} a_{i,j}\mathbf{e}_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{i,i} \Rightarrow$$

$$\mathrm{div}A = \sum_{i=1}^{m} a_{i,i}.$$

Теорема 2.2 *Пусть A – линейное преобразование, $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j^*)$ – биортонормированная система в $\mathbb{R}^3$. Тогда выражение*

$$\sum_{i=1}^{3}[\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}_i^*]$$

есть инвариант преобразования A. (Здесь [] – векторное произведение.)

Доказательство. Аналогично теореме 2.1. Доказать самостоятельно. □

Определение 2.3 *Выражение $\sum\limits_{i=1}^{3}[\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}_i^*]$ называется ротором линейным преобразованием A и обозначается* rot$A$, *т.е.*

$$\mathrm{rot}A \overset{df}{=} \sum_{i=1}^{3}[\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}_i^*].$$

Найдем выражение для rot$A$ в ортонормированном базисе $(\mathbf{e}_i)_{i=1}^3$. Пусть $a_{i,j}$ – матрица линейного преобразования A, т.е. $A\mathbf{e}_i = \sum\limits_{j=1}^{3} a_{i,j}\mathbf{e}_j$. Тогда

$$\mathrm{rot}A = \sum_{i=1}^{3}[\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}_i] = \sum_{i=1}^{3}\left[\mathbf{e}_i, \sum_{i=1}^{3} a_{i,j}\mathbf{e}_j\right] = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{i,j}[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j] =$$

$$= a_{1,1}[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1] + a_{1,2}[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] + a_{1,3}[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3] +$$

$$= a_{2,1}[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1] + a_{2,2}[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2] + a_{2,3}[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] +$$

$$= a_{3,1}[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1] + a_{3,2}[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2] + a_{3,3}[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3] =$$

$$= \mathbf{e}_1(a_{2,3} - a_{3,2}) + \mathbf{e}_2(a_{3,1} - a_{1,3}) + \mathbf{e}_3(a_{1,2} - a_{2,1}). \ \square$$

3 Скалярные и векторные поля

Определение 3.1 *Пусть V – область в $\mathbb{R}^3$. Скалярная функция $a(\mathbf{x})$, определенная в V, называются скалярным полем. Скалярное поле $a(\mathbf{x})$ называется дифференцируемым в точке $\mathbf{x}_0$, если функция $a(\mathbf{x})$ дифференцируема в точке $\mathbf{x}_0$, т.е.*

$$a(\mathbf{x}) - a(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial a(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(i)}}(x^{(i)} - x_0^{(i)}) + \alpha(\mathbf{x}) \cdot ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||_2,$$

где $\alpha(\mathbf{x}) \to 0$ при $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ и $\alpha(\mathbf{x}_0) = 0$.

Определение 3.2 *Вектор $\left(\frac{\partial a(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(1)}}, \frac{\partial a(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(2)}}, \frac{\partial a(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(3)}}\right)$ называется градиентом скалярного поля $a(\mathbf{x})$ и обозначается $\operatorname{grad} a(\mathbf{x}_0)$.*

Замечание. Т.к. $a(\mathbf{x})$ – функция трех переменных, то для поля определены производные по направлениям $\frac{\partial a(\mathbf{x}_0)}{\partial l} = \left.\frac{d(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e})}{dt}\right|_{t=0}$, где $\mathbf{e}$ – единичный вектор $(e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)})$, определяющий прямую $l: \ \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}$. Известно (3 семестр)

$$\frac{\partial a(\mathbf{x}_0)}{\partial l} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial a(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(i)}} \cdot e^{(i)} = (\operatorname{grad} a(\mathbf{x}_0), \mathbf{e}).$$

Таким образом, дифференцируемое скалярное поле $a(\mathbf{x})$ порождает векторное поле $\operatorname{grad} a(\mathbf{x})$.

Следствие. Если поле $u(\mathbf{x})$ дифференцируемо в точке $\mathbf{x}_0$, то в точке $\mathbf{x}_0$ существует производная по любому направлению и справедливо равенство

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{e}} = (\operatorname{grad} u(\mathbf{x}_0), \mathbf{e}).$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{e} = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3)$. Т.к. поле дифференцируемо, то

$$u(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}) - u(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(i)}} t\cos\alpha_i + |t| \|\mathbf{e}\| o(1) \Rightarrow$$

$$\frac{u(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}) - u(\mathbf{x}_0)}{t} = (\operatorname{grad} u(\mathbf{x}_0), \mathbf{e}) + o(1).$$

Переходя к пределу, получим требуемое равенство. □

Определение 3.3 *Пусть $G \subset \mathbb{R}^3$ – область. Вектор функция $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) = (a_1(\mathbf{x}), a_2(\mathbf{x}), a_3(\mathbf{x}))$ называется векторным полем.*
Векторное поле $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ называется дифференцируемым в точке $\mathbf{x}_0$, если все компоненты $a_1(\mathbf{x}), a_2(\mathbf{x}), a_3(\mathbf{x})$ дифференцируемы в точке $\mathbf{x}_0$, т.е.

$$\left\{\begin{array}{l} a_1(\mathbf{x}) - a_1(\mathbf{x}_0) = \sum\limits_{j=1}^{3} \frac{\partial a_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}}(x^{(j)} - x_0^{(j)}) + ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||_2 \cdot o_1(1) \\ a_2(\mathbf{x}) - a_2(\mathbf{x}_0) = \sum\limits_{j=1}^{3} \frac{\partial a_2(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}}(x^{(j)} - x_0^{(j)}) + ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||_2 \cdot o_2(1) \\ a_3(\mathbf{x}) - a_3(\mathbf{x}_0) = \sum\limits_{j=1}^{3} \frac{\partial a_3(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}}(x^{(j)} - x_0^{(j)}) + ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||_2 \cdot o_3(1) \end{array}\right. . \tag{3.1}$$

Равенство (3.1) можно записать в векторной форме как единое равенство

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{a}(\mathbf{x}_0) = A \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T + ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|| \cdot o(1),$$

где матрица A есть матрица, состоящая из частных производных, т.е.

$$A \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(1)}} & \frac{\partial a_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(2)}} & \frac{\partial a_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(3)}} \\ \frac{\partial a_2(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(1)}} & \frac{\partial a_2(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(2)}} & \frac{\partial a_2(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(3)}} \\ \frac{\partial a_3(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(1)}} & \frac{\partial a_3(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(2)}} & \frac{\partial a_3(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(3)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(1)} - x_0^{(1)} \\ x^{(2)} - x_0^{(2)} \\ x^{(3)} - x_0^{(3)} \end{pmatrix}.$$

Произведение $A \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T$ есть линейный оператор A, определенный матрицей $A = \left(\frac{\partial a_i}{\partial x^{(j)}}\right)_{i=1,j=1}^{3 \quad 3}$. Поэтому равенство (3.1) можно записать в виде

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{a}(\mathbf{x}_0) = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2 \cdot o(1), \tag{3.2}$$

где A есть линейный оператор, определенный матрицей $A = \left(\frac{\partial a_i}{\partial x^{(j)}}\right)$. Этот оператор A называют оператором дифференцирования.

Определение 3.4 *Пусть $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ – векторное поле в G, дифференцируемое в G, и пусть $A = \left(\frac{\partial a_i}{\partial x^{(j)}}\right)_{i=1,j=1}^{3 \quad 3}$ – его матрица дифференцирования. Положим по определению*

$$\operatorname{div} \mathbf{a} \stackrel{df}{=} \operatorname{div} A, \ \operatorname{rot} \mathbf{a} \stackrel{df}{=} \operatorname{rot} A.$$

Найдем выражение для $\operatorname{div} \mathbf{a}$ и $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ в ортонормированном базисе.

Теорема 3.1 *Если $(\mathbf{e}_i)_{i=1}^3$ ортонормированный базис в $\mathbb{R}^3$, то*
1) $\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x^{(1)}} + \frac{\partial a_2}{\partial x^{(2)}} + \frac{\partial a_3}{\partial x^{(3)}} = (\nabla, \mathbf{a})$
2) $\operatorname{rot} \mathbf{a} = [\nabla, \mathbf{a}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x^{(1)}} & \frac{\partial}{\partial x^{(2)}} & \frac{\partial}{\partial x^{(3)}} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$, *где* $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x^{(1)}}, \frac{\partial}{\partial x^{(2)}}, \frac{\partial}{\partial x^{(3)}}\right)$ *есть символический вектор дифференцирования, называемый набла.*

Доказательство. Найдем вначале матрицу оператора дифференцирования в ортонормированном базисе $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

$$A(\mathbf{e}_1) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial a_1}{\partial x^{(1)}}, \frac{\partial a_2}{\partial x^{(1)}}, \frac{\partial a_3}{\partial x^{(1)}}\right)^T = \frac{\partial a_1}{\partial x^{(1)}}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial a_2}{\partial x^{(1)}}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial a_3}{\partial x^{(1)}}\mathbf{e}_3.$$

$$A(\mathbf{e}_2) = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial a_1}{\partial x^{(2)}}, \frac{\partial a_2}{\partial x^{(2)}}, \frac{\partial a_3}{\partial x^{(2)}}\right)^T = \frac{\partial a_1}{\partial x^{(2)}}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial a_2}{\partial x^{(2)}}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial a_3}{\partial x^{(2)}}\mathbf{e}_3.$$

$$A(\mathbf{e}_1) = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial a_1}{\partial x^{(3)}}, \frac{\partial a_2}{\partial x^{(3)}}, \frac{\partial a_3}{\partial x^{(3)}}\right)^T = \frac{\partial a_1}{\partial x^{(3)}}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial a_2}{\partial x^{(3)}}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial a_3}{\partial x^{(3)}}\mathbf{e}_3.$$

Таким образом, если обозначить матрицу оператора A в базисе $(\mathbf{e}_i)_{i=1}^3$ через $(a_{i,j})_{i=1,j=1}^{3 \quad 3}$, то

$$a_{i,j} = \frac{\partial a_j}{\partial x^{(i)}}.$$

1) Найдем $\mathrm{div}\mathbf{a} = \mathrm{div}A = a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} = \frac{\partial a_1}{\partial x^{(1)}} + \frac{\partial a_2}{\partial x^{(2)}} + \frac{\partial a_3}{\partial x^{(3)}} = (\nabla, \mathbf{a})$.
2) Найдем

$$\mathrm{rot}\mathbf{a} = \mathrm{rot}A = \mathbf{e}_1(a_{2,3} - a_{3,2}) + \mathbf{e}_2(a_{3,1} - a_{1,3}) + \mathbf{e}_3(a_{1,2} - a_{2,1}) =$$
$$= \mathbf{e}_1\left(\frac{\partial a_3}{\partial x^{(2)}} - \frac{\partial a_2}{\partial x^{(3)}}\right) + \mathbf{e}_2\left(\frac{\partial a_1}{\partial x^{(3)}} - \frac{\partial a_3}{\partial x^{(1)}}\right) + \mathbf{e}_3\left(\frac{\partial a_2}{\partial x^{(1)}} - \frac{\partial a_1}{\partial x^{(2)}}\right) =$$
$$= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x^{(1)}} & \frac{\partial}{\partial x^{(2)}} & \frac{\partial}{\partial x^{(3)}} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = [\nabla, \mathbf{a}]. \ \square$$

4 Формула Грина

Лемма 4.1 *Криволинейный интеграл*

$$\int\limits_L (\mathbf{a}(\mathbf{x}), d\mathbf{x}) = \int\limits_L \sum_{i=1}^{m} a_i(\mathbf{x})\, dx^{(i)}$$

можно записать в виде

$$\int\limits_L (\mathbf{a}(\mathbf{x}), d\mathbf{x}) = \int\limits_L (\mathbf{a}(\mathbf{x}), \mathbf{e})\, dl,$$

где $\mathbf{e}$ *– вектор касательной к кривой* L*, а* dl *есть дифференциал длины дуги, т.е.*

$$dl = \|\mathbf{x}'_t\|_2 dt = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{dx^{(i)}}{dt}\right)^2} dt.$$

Доказательство. Если $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}$ – уравнение кривой L, то длина части кривой вектор-функции

$$l(t) = \int\limits_a^t \|\mathbf{x}'_\tau\|_2 d\tau \Rightarrow dl(t) = \|\mathbf{x}'_t\|_2 dt.$$

Тогда

$$\int\limits_L (\mathbf{a}(\mathbf{x}), d\mathbf{x}) = \int\limits_L \left(\mathbf{a}(\mathbf{x}), \underbrace{\frac{d\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}'_t\|_2}}_{=\mathbf{e}}\right) \underbrace{dt \cdot \|\mathbf{x}'_t\|_2}_{=dl}. \ \square$$

Теорема 4.2 *Пусть в пространстве* $\mathbb{R}^3$ *дана плоскость* Π, $\Phi \subset \Pi$ *– замкнутая, ограниченная, односвязная поверхность без особых точек,* Γ *– ее граница. Пусть* $\mathbf{n}$ *– единичный вектор нормали к* Φ*,* $\mathbf{e}$ *– вектор касательной к границе* Γ*.* $\mathbf{n}$ *и* $\mathbf{e}$ *согласованы так, что с конца вектора нормали* $\mathbf{n}$ *обход* Γ *в направлении* $\mathbf{e}$ *происходит против часовой стрелки. Пусть далее поверхность* Φ *такова, что можно на* Π *выбрать систему координат так, что прямая, параллельная осям координат, пересекает* Γ *не более, чем в двух точках. Пусть* $\mathbf{a}$ *– дифференцируемое вектор поле в* Φ*. Тогда справедливо равенство*

$$\iint\limits_\Phi (\mathbf{n}, \mathrm{rot}\,\mathbf{a})ds = \int\limits_\Gamma (\mathbf{a}, \mathbf{e})dl = \int\limits_\Gamma (\mathbf{a}, d\mathbf{x}). \tag{4.1}$$

Доказательство. Выберем в $\mathbb{R}^3$ ортонормированный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ так, что прямые, параллельные ортам $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, пересекают Γ не более, чем в 2-х точках и $\mathbf{e}_3 = \mathbf{n}$. Уравнение поверхности Φ будет иметь вид

$$\Phi : \begin{cases} x^{(3)} = 0 \\ x^{(1)} = u \\ x^{(2)} = v \end{cases},$$

$(u, v) \in G = \Phi$. Пусть

$$\Gamma_1 : \; x^{(1)} = \varphi(x^{(1)}) \;\; \alpha \le x^{(1)} \le \beta,$$
$$\Gamma_2 : \; x^{(2)} = \psi(x^{(1)}) \;\; \alpha \le x^{(1)} \le \beta.$$

нижняя и верхняя части границы Γ. Вектор нормали $\mathbf{n}$ имеет координаты $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$, поэтому $(\mathbf{n}, \operatorname{rot} \mathbf{a}) = 1 \cdot \left(\frac{\partial a^{(2)}}{\partial x^{(1)}} - \frac{\partial a^{(1)}}{\partial x^{(2)}} \right)$. Так как векторное поле $\mathbf{a}$ плоское, то $\mathbf{a} = (a^{(1)}, a^{(2)}, 0)$, и. значит, $\int\limits_\Gamma (\mathbf{a}, d\mathbf{x}) = \int\limits_\Gamma a^{(1)}\, dx^{(1)} + a^{(2)}\, dx^{(2)}$.

Поэтому равенство (4.1) примет вид (надо учесть, что $G = \Phi$)

$$\iint_G \left(\frac{\partial a^{(2)}}{\partial x^{(1)}} - \frac{\partial a^{(1)}}{\partial x^{(2)}} \right) dx^{(1)}\, dx^{(2)} = \int\limits_\Gamma (\mathbf{a}, d\mathbf{x}) = \int\limits_\Gamma a^{(1)}\, dx^{(1)} + a^{(2)}\, dx^{(2)}.$$

Вычисляем интеграл в левой части как повторный

$$\iint_G \frac{\partial a^{(1)}}{\partial x^{(2)}}\, dx^{(1)}\, dx^{(2)} = \int\limits_\alpha^\beta dx^{(1)} \int\limits_{\varphi(x^{(1)})}^{\psi(x^{(1)})} \frac{\partial a^{(1)}}{\partial x^{(2)}}\, dx^{(2)} = \int\limits_\alpha^\beta dx^{(1)} (a^{(1)}(x^{(1)}, \psi(x^{(1)})) - a^{(1)}(x^{(1)}, \varphi(x^{(1)}))) =$$

$$= -\int\limits_{\Gamma_2} a^{(1)}\, dx^{(1)} - \int\limits_{\Gamma_1} a^{(1)}\, dx^{(1)} = -\int\limits_\Gamma a^{(1)}\, dx^{(1)}. \tag{4.2}$$

Аналогично получаем равенство

$$\iint_G \frac{\partial a^{(1)}}{\partial x^{(1)}}\, dx^{(1)}\, dx^{(2)} = \int\limits_\Gamma a^{(2)}\, dx^{(2)}. \tag{4.3}$$

Вычитая из равенства (4.3) равенство (4.2), получаем (4.1). □

5 Формула Гаусса–Остроградского

Теорема 5.1 *Пусть V – замкнутая, односвязная область в $\mathbb{R}^3$, Φ – ее граница, и пусть существует система координат в $\mathbb{R}^3$, такая, что прямая, параллельная осям координат, пересекает Φ не более, чем в двух точках. Пусть $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к поверхности Φ и Φ – ограниченная, замкнутая, двусторонняя поверхность без особых точек. Пусть, наконец, $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ – дифференцируемое векторное поле в V. Тогда справедливо равенство*

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{a}(\mathbf{x})\, d\mathbf{v} = \iint_\Phi (\mathbf{n}, \mathbf{a}) ds \tag{5.1}$$

Доказательство. Выберем ортонормированный базис $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, удовлетворяющий условиям теоремы. В этом базисе

$$\mathrm{div}\mathbf{a} = \frac{\partial a^{(1)}}{\partial x^{(1)}} + \frac{\partial a^{(2)}}{\partial x^{(2)}} + \frac{\partial a^{(3)}}{\partial x^{(3)}}.$$

Обозначим координаты вектора нормали $\mathbf{n}$ через $\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3$. Тогда равенство (5.1) в координатной форме примет вид

$$\iiint_V \left(\frac{\partial a^{(1)}}{\partial x^{(1)}} + \frac{\partial a^{(2)}}{\partial x^{(2)}} + \frac{\partial a^{(3)}}{\partial x^{(3)}}\right) dx^{(1)}\, dx^{(2)}\, dx^{(3)} = \iint_\Phi (a^{(1)}\cos\alpha_1 + a^{(2)}\cos\alpha_2 + a^{(3)}\cos\alpha_3) ds \tag{5.2}$$

Для доказательства равенства (5.2) достаточно проверить 3 равенства

$$\iiint_V \frac{\partial a^{(1)}}{\partial x^{(1)}}\, dx^{(1)}\, dx^{(2)}\, dx^{(3)} = \iint_\Phi (a^{(1)}\cos\alpha_1 ds$$

$$\iiint_V \frac{\partial a^{(2)}}{\partial x^{(2)}}\, dx^{(1)}\, dx^{(2)}\, dx^{(3)} = \iint_\Phi a^{(2)}\cos\alpha_2 ds$$

$$\iiint_V \frac{\partial a^{(3)}}{\partial x^{(3)}}\, dx^{(1)}\, dx^{(2)}\, dx^{(3)} = \iint_\Phi a^{(3)}\cos\alpha_3 ds \tag{5.3}$$

Докажем 3-е равенство. По условию поверхность $\Phi = \Phi_1 \bigcup \Phi_2$, где Φ_1 – нижняя часть поверхности Φ, Φ_2 – верхняя. Пусть

$$\Phi_1 :\ x^{(3)} = \varphi(x^{(1)}, x^{(2)})$$

$$\Phi_2 :\ x^{(3)} = \psi(x^{(1)}, x^{(2)})$$

и пусть $\mathcal{D}$ – проекция области V на плоскость переменных $x^{(1)}, x^{(2)}$. Интеграл в левой части (5.3) вычисляем как повторный.

$$\iiint_V \frac{\partial a^{(3)}}{\partial x^{(3)}}\, dx^{(1)}\, dx^{(2)}\, dx^{(3)} = \iint_{\mathcal{D}} a^{(3)}(x^{(1)}, x^{(2)}, \psi(x^{(1)}, x^{(2)}))\, dx^{(1)}\, dx^{(2)} -$$

$$- \iint_{\mathcal{D}} a^{(3)}(x^{(1)}, x^{(2)}, \varphi(x^{(1)}, x^{(2)}))\, dx^{(1)}\, dx^{(2)} =$$

так как поверхности Φ_1 и Φ_2 записаны в явном виде

$$= \iint_{\Phi_2} a^{(3)}(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) \cos\alpha_3 ds - \left(-\iint_{\Phi_1} a^{(3)}(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) \cos\alpha_3 ds\right) = \iint_\Phi a^{(3)} \cos\alpha_3 ds. \quad \square$$

6 Формула Стокса

Теорема 6.1 *Пусть Φ – ограниченная, замкнутая, двусторонняя гладкая поверхность без особых точек в $\mathbb{R}^3$, Γ – ее кусочно гладкая граница. Пусть $\mathbf{n}$ – вектор нормали к Φ, $\mathbf{e}$ – вектор касательной к Γ. Будем считать, что векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{e}$ ориентированы как в формуле Грина. Предположим, что систему координат можно выбрать так, что Φ однозначно проектируется на любую координатную плоскость. Пусть, наконец, $\mathbf{a}$ – дифференцируемое векторное поле на поверхности Φ. Тогда справедливо равенство*

$$\iint_\Phi (\mathbf{n}, \mathrm{rot}\,\mathbf{a})\, ds = \int_\Gamma (\mathbf{a}, \mathbf{e})\, dl = \int_\Gamma (\mathbf{a}, d\mathbf{x}). \tag{6.1}$$

Доказательство. Выберем ортонормированный базис $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ в $\mathbb{R}^3$, удовлетворяющий условиям теоремы. Тогда

$$(\mathbf{n}, \operatorname{rot} \mathbf{a}) = \cos\alpha_1 \left(\frac{\partial a^{(3)}}{\partial x^{(2)}} - \frac{\partial a^{(2)}}{\partial x^{(3)}} \right) + \cos\alpha_2 \left(\frac{\partial a^{(1)}}{\partial x^{(3)}} - \frac{\partial a^{(3)}}{\partial x^{(1)}} \right) + \cos\alpha_3 \left(\frac{\partial a^{(2)}}{\partial x^{(1)}} - \frac{\partial a^{(1)}}{\partial x^{(2)}} \right).$$

$$(\mathbf{a}, d\mathbf{x}) = a^{(1)}dx^{(1)} + a^{(2)}dx^{(2)} + a^{(3)}dx^{(3)}.$$

Тогда равенство (6.1) примет вид

$$\int\limits_{\Phi} \left(\cos\alpha_1 \left(\frac{\partial a^{(3)}}{\partial x^{(2)}} - \frac{\partial a^{(2)}}{\partial x^{(3)}} \right) + \cos\alpha_2 \left(\frac{\partial a^{(1)}}{\partial x^{(3)}} - \frac{\partial a^{(3)}}{\partial x^{(1)}} \right) + \cos\alpha_3 \left(\frac{\partial a^{(2)}}{\partial x^{(1)}} - \frac{\partial a^{(1)}}{\partial x^{(2)}} \right) \right) ds =$$

$$= \int\limits_{\Gamma} a^{(1)}dx^{(1)} + a^{(2)}dx^{(2)} + a^{(3)}dx^{(3)}. \tag{6.2}$$

Для доказательства (6.2) достаточно проверить равенства

$$\iint_{\Phi} \left(\frac{\partial a^{(1)}}{\partial x^{(3)}} \cos\alpha_2 - \frac{\partial a^{(1)}}{\partial x^{(2)}} \cos\alpha_3 \right) ds = \int\limits_{\Gamma} a^{(1)}dx^{(1)}.$$

$$\iint_{\Phi} \left(\frac{\partial a^{(2)}}{\partial x^{(1)}} \cos\alpha_3 - \frac{\partial a^{(2)}}{\partial x^{(3)}} \cos\alpha_1 \right) ds = \int\limits_{\Gamma} a^{(2)}dx^{(2)}. \tag{6.3}$$

$$\iint_{\Phi} \left(\frac{\partial a^{(3)}}{\partial x^{(2)}} \cos\alpha_1 - \frac{\partial a^{(3)}}{\partial x^{(1)}} \cos\alpha_2 \right) ds = \int\limits_{\Gamma} a^{(3)}dx^{(3)}. \tag{6.4}$$

Докажем равенство (6.3). Найдем координаты вектора нормали $\mathbf{n}(\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3)$. Запишем уравнение поверхности Φ в явном виде $\Phi : \ x^{(3)} = \varphi(x^{(1)}, x^{(2)})$. Перепишем его в параметрической форме

$$\Phi : \begin{array}{l} x^{(1)} = u \\ x^{(2)} = v \\ x^{(3)} = \varphi(u, v) \end{array} \qquad \text{или} \ \ \Phi : \ \mathbf{r} = (u, v, \varphi(u, v)).$$

Единичный вектор нормали имеет вид

$$\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]}{\|[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]\|_2},$$

где $\mathbf{r}'_u = (1, 0, \varphi'_u)$, $\mathbf{r}'_v = (0, 1, \varphi'_v)$. Вычисляем

$$[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}^{(1)} & \mathbf{e}^{(2)} & \mathbf{e}^{(3)} \\ 1 & 0 & \varphi'_u \\ 0 & 1 & \varphi'_v \end{vmatrix} = \mathbf{e}_1(-\varphi'_u) + \mathbf{e}_2(-\varphi'_v) + \mathbf{e}_1 \cdot 1,$$

значит,

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_1 \cdot \frac{-\varphi'_u}{\|[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]\|_2} + \mathbf{e}_2 \cdot \frac{-\varphi'_v}{\|[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]\|_2} + \mathbf{e}_3 \cdot \frac{1}{\|[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]\|_2}.$$

Так как вектор $\mathbf{n}$ имеет координаты $\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3$, то отсюда находим

$$\cos\alpha_1 = -\frac{\varphi'_u}{\|[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]\|_2},\ \cos\alpha_2 = -\frac{\varphi'_v}{\|[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]\|_2},\ \cos\alpha_3 = \frac{1}{\|[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]\|_2}.$$

Из этих равенств находим: $\cos\alpha_1 = -\varphi'_u \cos\alpha_3$. Подставляя найденное выражение для $\cos\alpha_1$ в равенство (6.3), получаем

$$\iint_\Phi \left(\frac{\partial a^{(2)}}{\partial x^{(1)}} + \frac{\partial a^{(2)}}{\partial x^{(3)}} \cdot \varphi'_u\right) \cos\alpha_3\, ds = \iint_\Phi \left(\frac{\partial a^{(2)}}{\partial x^{(1)}} + \frac{\partial a^{(2)}}{\partial x^{(3)}} \cdot \varphi'_{x^{(1)}}\right) \cos\alpha_3\, ds =$$

по правилу дифференцирования сложной функции

$$= \iint_\Phi \frac{\partial}{\partial x^{(1)}} a^{(2)}(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) \cos\alpha_3\, ds =$$

т.к. $\Phi:\ x^{(3)} = \varphi(x^{(1)}, x^{(2)})$

$$= \iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial}{\partial x^{(1)}} a^{(2)}(x^{(1)}, x^{(2)}, \varphi(x^{(1)}, x^{(2)}))dx^{(1)}\, dx^{(2)},$$

где $\mathcal{D}$ – проекция поверхности Φ на плоскость переменных $x^{(1)}, x^{(2)}$.

По формуле Грина

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial}{\partial x^{(1)}} a^{(2)}(x^{(1)}, x^{(2)}, \varphi(x^{(1)}, x^{(2)}))dx^{(1)}\, dx^{(2)} =$$

$$= \int\limits_L a^{(2)}(x^{(1)}, x^{(2)}, \varphi(x^{(1)}, x^{(2)}))dx^{(2)} = \int\limits_\Gamma a^{(2)}\, dx^{(2)},$$

где L есть граница области $\mathcal{D}$, и, значит, $L = \mathrm{pr}_{x_1 o x_2}\Gamma$. $\square$

7 Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования

Определение 7.1 *Векторное поле $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ называется потенциальным, если оно есть градиент некоторого скалярного поля, т.е. $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathrm{grad}u(\mathbf{x})$.*

Вопрос: Пусть L – гладкая кривая в $\mathbb{R}^3$, соединяющая точки $A, B \in G$, и пусть $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ – дифференцируемое векторное поле в $\mathbb{R}^3$. Когда интеграл $\int\limits_L(\mathbf{a}(\mathbf{x}), d\mathbf{x})$ не зависит от кривой L, а зависит только от точек A и B?

Теорема 7.1 *Интеграл $\int\limits_L(\mathbf{a}(\mathbf{x}), d\mathbf{x})$ не зависит от пути L тогда и только тогда, когда поле $\mathbf{a} = \mathrm{grad}u$. При этом*

$$\int\limits_L (\mathbf{a}(\mathbf{x}), d\mathbf{x}) = u(B) - u(A).$$

Доказательство. (Самостоятельно.)

Глава 4

Ряды Фурье

1 Пространство $L(a,b)$, его полнота

Замечание 1. По определению, f интегрируема по Лебегу на (a,b) тогда и только тогда, когда f и $|f|$ интегрируемы в обобщенном Римановском смысле.
Замечание 2. Для обобщенного Римановского интеграла известно, что совокупность функций f, для которых f и $|f|$ интегрируемы, образует линейное нормированное пространство с нормой $||f||_1 = \int\limits_{[a,b]} f(\mathbf{x})\,dx$. Это пространство обозначатся $L(a,b)$ или $L_1(a,b)$, т.е.

$$f \in L(a,b) \Leftrightarrow (L)\int\limits_a^b |f|\,d\mu < +\infty \Leftrightarrow f, |f| \in R^*(a,b).$$

Теорема 1.1 *Пространство $L(a,b)$ – полное.*

Доказательство. Выберем последовательность (f_n), фундаментальную по норме L, т.е.

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, n_0,\ \forall\, m,n \geq n_0,\ \ \|f_n - f_m\|_1 < \varepsilon. \tag{1.1}$$

Будем доказывать, что $\exists\, f \in L(a,b)$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - f_n\|_1 = 0$.
1) Положим в (1.1)

$$\varepsilon = \frac{1}{4^1} \Rightarrow \exists\, n_1,\ \forall\, n \geq n_1,\ \|f_n - f_{n_1}\| < \frac{1}{4^1}.$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2^2} \Rightarrow \exists\, n_2 > n_1,\ \forall\, n \geq n_2,\ \|f_n - f_{n_2}\| < \frac{1}{4^2},\ \ \|f_{n_2} - f_{n_1}\| < \frac{1}{4^1},$$
$$\varepsilon = \frac{1}{2^3} \Rightarrow \exists\, n_3 > n_2,\ \forall\, n \geq n_3,\ \|f_n - f_{n_3}\| < \frac{1}{4^3},\ \ \|f_{n_3} - f_{n_2}\| < \frac{1}{4^2},$$

и так далее...

Продолжая процесс, получим последовательность $(n_k) \uparrow +\infty$ такую, что $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < \frac{1}{4^k}$.
2) Образуем множества $E_k = \{x \in [a,b] :\ |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \geq \frac{1}{2^k}\}$. Обозначим $\tilde{E}_m = \bigcup\limits_{k=m}^{\infty} E_k$,

$\tilde{E} = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \tilde{E}_m$. Покажем, что $\mu E = 0$. Очевидно, что $\tilde{E}_m$ образует убывающую последовательность, значит, $\mu\tilde{E} = \lim \mu\tilde{E}_m$ и $\mu\tilde{E}_m \leq \sum\limits_{n=m}^{\infty} \mu E_n$. Для $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|$ имеем

$$\frac{1}{4^k} > \int\limits_a^b |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|\, dx \geq \int\limits_{E_k} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|\, dx \geq \mu E_k \cdot \frac{1}{2^k} \Rightarrow \mu E_k < \frac{1}{2^k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu\tilde{E}_m \leq \frac{1}{2^{m-1}} \to 0 \Rightarrow \mu\tilde{E} = 0.$$

3) Покажем, что последовательность $(f_{n_k}(x))$ сходится на $[a,b] \setminus \tilde{E}$ к $f(x)$.

Пусть $x \in [a,b] \setminus \tilde{E} \Rightarrow x \notin \tilde{E} \Rightarrow \exists\, m, x \notin \tilde{E} \Rightarrow \forall\, k \geq m,\ x \notin E_k \Rightarrow \forall\, k \geq m$ $|f_{n_{k+1}} f_{n_k}| < \frac{1}{2^k} \Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} f_{n_k}|$ сходится. Но тогда

$$|f_{n_{k+l}}(x) - f_{n_k}(x)| \leq |f_{n_{k+l}}(x) - f_{n_{k+l-1}}(x) + f_{n_{k+l-1}}(x) - f_{n_{k+l-2}}(x) + \ldots + f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^{k+l}} + \frac{1}{2^{k+l-1}} + \ldots + \frac{1}{2^k} < \sum \frac{1}{2^{k+l-1}}.$$

$$\exists \lim S_m(x) = \lim \sum_{n=1}^{m} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) = \lim (f_{n_{m+1}}(x) - f_{n_1}(x)) \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} f_{n_k} = f(x).$$

4) Покажем, что $f \in L(a,b)$.

$$\|f_{n_{k+l}} - f_{n_k}\| \leq \|f_{n_{k+l}} - f_{n_k + l - 1}\| + \|f_{n_{k+l-1}} - f_{n_k + l - 2}\| + \ldots + \|f_{n_{k+l}} - f_{n_k}\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{4^{k+l-1}} + \frac{1}{4^{k+l-2}} + \ldots + \frac{1}{4^k} \leq \frac{1}{4^{k-1}}.$$

Переходя к пределу при $l \to \infty$ при фиксированном k, получим по теореме Лебега о предельном переходе

$$\|f(x) - f_{n_k}(x)\|_1 \leq \frac{1}{4^{k-1}} \Rightarrow f - f_{n_l} \in L \wedge \|f(x) - f_{n_k}(x)\| \to 0.$$

5) Так как последовательность f_n фундаментальна, то $\|f - f_k\| \leq \|f - f_{n_k}\| + \|f_{n_k} - f_k\| \to 0$ в виду фундаментальности. $\square$

2 Пространство $L_2(a,b)$

Определение 2.1 *Совокупность всех измеримых на $[a,b]$ функций, таких, что $\int\limits_a^b |f|^2\, d\mu < +\infty$ называется пространством $L_2(a,b)$. Таким образом, $L_2(a,b) \overset{df}{=} \left\{ f : \int\limits_a^b |f|^2\, d\mu < +\infty \right\}$.*

Теорема 2.1 $L_2(a,b)$ *– линейное пространство.*

Доказательство. 1) $f \in L_2 \Rightarrow \lambda f \in L_2$ – очевидно.
2) $f, g \in L_2 \Rightarrow f + g \in L_2$. Покажем это. Имеем $(f+g)^2 = |f|^2 + |g|^2 + 2fg$

$$0 \leq (f-g)^2 = |f|^2 + |g|^2 - 2fg \Rightarrow 2fg \leq |f|^2 + |g|^2 \Rightarrow |f+g|^2 \leq 2|f|^2 + 2|g|^2$$

и по признаку сравнения абсолютной интегрируемости $|f+g|^2 \in L_1 \Rightarrow f+g \in L_2$. □

Теорема 2.2 *Равенство* $(f,g) = \int\limits_a^b fg$ *определяет скалярное произведение.*

Доказательство. 1) $(f,f) \geq 0$ очевидно;
2) $(f,f) = 0 \Leftrightarrow \int\limits_{[a,b]} |f|^2 = 0 \Leftrightarrow |f| = 0$ п.в., это свойство интеграла Лебега.
3) $(\lambda f, g) = \lambda(f,g)$ – очевидно.
4) $(f+g, h) = \int\limits_{[a,b]} (f+g)h = \int\limits_{[a,b]} fh + \int\limits_{[a,b]} gh = (f,h) + (g,h)$.

Таким образом, $\int\limits_a^b fg$ – скалярное произведение.□

Следствие 1. *Равенство* $\|f\|_2 = \sqrt{\int\limits_a^b |f(x)|^2 dx}$ *определяет норму в* $L_2(a,b)$.

Следствие 2. Для любых $f, g \in L_2(a,b)$ справедливо неравенство Коши–Буняковского.

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)\, dx \right| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$$

Теорема 2.3 $L_2(a,b)$ *– полное пространство.*

Доказательство. Аналогично теореме 1.1. Без доказательства.

3 Теорема о минимуме уклонения

Определение 3.1 *Пусть H – линейное пространство со скалярным произведением (например, пространство $L_2(a,b)$). Система элементов $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ называется ортонормированной системой в H, если скалярное произведение $(e_n, e_m) = \delta_{n,m}$.*

Теорема 3.1 *Пусть $f \in H$. Тогда выражение*

$$\Delta_n = \|f - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k\|_2$$

принимает наименьшее значение, если $a_k = (e_k, f)$.

Доказательство.

$$\Delta_n^2 = \|f - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k\|_2^2 = \left(f - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k, f - \sum_{l=1}^{n} a_l e_l \right) = (f,f) - 2\sum_{k=1}^{n} a_k (f, e_k) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_k a_l \underbrace{(e_k,e_l)}_{=\delta_{k,l}} = (f,f) - 2\sum_{k=1}^{n} a_k(f,e_k) + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = (f,f) - \sum_{k=1}^{n}(f,e_k)^2 +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}[\underbrace{(f,e_k)^2 - 2(f,e_k) + a_k^2}_{=((f,e_k)-a_k)^2}] = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{n}(f,e_k)^2 + \sum_{k=1}^{n}((f,e_k)-a_k)^2.$$

Правая часть принимает наименьшее значение, если $(f,e_k) - a_k = 0$, т.е. $a_k = (f,e_k)$ и $\min \Delta_n^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{n}(f,e_k)^2$. $\square$

Определение 3.2 *Числа (f,e_k) называются коэффициентами Фурье элемента f по ортонормированной системе (e_k), обозначаются $c_k(f)$ или $\hat{f}_k$.*

Следствие 1. *Для коэффициентов Фурье $c_k(f)$ элемента $f \in H$ на ортонормированной системе (e_k) справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n} |c_k(f)|^2 \le \|f\|_2^2,$$

которое выполняется $\forall\, n$.
Доказательство.

$$\|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k(f)|^2 \ge 0 \Rightarrow \quad \square$$

Следствие 2. *Для коэффициентов Фурье $c_k(f)$ элемента $f \in H$ выполняется неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(f)| \le \|f\|_2^2. \tag{3.1}$$

Неравенство (3.1) называется неравенством Бесселя.

4 Замкнутые и полные системы в $L_2(a,b)$

Определение 4.1 *Система функций $(e_k(x))_{k=1}^{\infty}$ называется замкнутой в $L_2(a,b)$, если $\forall\, f \in L_2(a,b)$ $\forall\, \varepsilon > 0$ существует полином $P_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)} e_k(x)$ такой, что $\|P_n - f\|_2 < \varepsilon$, т.е. существует последовательность полиномов $P_n(x)$, для которой $\|P_n - f\|_2 \to 0$ при $n \to \infty$.*

Определение 4.2 *Ортонормированная система $(e_k(x))$ в $L_2(a,b)$ называется полной, если $\forall\, f \in L_2(a,b)$*

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k(f)|^2.$$

Теорема 4.1 *Ортонормированная система $(e_n(x))$ в $L_2(a,b)$ замкнута тогда и только тогда, когда (e_n) полна в $L_2(a,b)$.*

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть (e_n) – замкнута. Тогда существует полином $P_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)} e_k(x)$, $\|f - \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)} e_k\| \to 0 \Rightarrow \|f - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k(f)e_k\|_2 \to 0$. Но $\|f - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k(f)e_k\|_2^2 = \|f\|_2 - \sum\limits_{k=1}^{n} |c_k(f)|^2 e_k \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} |c_k(f)|^2 = ||f||_2^2$, значит, система полна.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть система полна, т.е. $\|f\|_2^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} |c_k(f)|^2 \Rightarrow \|f\|_2^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} |c_k(f)|^2 \to 0$. Но $\|f - \sum\limits_{k=1}^{n} |c_k(f)e_k\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} |c_k(f)|^2 \to 0$. □

5 Тригонометрическая система, ее ортогональность

Определение 5.1 *Система функций* $(1, \cos nx, \sin nx)_{n=1}^{\infty}$ *называется тригонометрической системой.*

Теорема 5.1 *Тригонометрическая система ортогональна на любом отрезке длины* 2π.

Доказательство. Достаточно доказать, что $\int\limits_a^{a+2\pi} 1^2\, dx = 2\pi$,

$$\int\limits_a^{a+2\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = \int\limits_a^{a+2\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = \pi,$$

$$\int\limits_a^{a+2\pi} \cos^2 nx\, dx = \int\limits_a^{a+2\pi} \sin^2 nx\, dx = \pi,$$

$$\int\limits_a^{a+2\pi} \cos nx \sin mx\, dx = 0, \quad \int\limits_a^{a+2\pi} \cos nx \cos mx\, dx = \begin{cases} \pi, & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases},$$

$$\int\limits_a^{a+2\pi} \sin nx \sin mx\, dx = \begin{cases} \pi, & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}.$$

Докажем предпоследнее равенство.

$$\int\limits_a^{a+2\pi} \cos nx \cos mx\, dx = \frac{1}{2} \left(\int\limits_a^{a+2\pi} \cos(m+n)x\, dx + \int\limits_a^{a+2\pi} \cos(m-n)x\, dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{m+n} \sin(m+n)x \Big|_a^{a+2\pi} + \frac{1}{m-n} \sin(m-n)x \Big|_a^{a+2\pi} = 0. \ \square$$

Следствие. *Система*

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right) \tag{5.1}$$

– ортонормированная система на любом отрезке длины 2π.

6 Ряд Фурье по тригонометрической системе

Так как система (5.1) – ортонормированная система на $(-\pi,\pi)$, то для $f\in L(-\pi,\pi)$ можно определить ряд Фурье по тригонометрической системе. Он будет иметь вид

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\tilde a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\tilde a_n\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}+\tilde b_n\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \tag{6.1}$$

где $\tilde a_0=\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx.$

$$\tilde a_n=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx,\quad \tilde b_n=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx.$$

Обозначая

$$a_0=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx,\ a_n=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\ b_n=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx, \tag{6.2}$$

можем записать (6.1) в виде

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx \tag{6.3}$$

Ряд (6.3), в котором a_n, b_n вычисляются по формуле (6.2), называется рядом Фурье, а числа a_n, b_n – коэффициентами Фурье. Тот факт, что функция $f(x)$ имеет ряд Фурье (6.3) записывают в виде

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx. \tag{6.4}$$

Теорема 6.1 (Римана–Лебега) *Если $f\in L(-\pi,\pi)$, то коэффициенты Фурье $a_n(f),b_n(f)\to 0$.*

7 Ряд Фурье в комплексной форме

По формулам Эйлера $\cos nx=\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}$, $\sin nx=\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}$. Подставляя эти выражения в ряд (6.3), получим

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}+b_n\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}e^{inx}\left(\frac{a_n}{2}+\frac{b_n}{2i}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-inx}\left(\frac{a_n}{2}-\frac{b_n}{2i}\right).$$

Обозначим $\frac{a_0}{2}=c_0$, $\frac{a_n}{2}+\frac{b_n}{2i}=c_n$, $\frac{a_n}{2}-\frac{b_n}{2i}=c_{-n}$. Тогда

$$c_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n),\ c_{-n}=\frac{1}{2}(a_n+ib_n)\Rightarrow$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx.$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx + i\sin nx) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\,dx.$$

Таким образом, $f(x) \sim \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$, где $c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$.

8 Ядро Дирихле. Выражение частичной суммы ряда Фурье через ядро Дирихле

Определение 8.1 *Выражение*

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$$

называется ядром Дирихле.

Теорема 8.1 *Справедливо равенство*

$$D_n(x) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Доказательство. Умножим и поделим $D_n(x)$ на $2\sin\frac{x}{2}$, получим

$$D_n(x) = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{2}\cdot 2\sin\frac{x}{2} + 2\cos x\sin\frac{x}{2} + \ldots + 2\cos nx\sin\frac{x}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{x}{2} + \sin\left(x+\frac{x}{2}\right) - \sin\frac{x}{2} + \sin\left(2x+\frac{x}{2}\right) - \sin\left(x+\frac{x}{2}\right) + \ldots + \right.$$

$$\left. + \sin\left(nx+\frac{x}{2}\right) - \sin\left((n-1)x+\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}. \ \square$$

Теорема 8.2 *Для частичной суммы*

$$S_n(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx + b_k\sin kx$$

ряда Фурье функции f справедливо равенство

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)\,dt.$$

Доказательство.

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2}+\cos(x-t)+\cos 2(x-t)+\ldots+\cos n(x-t)\right)\,dt =$$

$$=\underbrace{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)}_{=a_0}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}(\cos kx\cdot\cos kt+\sin kx\cdot\sin kt)\right)\,dt = \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

Равенство

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)\,dt$$

доказывается заменой переменной $x-t=\tau$. □

9 Сходимость ряда Фурье в точке. Теорема Дини

Постановка задачи. Зафиксируем x. При каком условии на функцию f ряд Фурье функции f сходится к ней в точке x?

Определение 9.1 *При фиксированном x определим функцию*

$$\varphi(t) \overset{df}{=} f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$$

.

Теорема 9.1 (Теорема Дини) *Если в некотором интервале $(0,\delta)$ функция $\varphi(t)\in L(0,\delta)$, то ряд Фурье функции f сходится к $f(x)$ в точке x.*

Доказательство. Преобразуем выражение для частичной суммы

$$S_n(f,x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}(f(x+t)+f(x-t))D_n(t)\,dt.$$

Рассмотрим разность

$$S_n(f,x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}(f(x+t)+f(x-t)-2f(x))D_n(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta}\frac{\varphi(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi}\underbrace{\varphi(t)\cdot\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}}_{\in L(\delta,\pi)}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt = \underbrace{\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta}\frac{\varphi(t)}{t}\cdot\frac{t}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt}_{\to 0}+$$

$$+\underbrace{\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi}\frac{\varphi(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\cdot\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt}_{\to 0}\to 0$$

по теореме Римана-Лебега, так как

$$\frac{\varphi(t)}{2\sin\frac{t}{2}} \in L(0,\delta) \text{ и } \frac{\varphi(t)}{2\sin\frac{t}{2}} \in L(\delta,\pi). \ \square$$

10 Средние Фейера, ядро Фейера

Определение 10.1 $K_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x)$ *называется ядром Фейера.*

Свойства
1) $K_n(x) = \frac{1}{n+1}\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}x}{2\sin^2\frac{x}{2}}$.
Доказательство.

$$\sum_{k=0}^{n} D_k(x) = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=0}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}}\sum_{k=0}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x =$$

$$= \frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}}\sum_{k=0}^{n}\cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x - \frac{x}{2}\right) - \cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x + \frac{x}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}}\left(1 - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x + \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}}(1-\cos(n+1)x) = \frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}}\cdot 2\sin^2\frac{n+1}{2}x.$$

Подставляя полученное равенство в выражение для $K_n(x)$, получаем свойство 1. $\square$
Свойство 2. $K_n(x) \geq 0$. Очевидно.
Свойство 3. $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\,dx = 1$.
Доказательство.

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{n+1}\cdot\sum_{k=0}^{n} D_k(x)\right)dx = \frac{1}{\pi(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_k(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\cos x+\ldots+\cos kx\right)dx = \frac{1}{\pi(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}\cdot 2\pi = \frac{\pi(n+1)}{\pi(n+1)} = 1. \ \square$$

Определение 10.2 *Пусть* $f(x) \in L(-\pi,\pi)$, $S_n(f,x)$ *– частичные суммы. Выражение*

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f,x)$$

называют средним Фейера.

Свойство 4. $\sigma_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)K_n(x-t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_n(t)\,dt$.
Доказательство. Считаем

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)K_n(x-t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{1}{(n+1)}\sum_{k=0}^{n} D_k(x-t)\,dt = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\underbrace{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)D_k(x-t)\,dt}_{=S_n(f,x)} =$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_n(f,x) = \sigma_n(f,x). \ \square$$

Теорема 10.1 *Если $f(x)$ непрерывна, то средние Фейера $\sigma_n(f,x) \overset{\rightarrow}{\rightarrow} f(x)$ на $[-\pi,\pi]$.*

Доказательство. Рассмотрим разность

$$|\sigma_n(f,x)-f(x)| = \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_n(t)\,dt - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)K_n(t)\,dt\right| \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\cdot|f(x-t)-f(x)|\,dt. \tag{10.1}$$

По условию, $f(x)$ непрерывна на $[-\pi,\pi]$,следовательно, $f(x)$ равномерно непрерывна, значит

$$\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\delta>0,\;\forall\,x',x'',\;|x'-x''|<\delta \Rightarrow |f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Интеграл в (10.1) запишем в виде

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\cdot|f(x-t)-f(x)|\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{|t|<\delta} K_n(t)\cdot|f(x-t)-f(x)|\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} K_n(t)\cdot|f(x-t)-f(x)|\,dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} K_n(t)\cdot|f(x-t)-f(x)|\,dt = I_1+I_2+I_3.$$

Рассмотрим интеграл I_1. Так как $|t|<\delta \Rightarrow |(x-t)-x| = |t| < \delta \Rightarrow |f(x-t)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$

$$I_1 \le \frac{1}{\pi}\int_{|t|<\delta} K_n(t)\cdot\frac{\varepsilon}{2}\,dt \le \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,dt = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Рассмотрим интеграл I_3.

$$I_3 = \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} K_n(t)\cdot|f(x-t)-f(x)|\,dt.$$

Так как $f(x)$ непрерывна, то $f(x)$ ограничена, значит, $|f(x-t)-f(x)| \le 2M \Rightarrow$

$$I_3 \le \frac{2M}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} K_n(t)\,dt = \frac{2M}{\pi}\frac{1}{n+1}\int_{\delta}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{\underbrace{\sin^2\frac{t}{2}}_{\ge 2\sin^2\frac{\delta}{2}}}\,dt \le\le \frac{2M}{\pi}\frac{1}{n+1}\int_{\delta}^{\pi}\frac{1}{2\sin^2\frac{\delta}{2}}\,dt \le$$

$$\le \frac{2M}{\pi}\frac{1}{n+1}\frac{1}{2\sin^2\frac{\delta}{2}}\cdot\pi \to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Определение 10.3 *Выражение*

$$a_0+\sum_{k=0}^{n} a_k\cos kx + b_k\sin kx = P_n(x)$$

называется тригонометрическим полиномом.

Теорема 10.2 (Теорема Вейерштрасса) *Если $f(x)$ непрерывна и 2π периодична то существует последовательность полиномов $P_n(x) \overset{\rightarrow}{\rightarrow} f(x)$ на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Надо в качестве $p_n(x)$ выбрать $K_n(x)$ и воспользоваться теоремой 10.1. □

11 Ряд Фурье функции с произвольным периодом

Пусть $f(x)$ имеет период $2T$ $(T > 0)$. Найдем ее разложение в ряд Фурье.
Постановка задачи. Пусть $f(x)$ имеет период $2T$ и $f \in L(-T, T)$. Найти разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье.
Решение. Функция $f\left(x \cdot \frac{T}{\pi}\right)$ имеет период 2π. В самом деле,

$$f\left((x+2\pi) \cdot \frac{T}{\pi}\right) = f\left(x \cdot \frac{T}{\pi} + 2T\right) = f\left(x \cdot \frac{T}{\pi}\right).$$

Поэтому для $f\left(x \cdot \frac{T}{\pi}\right)$ можно записать ряд Фурье

$$f\left(x \cdot \frac{T}{\pi}\right) \sim \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k \cos kx + \tilde{b}_k \sin kx \tag{11.1}$$

и

$$\tilde{a}_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(x \cdot \frac{T}{\pi}\right) dx = \left|\frac{xT}{\pi} = \xi\right| = \frac{1}{T}\int\limits_{-T}^{T} f(\xi)\, d\xi.$$

$$\tilde{a}_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(x \cdot \frac{T}{\pi}\right) \cos kx\, dx = \left|\frac{xT}{\pi} = \xi\right| = \frac{1}{T}\int\limits_{-T}^{T} f(\xi) \cos \frac{\pi}{T}\xi\, d\xi, \tag{11.2}$$

$$\tilde{b}_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(x \cdot \frac{T}{\pi}\right) \sin kx\, dx = \left|\frac{xT}{\pi} = \xi\right| = \frac{1}{T}\int\limits_{-T}^{T} f(\xi) \sin \frac{\pi}{T}\xi\, d\xi. \tag{11.3}$$

В (11.1) сделаем замену $\frac{xT}{\pi} = \xi$, получим

$$f(\xi) \sim \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k \cos k\frac{\pi}{T}\xi + \tilde{b}_k \sin k\frac{\pi}{T}\xi \tag{11.4}$$

Таким образом, ряд Фурье функции с произвольным периодом имеет вид (11.4) и коэффициенты a_k и b_k вычисляются по формулам (11.2) и (11.3).

12 Ряд Фурье функции с произвольным периодом в комплексной форме

Пусть $f(x)$ имеет период $2T$. Тогда

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\frac{\pi}{T}x}$$

и

$$c_k = \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} f(x)e^{-ik\frac{\pi}{T}x}\,dx$$

Доказывается аналогично §11. Доказать самостоятельно.

13 Интеграл Фурье

Постановка задачи. Пусть $f(x)$ определена на $\mathbb{R}$ и не является периодической. Как записать ее в виде ряда Фурье? Это невозможно, т.к. получится периодическая функция. А как можно? Рассмотрим следующий подход к решению этой задачи.

Пусть $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Дини, и $f(x)$ $2T$ периодична. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\frac{\pi}{T}x}, \quad c_k = \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} f(x)e^{-ik\frac{\pi}{T}x}\,dx.$$

Подставляя коэффициенты в ряд, получим

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} f(t)e^{-ik\frac{\pi}{T}t}\,dt\cdot e^{ik\frac{\pi}{T}x} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} f(t)e^{-ik\frac{\pi}{T}(x-t)}\,dt.$$

Обозначим $\omega_n = \frac{\pi}{T}n$. Тогда $\Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{T} \Rightarrow$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\Delta\omega_n \int\limits_{-T}^{T} f(t)e^{i\omega_n(x-t)}\,dt.$$

Правую часть можно рассматривать как интегральную сумму функции

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-T}^{T} f(t)e^{i\omega(x-t)}\,dt$$

при фиксированном x. Переходя к пределу при $T \to +\infty$, получаем, что $\Delta\omega_n \to 0$. И в пределе получим интеграл, т.е.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega(x-t)}\,dt. \tag{13.1}$$

Равенство (13.1) запишем в виде

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt.$$

Обозначим

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt \tag{13.2}$$

Тогда

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x}\, dx. \tag{13.3}$$

Определение 13.1 *Интеграл в (13.2) называется преобразованием Фурье. Интеграл в (13.3) называется обратным преобразованием Фурье.*

Замечание. Приведенные рассуждения не являются строгим доказательством. Можно доказать, что равенства (13.2) и (13.3) справедливы, если их понимать не поточечно, а по норме пространства $L_2(\mathbb{R})$.

Теорема 13.1 *Пусть $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ и пусть*

$$f_N(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-N}^{N} f(t) e^{-i\omega t}\, dt.$$

Тогда существует функция $\hat{f}(\omega) \in L_2(\mathbb{R})$ такая, что

$$\hat{f}(\omega) = \lim_{N\to\infty} f_N(\omega),$$

причем равенство понимается по норме $L_2(\mathbb{R})$, т.е.

$$\lim_{N\to\infty} ||\hat{f}(\omega) - f_N(\omega)||_{L_2(\mathbb{R})} = 0.$$

Таким образом, равенство (13.3) есть условная запись того, что

$$\hat{f}(\omega) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-N}^{N} f(t) e^{-i\omega t}\, dt.$$