ISSN 1609-4751

МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА

Сборник научных трудов

ВЫПУСК 22

Саратов
ИЗДАТЕЛЬСТВО САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2020

УДК [51+531]
ББК (22.1+22.2)я43
М34

М34 **Математика. Механика :** сб. науч. тр. – Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2020. – Вып. 22. – 80 с. : ил.

Сборник содержит статьи сотрудников и аспирантов механико-математического факультета Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского. В сборнике представлены исследования по алгебре, геометрии, дискретной математике, математическому анализу, спектральной теории операторов, теории приближений, математической экономике, биомеханике, механике деформируемого твёрдого тела, оптимальному управлению движением космического аппарата, механике жидкости и газа и их приложениям.

Для научных работников, аспирантов и специалистов в области математики и механики.

УДК [51+531]
ББК (22.1+22.2)я43

ISSN 1609-4751

УДК 517.984

Н. П. Бондаренко, А. В. Гайдель

ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ С КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Поступила 06.09.2020 г.

В статье получены локальная разрешимость и устойчивость задачи восстановления оператора Штурма – Лиувилля с комплекснозначным потенциалом по обобщенным спектральным данным. В случае вещественного потенциала эта задача полностью изучена (см. [1]). Обратные задачи для несамосопряженных операторов Штурма – Лиувилля рассматривались в [2–4]. В несамосопряженном случае собственные значения оператора могут быть кратными и распадаться при малом возмущении спектра, что создает дополнительные трудности при исследовании устойчивости решения обратных задач. В данной работе построены численные примеры сохранения устойчивости при изменении кратностей.

Рассмотрим краевую задачу Штурма – Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in (0, \pi), \tag{1}$$

$$y(0) = y(\pi) = 0, \tag{2}$$

где $q \in L_2(0, \pi)$ – комплекснозначная функция, называемая *потенциалом*, λ – спектральный параметр. Краевая задача (1)–(2) имеет счетное множество собственных значений, обладающих асимптотикой

$$\sqrt{\lambda_n} = n + O\left(n^{-1}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Без ограничения общности будем считать, что кратные собственные значения идут подряд: $\lambda_n = \lambda_{n+1} = \ldots = \lambda_{n+m_n-1}$, где m_n – кратность собственного значения λ_n. Обозначим

$$\mathbb{S} := \{1\} \cup \{n \colon (n-1) \in \mathbb{N},\, \lambda_{n-1} \neq \lambda_n\}.$$

Пусть $\Phi(x,\lambda)$ – решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям $\Phi(0,\lambda)=1$, $\Phi(\pi,\lambda)=0$. Положим $M(\lambda)=\Phi'(0,\lambda)$. Функция $M(\lambda)$ мероморфна в λ-плоскости с полюсами λ_n, $n\in\mathbb{S}$, соответствующих кратностей m_n. Обозначим

$$M_{n+\nu} := \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n}(\lambda-\lambda_n)^{\nu}M(\lambda), \quad n\in\mathbb{S}, \quad \nu=\overline{0,m_n-1}.$$

Обратная задача 1. По обобщенным спектральным данным $G := \{\lambda_n, M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ построить q.

Обозначим через $N(q)$ наименьший индекс, при котором $m_n=1$ для всех $n>N$. При помощи метода из [4] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть q – комплекснозначная функция из $L_2(0,\pi)$ и $N=N(q)$. Тогда существует число $\delta_0>0$ (зависящее от q), при котором для любого $\delta\in(0,\delta_0]$ и любых комплексных чисел $\tilde G=\{\tilde\lambda_n,\tilde M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, удовлетворяющих условиям*

$$\sqrt{\sum_{n=N+1}^{\infty}(|\lambda_n-\tilde\lambda_n|^2+n^{-2}|M_n-\tilde M_n|^2)}\le\delta,$$

$$\tilde\lambda_n\ne\tilde\lambda_k, \quad n\ne k, \quad n,k\in\mathbb{N},$$

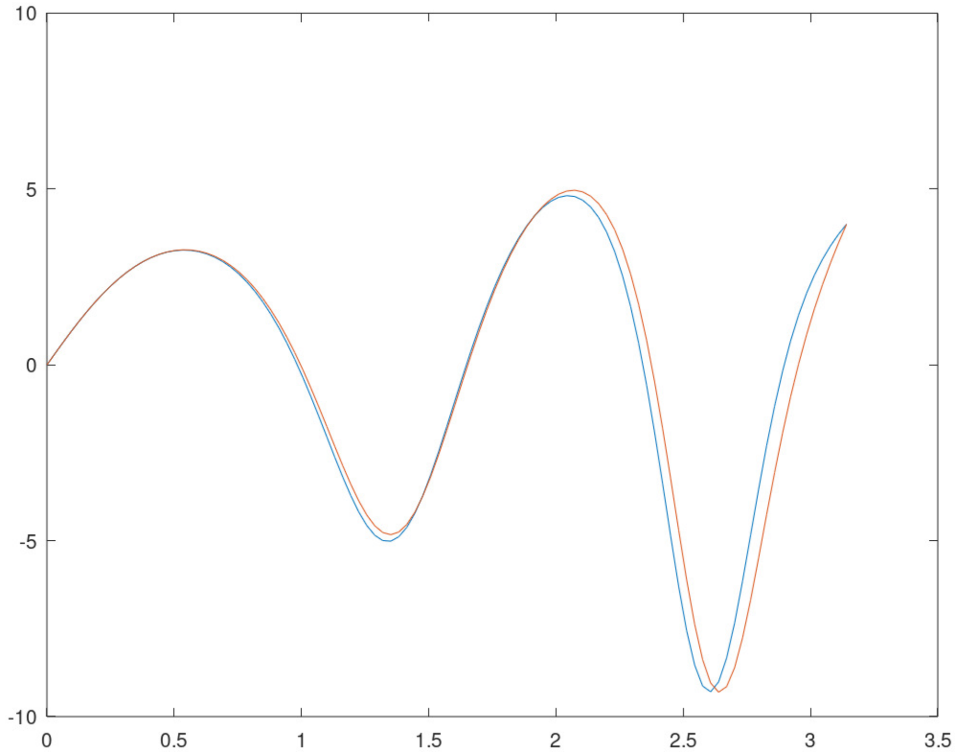
$$\left.\begin{array}{l}
\left|\sum\limits_{j=0}^{m_k-1}(\tilde\lambda_{k+j}-\lambda_k)^s\tilde M_{k+j}-M_{k+s}\right|\le\delta, \quad s=\overline{0,m_k-1},\\
\left|\sum\limits_{j=0}^{m_k-1}(\tilde\lambda_{k+j}-\lambda_k)^s\tilde M_{k+j}\right|\le\delta, \quad s=\overline{m_k,2(m_k-1)},\\
|\tilde\lambda_{k+j}-\lambda_k|\le\delta^{1/m_k}, \quad |\tilde M_{k+j}|\le\delta^{(1-m_k)/m_k},
\end{array}\right\} \quad k\in\mathbb{S},\ k\le N,$$

существует комплекснозначная функция $\tilde q\in L_2(0,\pi)$, являющаяся решением обратной задачи 1 по данным $\tilde G$. Кроме того, $\|q-\tilde q\|_{L_2(0,\pi)}\le C\delta$, где константа C зависит только от q.

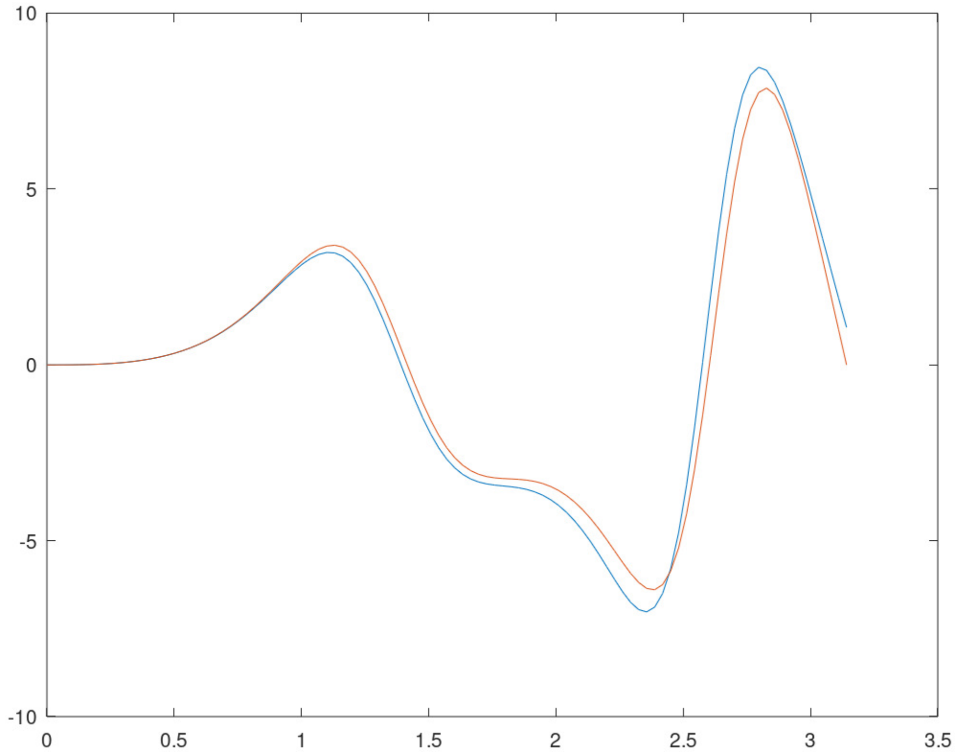
Пример 1. Пусть $m_1=2$, $m_n=1$ при $n\ge3$, т.е. $N=2$. Построим специальное семейство данных $\tilde G=\{\tilde\lambda_n,\tilde M_n\}$, «близких» к G в смысле теоремы 1. Фиксируем $\delta>0$ и положим

$$\begin{array}{c}
a:=\frac{M_2}{2}, \quad c:=\frac{M_1}{a}, \quad \tilde\lambda_1:=\lambda_1+\sqrt{\delta}, \quad \tilde\lambda_2:=\lambda_1-\sqrt{\delta}+c\delta,\\
\tilde M_1:=\frac{a}{\sqrt{\delta}}+M_1, \quad \tilde M_2:=-\frac{a}{\sqrt{\delta}}, \qquad \tilde\lambda_n:=\lambda_n, \quad \tilde M_n:=M_n, \quad n\ge3.
\end{array} \tag{3}$$

При достаточно малых $\delta>0$ для данных $\tilde G$ выполнено утверждение теоремы 1. Заметим, что собственные значения $\tilde\lambda_1$, $\tilde\lambda_2$ $\sqrt{\delta}$–близки к λ_1, а величины $\tilde M_1$, $\tilde M_2$ неограниченно возрастают при $\delta\to0$. При этом потенциал $\tilde q$ $C\delta$–близок к q в L_2-норме. Данная особенность подтверждается численными экспериментами.



а



б

Графики $\operatorname{Re} q(x)$, $\operatorname{Re} \tilde{q}(x)$ $(а)$ и $\operatorname{Im} q(x)$, $\operatorname{Im} \tilde{q}(x)$ $(б)$ при $\delta = 0.2$

Пусть в примере 1 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $M_1 = -\frac{2}{\pi}$, $M_2 = -\frac{3i}{\pi}$, $\lambda_n = n^2$, $M_n = -\frac{2n^2}{\pi}$ при $n \geq 3$ и $\{\tilde{\lambda}_n, \tilde{M}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ построены по формуле (3). Графики потенциалов $q(x)$ и $\tilde{q}(x)$ при $\delta = 0.2$ представлены на рисунке.

При меньших значениях δ результаты преставлены в таблице.

δ	$\lVert q - \tilde{q}\rVert_C$	$\tilde{\lambda}_1$	$\tilde{\lambda}_2$	$\tilde{M}_1$	$\tilde{M}_2$
0.1	1.0690	2.316	$1.684 - 0.133i$	$0.637 + 1.510i$	$0.0 - 1.510i$
0.05	0.53796	2.224	$1.776 - 0.067i$	$0.637 + 2.135i$	$0.0 - 2.135i$
0.02	0.21428	2.141	$1.859 - 0.027i$	$0.637 + 3.376i$	$0.0 - 3.376i$
0.01	0.01651	2.100	$1.900 - 0.013i$	$0.637 + 4.775i$	$0.0 - 4.775i$
0.005	0.052951	2.071	$1.929 - 0.007i$	$0.637 + 6.752i$	$0.0 - 6.752i$
0.002	0.021050	2.045	$1.955 - 0.003i$	$0.637 + 10.676i$	$0.0 - 10.676i$
0.001	0.010488	2.032	$1.968 - 0.013i$	$0.637 + 15.099i$	$0.0 - 15.099i$

Для решения обратной задачи по кратным собственным значениям был разработан численный метод на основе алгоритма из [2]. Очевидно, что норма $\lVert q - \tilde{q}\rVert$ убывает пропорционально δ, в то время как разности собственных значений $|\lambda_n - \tilde{\lambda}_n|$ при $n = 1, 2$ пропорциональны $\sqrt{\delta}$, а $|\mathrm{Im}\,\tilde{M}_n|$ при $n = 1, 2$ растут. Таким образом, построено семейство «близких» потенциалов с разными кратностями собственных значений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-31-70005).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. 384 с.

2. *Buterin S. A., Shieh C.-T., Yurko V. A.* Inverse spectral problems for non-selfadjoint second-order differential operators with Dirichlet boundary conditions // Boundary Value Problems. 2013. Vol. 2013. P. 1–24. Article number: 120.

3. *Buterin S., Kuznetsova M.* On Borg's method for non-selfadjoint Sturm-Liouville operators // Anal. Math. Phys. 2019. Vol. 9. P. 2133–2150.

4. *Bondarenko N. P.* Local solvability and stability of the inverse problem for the non-self-adjoint Sturm-Liouville operator // Boundary Value Problems. 2020. Vol. 2020. P. 1–13. Article number: 123.

D. A. Bredikhin

ON SEMIGROUPS OF RELATIONS WITH THE OPERATION OF REFLEXIVE-RESTRICTIVE MULTIPLICATION

Received 7 September 2020

In this paper, we present the proof of announced in [1] results concerning the class of semigroups of relations with the operation of reflexive-restrictive multiplication. Some other results concerning classes of semigroups and groupoids of relations with Diophantine operations [2,3] can be found in [1, 4–12].

A partially ordered semigroup is an algebraic system $(A, \cdot, \leq)$, where $(A, \cdot)$ is a semigroup and $\leq$ is a partial order relation on A that is compatible with multiplication, i.e., $x \leq y$ implies $xz \leq yz$ and $zx \leq zy$. Let $Rel(U)$ be the set of all binary relation on U. We concentrate our attention on the associative operation $*$ on $Rel(U)$ that is defined as follows: for any relations ρ and σ from $Rel(U)$, put

$$\rho * \sigma = \{(x, y) \in U \times U : (x, x) \in \rho \wedge (x, y) \in \sigma\}.$$

Note that the result of this operation coincides with the restriction of the second multiplier on the reflex projection of the first one. For this reason, we will treat this operation as operation of reflexive-restrictive multiplication. It is clear that the set-theoretic inclusion $\subseteq$ is compatible with respect this operation. Denote by $R\{*\}$ (respectively, $R\{*, \subseteq\}$) the class of all semigroups (partially ordered semigroups) isomorphic to semigroups (partially ordered semigroups) of relations with the operation of reflexive-restrictive multiplication.

Theorem. *The class $R\{*, \subset\}$ forms a quasi-variety and does not form a variety in the class of all partial ordered semigrops. A partially ordered semigroup $(A, \cdot, \leq)$ belongs to the class $R\{*, \subset\}$ if and only if it satisfies the folloing identities and quasi-identities:*

$$x^2 y = xy, \tag{1}$$

$$xyz = yxz, \tag{2}$$

$$xy \leq y, \tag{3}$$

$$x \leq yz \Rightarrow x \leq yx. \tag{4}$$

Corollary 1. *A partially ordered semigroup* $(A, \cdot, \leq)$ *belongs to the variety generated by the class* $R\{*, \subset\}$ *if and only if it satisfies identities* (1) – (3).

Corollary 2. *The class* $R\{*\}$ *forms a variety. A semigroup* $(A, \cdot)$ *belongs to* $R\{*\}$ *if and only if it satisfies identities* (1) – (2).

Proofs. Necessity of conditions (1) – (4) is carried out by direct verification. To prove sufficiency, assume that $(A, \cdot, \leq)$ satisfies the conditions (1) – (4). For given $x \in A$, put $U_x = \{(x, 0), (x, 1)\}$. Let us define the mapping $F_x : A \to Rel(U_x)$ in the following way:

1) $((x, 0), (x, 1)) \in F_x(a)$ if and only if $x \leq a$;

2) $((x, 0), (x, 0)) \in F_x(a)$ if and only if $x \leq ax$.

Put $U = \bigcup\{U_x : x \in A\}$ and $F(a) = \bigcup\{F_x(a) : x \in A\}$. It is clear that $a \leq b$ implies $F(a) \subseteq F(b)$. Suppose that $F(a) \subseteq F(b)$. Then $F_a(a) \subseteq F_a(b)$. Since $((a, 0), (a, 1)) \in F_a(a)$, we have $((a, 0), (a, 1)) \in F_a(b)$, hence $a \leq b$. Thus, $a \leq b$ if and only if $F(a) \subseteq F(b)$.

Let us show that $F(ab) \subseteq F(a) * F(b)$. Suppose that $((x, 0), (x, 1)) \in F(ab)$, then $((x, 0), (x, 1)) \in F_x(ab)$. Hence $x \leq ab$. Using (4) we obtain $x \leq ax$, and using (3) we have $x \leq b$. Hence $((x, 0), (x, 0)) \in F(a)$ and $((x, 0), (x, 1)) \in F(b)$, i.e., $((x, 0), (x, 1)) \in F(a) * F(b)$. Further, suppose that $((x, 0), (x, 0)) \in F(ab)$, then $((x, 0), (x, 0)) \in F_x(ab)$. Hence $x \leq abx$. Using (3) we obtain $x \leq ax$ and $x \leq bx$. It follows that $((x, 0), (x, 0)) \in F(a)$ and $((x, 0), (x, 0)) \in F(b)$, i.e., $((x, 0), (x, 0)) \in F(a) * F(b)$. Conversely, assume that $((x, 0), (x, 1)) \in$ $\in F(a) * F(b)$, then $((x, 0), (x, 1)) \in F_x(a) *$ $* F_x(b)$. Hence $x \leq ax$ and $x \leq b$. It follows that $x \leq ax \leq ab$, i.e., $((x, 0), (0, 1)) \in F(ab)$. Further, suppose that $((x, 0), (x, 0)) \in F(a) * F(b)$, then $((x, 0), (x, 0)) \in F_x(a) * F_x(b)$. Hence $x \leq ax$ and $x \leq bx$. It follows that $x \leq ax \leq abx$, i.e., $((x, 0), (x, 0)) \in F(ab)$. Thus, F is an isomorphism of $(A, \cdot, \leq)$ into $(Rel(U), *, \subseteq)$, i.e., $(A, \cdot, \leq)$ belongs to $R\{*, \subset\}$.

Show that the classes class $R\{*, \subset\}$ does not form a variety in the class of all partial ordered semigrops. Let us consider the groupoid on the set $A = \{a, b, c, d\}$ given by the following table

$\cdot$	a	b	c	d
a	b	b	c	d
b	b	b	c	d
c	c	c	d	d
d	c	c	d	d

By a direct check, we verify that this groupoid forms a semigroup and satisfies identities (1) and (2). We set on A the partial order relation $\leq$ by putting $d < c < b < a$. By a direct check, we make sure that this relation is compatible with multiplication and identities (3) is satisfied. On the other hand we have $b < dd$ and $db = c < b$, i.e., quasi-identity (3) is not satisfied. Therefor, the class $R\{*, \subset\}$ does not form a variety in the class of all partial ordered semigroups. This completes the proof of the theorem.

To prove Corollary 1, note that it is not difficult to show by direct verification that a free partially ordered semigroup of the variety defined by identities (1) – (3) satisfies quasi-identity (4). It follows that the identities (1) – (3) form a basis of the variety generated by the class $R\{*, \subset\}$.

To prove Corollary 2, let us suppose that $(A, \cdot)$ satisfies the identities (1) and (2). Define on A the relation $\leq$: $a \leq b$ if and only if $a = b$ or $a = cb$ for some $c \in A$. It is easy to check that $(A, \cdot, \leq)$ is a partially ordered semigroup satisfying the conditions (3) and (4). It folows that $(A, \cdot)$ belongs to $R\{*\}$.

REFERENCES

1. Bredikhin D. A. On semigroups of relations with primitive-positive operations of rank two. *Mathematika. Mekhanika : sbornik nauchnykh trudov* [Mathematics. Mechanics : collected papers]. Saratov, Izdatel'stvo Saratovskogo universiteta, 2019, iss. 21, pp. 10–11 (in English).

2. Bredikhin D. A. On quasi-identities of algebras of relations with Diophantine operations. *Sib. Math. J.*, 1997, vol. 38, pp. 23–33.

3. Bredikhin D. A. On relation algebras with general superpositions. *Colloq. Math. Soc. Janos Bolya*, 1994, vol. 54, pp. 11–124.

4. Wagner V. V. Restrictiv semigroups. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1962, no. 6, pp. 19–27 (in Russian).

5. Schein B. M. Relation algebras and function semigroups. *Semigroup Forum*, 1970, vol. 1, pp. 1–62.

6. Bredikhin D. A. On relation algebras with general superpositions. *Colloq. Math. Soc. J. Bolyai.*, 1991, vol. 54, pp. 111–124.

7. Bredikhin D. A. On Varieties of Groupoids of Relations with Operation of Binary Cylindrification. *Algebra Universalis*, 2015, vol. 73, pp. 43–52.

8. Bredikhin D. A. On partially ordered semigroups of relations with domino operations. *Semigroup Forum*, 2016, vol. 92, pp. 198–213.

9. Bredikhin D. A. Identities of Groupoids of Relations With Operation of Cylindered Intersection. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 2018, vol. 62, pp. 9–16 (in Russian).

10. Bredikhin D. A. On generalized subreducts of Tarski's algebras of relations with the operation of bi-directional intersection. *Algebra Universalis*, 2018, vol. 79, pp. 77–92.

11. Bredikhin D. A. On Classes of Generalized Subreducts of Tarski's Relation Algebras with One Diophantine Binary Operation. *Mathematical Notes*, 2019, vol. 106, pp. 872–884.

12. Bredikhin D. A. On Algebras of Relations with Operations of Left and Right Reflexive Product. *Lobachevskii J. Math.*, 2020, vol. 41, pp. 160–167.

УДК 517.51

Е. В. Гудошникова

ПРОИЗВОДНАЯ И ДРОБНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ ОПЕРАТОРОВ БАСКАКОВА

Поступила 08.09.2020 г.

В статье рассматриваются производные порядка $\alpha \in (0;1]$ линейных положительных операторов Баскакова и доказывается, что производная оператора сходится к соответствующей производной функции. Ранее аналогичные результаты были получены автором для операторов Саса – Миракьяна.

Рассмотрим операторы, предложенные В. А. Баскаковым [1]:

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\tfrac{k}{n}\right) \tbinom{n+k-1}{k} \tfrac{x^k}{(1+x)^{n+k}}, \quad x \le 0, \ n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Хорошо известно, что для любой непрерывной функции последовательность операторов сходится к функции, причем на ограниченном отрезке $[0;b]$ сходится равномерно.

Найдем производные операторов (1) для непрерывно дифференцируемой функции:

$$B'_n(f;x) = \tfrac{d}{dx}B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\tfrac{k}{n}\right) \tbinom{n+k-1}{k} \left[\tfrac{kx^{k-1}}{(1+x)^{n+k}} - \tfrac{(n+k)x^k}{(1+x)^{n+k+1}}\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\tfrac{k+1}{n}\right) \tbinom{n+k}{k+1} \tfrac{(k+1)x^k}{(1+x)^{n+k+1}} - \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\tfrac{k}{n}\right) \tbinom{n+k-1}{k} \tfrac{(n+k)x^k}{(1+x)^{n+k+1}} =$$

$$= n\sum_{k=0}^{\infty} \left[f\left(\tfrac{k+1}{n}\right) - f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right] \tbinom{n+k}{k} \tfrac{x^k}{(1+x)^{n+k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} f'\left(\tfrac{k+\theta_k}{n}\right) \tbinom{n+k}{k} \tfrac{x^k}{(1+x)^{n+k+1}},$$

где $\theta_k \in (0;1)$.

Тогда, так как $B_n(1;x) = 1$, имеем:

$$|B'_n(f;x) - f'(x)| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} f'\left(\tfrac{k+\theta_k}{n}\right) \tbinom{n+k}{k} \tfrac{x^k}{(1+x)^{n+k+1}} - f'(x) B_{n+1}(1;x)\right|.$$

Поскольку $|f(t) - f(x)| \le \left(1 + \frac{(t-x)^2}{\delta^2}\right) \omega(f;\delta)$, где $\omega(f;\delta)$ – модуль непрерывности функции f, получаем, что

$$|B'_n(f;x) - f'(x)| \le \omega\left(f; \tfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \left[1 + n\left(\tfrac{k+\theta_k}{n} - x\right)^2\right] \tbinom{n+k}{k} \tfrac{x^k}{(1+x)^{n+k+1}} \le$$

$$\leq \omega\left(f;\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\left[\left(1+\tfrac{1}{n}\right)B_{n+1}(1;x)+nB_{n+1}((t-x)^2;x)+2B_{n+1}(|t-x|^2;x)\right].$$

Учитывая, что $B_n(1;x)=1$, $B_n((t-x)^2;x)=\frac{x(1+x)}{n}$, и применяя к последнему слагаемому неравенство Коши–Буняковского, получим:

$$|B_n'(f;x)-f'(x)|\leq \omega\left(f;\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\left[\tfrac{n+1}{n}+\tfrac{nx(1+x)}{n+1}+2\sqrt{\tfrac{x(1+x)}{n+1}}\right], \qquad (2)$$

откуда следует, что

$$B_n'(f;x)\to f'(x).$$

Для $\alpha\in(0;1)$ рассмотрим левосторонние дробные производные Римана–Лиувилля операторов (1):

$$D^\alpha B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\tfrac{k}{n}\right)\binom{n+k-1}{k}D^\alpha\left(\tfrac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\right). \qquad (3)$$

Применяя свойства дробной производной, можно показать, что операторы (3) не являются положительными, но при этом

$$D^\alpha B_n(1;x)=D^\alpha(1),$$

$$D^\alpha B_n(t;x)=D^\alpha(x),$$

$$D^\alpha B_n(t^2;x)\to D^\alpha(x^2).$$

Эти соотношения аналогичны условиям известной в теории линейных положительных операторов теоремы Коровкина, но, поскольку операторы (3) не являются положительными, теорема Коровкина не может быть применена для доказательства их сходимости.

Как известно (см., например, [2]), для абсолютно непрерывной функции имеет место представление

$$D^\alpha f(x)=\tfrac{f(0)}{\Gamma(1-\alpha)}x^{-\alpha}+\tfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^x \tfrac{f'(t)}{(x-t)^\alpha}\,dt, \quad f\in AC[0;b],\ x\in[0;b],$$

применяя которое, с учетом неравенства (2), получим:

$$\left|D^\alpha B_n(f;x)-D^\alpha f(x)\right|=\left|\tfrac{B_n(f;0)-f(0)}{\Gamma(1-\alpha)}x^{-\alpha}+\tfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^x \tfrac{B_n'(f;t)-f'(t)}{(x-t)^\alpha}\,dt\right|\leq$$

$$\leq \tfrac{\omega\left(f;\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^x\left(\tfrac{n+1}{n}+\tfrac{nt(1+t)}{n+1}+2\sqrt{\tfrac{t(1+t)}{n+1}}\right)\tfrac{dt}{(x-t)^\alpha}.$$

Непосредственным вычислением находим:

$$\int\limits_0^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \quad \int\limits_0^x \frac{t\,dt}{(x-t)^\alpha} = \frac{x^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}, \quad \int\limits_0^x \frac{t^2 dt}{(x-t)^\alpha} = \frac{2x^{3-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)(3-\alpha)}.$$

Кроме того, очевидно,

$$\int\limits_0^x \frac{\sqrt{t(1+t)}}{(x-t)^\alpha}\,dt < \int\limits_0^x \frac{\sqrt{x(1+x)}}{(x-t)^\alpha}\,dt = \frac{x^{1-\alpha}\sqrt{x(1+x)}}{1-\alpha}.$$

Поэтому

$$\left|D^\alpha B_n(f;x) - D^\alpha f(x)\right| \le$$

$$\le \omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left[\frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\left(\frac{n+1}{n} + 2\sqrt{\frac{x(1+x)}{n+1}}\right) + \frac{n}{n+1}\frac{x^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}\left(1+\frac{2x}{3-\alpha}\right)\right],$$

откуда следует, что для $\alpha \in (0;1)$

$$D^\alpha B_n(f;x) \to D^\alpha f(x).$$

Ранее в работе [3] аналогичные результаты были получены для операторов Саса–Миракьяна. Доказательства для обоих операторов во многом похожи, но каждое имеет ряд особенностей, которые мешают обобщить результат сразу на некоторый класс операторов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Баскаков В. А.* Об одной последовательности линейных положительных полиномиальных операторов // Учен. зап. Калинин. гос. пед. ин-та. 1969. Т. 59. С. 79–99.

2. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск : Наука и техника, 1987. 688 с.

3. *Гудошникова Е. В.* Сходимость последовательности натуральных и дробных производных операторов Саса–Миракьяна // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2016. Вып. 18. С. 22–24.

УДК 512.53

Н. А. Зубкова, В. Б. Поплавский

О БУЛЕВО-МАТРИЧНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ВИДА $XA \supseteq B$, $AX \supseteq B$

Поступила 17.09.2020 г.

В статье сравниваются два достаточных условия совместности неравенств вида $XA \supseteq B$ или $AX \supseteq B$, где A и B – матрицы одинаковых размеров с элементами из булевой алгебры $\mathbf{B_2} = \{0,1\}$, а квадратная матрица

X не известна. Первое условие указывается в следующем утверждении Люца, доказательство которого можно найти в [1] :

Теорема 1. *Пусть A и B булевы матрицы одного и того же порядка, а квадратная матрица I состоит из единиц. Если существует матрица C такая, что $C \subseteq A$ и $B \subseteq CI$, тогда неравенство $AX \supseteq B$ имеет решение.*

Второе утверждение, полученное Поплавским [2], формулируется в терминах минорных рангов как

Теорема 2. *Пусть даны булева матрица A размера $m \times n$ и B – столбец размера $m \times 1$ с элементами из булевой алгебры $\mathbf{B_2} = \{0, 1\}$. Если столбец B не увеличивает ранга матрицы A при приписывании его к столбцам матрицы A, то матричное неравенство $B \subseteq AX$ имеет решение.*

Доказывается большая эффективность минорно-рангового подхода для установления разрешимости неравенств $XA \supseteq B$, $AX \supseteq B$. Точнее, условия разрешимости булево-матричных неравенств вида $XA \supseteq B$, $AX \supseteq B$ с использованием минорно-ранговых функций являются более сильными, чем достаточные условия разрешимости этих неравенств в формулировке Люца.

Следующее определение использует понятие булева детерминанта, определение которого можно найти в работах [2, 3].

Определение 1. *Минорным рангом* ненулевой матрицы назовем натуральное число k $(1 \leq k \leq min(m, n))$, удовлетворяющее двум условиям: существует квадратный блок M_k порядка k матрицы A, детерминант которого отличен от нуля, и если из матрицы A можно построить $(k + + 1)$-блоки, то их детерминанты равны нулю.

Ранг нулевой матрицы считается равным нулю.

Доказательства приведённых ниже теорем 3 и 4 можно найти в [2]. Они указывают на достаточные условия разрешимости некоторых типов булево-матричных уравнений и неравенств, сформулированные в терминах минорно-ранговых функций.

Теорема 3. *Пусть A – булева матрица размера $m \times n$ и B – столбец размера $m \times 1$ с элементами из тривиальной булевой алгебры $\mathbf{B_2} = = \{0, 1\}$. Если столбец B не увеличивает ранга матрицы A при приписывании его к столбцам матрицы A, то уравнение*

$$AX = AY \cup B,$$

где X, Y – столбцы неизвестных, имеет решение.

Теорема 4. *Пусть даны булева матрица A размера $m \times n$ и B – столбец размера $m \times 1$ с элементами из булевой алгебры $\mathbf{B_2} = \{0, 1\}$.*

Если столбец B не увеличивает ранга матрицы A при приписывании его к столбцам матрицы A, то система матричных неравенств

$$|AX - AY| \subseteq B \subseteq A(X \cup Y),$$

где X, Y – столбцы неизвестных, имеет решение.

Теорема 5. *Пусть даны булевы матрицы A и B размера $m \times n$ с элементами из булевой алгебры $\mathbf{B_2} = \{0,1\}$. Если каждый из столбцов B не увеличивает ранга матрицы A при приписывании его к столбцам матрицы A, то матричное неравенство*

$$B \subseteq AX,$$

где X – квадратная матрица неизвестных, имеет решение.

Доказательство. Пусть каждый из столбцов матрицы B не увеличивает минорного ранга при приписывании его к столбцам $\{A_1 \ldots A_n\}$ матрицы A. Учитывая предыдущую теорему, система матричных неравенств

$$|AX - AY| \subseteq B \subseteq A(X \cup Y)$$

имеет решение. Следовательно, неравенство $B \subseteq A(X \cup Y)$ имеет решение. Переобозначив столбец неизвестных $(X \cup Y)$ через X, получаем, что матричное неравенство $B \subseteq AX$ имеет решение, если каждый столбец матрицы B не увеличивает ранга матрицы A. Что и требовалось доказать.

Известно, что неравенство $B \supseteq AX$ всегда совместно. Однако следующие примеры показывают, что для неравенства $B \subseteq AX$ обратное утверждение для теоремы 5 не справедливо. Иными словами, если столбец B при приписывании увеличивает ранг матрицы A, то возможны как совместность, так и несовместимость булево-матричного неравенства $B \subseteq AX$.

Пример 1. Очевидно, что любой ненулевой столбец $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ является решением неравенства $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \supseteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ для матриц с элементами из $\mathbf{B}_2$. Однако столбец $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ увеличивает ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Неравенство $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \supseteq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ не имеет решения, и столбец $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ увеличивает ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Однако совместность матричного уравнения $AX = B$ (или $XA = B$) над любой булевой алгеброй, как показывает следующая теорема, всегда влечет то, что при приписывании всех столбцов матрицы B к столбцам матрицы A не изменяется минорный ранг матрицы A.

Теорема 6. *Пусть A и B – матрицы размера $m \times n$ и $m \times k$ соответственно над произвольной булевой алгеброй. Если уравнение $AX = B$ имеет решение, то $rank(A|B) = rankA$.*

Доказательство. Пусть уравнение $AX = B$ имеет решение. Тогда расширенную матрицу $(A|B)$, составленную из столбцов матриц A и B, можно представить в виде:

$$(A|B) = (A|AX) = A(E|X).$$

Так как минорный ранг произведения не превосходит рангов сомножителей [2], то $rank(A|B) = rankA(E|X) \leq rankA$. С другой стороны, очевидно, $rank(A|B) \geq rankA$. Получаем $rank(A|B) = rankA$. Что и требовалось доказать.

Теорема 7. *Пусть A и B – булевы матрицы одинаковых размеров с элементами из булевой алгебры $\mathbf{B_2} = \{0, 1\}$. Тогда утверждение теоремы Люца 1 является следствием теоремы Поплавского 5.*

Доказательство. Напомним условия из теоремы Люца 1 о совместности неравенства $AX \supseteq B$: существует матрица такая C, что $C \subseteq A$ и $B \subseteq CI$. Из этих условий следует, что $B \subseteq CI \subseteq AI$. Обозначим $AI = \tilde{B}$. Заметим, что каждый столбец матрицы $\tilde{B}$ является линейной комбинацией столбцов матрицы A. Следовательно, каждый столбец матрицы $\tilde{B}$ не увеличивает минорный ранг матрицы A при приписывании. Получаем, что неравенство $AX \supseteq \tilde{B}$ имеет решение на основании теоремы Поплавского 5. Тогда и неравенство $AX \supseteq B$ имеет решение, так как $B \subseteq \tilde{B}$. Что и требовалось доказать.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Поплавский В. Б.* Минорный ранг, нули определителя булевой матрицы и их приложения // Дискретная математика. 2011. Т. 23, вып. 3. С. 93–119.

2. *Поплавский В. Б.* Булевы матрицы и определители. LAP Lambert Academic Publishing KG, 2011. 192 с.

3. *Luce R. D.* A note on Boolean matrix theory // Proc. Am. Math. Soc. 1952. P. 382–388.

УДК 517.984

М. Ю. Игнатьев

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОСОБЕННОСТЬЮ

Поступила 30.09.2020 г.

Исследуется обратная спектральная задача для систем дифференциальных уравнений с особенностью. Впервые для систем изучаемого класса получена так называемая формула восстановления, выражающая искомую функцию через величины, определяемые в рамках конструктивной процедуры решения обратной задачи из основного уравнения.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$y' = (\rho B + x^{-1}A + q(x))y \tag{1}$$

со спектральным параметром ρ, где A и B – постоянные $n \times n$, $n > 2$ матрицы, $q(\cdot)$ – внедиагональная матрица-функция, которую в дальнейшем будем называть *потенциалом.*

Относительно матриц A и B мы будем предполагать выполненными следующие условия.

Условие 1. *Матрица A внедиагональна. Собственные значения $\{\mu_j\}_{j=1}^n$ матрицы A различны и удовлетворяют условию $\mu_j - \mu_k \notin \mathbb{Z}$ при $j \neq k$, кроме того, $Re\mu_1 < Re\mu_2 < \ldots < Re\mu_n$, $Re\mu_k \neq 0$, $k = \overline{1, n}$.*

Условие 2. *$B = diag(b_1, \ldots, b_n)$, элементы $b_1, \ldots, b_n$ – различные ненулевые комплексные числа, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и такие, что $\sum\limits_{j=1}^n b_j = 0$.*

Как хорошо известно, при выполнении условия 1 «невозмущенная система»

$$y' = (B + x^{-1}A)y \tag{2}$$

имеет фундаментальную матрицу вида $c(x) = (c_1(x), \ldots, c_n(x))$,

$$c_k(x) = x^{\mu_k}\hat{c}_k(x),$$

где $\hat{c}_k(\cdot)$ – целые функции.

Обозначим через Σ объединение прямых вида:

$$\Sigma = \bigcup_{(k,j): j \neq k} \{z : \mathrm{Re}(zb_j) = \mathrm{Re}(zb_k)\}.$$

Для любого $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ существует перестановка $R_1, \dots, R_n$ чисел $b_1, \dots, b_n$ такая, что $\mathrm{Re}(R_1 z) < \mathrm{Re}(R_2 z) < \dots < \mathrm{Re}(R_n z)$. Представим множество $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ в виде объединения непересекающихся открытых секторов $\mathcal{S}_\nu$ вида $\{z = r\exp(i\gamma), r \in (0, \infty), \gamma \in (\gamma_1, \gamma_2)\}$. В каждом из секторов $\mathcal{S}_\nu$ невозмущенная система (2) имеет фундаментальную матрицу $e(x) = (e_1(x), \dots, e_n(x))$ аналитическую в $\mathcal{S}_\nu$, непрерывную в $\overline{\mathcal{S}}_\nu \setminus \{0\}$ и такую, что имеет место следующая асимптотика:

$$e_k(x) = \mathrm{e}^{xR_k}(\mathfrak{f}_k + x^{-1}\eta_k(x)),\ \eta_k(x) = O(1),\ x \to \infty,\ x \in \overline{\mathcal{S}}_\nu,$$

где $(\mathfrak{f}_1, \dots, \mathfrak{f}_n) = \mathfrak{f}$ – матрица перестановок, такая что $(R_1, \dots, R_n) = (b_1, \dots, b_n)\mathfrak{f}$.

Предположим, что выполнено также следующее условие.

Условие информативности. *Для каждого из секторов $\mathcal{S}_\nu$ и для всех $k = \overline{2, n}$ числа*

$$\Delta_k^0 := \det(e_1(x), \dots, e_{k-1}(x), c_k(x), \dots, c_n(x))$$

отличны от 0.

Будем говорить, что внедиагональная матрица-функция $q(\cdot) \in L_1(0, \infty) \cap L_p(0, \infty)$ принадлежит классу G_0^p, если для каждого $k \in \{1, \dots, n\}$ характеристическая функция краевой задачи, порожденной системой (1) и условиями

$$y(x) = O(x^{\mu_k}), x \to 0,\ y(x) = o(\exp(\rho R_k x)), x \to \infty,$$

не обращается в нуль ни при каких ρ. Если $q(\cdot) \in G_0^p$, то (см. [1]) при любом $\rho \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ существует единственное решение $y(x), x \in (0, \infty)$ системы (1), обладающее свойствами:

$$y(x) = O(x^{\mu_k}), x \to 0,\ y(x) = \exp(\rho R_k x)(\mathfrak{f}_k + o(1)), x \to \infty.$$

В дальнейшем мы называем такое решение *k-м решением типа Вейля* и обозначаем его $\Psi_k(x, \rho)$. Определим матрицу $\Psi(x, \rho) := (\Psi_1(x, \rho), \dots, \Psi_n(x, \rho))$. Через $\Psi_0(x, \rho)$ обозначим матрицу $\Psi(x, \rho)$ для нулевого потенциала (можно показать, что при выполнении условия информативности $0 \in G_0^p$). Введем следующую *матрицу спектральных отображений*:

$$P(x, \rho) := \Psi(x, \rho)\Psi_0^{-1}(x, \rho).$$

Предположим, что сектора $\mathcal{S}_\nu$ занумерованы против часовой стрелки, обозначим через Σ_ν открытый луч, разделяющий $\mathcal{S}_\nu$ и $\mathcal{S}_{\nu+1}$. Обозначим через $P^{\pm}(x,\rho)$, где $\rho \in \Sigma_\nu$, предельные значения (существующие, если $q(\cdot) \in G_0^p$):

$$P^-(x,\rho) := \lim_{\xi\to\rho, \xi\in\mathcal{S}_\nu} P(x,\xi),\ P^+(x,\rho) := \lim_{\xi\to\rho, \xi\in\mathcal{S}_{\nu+1}} P(x,\xi).$$

Теорема 1. *Пусть $q(\cdot)\in G_0^p$ – абсолютно непрерывная внедиагональная матрица-функция, причём $q(0) = 0$. Обозначим через $\hat{q}_o(\cdot)$ внедиагональную матрицу-функцию такую, что $[B, \hat{q}_o(x)] = -q(x)$ при всех $x > 0$ (здесь и далее $[\cdot,\cdot]$ обозначает коммутатор матриц). Определим диагональную матрицу-функцию $d(x) = diag(d_1(x), \ldots, d_n(x))$, где*

$$d_k(x) := \int_x^\infty t^{-1} \left([\hat{q}_o(t), A]\right)_{kk}\, dt,$$

и положим: $\hat{q}(x) := \hat{q}_o(x) + d(x)$.

Предположим, что все функции $q_{ij}(\cdot), q'_{ij}(\cdot)$ и $\tilde{q}_{ij}(\cdot)$, где $\tilde{q}(x) := = \hat{q}'(x) + x^{-1}[\hat{q}(x), A]$, принадлежат $L_1(0,\infty) \cap L_p(0,\infty)$, причем $p > 2$.

Тогда справедлива следующая формула восстановления:

$$q(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Sigma \left[B, \hat{P}(x,\rho)\right]\, d\rho,$$

где $\hat{P}(x,\rho) = P^+(x,\rho) - P^-(x,\rho)$ и интеграл понимается как (существующий для каждого $x > 0$) предел:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Sigma \left[B, \hat{P}(x,\rho)\right]\, d\rho := \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma\cap\{|\rho|\le R\}} \left[B, \hat{P}(x,\rho)\right]\, d\rho.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 19-01-00102, 20-31-70005).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ignatyev M.* Spectral Analysis for Differential Systems with a Singularity // Results Math. 2017. Vol. 71. P. 1531—1555.

УДК 517.956.32+517.927.25

В. В. Корнев

РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОДНЫМИ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Поступила 10.09.2020 г.

Рассмотрим смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \quad x \in [0,1], \quad t \in [0,\infty), \tag{1}$$

$$u'_x(0,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u'_x(1,t) + \alpha_2 u(0,t) + \beta_2 u(1,t) = 0, \tag{3}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0, \tag{4}$$

где $q(x) \in L[0,1]$, α_1, α_2, β_1, β_2 – произвольные комплексные числа.

Под решением задачи (1)–(4) понимаем функцию $u(x,t)$, непрерывную вместе с $u'_x(x,t)$ и $u'_t(x,t)$, причем $u'_x(x,t)$ и $u'_t(x,t)$ абсолютно непрерывны по x и t соответсвенно, удовлетворяющую условиям (2)–(4) и почти всюду уравнению (1). Очевидно, для существования решения необходимо, чтобы $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ были абсолютно непрерывны и выполнялись равенства

$$\varphi'(0) + \alpha_1\varphi(0) + \beta_1\varphi(1) = \varphi'(1) + \alpha_2\varphi(0) + \beta_2\varphi(1) = 0. \tag{5}$$

В работе [1] был рассмотрен частный случай задачи (1)–(4) и было найдено обобщенное решение. Для этого потребовалось продолжить $\varphi(x)$ определенным образом на всю числовую ось. В нашем общем случае продолжение осуществляется по следующему правилу:

$$(\tilde\varphi(-x), \tilde\varphi(1+x))^T =$$

$$= (\tilde\varphi(x), \tilde\varphi(1-x))^T + 2M \int_0^x e^{M(x-t)} (\tilde\varphi(t), \tilde\varphi(1-t))^T \, dt, \quad x > 0, \tag{6}$$

где $\tilde\varphi(x) = \varphi(x)$, $x \in [0,1]$, T – знак транспонирования, $M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\alpha_2 & -\beta_2 \end{pmatrix}$.

В дальнейшем через $\tilde f(x,t)$ обозначаются функции $f(x,t)$, определенные при $x \in [0,1]$ и $t \geq 0$ и при каждом фиксированном t продолженные на все $x \in \mathbb{R}$ по правилу (6).

Введем в рассмотрение ряд

$$A(x,t)=\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x,t), \quad x\in[0,1], \quad t\in[0,\infty), \tag{7}$$

где

$$a_m(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}_{m-1}(\eta,\tau)\,d\eta,$$

$$f_m(x,t)=-q(x)a_m(x,t), \quad a_0(x,t)=\frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(x+t)+\tilde{\varphi}(x-t)\right].$$

В работах [2] и [3] показано, как ряд (7) сравнительно просто получается из формального ряда метода Фурье для смешанной задачи на основе использования расходящихся рядов (в смысле Эйлера) и метода А. Н. Крылова по ускорению сходимости рядов Фурье.

Дальнейшие рассуждения изложим в виде лемм.

Лемма 1. *Функции $a_m(x,t)$ $(m=0,1,\ldots)$ являются непрерывными.*

Лемма 2. *При любом $T>0$ ряд (7) сходится абсолютно и равномерно в $Q_T=[0,1]\times[0,T]$.*

Таким образом, сумма ряда (7) функция $A(x,t)$ является непрерывной.

Лемма 3. *Имеет место представление*

$$A(x,t)=u_0(x,t)+u_1(x,t),$$

где $u_0(x,t)=a_0(x,t)$, $u_1(x,t)=-\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{q(\eta)A(\eta,\tau)}\,d\eta$.

Лемма 4. *Если $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны на $[0,1]$ и удовлетворяют (5), то $\tilde{\varphi}(x)$ и $\tilde{\varphi}'(x)$ абсолютно непрерывны в $\mathbb{R}$.*

Лемма 5. *Функция $u_0(x,t)$ является решением задачи (1)–(4) при $q(x)=0$.*

Лемма 6. *Функция $u_1(x,t)$ непрерывна вместе с $u'_{1x}(x,t)$ и $u'_{1t}(x,t)$, причем $u'_{1x}(x,t)$ и $u'_{1t}(x,t)$ абсолютно непрерывны по x и t соответственно и удовлетворяет почти всюду уравнению*

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-q(x)A(x,t).$$

Лемма 7. *Функция $u_1(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям (2), (3) и начальным условиям*

$$u(x,0)=u'_t(x,0)=0.$$

Из лемм 3, 5–7 вытекает следующий результат.

Теорема. *Пусть* $\varphi(x)$ *и* $\varphi'(x)$ *абсолютно непрерывны и выполняются равненства* (5). *Тогда функция* $A(x,t)$, *определяемая формулой* (7), *является решением задачи* (1)–(4).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Корнев В. В., Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и обобщенное решение одной смешанной задачи для волнового уравнения // Понтрягинские чтения–XXXI : материалы междунар. конф. (Воронеж, 3–9 мая 2020 г.). Воронеж : ИД ВГУ, 2020. С. 113–117.

2. *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и метод Фурье для волнового уравнения // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 20-й междунар. Сарат. зимн. шк. (Саратов, 28 января–1 февраля 2020 г.). Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2020. С. 433–439.

3. *Хромов А. П.* О расходящихся рядах и методе Фурье в смешанной задаче для волнового уравнения с граничными условиями, содержащими производными // Математика. Механика : сборник научных трудов. Саратов : Издательство Саратовского университета, 2021. Вып. 22. С. 57–61.

УДК 519.2

И. А. Кузнецова

ИЕРАРХИЧЕСКИЕ ИГРЫ С УПОРЯДОЧЕННЫМИ ИСХОДАМИ И ОТСУТСТВИЕМ У ПЕРВОГО ИГРОКА САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ О ВЫБОРЕ ВТОРОГО

Поступила 15.09.2020 г.

Настоящая работа относится к теории иерархических игр, в которых анализ производится с точки зрения первого (управляющего) игрока и ищется его оптимальный способ действия и наибольший гарантированный результат [1–3]. В таких играх управляющий игрок первым делает свой выбор, сообщает его второму игроку, после чего тот выбирает стратегию в соответствии со своими интересами. Кроме того, первый игрок может организовывать обмен информацией о выборах между игроками. Различные варианты информированности первого игрока об интересах и выборе второго рассматривались в [4–8]. В данной работе предполагается, что первый игрок не имеет самостоятельной информации о выборе второго и знает отношение порядка, выражающее его интересы.

Иерархическая игра – это система $\Gamma = (X, Y, F, \mu)$, где X – множество стратегий первого игрока, Y – множество стратегий второго игрока,

$F : X \times Y \to R$ – функция выигрыша первого игрока, $\mu : 2^{X\times Y} \to 2^{X\times Y}$ – правило выбора, задающее информацию первого игрока о выборе второго [3]. Отображение μ должно удовлетворять условиям: $\forall T \subset X \times Y$, $\mu(T) \subset T$, $\mu(T) \neq \emptyset$. Это означает, что если второму игроку предоставить возможность выбирать исходы из множества T, то выбранный исход будет находиться в $\mu(T)$. Множества X и Y будем считать конечными.

Предполагаем, что первому игроку известно отношение порядка $<$ на $X \times Y$, выражающее интересы второго игрока. Тогда правило выбора μ задается равенством $\mu(T) = \{(x', y') \in T : \quad \forall (x, y) \in T \quad (x', y') \not< (x, y)\}$. Кроме того, предполагаем, что первый игрок не имеет самостоятельной информации о выборе второго. Тогда его наибольший гарантированный результат можно вычислить по формуле [6]

$$\Upsilon = \max_{T\in\tau_1} \min_{(x,y)\in\mu(T)} F(x, y),$$

где $\tau_1 = \{T \subset X \times Y : \quad \exists x \in X \quad \forall y \in Y \quad (x, y) \in T\}$.

Наша задача состоит в сведении вариационной задачи с ограничениями вычисления Υ к экстремальной задаче на исходных множествах.

Теорема. *Справедливо равенство* $\Upsilon = \max_{l\in L} l$, *где* $L = \{l : \quad \exists x \quad \forall y \quad (F(x, y) \geq l \quad$ *или* $\quad \exists (x', y') \quad ((x, y) < (x', y')$ *и* $F(x', y') \geq l))\}$.

Доказательство. Обозначим через K множество выигрышей, гарантированных первому игроку, и докажем равенство $K = L$. Докажем включение $L \subset K$. Пусть $l \in L$, то есть выполнено условие $\exists x'' \quad \forall y \quad (F(x'', y) \geq l$ или $\exists (x'(y), y'(y)) \quad (F(x'(y), y'(y)) \geq l$ и $(x'', y) < (x'(y), y'(y)))$. Построим множество $T \subset X \times Y$ следующим образом: $T = \{x''\} \times Y \bigcup \{(x'(y), y'(y)) : y \in Y\}$. По построению $T \in \tau_1$. Имеем: $\forall y \in Y \quad ((x'', y) \in \mu(T) \Rightarrow F(x'', y) \geq l)$. Кроме того, при всех y $F((x'(y), y'(y)) \geq l$. Таким образом, верно неравенство $\min_{(x,y)\in\mu(T)} F(x, y) \geq l$ и включение $L \subset K$ доказано. Обратное включение примем без доказательства. Доказательство теоремы завершено.

Замечание. Пусть отношение порядка задается условием $(x_1, y_1) < (x_2, y_2) \Leftrightarrow \forall i = 1, ..., n \; G_i(x_1, y_1) \leq G_i(x_2, y_2) - \delta_i$, где δ_i, $i = 1, ..., n$ – фиксированные положительные числа. Тогда множество L принимает вид

$$L = \{l : \quad \exists x \quad \forall y \quad (F(x, y) \geq l \text{ или } \exists (x', y') \quad (F(x', y) \geq l$$

и $\forall i = 1, ..., n \quad G_i(x, y) \leq G_i(x', y') - \delta_i)\}$, или

$L = \{l : \quad \exists x \quad \forall y \quad (l - F(x,y) \le 0$ или $\exists (x', y') \quad (l - F(x', y') \le 0$ и $\forall i = 1, ..., n \quad G_i(x,y) - G_i(x', y') + \delta_i \le 0)\}$,

или

$$L = \{l : \Phi(l) \le 0\},$$

где $\Phi(l) = \min\limits_{x} \max\limits_{y} \Big(l - F(x,y), \min\limits_{(x',y')} (\min\, (l - F(x', y')), \max\limits_{i=\overline{1,n}} (G_i(x,y) - G_i(x', y') + \delta_i) \Big)$.

Таким образом, в данном случае справедливо равенство

$$\Upsilon = \max\{l : \Phi(l) \le 0\}.$$

$\Phi(l)$ является функцией, полученной путем применения конечного числа арифметических операций и операций взятия максимума и минимума к функциям $G_i(x,y)$, $i = 1, \ldots, n$ и $F(x,y)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Гермейер Ю. Б.* Игры с непротивоположными интересами. М. : Наука, 1976. 326 с.

2. *Кукушкин Н. С., Морозов В. В.* Теория неантагонистических игр. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1977. 325 с.

3. *Шолпо И. А.* Исследование операций. Теория игр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1983. 42 с.

4. *Горелов М. А.* Игра с ошибками при передаче информации // Автоматика и телемеханика, 2012. № 12. С. 137–152.

5. *Кузнецова И. А.* Иерархические игры с неопределенными факторами // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2013. Вып. 15. С. 21–24.

6. *Кузнецова И. А.* Иерархические игры с неполной информацией первого игрока о выборе второго // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2015. Вып. 17. С. 29–32.

7. *Кузнецова И. А.* Иерархические игры с постепенным многошаговым уточнением информации первого игрока о выборе второго // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2016. Вып. 18. С. 38–40.

8. *Кузнецова И. А.* Иерархические игры с конечноопределенным правилом выбора // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2017. Вып. 19. С. 46–49.

УДК 517.984

М. А. Кузнецова

ЛОКАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ВОССТАНОВЛЕНИЯ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ РОБЕНА

Поступила 15.09.2020 г.

Обратные спектральные задачи заключаются в восстановлении операторов по их спектральным характеристикам. Наиболее исследованы обратные задачи для уравнения Штурма – Лиувилля

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x),\ x \in (0, \pi), \quad q \in L_2(0, \pi); \tag{1}$$

классические результаты могут быть найдены в [1–4].

В работе [1] Борг рассмотрел две краевые задачи для уравнения (1) с одним общим краевым условием Дирихле и изучил восстановление потенциала q по двум спектрам, т.е. всем собственным значениям этих краевых задач. Были доказаны локальные разрешимость и устойчивость задачи восстановления по двум спектрам в классе вещественнозначных потенциалов (см. [1, 4]). В этом классе может быть также доказана глобальная разрешимость задачи восстановления q по двум спектрам (см. [5]).

В [6] результат Борга был обобщен на класс комплекснозначных потенциалов. В [7] была доказана локальная устойчивость задачи восстановления q по спектральным данным в том же классе. В случае комплекснозначных потенциалов оператор Штурма–Лиувилля является несамосопряженным. При этом возможно конечное число кратных собственных значений, что усложняет применение классических методов.

Рассмотрим комплекснозначные потенциалы и получим аналог результата [6] для следующих краевых задач с общим краевым условием Робена в левом конце:

$$L_0(q, h)\colon U(y) = 0,\ y(\pi) = 0, \quad L_1(q, h, H)\colon U(y) = 0,\ V(y) = 0,$$

$$U(y) = y'(0, \lambda) - hy(0, \lambda),\ V(y) = y'(\pi, \lambda) + Hy(\pi, \lambda),$$

где $h, H \in \mathbb{C}$.

Пусть $\{\lambda_{n0}\}_{n\geq 0}$ и $\{\lambda_{n1}\}_{n\geq 0}$ являются собственными значениями задач $L_0(q, h)$ и $L_1(q, h, H)$ соответственно. Изучим следующую обратную задачу:

Обратная задача 1. По двум спектрам $\{\lambda_{nj}\}_{n\geq 0}$, $j=0,1$, восстановить q, h и H.

Докажем локальные разрешимость и устойчивость этой обратной задачи. Будем использовать вспомогательные результаты из [4] и [6].

В [4] изучались краевые задачи $L_0(q,h)$, $L_1(q,h,H)$. Доказаны следующие асимптотические формулы:

$$\lambda_{n0} = \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2\omega_1}{\pi} + \kappa_{n,0},\ n\geq 0, \quad \omega_1 = h + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(t)\,dt; \tag{2}$$

$$\lambda_{n1} = n^2 + \frac{2\omega}{\pi} + \kappa_{n,1},\ n\geq 0, \quad \omega = \omega_1 + H, \tag{3}$$

где $\{\kappa_{n,j}\}_{n\geq 0}\in l_2$, $j=0,1$. Таким образом, если

$$\Lambda = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty}\left(|\lambda_{n0}-\tilde{\lambda}_{n0}|^2 + |\lambda_{n1}-\tilde{\lambda}_{n1}|^2\right)} < \infty$$

для произвольных последовательностей $\{\tilde{\lambda}_{n0}\}_{n\geq 0}$ и $\{\tilde{\lambda}_{n1}\}_{n\geq 0}$, то они удовлетворяют асимптотическим формулам (2) и (3).

Также в [4] были доказаны локальная разрешимость и устойчивость обратной задачи 1 в классе вещественных q, h и H. Легко заметить, что доказательство верно и в несамосопряженном случае, если собственные значения $\{\lambda_{nj}\}_{n\geq 0}$, $j=0,1$, являются простыми.

Одним из ключевых моментов в доказательстве является близость базисов

$$A = \{\phi(x,\lambda_{nj})\}_{\substack{n\geq 0\\ j=0,1}}, \quad B = \{\phi(x,\tilde{\lambda}_{nj})\}_{\substack{n\geq 0\\ j=0,1}},$$

где символ $\phi(x,\lambda)$ обозначает определенную функцию, построенную по модельным задачам. В случае кратных значений соответствующими базисами будут

$$A = \bigcup_{\substack{n\geq 0\\ j=0,1}} \left\{ \frac{\partial^{\nu}}{\partial\lambda^{\nu}}\phi(x,\lambda)\bigg|_{\lambda=\lambda_{nj}} \right\}_{\nu=0}^{m_{nj}-1}, \quad B = \bigcup_{\substack{n\geq 0\\ j=0,1}} \left\{ \frac{\partial^{\nu}}{\partial\lambda^{\nu}}\phi(x,\lambda)\bigg|_{\lambda=\tilde{\lambda}_{nj}} \right\}_{\nu=0}^{\tilde{m}_{nj}-1},$$

где m_{nj} – кратность λ_{nj}, а $\tilde{m}_{nj}$ – кратность $\tilde{\lambda}_{nj}$. Так как $\tilde{m}_{nj}$ может отличаться от m_{nj} при сколь угодно малом Λ, то соответствующие базисы не будут близки в общем случае даже при малом Λ.

Мы доказали, что в случае кратных значений можно применить такое линейное преобразование конечного числа элементов B, что полученный базис будет близок к A (см. [6]). Применяя далее стандартную схему метода Борга [4] с соответствующими изменениями, мы доказали локальную разрешимость и устойчивость обратной задачи 1 в несамосопряженном случае. А именно справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть модельные краевые задачи* $L_0(q, h)$, $L_1(q, h, H)$ *фиксированы. Существует такое положительное число* δ, *что если произвольные последовательности* $\{\tilde{\lambda}_{n0}\}_{n\geq 0}$ *и* $\{\tilde{\lambda}_{n1}\}_{n\geq 0}$ *удовлетворяют условию* $\Lambda < \delta$, *то они являются собственными значениями краевых задач* $L_0(\tilde{q}, \tilde{h})$ *и* $L_1(\tilde{q}, \tilde{h}, \tilde{H})$ *соответственно, где* $\tilde{q}$, $\tilde{h}$ *и* $\tilde{H}$ *определяются единственным образом. Кроме того,*

$$\|q - \tilde{q}\|_{L_2(0,\pi)} \leq C\Lambda,\ |h - \tilde{h}| \leq C\Lambda,\ H = \tilde{H},$$

где C *зависит только от модельных краевых задач.*

В заключение отметим, что в некоторых случаях метод Борга позволяет получить результаты, когда другие методы не работают. Так, основываясь на методе Борга, в работах [8–10] доказали локальные разрешимость и устойчивость других обратных задач: трансмиссии и восстановления интегро-дифференциального оператора.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-31-70005).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Borg G.* Eine Umkehrung der Sturm–Liouvilleschen Eigenwertaufgabe // Acta Math. 1946. Vol. 78. P. 1–96.

2. *Марченко В. А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев : Наукова думка, 1977. 329 с.

3. *Левитан Б. М.* Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М. : Наука, 1984. 240 с.

4. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. 384 с.

5. *Марченко В. А., Островский И. В.* Характеристика спектра оператора Хилла // Матем. сб. 1975. Т. 97(139), № 4 (8). С. 540–606.

6. *Buterin S., Kuznetsova M.* On Borg's method for non-selfadjoint Sturm–Liouville operators // Anal. Math. Physics. 2019. Vol. 9. P. 2133–2150.

7. *Bondarenko N. P.* Local solvability and stability of the inverse problem for the non-self-adjoint Sturm-Liouville operator // Bound. Value Probl. 2020. № 123. P. 1–13.

8. *Bondarenko N., Buterin S.* Numerical solution and stability of the inverse spectral problem for a convolution integro-differential operator // Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simulat. 2020. Vol. 89. P. 105298.

9. *Bondarenko N. P., Buterin S. A.* On a local solvability and stability of the inverse transmission eigenvalue problem // Inverse Probl. 2017. Vol. 33, № 11. P. 115010.

10. *Buterin S. A., Choque-Rivero A. E., Kuznetsova M. A.* On a regularization approach to the inverse transmission eigenvalue problem // Inverse Probl. 2020. Vol. 36, № 10. P. 105002.

УДК 517.984

М. А. Кузнецова, В. А. Юрко

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ЗАМКНУТЫХ МНОЖЕСТВАХ ПО СПЕКТРАМ

Поступила 10.09.2020 г.

Исследуется обратная задача восстановления коэффициентов пучков дифференциальных операторов второго порядка на замкнутых множествах по спектрам. Доказана теорема единственности и приведен алгоритм построения решения рассматриваемой обратной задачи. Для решения обратной задачи используется развитие идей метода спектральных отображений [1].

1. Пусть T – замкнутое подмножество вещественной оси. Рассмотрим следующее уравнение на T:

$$y^{\Delta\Delta}(x) + (\rho^2 + \rho p(x) + q(x))y(\sigma(x)) = 0, \quad x \in T. \tag{1}$$

Здесь ρ – спектральный параметр, $q(x) \in C_T$, $p(x) \in C_T^1$ – комплекснозначные функции, y^Δ – дельта-производная, $\sigma(x) = \inf\{s \in T : \ s > x\}$ для $x \neq \sup T$, $\sigma(\sup T) = \sup T$ (см. [2]). Постановка и исследование обратных задач существенно зависит от структуры T. Рассмотрим важный подкласс T – так называемую $Y1$–структуру. Пусть $N \geq 2$, $T = [a_1, b_1] \cup \ldots \cup [a_N, b_N]$, $b_{k-1} < a_k \leq b_k < a_{k+1}$, $a_1 < b_1$, $a_N < b_N$, $a_k = b_k$, $k = \overline{2, N-1}$. Тогда

$$y^\Delta(b_k) = \frac{y(a_{k+1}) - y(b_k)}{a_{k+1} - b_k}, \ k = \overline{1, N-1},$$
$$y^\Delta(x) = y'(x), \ x \in [a_1, b_1] \cup [a_N, b_N]. \tag{2}$$

В частности, это дает $y^\Delta(b_1) = y'(b_1)$, и, следовательно,

$$y(a_2) = y(b_1) + (a_2 - b_1)y'(b_1). \tag{3}$$

В силу (1) и (2), получаем

$$y''(x) + (\rho^2 + \rho p(x) + q(x))y(x) = 0, \quad x \in [a_1, b_1] \cup [a_N, b_N], \tag{4}$$

$$y^{\Delta\Delta}(b_k) = \frac{1}{a_{k+1} - b_k}\left(\frac{y(a_{k+2}) - y(b_{k+1})}{a_{k+2} - b_{k+1}} - \frac{y(a_{k+1}) - y(b_k)}{a_{k+1} - b_k}\right) =$$

$$= \Big((i\rho)^2 - \rho p(b_k) - q(b_k)\Big) y(a_{k+1}),\ k = \overline{1, N-2},$$

$$y^{\Delta\Delta}(b_{N-1}) = \frac{1}{a_N - b_{N-1}} \left(y'(a_N) - \frac{y(a_N) - y(b_{N-1})}{a_N - b_{N-1}} \right) =$$

$$= \Big((i\rho)^2 - \rho p(b_{N-1}) - q(b_{N-1})\Big) y(a_N).$$

Используя полученные соотношения, вычисляем

$$y(a_{k+2}) = y(b_{k+1}) + \frac{a_{k+2} - b_{k+1}}{a_{k+1} - b_k} \Big(y(a_{k+1}) - y(b_k) \Big) +$$

$$+ (a_{k+1} - b_k)(a_{k+2} - b_{k+1}) \Big((i\rho)^2 - \rho p(b_k) - q(b_k) \Big) y(a_{k+1}),\ k = \overline{1, N-2}, \quad (5)$$

$$y'(a_N) = \frac{y(a_N) - y(b_{N-1})}{a_N - b_{N-1}} + (a_N - b_{N-1}) \Big((i\rho)^2 - \rho p(b_{N-1}) - q(b_{N-1}) \Big) y(a_N). \quad (6)$$

Обозначим $Q = \{p, q\}$. Из (3) и (5)–(6) получаем

$$\begin{aligned} (a_N) &= \alpha_{11}(\rho) y(b_1) + \alpha_{12}(\rho) y'(b_1), \\ y'(a_N) &= \alpha_{21}(\rho) y(b_1) + \alpha_{22}(\rho) y'(b_1), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\alpha_{jk}(\rho)$ – многочлены по ρ степени $2(N + j - 3)$, они зависят от $Q(b_1), \ldots, Q(b_{N+j-3})$. Кроме того,

$$\alpha_{jk}(\rho) = (i\rho)^{2(N+j-3)} \alpha^0_{jk}[1],\ |\rho| \to \infty,$$

где $[1] = 1 + O(\rho^{-1}),\ \alpha^0_{12} = (a_2 - b_1)\alpha^0_{11},\ \alpha^0_{21} = (a_N - b_{N-1})\alpha^0_{11},$

$$\alpha^0_{22} = (a_2 - b_1)(a_N - b_{N-1})\alpha^0_{11},\ \alpha^0_{11} = (a_2 - b_1)(a_N - b_{N-1}) \prod_{k=2}^{N-2} (a_{k+1} - b_k)^2$$

($\alpha^0_{11} = 1$ при $N = 2$ и $\alpha^0_{11} = (a_2 - b_1)(a_3 - b_2)$ при $N = 3$). Без ограничения общности считаем,что $a_1 = 0$.

Обозначим через L_0 краевую задачу для уравнения (1) на T с краевыми условиями $y(0) = y(b_N) = 0$. Пусть $S(x, \rho)$ и $C(x, \rho)$ – решения уравнения (1) на T, удовлетворящие начальным условиям $C(0, \rho) = S^{\Delta}(0, \rho) = 1,\ S(0, \rho) = C^{\Delta}(0, \rho) = 0$. Положим $\Delta_0(\rho) := S(b_N, \rho)$. Собственные значения $\{\rho_{n0}\}_{n \in Z}$ задачи L_0 совпадают с нулями целой функции $\Delta_0(\rho)$. Функция $\Delta_0(\rho)$ называется характеристической функцией для L_0.

Пусть $\Phi(x, \rho)$ – решение уравнения (1) на T, удовлетворяющее краевым условиям

$$\Phi(0, \rho) = 1, \quad \Phi(b_N, \rho) = 0. \quad (8)$$

Положим $M(\rho) := \Phi^{\Delta}(0,\rho)$. Функцию $M(\rho)$ будем называть функцией Вейля. Имеем

$$M(\rho) = -\Delta_1(\rho)/\Delta_0(\rho), \tag{9}$$

где $\Delta_1(\rho) := C(b_N,\rho)$ – характеристическая функция краевой задачи L_1 для уравнения (1) на T с краевыми условиями $y^{\Delta}(0) = y(b_N) = 0$. Нули $\{\rho_{n1}\}_{n\in Z}$ функции $\Delta_1(\rho)$ совпадают с собственными значениями задачи L_1. Используя теорему Адамара и асимптотику характеристической функции, можно доказать, что задание спектра $\{\rho_{nk}\}_{n\in Z}$ однозначно определяет характеристическую функцию $\Delta_k(\rho)$, $k = 0,1$. Продолжим функцию $Q(x)$ на весь отрезок $[a_1,b_N]$ так, чтобы $q(x)\in C[a_1,b_N]$, $p(x)\in C^1[a_1,b_N]$, а в остальном произвольно. Рассмотрим уравнение

$$y''(x) + (\rho^2 + \rho p(x) + q(x))y(x) = 0, \quad x\in[0,b_N].$$

Учитывая (7), заключаем, что функция $\Phi(x,\rho)$ является решением уравнения (4) и удовлетворяет краевым условиям (8) и условиям разрыва

$$\left.\begin{aligned} \Phi(a_N,\rho) &= \alpha_{11}(\rho)\Phi(b_1,\rho) + \alpha_{12}(\rho)\Phi'(b_1,\rho),\\ \Phi'(a_N,\rho) &= \alpha_{21}(\rho)\Phi(b_1,\rho) + \alpha_{22}(\rho)\Phi'(b_1,\rho). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

2. Пусть известны числа $Q(b_2),\ldots,Q(b_{N-1})$. Обратная задача ставится следующим образом: даны два спектра $\{\rho_{nk}\}_{n\in Z}$, $k = 0,1$, построить $Q = \{p,q\}$ на T.

Сформулируем теорему единственности решения обратной задачи. Для этого наряду с L_0 рассмотрим краевую задачу $\tilde{L}_0$ того же вида, но с другим потенциалом $\tilde{Q}$. Условимся, что если некоторый символ θ обозначает объект, относящийся к L_0, то $\tilde{\theta}$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к $\tilde{L}_0$. С использованием метода спектральных отображений [1] доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Если* $\rho_{nk} = \tilde{\rho}_{nk}, n\in Z,\ k = 0,1$, *то* $Q = \tilde{Q}$ *на* T. *Таким образом, задание двух спектров однозначно определяет потенциал* Q.

Обозначим

$$\Phi_1(x,\rho) := \Phi(x,\rho)/\Phi(a_N,\rho), \quad M_1(\rho) := \Phi_1'(a_N,\rho) = \Phi'(a_N,\rho)/\Phi(a_N,\rho)\,. \tag{11}$$

Так как $\Phi_1(a_N,\rho) = 1,\ \Phi_1(b_N,\rho) = 0$, то функция $M_1(\rho)$ является функцией Вейля для уравнения (4) на интервале $[a_N,b_N]$. Решение обратной задачи может быть найдено по следующему алгоритму.

Алгоритм 1. *Пусть заданы спектры* $\{\rho_{nk}\}_{n\in Z},\ k = 0,1$.
1) Находим характеристические функции $\Delta_k(\rho)$, $k = 0,1$.

2) Вычисляем функцию Вейля $M(\rho)$ по формуле (9).
3) Строим $p(x), q(x)$ и $\Phi(x,\rho)$ для $x \in [a_1, b_1]$ методом спектральных отображений.
4) Находим $\Phi(a_N,\rho)$ и $\Phi'(a_N,\rho)$ по формулам (10).
5) Вычисляем $M_1(\rho)$, используя (11).
6) Строим $p(x), q(x)$ при $x \in [a_N, b_N]$ методом спектральных отображений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00102).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Yurko V. A.* Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-Posed Problems. Series 31. Utrecht, VSP, 2002. 306 p. https://doi.org//10.1515.9783110940961

2. *Bohner M., Peterson A.* Dynamic Equations on Time Scales. Birkhäuser, Boston, MA, 2001. 358 p.

УДК 517.956.32+517.927.25

В. П. Курдюмов

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В СЛУЧАЕ СВОБОДНЫХ КОНЦОВ

Поступила 08.09.2020 г.

Рассмотрим смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t) + f(x,t), \quad x,t \in [0,1]\times[0,\infty), \tag{1}$$

$$u'_x(0,t) = u'_x(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = \psi(x), \tag{3}$$

где $q(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ из $L[0,1]$, $f(x,t)$ из $L[Q_T]$ при любом $T>0$ ($Q_T = [0,1]\times[0,T]$).

Формальное решение по методу Фурье возьмем в виде [1]:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\ge 0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\Bigg[(R_\lambda\varphi)\cos\rho t + (R_\lambda\psi)\frac{\sin\rho t}{\rho} + \\ + \int\limits_0^t (R_\lambda(f(\cdot,\tau))\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\Bigg]\,d\lambda, \tag{4}$$

где $\lambda = \rho^2$, $\operatorname{Re}\rho \geq 0$, $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$, $Ly = -y''(x) + q(x)y(x)$, $y'(0) = y'(1) = 0$, $r > 0$ и достаточно велико, γ_n – образ в λ-плоскости окружности $\tilde{\gamma}_n = \{\rho|\ |\rho - n\pi| = \delta\}$, $\delta > 0$ достаточно мало и фиксировано, контуры $|\lambda| = r$ и γ_n при $n \geq n_0$ не пересекаются, $R_\lambda(f(\cdot, \tau))$ означает, что R_λ применяется к $f(x, \tau)$ по переменной x.

Обозначим через $Z(x, t; \varphi)$ ряд (4) при $\psi(x) = f(x, t) = 0$. Тогда, используя расходящиеся ряды в понимании Эйлера ([2–6]), приводим (4) к виду

$$u(x,t) = Z(x,t;\varphi) + \int_0^t Z(x,t;\psi)\,d\tau + \int_0^t d\tau \int_0^{t-\tau} Z(x,\eta; f(\cdot,\tau))\,d\eta. \quad (5)$$

Достоинство (5) по сравнению с (4) в том, что в формальном решении задачи (1)–(3) участвует лишь формальное решение однородной задачи:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \quad (6)$$

$$u'_x(0,t) = u'_x(1,t) = 0, \quad (7)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0, \quad (8)$$

при разных $\varphi(x)$.

Поэтому мы ограничимся лишь рассмотрением задачи (6)–(8). Как и в [3], с помощью рекомендаций А. Н. Крылова [7] об ускорении сходимости рядов Фурье и работы с расходящимися рядами в понимании Эйлера [5] осуществляем переход от ряда $Z(x, t; \varphi)$ к ряду

$$A(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x,t),$$

где $a_0(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)]$,

$$a_n(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}_{n-1}(\eta,\tau)\,d\eta \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$f_n(x,t) = -q(x)a_n(x,t),$$

$\tilde{\varphi}(x)$ четная и 2-периодическое продолжение на всю ось функции $\varphi(x)$ при $x \in [0,1]$, $\tilde{f}_n(\eta,\tau)$ – четная, 2-периодическая по η и $\tilde{f}_n(\eta,\tau) = f_n(\eta,\tau)$ при $\eta \in [0,1]$.

Лемма 1. *Если $\varphi(x) \in L[0,1]$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно с экспоненциальной скоростью.*

Как и в [8] имеет место

Теорема 1. *Для того чтобы существовало классическое решение задачи* (1)–(3), *необходимо и достаточно, чтобы* $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ *были абсолютно непрерывны и* $\varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$. *Это решение дается формулой:* $u(x,t) = A(x,t)$.

Теорема 2. *Если* $\varphi(x) \in L[0,1]$, *а* $\varphi_h(x)$ *удовлетворяет условиям теоремы 1 и* $\|\varphi_h - \varphi\|_1 \to 0$ *при* $h \to 0$ ($\|\cdot\|_1$ – *норма в* $L[0,1]$), *то соответствующее* $\varphi_h(x)$ *классическое решение* $u_h(x,t)$ *задачи* (6)–(8) *сходится к* $A(x,t)$ *по норме* $L[Q_T]$, *т. е.* $u(x,t) = A(x,t)$ *в случае* $\varphi(x) \in L[0,1]$ *является обобщенным решением задачи* (6)–(8).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Корнев В. В., Хромов А. П.* Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59, № 2. С. 286–300.

2. *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и функциональные уравнения, связанные с аналогами геометрической прогрессии // Понтрягинские чтения–XXX : материалы междунар. конф. (Воронеж, 3–9 мая 2019 г.). Воронеж : ИД ВГУ, 2019. С. 291–300.

3. *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и метод Фурье для волнового уравнения // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 20-й междунар. Сарат. зимн. шк. (Саратов, 28 января–1 февраля 2020 г.). Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2020. С. 433–439.

4. *Ломов И. С.* Метод А. П. Хромова решения смешанной задачи для гиперболического уравнения. Обобщенная формула Даламбера // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 20-й междунар. Сарат. зимн. шк. (Саратов, 28 января – 1 февраля 2020 г.). Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2020. С. 231–236.

5. *Эйлер Л.* Дифференциальное исчисление. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1949. 580 с.

6. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. М. : Изд-во иностр. лит., 1951. 34 с.

7. *Крылов А. Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1950. 368 с.

8. *Хромов А. П.* Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала // Диф. уравнения. 2019. Т. 55, № 5. С. 717–731.

УДК 512.536.75

В. А. Молчанов

ОБ ОПРЕДЕЛЯЕМОСТИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПЛОСКОСТЕЙ НЕПРЕРЫВНЫМИ ЭНДОМОРФИЗМАМИ

Поступила 08.09.2020 г.

В работе [1] получено решение проблемы Л. М. Глускина, Л. А. Скорнякова [2] об определяемости проективных плоскостей полугруппами их эндоморфизмов. В настоящей работе этот результат обобщается на топологические плоскости.

Под плоскостью будем понимать систему вида $\Pi = (X, L)$, где X – непустое множество точек и L – семейство его подмножеств, именуемых прямыми, удовлетворяющее следующим аксиомам: (A_1) через любые две точки $a, b \in X$ проходит одна и только одна прямая, которая обозначается ab; (A_2) каждая прямая содержит по крайней мере три точки; (A_3) в множестве X есть три точки, не лежащие на одной прямой.

Топологической плоскостью называется плоскость $\Pi = (X, L)$ с заданной на множестве X компактной хаусдорфовой сходимостью ρ, которая на множестве L определяет сходимость Вьеториса, так что операция построения по двум точкам a, b прямой ab непрерывна.

В работе применяются методы нестандартного анализа [3], при использовании которых для любого множества X определено нестандартное расширение ${}^*X$ и любой фильтр $\mathcal{F}$ над X характеризуется своей монадой $\mu\mathcal{F} = \cap\{{}^*A : A \in \mathcal{F}\}$. При нестандартном подходе к топологии [4] сходимость на множестве X определяется как соответствие $\rho \subset X \times {}^*X$, для которого при любом $a \in X$ множество $\rho(a) = \{x \in {}^*X : (a, x) \in \in \rho\}$ содержит элемент a и является объединением монад фильтров над X. При нестандартном подходе важные свойства пространств сходимости и отображений таких пространств выражаются простыми теоретико-множественными условиями для нестандартных сходимостей. Так, из результатов [4] следует, что отображение f пространства сходимости (X, ρ) в пространство сходимости (X_1, ρ_1) непрерывно, если ${}^*f \circ \rho \subset \rho_1 \circ f$. Кроме того, в силу [4] для любого пространства сходимости (X, ρ) на множестве $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(X)$ всех замкнутых подмножеств пространства X по формуле

$$(A, B) \in \delta \iff \overset{-1}{\rho}(B) \subset A \quad (A \in \mathcal{Z}, B \in {}^*\mathcal{Z})$$

определяется нестандартная сходимость Вьеториса $\delta \subset \mathcal{Z} \times {}^*\mathcal{Z}$, которая является классической топологией Вьеториса, если (X, ρ) – локально компактное топологическое пространство. Наконец, в силу [4] для любого пространства сходимости (X, ρ) на множестве $\mathcal{F}_c = \mathcal{F}_c(X)$ всех непрерывных преобразований пространства X по формуле

$$(f, h) \in \gamma \iff h \circ \rho \subset \rho \circ f \quad (f \in \mathcal{F}_c, h \in {}^*\mathcal{F}_c)$$

определяется непрерывная сходимость $\gamma \subset \mathcal{F}_c \times {}^*\mathcal{F}_c$, которая является самой слабой сходимостью на множестве $\mathcal{F}_c$, относительно которой непрерывно отображение вычисления $\Lambda(f, x) = f(x)$ (где $f \in \mathcal{F}_c$, $x \in X$). Кроме того, композиция преобразований непрерывна относительно сходимости

γ и сходимость γ является компактно-открытой топологией, если (X, ρ) – локально компактное топологическое пространство.

Непрерывным гомоморфизмом топологической плоскости $\Pi = ((X, \rho), L)$ в топологическую плоскость $\Pi_1 = ((X_1, \rho_1), L_1)$ называется такое непрерывное отображение $\varphi : X \to X_1$, что для любой прямой $l \in L$ множество $\varphi(l)$ содержится в некоторой прямой $l_1 \in L_1$. Обратимый непрерывный гомоморфизм топологической плоскости Π на топологическую плоскость Π_1 называется топологическим изоморфизмом. Непрерывный гомоморфизм топологической плоскости Π в себя называется непрерывным эндоморфизмом этой плоскости. Множество всех непрерывных эндоморфизмов плоскости Π с операцией композиции $\circ$ и непрерывной сходимостью γ образует топологическую полугруппу End Π.

Теорема. *Топологические плоскости* Π, Π_1 *в том и только том случае топологически изоморфны, если топологически изоморфны их топологические полугруппы непрерывных эндоморфизмов* End Π, End Π_1.

Доказательство. Пусть $f : X \to X_1$ – топологический изоморфизм топологической плоскости $\Pi = ((X, \rho), L)$ на топологическую плоскость $\Pi_1 = ((X_1, \rho_1), L_1)$, т.е. f – такая биекция множества X на множество X_1, что $(f \times {}^*f)(\rho) = \rho_1$ и для любого подмножества $A \subset X$ выполняется $A \in L \iff f(A) \in L_1$. Для элементов $\varphi \in$ End Π определим значение $\pi(\varphi) = (f \times f)(\varphi) = f \circ \varphi \circ \overset{-1}{f}$ и покажем, что $\pi(\varphi) \in$ End Π_1. Для любой прямой $l_1 \in L_1$ выполняется $\overset{-1}{f}\,(l_1) \in L$ и, значит, найдется такая прямая $l \in L$, что $\varphi(\overset{-1}{f}\,(l_1)) \subset l$. Тогда $(f \circ \varphi \circ \overset{-1}{f})(l_1)) \subset f(l)$ для прямой $f(l) \in L_1$ и $\pi(\varphi)$ – эндоморфизм плоскости Π_1. Кроме того, $\pi(\varphi)$ – непрерывное преобразование множества X_1, так как

$$\begin{aligned} {}^*\pi(\varphi) \circ \rho_1 &= {}^*f \circ {}^*\varphi \circ {}^*\overset{-1}{f} \circ \rho_1 \subset {}^*f \circ {}^*\varphi \circ \rho \circ \overset{-1}{f} \subset {}^*f \circ \rho \circ \varphi \circ \overset{-1}{f} = \\ &= ({}^*f \circ \rho \circ \overset{-1}{f}) \circ (f \circ \varphi \circ \overset{-1}{f}) = \rho_1 \circ \pi(\varphi). \end{aligned}$$

Таким образом, $\pi(\varphi) \in$ End Π_1 и π отображает множество End Π в множество End Π_1. Легко проверить, что π является биекцией End Π на End Π_1 и сохраняет композицию эндоморфизмов, т.е. является изоморфизмом полугруппы End Π на полугруппу End Π_1. Для доказательства непрерывности отображения π рассмотрим такие элементы $\varphi \in$ End Π, $\psi \in {}^*$End Π, что $(\varphi, \psi) \in \gamma$. Тогда $\psi \circ \rho \subset \rho \circ \varphi$, и для отображения

$\eta = {}^*\pi(\psi)$ выполняется

$$\begin{aligned}\eta \circ \rho_1 &= ({}^*f \circ \psi \circ \overset{-1}{{}^*f}) \circ ({}^*f \circ \rho \circ \overset{-1}{f}) \subset {}^*f \circ \psi \circ \rho \circ \overset{-1}{f} \subset {}^*f \circ \rho \circ \varphi \circ \overset{-1}{f} = \\ &= ({}^*f \circ \rho \circ \overset{-1}{f}) \circ (f \circ \varphi \circ \overset{-1}{f}) = \rho_1 \circ \pi(\varphi).\end{aligned}$$

Это означает, что $(\pi(\varphi), {}^*\pi(\psi)) \in \gamma_1$ и отображение π непрерывно. Аналогично проверяется непрерывность обратного отображения $\overset{-1}{\pi}$. Таким образом, полугруппы $\mathrm{End}\,\Pi, \mathrm{End}\,\Pi_1$ топологически изоморфны.

Пусть π – топологический изоморфизм топологической полугруппы $S = \mathrm{End}\,\Pi$ с непрерывной сходимостью γ на топологическую полугруппу $S_1 = \mathrm{End}\,\Pi_1$ с непрерывной сходимостью γ_1. Легко видеть, что правыми нулями полугруппы S являются постоянные отображения $c_a : X \to \{a\}$ множества X в некоторый элемент $a \in X$. Аналогично правыми нулями полугруппы S_1 являются постоянные отображения множества X_1 в элементы этого множества X_1. Так как при изоморфизме правые нули полугрупп переходят в правые нули, то изоморфизм π определяет биекцию f множества X на множество X_1 по правилу: для $a \in X, b \in X_1$ положим $f(a) = b$ в том и только в том случае, если $\pi(c_a) = c_b$. Тогда $\pi(c_a) = c_{f(a)}$ и для элементов $a \in X, x \in {}^*X$ следующие условия равносильны: $(a, x) \in \rho$, $(c_a, c_x) \in \gamma$, $(\pi(c_a), {}^*\pi(c_x)) \in \gamma_1$, $(c_{f(a)}, c_{{}^*f(x)}) \in \gamma_1$, $(f(a), {}^*f(x)) \in \rho_1$. Следовательно, f – гомеоморфизм пространства сходимости (X, ρ) на пространство сходимости (X_1, ρ_1). Кроме того, из результатов работы [1] следует, что f – изоморфизм плоскости Π на плоскость Π_1. Таким образом, топологические плоскости Π, Π_1 топологически изоморфны.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Молчанов В. А.* Как проективные плоскости определяются своими полугруппами // Теория полугрупп и ее приложения. Полугруппы и связанные с ними алгебраические системы. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1984. С. 42–50.

2. Свердловская тетрадь : сб. нерешенных задач по теории полугрупп. Свердловск : Изд-во Урал. гос. ун-та, 1979. 41 с.

3. *Альбеверио С., Фенстад Й., Хеэг-Крон Р., Линдстрем Т.* Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике. М. : Мир, 1990. 616 с.

4. *Molchanov V. A.* Nonstandard approach to Convergence Relation Algebras // Algebra Colloquium. 1995. Vol. 2, № 2. P. 117–134.

УДК 519.4

В. Е. Новиков

СУЩЕСТВОВАНИЕ СЕМЕЙСТВ МНОЖЕСТВ МИНИМАЛЬНЫХ ПО ПЕРЕСЕЧЕНИЮ

Поступила 09.09.2020 г.

В [1] подробно рассмотрены свойства и структура семейств множеств минимальных по пересечению, но при этом ничего не сказано об условиях их существования. В случае конечных семейств этот вопрос имеет простое положительное решение. В общем случае не во всяком семействе множеств можно выделить подсемейство минимальное по пересечению. В настоящей статье исследуется условие, обеспечивающее существование таких семейств.

Определение 1. Семейство множеств $F = \{X_i\}_{i\in I}$ называется *минимальным по пересечению*, если $\bigcap\limits_{i\in I} X_i = B$ и $(\forall_{j\in I}) \bigcap\limits_{i\in I\setminus\{j\}} X_i \neq B$. По элементарным свойствам пересечения последнее неравенство означает строгое включение $(\forall_{j\in I}) B \subset \bigcap\limits_{i\in I\setminus\{j\}} X_i$. В этом случае иногда будем уточнять, говоря, что семейство F *минимально по пересечению* B.

Для определённости будем называть семейство множеств $F = \{X_i\}_{i\in I}$ *конечным*, если $|I| < \infty$, семейство множеств $F = \{X_i\}_{i\in I}$ *семейством конечных множеств*, если $(\forall_{i\in I})|X_i| < \infty$. Например, допустимо выражение *конечное семейство конечных множеств*. Если где-то опускаем слово конечное, то в этом месте подразумеваем как конечный, так и бесконечный случай. В общем случае будем говорить просто *семейство*. Множества X_i семейства $F = \{X_i\}_{i\in I}$ также будем называть *элементами* этого семейства.

Справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. *Семейство $F = \{X_i\}_{i\in I}$ минимально по пересечению B тогда и только тогда, когда семейство $F' = \{X_i\setminus B\}_{i\in I}$ минимально по пустому пересечению.*

Определение 2. Будем говорить, что семейство $F_1 = \{X_i\}_{i\in J}$ является *подсемейством* семейства $F = \{X_i\}_{i\in I}$, если $J \subset I$. При этом будем обозначать $F_1 \subset F$.

Семейство $F = \{X_i\}_{i\in I}$ может не быть минимальным по пересечению $B = \bigcap\limits_{i\in I} X_i$, но при этом иметь подсемейства, минимальные по пересечению B.

Пример 1. Семейство $F = \{X_i | X_i \subseteq \{a, b, c, d\} \wedge X_i \neq \emptyset\}$ имеет $\bigcap X_i = \emptyset$ и не является минимальным по пустому пересечению. А вот некоторые его подсемейства, которые являются минимальными по пустому пересечению: $F_1 = \{\{a\}, \{b\}\}$, $F_2 = \{\{a\}, \{b, c\}\}$, $F_3 = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c, d\}\}$, $F_4 = \{\{a, b, c\}, \{b, c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}\}$. Их, конечно, намного больше, можно вычислить количество подсемейств данного семейства, минимальных по пустому пересечению. И видно, что его минимальные подсемейства могут содержать различное число множеств различной мощности.

Предложение 2. *Всякое конечное семейство имеет минимальное подсемейство.*

Доказательство. Пусть $F = \{X_i\}_{i \in I}$ конечное семейство, $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, и $\bigcap\limits_{i \in I} X_i = B$. Если $(\forall_{j \in I}) \bigcap\limits_{i \in I \setminus \{j\}} X_i \neq B$, то оно само является минимальным по пересечению B и этим всё доказано. Допустим, что это не так, т. е. существует $i_1 \in I$ такое, что $B = \bigcap\limits_{i \in I_1} X_i$, где $I_1 = I \setminus \{i_1\}$. Рассмотрим подсемейство $F_1 = \{X_i\}_{i \in I_1}$, для которого выполняется строгое включение $F \supset F_1$. Если $(\forall_{j \in I_1}) \bigcap\limits_{i \in I_1 \setminus \{j\}} X_i \neq B$, то оно само является минимальным по пересечению B и опять всё доказано. Если это не так, то процесс продолжим. В результате получим последовательность строгих включений конечных семейств $F \supset F_1 \supset F_2 \supset F_3 \ldots$, которая обязательно оборвётся не более чем за n шагов получением минимального подсемейства.

Это утверждение несправедливо в общем случае для бесконечных семейств.

Пример 2. Семейство полуинтервалов $F = \{(-\frac{1}{n}; 1]\}_{n \in \mathbb{N}}$, для которого $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} (-\frac{1}{n}; 1] = [0; 1]$, не имеет подсемейств, минимальных по пересечению $[0; 1]$, что легко проверяется по определению.

Пример 3. Семейство $F = \{(-\frac{1}{n}; 1], [0; 1 + \frac{1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}}$ с тем же пересечением $[0; 1]$ имеет бесконечно много двухэлементных подсемейств минимальных по пересечению $[0; 1]$ вида $F_{n,m} = \{(-\frac{1}{n}; 1], [0; 1 + \frac{1}{m})\}$, где $n, m \in \mathbb{N}$.

Пример 4. Семейство одноэлементных множеств $F = \{\{i\}\}_{i \in \mathbb{Z}}$, для которого $\bigcap\limits_{i \in \mathbb{Z}} \{i\} = \emptyset$, также имеет бесконечно много двухэлементных минимальных по пустому пересечению подсемейств вида $\{\{i\}, \{j\}\}$, где $i, j \in \mathbb{Z}$ и $i \neq j$.

Всякое семейство $F = \{X_i\}_{i \in I}$ можно рассматривать как упорядоченное множество $\langle F, \subseteq \rangle$ с отношением включения $\subseteq$. Напомним, что *цепью* в этом случае называется любая последовательность строгих включений $X_1 \subset X_2 \subset \ldots$ Число элементов этой последовательности без единицы (если оно определено) называют *длиной цепи.* Если $X_1 \nsubseteq X_2$ и $X_2 \nsubseteq X_1$, то такие элементы называются *несравнимыми.* Любая последовательность попарно несравнимых элементов называется *антицепью*, число элементов антицепи (если оно определено) называется *шириной антицепи.* Отдельно взятый элемент упорядоченного множества будем считать как цепью, так и антицепью, соответственно длиной 0 и шириной 1. Очевидно, что любое непустое подмножество цепи опять цепь, и любое непустое подмножество антицепи опять антицепь.

Итак, в семействе множеств могут быть подсемейства, которые являются цепями, и подсемейства, которые являются антицепями.

Предложение 3. *Пусть дано некоторое семейство $F = \{X_i\}_{i\in I}$ с пересечением $\bigcap\limits_{i\in I} X_i = B$. Всякое его подсемейство минимальное по пересечению B является антицепью в $\langle F, \subseteq \rangle$, которую будем называть минимальной антицепью с пересечением B.*

Доказательство. Пусть выполняется условие утверждения и $F^* = \{X_i\}_{i\in J\subset I}$ минимальное подсемейство по пересечению B. Если существуют $X_l, X_k \in F^*$, такие что $X_l \subseteq X_k$, то $\bigcap\limits_{i\in J} X_i = \bigcap\limits_{i\in J\setminus\{k\}} X_i = B$ и, следовательно, F^* не минимально. Что противоречит условию, следовательно, F^* не содержит сравнимых элементов и является антицепью.

Предложение 4. *Всякая антицепь $F = \{X_i\}_{i\in I}$ с пересечением $\bigcap\limits_{i\in I} X_i = B$, содержащая конечную антицепь с пересечением B содержит минимальную антицепь с этим же пересечением.*

Теорема 1. *Семейство имеет минимальное подсемейство по пересечению, если содержит конечную антицепь с этим же пересечением.*

В примере 2 семейство F является цепью, его антицепями являются отдельные её элементы, которые в пересечение дают себя, и поскольку среди них нет элемента $[0; 1]$, то нет и минимальной антицепи с пересечением $[0; 1]$. В примере 3 семейство F представляет собой две непересекающиеся цепи, его антицепями является любая пара его элементов, взятых точно по одному из каждой цепи. Других антицепей нет, все они имеют пересечение $[0; 1]$ и все они являются минимальными по этому пересечению. В примере 4 семейство F является антицепью с пересечением $\emptyset$. Любое его подсемейство, содержащее не менее двух элементов, имеет то же самое пересечение, но только двухэлементные подсемейства являются минимальными. Пример 1 требует дополнительных исследований, чтобы выявить все подсемейства, минимальные по пустому пересечению.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Новиков В. Е.* Теоретико-множественный подход к структуре генераторов концепта // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 3. С. 50–56.

УДК 512.53

В. Б. Поплавский, Д. Г. Явкаев

О НЕКОММУТАТИВНОСТИ БУЛЕВО-МАТРИЧНЫХ ИДЕМПОТЕНТОВ

Поступила 13.09.2020 г.

В статье доказываются два утверждения для идемпотентных булевых матриц, связанных с разбиением множества булевых $(0;1)$-матриц всевозможных размеров на классы $\mathcal{D}$-эквивалентности Грина. Здесь идемпотентные матрицы названы первичными идемпотентами, если они не сравнимы с единичной матрицей относительно булева частичного порядка, и вторичными идемпотентами в противном случае. Первое утверждение посвящено взаимному расположению первичного идемпотента и порождённого им вторичного идемпотента в одном $\mathcal{D}$-классе. Второе утверждение указывает на такое расположение вторичных идемпотентных матриц в $\mathcal{D}$-классе, которое влечёт их некоммутативность.

Обозначим множество булевых матриц с элементами из $B_2 = \{0;1\}$ всевозможных размеров $k \times l$, где $k = 1..n$ и $l = 1..n$ через $M_{n\times n}(B_2)$. Вместе с частичной операцией конъюктного умножения $\sqcap$ множество $M_{n\times n}(B_2)$ образует частичную полугруппу, изучению свойств идемпотентов которой посвящены работы [1, 2].

Далее мы будем использовать такие известные понятия для полугрупп, как $\mathcal{D}$-, $\mathcal{R}$-, $\mathcal{L}$- и $\mathcal{H}$-отношения эквивалентностей Грина на полугруппе, разбивающее её на классы [3]. Подобная ситуация наблюдается и для частичной полугруппы $M_{n\times n}(B_2)$ [4]. Если $\mathcal{D}$-класс полугруппы содержит идемпотент, то его называют регулярным. Известно, что для каждого элемента некоторых полугрупп, названных В. В. Вагнером обобщенными группами (другое название – инверсные полугруппы), существует единственный обобщенно обратный элемент. Каждый $\mathcal{D}$-класс таких инверсных полугрупп регулярен, и каждый $\mathcal{R}$- и $\mathcal{L}$-класс порождается ровно одним идемпотентом. Критерием инверсности полугруппы служит коммутативность любых её идемпотентов (см. предложение 2.12 в [5]). Таким образом, коммутативность идемпотентов существенным образом влияет на структуру полугруппы, что вызывает несомненный интерес к этому.

Ясно, что все $\mathcal{D}$-классы любой инверсной полугруппы являются по определению инверсными. Однако $\mathcal{D}$-классы произвольной полугруппы могут быть и регулярными, и нерегулярными, а среди регулярных могут быть как инверсные, так и неинверсные [6, 7].

Определение 1. Идемпотентные матрицы называются первичными идемпотентами, если они не сравнимы с единичной матрицей относительно булева частичного порядка, и вторичными идемпотентами в противном случае. При этом, если идемпотентная матрица A и единичная матрица E такого же размера удовлетворяют неравенству $E \subseteq A$, то A называется вторичным идемпотентом максимального типа, а если удовлетворяют неравенству $A \subseteq E$, то A называется вторичным идемпотентом минимального типа.

Известно, что любая матрица из $A \in M_{n\times n}(B_2)$ порождает два типа вторичных идемпотентов максимального типа: $A^R = ((A \sqcap A^{T'}))^{T'}$ и $A^L = ((A^{T'} \sqcap A))^{T'}$, где T' обозначает одновременное транспонирование и взятие дополнения булевой матрицы (см. [1, 2]).

Теорема 1. *Для любой матрицы A справедливы следующие импликации:*

$$(A, A^R) \in \mathcal{D} \to (\mathcal{A}, \mathcal{A}^{\mathcal{R}}) \in \mathcal{R},$$
$$(A, A^L) \in \mathcal{D} \to (\mathcal{A}, \mathcal{A}^{\mathcal{L}}) \in \mathcal{L}.$$

Доказательство. Докажем первую импликацию. Предположим, что $(A, A^R) \in \mathcal{D}$, однако A и A^R порождают различные $\mathcal{R}$- и $\mathcal{L}$-подклассы. Тогда для любой матрицы B, принадлежащей пересечению классов $R_A \cap L_{A^R}$ (теорема 3.2 в [1]) выполняется $B^R = A^R$. Так как $B \in L_{A^R}$, то существуют решения X, Y системы уравнений

$$XB = A^R, \quad YA^R = B$$

и, следовательно, существуют решения системы уравнений

$$XB^n = A^R B^{n-1}, \quad YA^R B^{n-1} = B^n.$$

Из равенств $A^R B = B^R B = B$ получаем $XB^n = B^{n-1}, YB^{n-1} = B^n$ для любого натурального n. Следовательно, $B^n \in L_B$, и тогда $(B^n, A^R) \in \mathcal{L}$. Так как $M_{n\times n}(B_2)$ является периодической полугруппой, то для некоторого $n = \tilde{n}$ степень $B^{\tilde{n}}$ является идемпотентом, причем $B^{\tilde{n}} \in L_{A^R}$, а множество $\{B, B^2, B^3, ...\}$ – конечной циклической полугруппой.

С другой стороны, из $B \in R_A \cap L_{A^R}$ следует $(A, B) \in \mathcal{R}$, и тогда $(B^{n-1}A, B^n) \in \mathcal{R}$ для любого натурального n. Получаем $B^{\tilde{n}} \in R_{B^{\tilde{n}-1}A}$.

Для дальнейших рассуждений понадобится теорема Миллера и Клиффорда [3]: для произвольных элементов s и t полугруппы принадлежность $st \in R_s \cap L_t$ выполняется тогда и только тогда, когда $R_t \cap L_s$ содержит идемпотент.

Так как было показано, что $B^{\tilde{n}}$ – идемпотент и $B^{\tilde{n}} \in L_{A^R} \cap R_{B^{\tilde{n}-1}A}$, то $A^R(B^{\tilde{n}-1}A) \in R_{A^R} \cap L_{B^{\tilde{n}-1}A}$. Получили $A^R(B^{\tilde{n}-1}A) = B^{\tilde{n}-1}A \in R_{A^R}$, и, следовательно, $B^{\tilde{n}} \in R_{A^R}$. Таким образом, $(B^{\tilde{n}}, A^R) \in \mathcal{H}$. В силу единственности идемпотента, принадлежащего $\mathcal{H}$-классу, получаем $B^{\tilde{n}} = A^R$. Поэтому множество $\{B, B^2, B^3, ..., B^{\tilde{n}}\}$ является конечной циклической группой, которая является подгруппой группы $H_{A^R} = H_{B^{\tilde{n}}}$, так как является максимальной подгруппой полугруппы $\mathbf{X}$. В итоге получили $B \in$ $\in H_{A^R}$, а так как $B \in R_A \cap L_{A^R}$, то это влечёт $(A, A^R) \in \mathcal{R}$.

Вторая импликация теоремы доказывается аналогично. ■

Как следствие получается следующая

Теорема 2. *Любой первичный идемпотент A (или вторичный идемпотент минимального типа) и соответствующий ему вторичный идемпотент максимального типа A^R или порождают один и тот же $\mathcal{R}$-класс, или порождают различные $\mathcal{D}$-классы. Аналогично, первичный идемпотент A (или вторичный идемпотент минимального типа) и соответствующий ему вторичный идемпотент максимального типа A^L или являются $\mathcal{L}$-эквивалентными, или порождают различные $\mathcal{D}$-классы.*

Если два идемпотента порождают один и тот же односторонний идеал, то они не коммутируют. Это утверждение сразу следует из того, что, порождая один и тот же односторонний идеал, эти идемпотенты становятся односторонними единицами для элементов этого идеала, которые не коммутируют.

Следующее утверждение показывает, что некоммутативность вторичных идемпотентов максимального типа зависит от их взаимного расположения в $\mathcal{D}$-классе с первичным идемпотентом (или вторичным идемпотентом минимального типа), который их порождает.

Теорема 3. *Пусть A – первичный идемпотент (или вторичный идемпотент минимального типа) и матрицы A, A^R, A^L принадлежат одному и тому же $\mathcal{D}$-классу. Тогда $A^RA^L \neq A^LA^R$.*

Доказательство. Из того что матрицы A, A^R, A^L принадлежат одному и тому же $\mathcal{D}$-классу и из теоремы 2 следует, что матрицы A, A^R, A^L расположены в своём $\mathcal{D}$-классе так, что образуют прямой угол на «egg-box» картинке $\mathcal{D}$-класса с вершиной в матрице A.

Пусть R_A и L_A – порожденные матрицей A $\mathcal{R}$- и $\mathcal{L}$-классы Грина соответственно. Так как $A \in R_{A^R} \cap L_{A^L}$, то по теореме Миллера – Клиффорда о произведении элементов в $\mathcal{D}$-классах имеем $A^L A^R \in L_{A^R} \cap R_{A^L}$. Если $A^R A^L = A^L A^R$, то произведение $A^R A^L$ является идемпотентом, и по той же теореме получаем $A^R A^L \in R_{A^R} \cap L_{A^L}$, т. е. $A = A^R A^L$ в силу единственности идемпотента в таких пересечениях. Тогда из $A^R \supseteq E$ и $A^L \supseteq E$ следует $A = A^R A^L \supseteq A^L \supseteq E$, что противоречит тому, что A является первичным или вторичным, но минимального типа. ■

Пример. Вторичные идемпотенты могут не коммутировать и в других случаях. Так, матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

являются вторичными идемпотентами максимального типа и порождают один и тот же $\mathcal{D}$-класс полугруппы булевых $(0;1)-$матриц размера 4×4. Этот $\mathcal{D}$-класс является инверсным: в каждом его $\mathcal{R}$- и $\mathcal{L}$-подклассе находится точно один идемпотент. Однако указанные матрицы не коммутируют.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Поплавский В. Б.* Об идемпотентах алгебры булевых матриц // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 2. С. 26–33.

2. *Поплавский В. Б.* О приложениях ассоциативности дуальных произведений алгебры булевых матриц // Фундаментальная и прикладная математика. 2012. Т. 17, вып. 4. С. 181–192.

3. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп : в 2 т. М. : Мир, 1972. Т. 1. 287 с.

4. *Поплавский В. Б.* О рангах, классах Грина и теории определителей булевых матриц // Дискретная математика. 2008. Т. 20, вып. 4. С. 42–60.

5. *Лаллеман Ж.* Полугруппы и комбинаторные приложения. М. : Мир, 1985. 440 с.

6. *Поплавский В. Б., Явкаев Д. Г.* Об инверсных D-классах полугруппы булевых матриц // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия : современные проблемы, приложения и проблемы истории : материалы XVI Междунар. конф. Тула : Тульск. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2019. С. 112–114.

7. *Поплавский В. Б., Явкаев Д. Г.* Вычисление инверсных D-классов булевых матриц // Математика, механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2019. Вып. 21. С.50–52 .

УДК 519.8

В. В. Розен

ПСЕВДОФИЛЬТРЫ И ФИЛЬТРЫ

Поступила 10.09.2020 г.

Как известно, понятие фильтра широко используется в некоторых разделах общей алгебры и топологии. В настоящей статье вводится некоторое обобщение понятие фильтра – псевдофильтр. Изучаются свойства псевдофильтров. Указаны приложения псевдофильтров для задачи построения группового решения. Дана интерпретация парадокса Эрроу на языке фильтров.

1. Введем следующее определение.

Определение 1. Пусть N – некоторое множество. Семейство W его подмножеств назовем псевдофильтром над N, если выполнены следующие условия:

(PF1) $W \neq \emptyset$ (*непустота*);

(PF2) $S \in W, T \supseteq S \Rightarrow T \in W$ (*мажорантная стабильность*);

(PF3) $S \in W \Rightarrow S' \notin W$ (*антидополнительность*).

Укажем некоторые следствия данной системы аксиом.

(C1) $N \in W$.

(C2) $\emptyset \notin W$.

(C3) $S, T \in W \Rightarrow S \cap T \neq \emptyset$.

Замечание 1. Рассмотрим кооперативную игру $\langle N, \nu \rangle$ в форме характеристической функции с множеством игроков N (см. [1]). Характеристическая функция ν называется супераддитивной, если для любых двух непересекающихся коалиций $S, T \subseteq N$ имеет место неравенство:

$$\nu(S) + \nu(T) \leq \nu(S \cup T).$$

Далее, игра $\langle N, \nu \rangle$ называется *простой*, если функция ν имеет только два значения: 0 и 1. Очевидно, что простая игра $\langle N, \nu \rangle$ полностью определена семейством подмножеств $S \subseteq N$, для которых $\nu(S) = 1$ (называемых *выигрывающими коалициями*).

Следующий результат отмечен в монографии [1].

Лемма 1. *Пусть $\langle N, \nu \rangle$ – простая игра и W – семейство ее выигрывающих коалиций. Тогда характеристическая функция ν является супераддитивной тогда и только тогда, когда семейство W удовлетворяет условиям* (PF2) *и* (PF3).

2. В этом пункте устанавливается связь между фильтрами и псевдофильтрами (см. [2]). Напомним, что фильтр над множеством N определяется как непустое семейство F его подмножеств, удовлетворяющих следующим условиям [3]:

(F1) $S \in F, T \in F \Rightarrow S \cap T \in F$;

(F2) $S \in F, T \supseteq S \Rightarrow T \in F$;

(F3) $\emptyset \notin F$.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 1.

1. *Всякий фильтр является также псевдофильтром*;

2. *Псевдофильтр является фильтром тогда и только тогда, когда он замкнут относительно пересечения любых двух своих подмножеств.*

Доказательство. 1. Пусть F – фильтр над N. Очевидно, что аксиомы (PF1) и (PF2) здесь выполнены. Покажем выполнимость аксиомы (PF3). Предположим, что для некоторого подмножества $S \subseteq N$ справедливо $S \in F$ и $S' \in F$. Тогда согласно (F1) получаем $\emptyset = S \cap S' \in F$ в противоречие с аксиомой (F3).

2. Если псевдофильтр является фильтром, тогда он замкнут относительно пересечения своих подмножеств по аксиоме (F1). Обратно, пусть W псевдофильтр, удовлетворяющий аксиоме (F1). Замечая, что аксиома (F2) совпадает с аксиомой (PF2), а аксиома (F3) является очевидным следствием аксиом (PF1) и (PF2), получаем, что псевдофильтр W является фильтром.

Приведем пример псевдофильтра, который не является фильтром.

Пример 1. Положим $N = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{S_1, S_2, S_3\}$, где $S_1 = \{1, 2, 3\}$, $S_2 = \{2, 3, 4\}$, $S_3 = \{1, 4\}$. Семейство $\mathrm{M}(B)$ надмножеств указанных множеств состоит из подмножеств $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$. Легко проверить, что семейство $\mathrm{M}(B)$ образует псевдофильтр над N. Однако для подмножеств $S_1, S_2 \in \mathrm{M}(B)$ получаем:

$$S_1 \cap S_2 = \{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\} \notin N.$$

Таким образом, аксиома (F1) для $\mathrm{M}(B)$ не выполнена, т.е. псевдофильтр $\mathrm{M}(B)$ не является фильтром.

3. Пусть A – произвольное множество, и для каждого $i \in N$ на множестве A задано некоторое бинарное отношение $\sigma_i \subseteq A^2$, являющееся линейным квазипорядком. Отношение σ_i называется индивидуальным отношением предпочтения игрока i. Положим $N = \{1, ..., n\}$. Модель

$$G = \langle N, A, (\sigma_i)_{i \in N} \rangle \tag{1}$$

называется *структурой индивидуальных предпочтений игроков* $N = \{1, ..., n\}$ на множестве альтернатив A. Класс моделей вида (1) обозначается далее K_N. Под *групповым решением* в классе K_N понимается отображение Ω, которое каждой модели $G \in K_N$ ставит в соответствие некоторое рефлексивное бинарное отношение $\Omega(G) = \sigma$ на множестве альтернатив A, интерпретируемое как предпочтение группы игроков N в модели G.

Определение 2. Пусть W – псевдофильтр над множеством $N = \{1, ..., n\}$. Определим групповое решение $\Omega_W(G) = \sigma_W$ в классе моделей K_N следующим образом:

$$a_1 \lesssim^{\sigma_W} a_2 \Leftrightarrow \{i \in N : a_1 \lesssim^{\sigma_i} a_2\} \in W. \tag{2}$$

Теорема 1. *Отношение предпочтения* σ_W *является транзитивным для любой модели класса* K_N *тогда и только тогда, когда псевдофильтр* W *является фильтром.*

Определение 3. Псевдофильтр W над множеством N называется *ультра псевдофильтром*, если выполнено условие: для любого $S \subseteq N$ имеет место $S \in W$ или $S' \in W$.

Теорема 2. *Отношение предпочтения* σ_W *является линейным для любой модели класса* K_N *тогда и только тогда, когда псевдофильтр* W *является ультра псевдофильтром.*

Замечание 2. Изложенные в данной работе подходы к введению группового решения дают одну интерпретацию известного парадокса Эрроу (см. [4]) в терминах фильтров). А именно: всякое групповое решение, которое удовлетворяет аксиомам Эрроу, может быть задано с помощью ультрафильтра. С другой стороны, так как множество N является конечным, любой фильтр над N будет главным, а главный ультрафильтр состоит из всех подмножеств множества N, которые содержат некоторый фиксированный элемент $i^* \in N$(см. [3]). Именно этот элемент i^* называется «диктатор» в терминологии Эрроу.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Мулен Э.* Теория игр с примерами из математической экономики : пер. с фр. М. : Мир, 1985. 200 с.

2. *Розен В.* Принятие решений по качественным критериям. Математические модели. Saarbrucken, Deutschland, Verlag : Palmarium Academic Publ., 2013. 284 p.

3. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. М. : Наука, 1970. 392 с.

4. *Льюс Р., Райфа Х.* Игры и решения. М. : Изд-во иностр. лит, 1961. 642 с.

УДК 514.133

Л. Н. Ромакина

БИПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ПАРАЛЛЕЛОГРАММЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Поступила 18.09.2020 г.

Гиперболическую плоскость $\widehat{H}$ положительной кривизны рассматриваем в проективной интерпретации Кэли – Клейна как внешнюю относительно овальной линии γ, называемой *абсолютом* плоскости $\widehat{H}$, область проективной плоскости P_2 [1–3]. Плоскость $\widehat{H}$ смежна по абсолюту с плоскостью Лобачевского, но топологически отлична от нее и значительно богаче по многообразию фигур, исследование которых представлено, в частности, в работах [2 – 7]. В работе [4] по типу расположения на абсолюте точек сторон проведена классификация параллелограммов плоскости $\widehat{H}$ и исследованы гиперболические параллелограммы, т. е. такие параллелограммы, все стороны которых принадлежат гиперболическим прямым. В работе [5] рассмотрены параболические параллелограммы, к ним мы относим параллелограммы, имеющие одну сторону на параболической прямой. В данной статье исследуем параллелограммы плоскости $\widehat{H}$, содержащие две стороны на параболических прямых, такие параллелограммы названы *бипараболическими* [4]. Вершину бипараболического параллелограмма назовем *параболической* (*гиперболической*), если исходящие из нее ребра параллелограмма лежат на параболических (гиперболических) прямых; вершину, не являющуюся параболической или гиперболической, назовем *боковой.*

Пусть в бипараболическом параллелограмме $ABCD$ ребра AB и AC лежат на параболических прямых, касающихся абсолюта в точках N и P соответственно. Абсолютные точки гиперболических прямых BC и CD, отличные от P и N, обозначим соответственно Q и E. Для точек N, P, Q и E на абсолютной овальной линии γ возможны два и только два существенно различных варианта расположения (см. [2, п. 2.9]): 1) пара точек N, P не разделяет пару точек Q, E; 2) пара точек N, P разделяет пару точек Q, E. Условия 1 и 2 определяют на $\widehat{H}$ два класса бипараболических параллелограммов, обозначим их соответственно $bp(I)$ и $bp(II)$.

Для изучения свойств параллелограммов классов $bp(I)$ и $bp(II)$, учитывая предыдущие обозначения, введем на плоскости $\widehat{H}$ канонический репер $R = \{N, P, A, E\}$ второго типа (см. [2, п. 4.1.2]). В репере R вершины параллелограмма и несобственные точки его сторон могут быть заданы координатами: $A(0:0:1)$, $B(0:b:1)$, $C(1:b:1)$, $D(1:0:1)$, $N(0:1:0)$, $P(1:0:0)$, $Q(1:b^2:b)$, $E(1:1:1)$, где $b \in \mathbf{R}$. Координаты точки O пересечения прямых $AC\,(-b:1:0)$ и $BD\,(b:1:-b)$ имеют в репере R вид $(1:b:2)$. По смыслу задачи точка C является собственной для $\widehat{H}$, поэтому ее координаты удовлетворяют первому неравенству из (4.7) в [2]. Следовательно, справедливо неравенство $b<1$. В силу этого и на основании условия 1 (2) для параллелограмма класса $bp(I)$ ($bp(II)$) параметр b ограничен условием $b \in (0,1)$ ($b<0$).

В случае параллелограмма класса $bp(I)$ его эллиптическая диагональ BD является коротким отрезком, т. е. не превышает половины эллиптической прямой. Действительно, точка O пересечения диагоналей лежит внутри параллелограмма, иначе параллелограмм не является конечным (мы исключаем такие объекты из рассмотрения). Точка D^*, ортогональная точке D на прямой BD и разделяющая с точкой D прямую BD пополам, имеет в репере R координаты $(b-2:2b:b)$. Поскольку при $b \in (0,1)$ выполняется условие $(BDOD^*) = 2/(b-2) < 0$, точки O и D^* разделяют пару точек B, D. Значит, точка D^* не принадлежит диагонали BD, т.е. смежный с диагональю отрезок прямой BD длиннее диагонали. Аналогично можно показать, что эллиптическая диагональ AC параллелограмма класса $bp(II)$ также является коротким отрезком. Эта информация позволит нам однозначно выразить значение косинуса длины эллиптической диагонали.

По формулам (4.33) и (4.56) из [2] для параллелограмма класса $bp(I)$ или $bp(II)$ получаем соответственно выражения:

$$\begin{gathered}\cosh\widehat{C}=\tfrac{2-b}{b},\quad \cosh\tfrac{|BC|}{\rho}=\cosh\tfrac{|CD|}{\rho}=\tfrac{2-b}{2\sqrt{1-b}},\quad \cosh\tfrac{|AC|}{\rho}=\tfrac{1}{\sqrt{1-b}},\\ \cos\tfrac{|BD|}{\rho}=\tfrac{1-b}{2},\quad \cosh\tfrac{|AO|}{\rho}=\tfrac{2}{\sqrt{4-b}},\quad \cosh\tfrac{|OC|}{\rho}=\tfrac{2-b}{\sqrt{4-b}\sqrt{1-b}},\\ \cos\tfrac{|BO|}{\rho}=\cos\tfrac{|OD|}{\rho}=\tfrac{\sqrt{4-b}}{2},\end{gathered}\tag{1}$$

$$\begin{gathered}\cosh\widehat{C}=\tfrac{2-b}{b},\quad \cosh\tfrac{|BC|}{\rho}=\cosh\tfrac{|CD|}{\rho}=\tfrac{2-b}{2\sqrt{1-b}},\quad \cos\tfrac{|AC|}{\rho}=\tfrac{1}{\sqrt{1-b}},\\ \cosh\tfrac{|BD|}{\rho}=\tfrac{1-b}{2},\quad \cos\tfrac{|AO|}{\rho}=\tfrac{2}{\sqrt{4-b}},\quad \cos\tfrac{|OC|}{\rho}=\tfrac{2-b}{\sqrt{4-b}\sqrt{1-b}},\\ \cosh\tfrac{|BO|}{\rho}=\cosh\tfrac{|OD|}{\rho}=\tfrac{\sqrt{4-b}}{2},\end{gathered}\tag{2}$$

где ρ – радиус кривизны плоскости $\widehat{H}$, а $\widehat{C}$ – мера внутреннего или соответственно внешнего угла параллеграмма при его гиперболической вершине.

На основании проведенных рассуждений и соотношений (1), (2) справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть бипараболический параллелограмм F плоскости $\widehat{H}$ принадлежит классу $bp(I)$ (или $bp(II)$), а мера его внутреннего (со-*

ответственно внешнего) угла при гиперболической вершине равна α. Тогда выполняются следующие утверждения.

1. *Гиперболическая вершина параллелограмма F принадлежит ковалиане (валиане) его параболической вершины.*
2. *Гиперболические ребра параллелограмма F равны, их длина m может быть выражена через α по формуле*

$$\cosh \frac{m}{\rho} = \coth \alpha.$$

3. *Длины h и e соответственно гиперболической и эллиптической диагоналей параллелограмма F могут быть выражены через α следующим образом:*

$$\begin{gathered} \cosh \frac{h}{\rho} = \coth \frac{\alpha}{2} \quad \left(\cosh \frac{h}{\rho} = \frac{1}{2} \tanh^2 \frac{\alpha}{2}\right), \\ \cos \frac{e}{\rho} = \frac{1}{2} \tanh^2 \frac{\alpha}{2} \quad \left(\cos \frac{e}{\rho} = \coth \frac{\alpha}{2}\right). \end{gathered}$$

4. *Диагонали параллелограмма F взаимно ортогональны, эллиптическая диагональ является коротким отрезком. Точка пересечения диагоналей делит его эллиптическую (гиперболическую) диагональ пополам.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Розенфельд Б. А.* Неевклидовы пространства. М. : Наука, 1969. 548 с.

2. *Ромакина Л. Н.* Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны : в 4 частях. Ч. 1. Тригонометрия. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2013. 244 с.

3. *Ромакина Л. Н.* Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны : в 4 частях. Ч. 2. Преобразования и простые разбиения. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2013. 276 с.

4. *Ромакина Л. Н.* Гиперболические параллелограммы плоскости $\widehat{H}$ // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 3. С. 43–52.

5. *Ромакина Л. Н.* Параболические параллелограммы плоскости $\widehat{H}$ // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 1. С. 20–28. https://doi.org/10.1850/1816-9791-2014-14-1-20-28

6. *Ромакина Л. Н.* Простые разбиения гиперболической плоскоси положительной кривизны // Матем. сб. 2012. Т. 203, вып. 9. С. 83–116.

7. *Ромакина Л. Н.* Теорема о площади прямоугольного трехреберника гиперболической плоскоси положительной кривизны // Дальневост. матем. журн. 2013. Т. 13, вып. 1. С. 127–147.

УДК 517.927.25

В. С. Рыхлов

О РАЗРЕШИМОСТИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Поступила 14.09.2020 г.

Рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + p_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad x \in [0,1], \quad t \in [0,+\infty), \tag{1}$$

$$\alpha_1 \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \alpha_0 \frac{\partial u(0,t)}{\partial t} = 0, \quad \beta_1 \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} + \beta_0 \frac{\partial u(1,t)}{\partial t} = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = f_0(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = f_1(x), \tag{3}$$

где $p_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_{ik}, \beta_{ik} \in \mathbb{C}$.

Предположим, что (1) является уравнением гиперболического типа, то есть $p_1^2 - 4p_2 > 0$, и характеристики удовлетворяют неравенствам

$$0 < \omega_1 < \omega_2 \Longleftrightarrow p_1 < 0, p_2 > 0. \tag{4}$$

Требуется найти *классическое решение* задачи (1)–(3), то есть найти функцию $u(x,t)$, которая в области $Q = \{(x,t) \big| x \in [0,1], t \in [0,+\infty)\}$ имеет непрерывные частные производные до 2-го порядка включительно, удовлетворяет краевым условиям (2) и начальным условиям (3).

Для нахождения классического решения задачи (1)–(3) будем использовать метод контурного интеграла («вычетный метод») Пуанкаре–Коши (см. [1]). Большой вклад в обоснование этого метода при весьма широких предположениях внесли А. П. Хромов и его ученики (см. [2,3]).

Задаче (1)–(3) сопоставим спектральную задачу $L(\lambda)y = 0$ для пучка $L(\lambda)$ вида

$$\ell(y,\lambda) := y'' + p_1 \lambda y' + p_2 \lambda^2 y, \tag{5}$$

$$U_1(y,\lambda) := \alpha_1 y'(0) + \lambda \alpha_0 y(0) = 0, \ U_2(y,\lambda) := \beta_1 y'(1) + \lambda \beta_0 y(1) = 0. \tag{6}$$

Пусть $y_1(x,\lambda) := \exp(\lambda\omega_1 x)$, $y_2(x,\lambda) = \exp(\lambda\omega_2 x)$ есть фундаментальная система решений уравнения $\ell(x,\lambda) = 0$. Далее для определенности считаем, что $\alpha_1 \neq 0$ или $\beta_1 \neq 0$ при каждом $i = 1,2$. В остальных случаях рассуждения принципиально не отличаются, только изменятся обозначения.

Обозначим $v_j = \alpha_1\omega_j + \alpha_0$, $w_j = \beta_1\omega_j + \beta_0$, $V_j = (v_j, 0)^T$, $W_j = (0, w_j)^T$, $j = 1, 2$; $a_{sk} = |W_s, W_k|$, $a_{\bar{s}k} = |V_s, W_k|$, $a_{s\bar{k}} = |W_s, V_k|$, $a_{\bar{s}\bar{k}} = |V_s, V_k|$.

Пусть всюду далее выполняются условия

$$v_1 \neq 0, \quad v_2 \neq 0, \quad w_1 \neq 0, \quad w_2 \neq 0. \tag{7}$$

Тогда справедливо представление

$$\Delta(\lambda) = \det\big(U_i(y_j, \lambda)\big)_{i,j=1}^2 = \lambda^2 \left(e^{\lambda\omega_1} a_{1\bar{2}} + e^{\lambda\omega_2} a_{\bar{1}2}\right) =: \lambda^2 \Delta_0(\lambda), \tag{8}$$

где $a_{1\bar{2}} \neq 0$ и $a_{\bar{1}2} \neq 0$, а, следовательно, пучок (5)–(6) является нерегулярным (см. [4,5]). Как показано в [6], из (8) следует, что система собственных функций пучка $L(\lambda)$ двукратно не полна в $L_2[0,1]$ и имеет бесконечный дефект относительно двукратной полноты. Условия разрешимости задачи (1)–(3) при таких предположениях ранее не были получены.

Далее для краткости будем использовать обозначения: $e_1 = -v_1/v_2$, $e_2 = w_2/w_1$, $d_1 = e_1 e_2$, $c_0 = (v_2 w_1)/(v_1 w_2)$, $\theta = 1/(\omega_2 - \omega_1)$, $\tau = \omega_2/\omega_1$, $\alpha_x = 1 - (1-x)/\tau$, $\beta_x = \tau x$, $\gamma_x = x + 1 - 1/\tau$, $\tilde{\alpha}_x = 1 - \tau(1-x)$, $\tilde{\beta}_x = x/\tau$, $\tilde{\gamma}_x = x - 1 + 1/\tau$.

Из (8) видно, что уравнение $\Delta_0(\lambda) = 0$ имеет корни $\lambda_k = (2k\pi i + d_0)/(\omega_2 - \omega_1)$, $k \in \mathbb{Z}$, где $d_0 := \ln_0 c_0$ ($\ln_0$ – фиксированная ветвь натурального логарифма такая, что $\ln_0 1 = 0$). Пусть $\Lambda := \{\lambda_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Очевидно, $\Lambda \setminus \{0\}$ есть множество ненулевых собственных значений (с.з.) пучка $L(\lambda)$. Точка $\lambda = 0$ может быть с.з., а может и не быть, даже если $0 \in \Lambda$.

Отсюда следует, что в $\mathbb{C}$ существуют контуры Γ_ν, которые отстоят от λ_k на расстояние, не меньшее некоторого фиксированного числа $\delta > 0$, а между соседними контурами лежит ровно одно λ_k. В качестве таких контуров можно взять контуры $A_\nu B_\nu C_\nu D_\nu A_\nu$, где $B_\nu C_\nu$ и $D_\nu A_\nu$ есть отрезки прямых $\operatorname{Re}\lambda = \pm H$ ($H \gg 0$), а дуги $\overset{\frown}{A_\nu B_\nu}$ и $\overset{\frown}{C_\nu D_\nu}$ лежат вне δ-окрестностей с.з., являются дугами окружностей радиусов r'_ν, r''_ν соответственно, с центрами в начале ($C'_1\nu < r'_\nu < C'_2\nu$, $C''_1\nu < r''_\nu < C''_2\nu$, где $C'_1, C''_1, C'_2, C''_2 > 0$ константы) и скользят по прямым $\operatorname{Re}\lambda = \pm H$.

Линеаризуем пучок (5)–(6), положив $z_0 = y$, $z_1 = \lambda z_0$. Тогда получим задачу уже для линейного оператора $\hat{L}$, но в пространстве вектор-функций (в.-ф.): $\hat{L}z = \lambda z$, где $z = (z_0, z_1)^T$ и

$$\hat{L}z := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{p_2} d_x^2 & -\frac{p_1}{p_2} d_x \end{pmatrix} z, D_{\hat{L}} = \left\{ \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \middle| z'_0, z_1 \in L_1[0,1], U_i(z) = 0, i = 1, 2 \right\},$$
$$U_1(z) := \alpha_1 z'_0(0) + \alpha_0 z_1(0), \quad U_2(z) := \beta_1 z'_0(1) + \beta_0 z_1(1).$$

Пусть $\hat{R}_\lambda = (\hat{L} - \lambda\hat{E})^{-1}$ есть резольвента оператора $\hat{L}$ и $f = (f_0, f_1)^T$. Обозначим $\hat{R}_\lambda f = \big(z_0(x,\lambda; f), z_1(x,\lambda; f)\big)^T$.

Рассмотрим функцию

$$u(x,t) = \lim_{\nu\to\infty}\Big(-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\nu} e^{\lambda t} z_0(x,\lambda; f)\, d\lambda\Big), \qquad (9)$$

которая является формальным решением задачи (1)–(3).

Пусть $F_1(x) := \int_0^x f_1(t)\,dt$. Положим

$$H_1(x,F_1) := -2F_1(x) + e_2F_1(\alpha_x) - e_1F_1(\beta_x) + d_1F_1(\gamma_x) + F_1(\tilde{\alpha}_x)/e_2-$$

$$-F_1(\tilde{\beta}_x)/e_1+F_1(\tilde{\gamma}_x)/d_1,\ H_2(x,f_0) := 2\omega_1 f_0(x)-e_2\omega_2 f_0(\alpha_x)+e_1\omega_1 f_0(\beta_x)-$$

$$-d_1\omega_2 f_0(\gamma_x) - \omega_1 f_0(\tilde{\alpha}_x)/e_2 + \omega_2 f_0(\tilde{\beta}_x)/e_1 - \omega_2 f_0(\tilde{\gamma}_x)/d_1,$$

$$H_3(x,f_1) := -2f_1(x)/\omega_1 + e_2 f_1(\alpha_x)/\omega_2 - e_1 f_1(\beta_x)/\omega_1 + d_1 f_1(\gamma_x)/\omega_2+$$

$$+f_1(\tilde{\alpha}_x)/(\omega_1 e_2) - f_1(\tilde{\beta}_x)/(\omega_2 e_1) + f_1(\tilde{\gamma}_x)/(\omega_2 d_1),\ H_4(x,f_0') := 2f_0'(x)-$$

$$-e_2 f_0'(\alpha_x) + e_1 f_0'(\beta_x) - d_1 f_0'(\gamma_x) - f_0'(\tilde{\alpha}_x)/e_2 + f_0'(\tilde{\beta}_x)/e_1 - f_0'(\tilde{\gamma}_x)/d_1.$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* $F_1(1) = 0$, $2\omega_1 < \omega_2$, (4), (7), $f_0^{(4)}, f_1^{(3)} \in L_1[0,1]$, $f_j^{(s)}(0) = f_j^{(s)}(1) = 0$, $j = 0,1$, $s = \overline{0, 3-j}$, *и, кроме того, функция* $f = (f_0, f_1)^T$ *удовлетворяет соотношению* $h(x,f) = 0$ *при* $x \in [0,1]$, *где* $h(x,f) = \big(h_0(x,f), h_1(x,f)\big)^T$ *и*

$$h_0(x,f) := \theta(p_2 H_1(x,F_1)+H_2(x,f_0)),\ h_1(x,f) := \theta(p_2 H_3(x,f_1)+H_2(x,f_0'))$$

(функции продолжены нулем, если их аргументы выходят за отрезок $[0,1]$*). Тогда в* Q *существует классическое решение* $u(x,t)$ *задачи* (1)–(3), *определяемое формулой* (9). *Ряд в* (9), *а также ряд, почленно продифференцированный до 2-го порядка включительно по* x *и* t, *являются равномерно сходящимися во всякой области* $Q_T = \{(x,t)\big| x\in \in[0,1], t \in \in [0,T]\}$, *где* $T > 0$ *есть любое фиксированное число.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Расулов М. Л.* Вычетный метод решения смешанных задач для дифференциальных уравнений и формула разложения произвольной вектор-функции по фундаментальным функциям граничной задачи с параметром // Матем. сб. 1959. Т. 48(90), № 3. С. 277–310.

2. *Хромов А. П., Корнев В. В.* Классическое и обобщенное решение смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения // Докл. АН. 2019. Т. 484, № 1. С. 18–20.

3. *Хромов А. П.* О классическом решении смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами и нулевой начальной скоростью // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 3. С. 280–288. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-280-288

4. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. 528 с.

5. *Рыхлов В. С.* О полноте корневых функций полиномиальных пучков обыкновенных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // ТВИМ. 2015. № 1(26). С. 69–86.

6. *Рыхлов В. С.* О полноте собственных функций квадратичных пучков обыкновенных дифференциальных операторов // Изв. вузов. Математика. 1992. № 3. С. 35–44.

УДК 517.9

С. Ю. Советникова, Г. В. Хромова

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПРИБЛИЖЕНИЯ И ВОССТАНОВЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА ОТРЕЗКЕ

Поступила 15.09.2020 г.

Рассматривается известное из теории приближения функций семейство операторов :

$$\overline{A}_n f = \frac{n}{\pi}\int_0^1 \frac{f(t)dt}{1+n^2(x-t)^2}.$$

Согласно [1] для $f(x) \in C[0,1]$ эти операторы дают возможность получить равномерные приближения к $f(x)$ лишь внутри отрезка [0,1].

В данной работе на базе операторов $\overline{A}_n$ построено семейство операторов, с помощью которых можно построить такие приближения на всем отрезке задания функции $f(x)$, а также решить задачу восстановления этой функции по её среднеквадратичным приближениям.

Используя идею А. П. Хромова [2], построим операторы:

$$A_n f = \begin{cases} \dfrac{2n}{\pi}\displaystyle\int_x^1 \frac{f(t)dt}{1+n^2(x-t)^2} \equiv A_{n2}f, \ x \in [0,1/2], \\ \dfrac{2n}{\pi}\displaystyle\int_0^x \frac{f(t)dt}{1+n^2(x-t)^2} \equiv A_{n1}f, \ x \in [1/2,1] \end{cases}$$

(мы считаем несущественным, как именно определены функции $A_n f$ при $x = 1/2$).

Считаем $A_n f$ элементами пространства $L_\infty[0,1]$ с нормой

$$\|\cdot\|_{L_\infty[0,1]} = max\left\{\|\cdot\|_{C[0,1/2]}, \|\cdot\|_{C[1/2,1]}\right\}.$$

Лемма 1. *Имеет место равенство:*

$$A_n 1 \equiv 1 + o(1), \text{ } где \text{ } \|o(1)\|_{L_\infty} \to 0 \text{ } при \text{ } n \to \infty.$$

Теорема 1. *Для любой функции $f(x) \in C[0,1]$ выполняется сходимость*

$$\|A_n f - f\|_{L_\infty} \to 0 \text{ } при \text{ } n \to \infty.$$

Доказательство. Пусть $x \in [1/2, 1]$. Тогда

$$\|A_n f - f\|_{L_\infty} = \frac{2n}{\pi} \int_0^x \frac{u(t) - u(x)}{1 + n^2(x-t)^2} dt + o(1),$$

где $o(1)$ зависит от $f(x)$—в силу леммы 1.

Представим $\displaystyle\int_0^x \ldots dt$ в виде суммы:

$$\int_0^{x-\eta} \ldots dt + \int_{x-\eta}^x \ldots dt \equiv J_1 + J_2, \text{где } 0 < \eta \le 1/2.$$

Тогда

$$\frac{2n}{\pi} |J_1| \le \frac{2n \|f\|_{C[0,1]}}{\pi(1 + n^2\eta^2)}, \ \frac{2n}{\pi} |J_2| \le \frac{2}{\pi} \omega(\eta) \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \omega(\eta).$$

Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем η так, чтобы $\omega(\eta) < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Фиксируем это η и подбираем $n_0(\varepsilon)$ так, чтобы при $n \ge n_0(\varepsilon)$ $\dfrac{2n \|f\|_C}{1 + n^2\eta^2} < \dfrac{\varepsilon}{3}$ и $|o(1)| < < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Приходим к утверждению теоремы при $x \in [1/2, 1]$. Для $x \in [0, 1/2]$ доказательство аналогично.

Пусть теперь вместо $f(x)$ нам известна $f_\delta(x)$, такая, что $\|f_\delta - f\|_{L_2[0,1]} \le \delta$. Найдем равномерные приближения к $f(x)$ по $f_\delta(x)$ и δ, применяя операторы A_n к $f_\delta(x)$.

Лемма 2. *Имеет место равенство:*

$$\|A_n\|_{L_2 \to L_\infty} = \sqrt{\frac{n}{\pi}} + o(1),$$

где $\|o(1)\|_{L_\infty} \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Пользуемся формулой

$$\|A_n\|_{L_2 \to L_\infty} = max \left\{ \|A_{n2}\|_{L_2[0,1] \to C[0,1/2]}, \|A_{n1}\|_{L_2[0,1] \to C[1/2,1]} \right\}.$$

Пусть $x \in [1/2, 1]$. Тогда

$$\|A_{n1}\|_{L_2[0,1]\to C[1/2,1]} = \frac{2n}{\pi} \max_{1/2\le x\le 1} \left(\int_0^x \frac{dt}{(1+n^2(x-t)^2)^2} \right)^{1/2}$$

и

$$\int_0^x \frac{dt}{(1+n^2t^2)^2} = \frac{1}{2n} \operatorname{arctg} nx + O(\frac{1}{n^2}).$$

Из этих формул получаем утверждение леммы 2 для $x\in[1/2,1]$. Аналогично рассуждаем и при $x \in [0, 1/2]$.

На основании леммы 2, теоремы 1 и аналога теоремы 1 из [3] применительно к задаче восстановления функций справедлива

Теорема 2. *Для того чтобы*

$$\Delta(\delta, f, A_n) \equiv \sup\left\{\|A_n f_\delta - f\|_{L_\infty} : \|f_\delta - f\|_{L_2} \le \delta\right\} \to 0$$

при $\delta \to 0, n \to \infty$, *необходимо и достаточно выполнения согласования* $n = n(\delta)$, *удовлетворяющего условиям:* $n(\delta) \to \infty$ *и* $\delta\sqrt{n(\delta)} \to 0$ *при* $n \to \infty$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М. : ГИТТЛ, 1957. 557 с.

2. *Хромов А. П., Хромова Г. В.* Об одном семействе операторов с разрывной областью значений в задачах приближения и восстановления непрерывных функций // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53, № 10. С. 1603–1609.

3. *Иванов В. К.* Об интегральных уравнениях Фредгольма 1-го рода // Диф. уравнения. 1967. Т. 3, № 3. С. 410–421.

УДК 517.518.85

А. Ю. Трынин

ОЦЕНКА ПРИБЛИЖЕНИЯ СИНК-АППРОКСИМАЦИЙ НА КЛАССЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Поступила 16.09.2020 г.

В работе изучаются аппроксимативные свойства операторов, впервые предложенных в [1] и [2], вида

$$L_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sinc}(nx - k\pi) f\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \sin nx}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} l_{k,n}(x) f\Big(\frac{k\pi}{n}\Big),$$

где $\operatorname{sinc} t := \frac{\sin t}{t}$. Обозначим $x_{k,n} = \frac{k\pi}{n}$, $k \in \mathcal{Q}$, $n \in \mathcal{N}$. Некоторое представление о полученных необходимых и достаточных условиях поточечной и равномерной сходимости этих интерполяционных процессов, их обобщений и модификаций на отрезке $[0, \pi]$ можно получить, например, ознакомившись с результатами работ [1–23].

Для любых $0 \le a < b \le \pi$, $0 < \varepsilon < (b-a)/2$ индексы p_1, p_2, m_1 и m_2 определим с помощью соотношений

$$x_{p_1,n} \le a + \varepsilon < x_{p_1+1,n}, \quad x_{p_2,n} \le b - \varepsilon < x_{p_2+1,n},$$
$$x_{k_1-1,n} < a \le x_{k_1,n}, \quad x_{k_2,n} \le b < x_{k_2+1,n}, \tag{1}$$
$$m_1 = \left[\frac{k_1}{2}\right] + 1, \quad m_2 = \left[\frac{k_2}{2}\right].$$

Здесь $[z]$ обозначает целую часть числа z. Если не оговорено иное, штрих у суммы в этой работе означает отсутствие слагаемого со знаменателем равным нулю.

Теорема 1. *Пусть функция $f \in C[0, \pi]$, $0 \le a < b \le \pi$, $0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$ и индексы m_1, m_2, p_1, p_2 определяются как в (1). Тогда условие*

$$\lim_{n\to\infty} \max_{p_1 \le p \le p_2} \left| \sum_{m=m_1}^{m_2}{}' \frac{f(x_{2m-1,n}) - 2f(x_{2m,n}) + f(x_{2m+1,n})}{p - 2m} \right| = 0$$

необходимо и достаточно для справедливости равенства

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[a+\varepsilon, b-\varepsilon]} |f(x) - L_n(f, x)| = 0.$$

Более того, имеет место следующая асимптотическая формула.

Теорема 2. *Пусть функция $f \in C[0, \pi]$, $0 \le a < b \le \pi$, $0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$ и индексы m_1, m_2, p_1, p_2 определяются как в (1). Тогда при $n \to \infty$ справедливо соотношение*

$$\max_{x\in[a+\varepsilon, b-\varepsilon]} |f(x) - L_n(f, x)| =$$
$$= O\Bigg(\max_{p_1 \le p \le p_2} \left| \sum_{m=m_1}^{m_2}{}' \frac{f(x_{2m-1,n}) - 2f(x_{2m,n}) + f(x_{2m+1,n})}{p - 2m} \right| \Bigg) +$$
$$+ O\left(\omega\left(f, \frac{\ln n}{n}\right) + \|f\| \frac{\ln n}{n} \right). \tag{2}$$

Константы равномерности в о-символике (2) зависят от $0 \leq a < b \leq \leq \pi$, $0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$, *а от выбора функции* f *не зависят.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Трынин А. Ю.* Об аппроксимации аналитических функций операторами Лагранжа–Штурма–Лиувилля // Современные проблемы теории функций и их приложения : тез. докл. 10-й Сарат. зимн. шк. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2000. С. 140–141.

2. *Трынин А. Ю.* Об оценке аппроксимации аналитических функций интерполяционным оператором по синкам // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 124–127.

3. *Trynin A. Yu., Sklyarov V. P.* Error of sinc approximation of analytic functions on an interval // Sampling Theory in Signal and Image Processing. 2008. Vol. 7, № 3. P. 263–270.

4. *Трынин А. Ю.* Обобщение теоремы отсчётов Уиттекера – Котельникова – Шеннона для непрерывных функций на отрезке // Матем. сб. 2009. Вып. 200, № 11. С. 61—108.

5. *Трынин А. Ю.* Теорема отсчётов на отрезке и её обобщения. LAP Lambert Academic Publishing RU, 2016. 488 с.

6. *Richardson M., Trefethen L.* A sinc function analogue of Chebfun // SIAM J. Sci. Comput. 2011. Vol. 33, № 5. P. 2519–2535.

7. *Tharwat M. M.* Sinc approximation of eigenvalues of Sturm – Liouville problems with a Gaussian multiplier // Calcolo : A quarterly on Numerical Analysis and Theory of Computation. 2014. Vol. 51, iss. 3. P. 465–484.

8. *Livne O. E., Brandt A. E.* MuST : The multilevel sinc transform // SIAM J. Sci. Comput. 2011. Vol. 33, № 4. P. 1726—1738.

9. *Bede B., Coroianu L., Gal S. G.* Introduction and Preliminaries // Approximation by Max-Product Type Operators. Switzerland : Springer International Publishing, 2016. P. 1–24. DOI: 10.1007/978-3-319-34189-7

10. *Coroianu L., Gal S. G.* Localization results for the non-truncated max-product sampling operators based on Fejer and sinc-type kernels // Demonstratio Mathematica. 2016. Vol. 49, № 1. P. 38–49.

11. *Tharwat Mohamed.* Sinc approximation of eigenvalues of Sturm—Liouville problems with a Gaussian multiplier // Calcolo. 2013. Vol. 51, № 3. P. 465–484. DOI: 10.1007/s10092-013-0095-3

12. *Новиков И. Я., Стечкин С. Б.*Основы теории всплесков // Успехи математических наук. 1998. Т. 53, вып. 6, № 324. С. 53–128.

13. *Шмуклер А. И., Шульман Т. А.* О некоторых свойствах рядов Котельникова // Изв. вузов. Математика. 1974. № 3. С. 93–103.

14. *Трынин А. Ю.* Критерий равномерной сходимости sinc-приближений на отрезке// Изв. вузов. Математика. 2008. № 6. С. 66–78.

15. *Трынин А. Ю.* Необходимые и достаточные условия равномерной на отрезке синк-аппроксимации функций ограниченной вариации // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 288–298. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-288-289

16. *Трынин А. Ю.* О расходимости синк-приближений всюду на $(0,\pi)$ // Алгебра и анализ. 2010. Т. 22, вып. 4. С. 232–256.

17. *Sklyarov V. P.* On the best uniform sinc-approximation on a finite interval // East Journal on Approximations. 2008. Vol. 14, № 2. P. 183–192.

18. *Трынин А. Ю.* О некоторых свойствах синк-аппроксимаций непрерывных на отрезке функций // Уфимский матем. журн. 2015. Т. 7, № 4. С. 116–132.

19. *Умаханов А. Я., Шарапудинов И. И.* Интерполяция функций суммами Уиттекера и их модификациями: условия равномерной сходимости // Владикавказский матем. журн. 2016. Т. 18, вып. 4. С. 61—70.

20. *Трынин А. Ю.* О необходимых и достаточных условиях сходимости синк-аппроксимаций // Алгебра и анализ. 2015. Т. 27, вып. 5. С. 170—194.

21. *Трынин А. Ю.* Приближение непрерывных на отрезке функций с помощью линейных комбинаций синков // Изв. вузов. Математика. № 3. С. 72–81.

22. *Trynin A. Yu.* One Functional Class of Uniform Convergence on a Segment of Truncated Whittaker Cardinal Functions // International Journal of Mathematics and Systems Science. 2018. Vol. 1, № 3. P. 1–9. DOI: 10.24294/ijmss.v1i3.527

23. *Трынин А. Ю.* Критерии равномерной сходимости синк-приближений на отрезке // Современные проблемы теории функций и их приложения : тез. докл. 13-й Сарат. зимн. шк. Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2006. С. 176–178.

УДК 517.956.32+517.927.25

А. П. Хромов

О РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДАХ И МЕТОДЕ ФУРЬЕ В СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ, СОДЕРЖАЩИМИ ПРОИЗВОДНЫЕ

Поступила 05.09.2020 г.

Данная работа продолжает исследования формального ряда метода Фурье, базирующиеся на использовании расходящихся рядов в понимании Эйлера [1–7].

Здесь рассматриваются более сложные, чем ранее, краевые условия в смешанной задаче для волновго уравнения. Для них конструируется метод продолжения начальной функции с отрезка $[0, 1]$ на всю вещественную ось, требующийся в данном исследовании. Применяется техника работы с расходящимися рядами такая, как в [7] (она ведет начало с работы [8]). В результате из формального ряда метода Фурье получается абсолютно и равномерно сходящийся ряд, который трактуется как решение обобщенной смешанной задачи.

Рассматривается задача

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) - q(x)u(x,t), \quad x,t \in [0,1] \times [0,\infty), \tag{1}$$

$$U_1(u) = u_x(0,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$U_2(u) = u_x(1,t) + \alpha_2 u(0,t) + \beta_2 u(1,t) = 0, \tag{3}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = 0, \tag{4}$$

где $q(x) \in L[0,1]$, α_i, β_i, $i = 1,2$ – произвольные комплексные числа, $|\alpha_1| + |\beta_1| + |\alpha_2| + |\beta_2| > 0$.

Запишем формальное решение задачи (1)–(4) в виде [7]:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\varphi)\cos\rho t\, d\lambda. \tag{5}$$

Теперь R_λ – резольвента оператора L:

$$Ly = -y''(x) + q(x)y(x), \quad U_1(y) = y'(0) + \alpha_1 y(0) + \beta_1 y(1) = 0,$$
$$U_2(y) = y'(1) + \alpha_2 y(0) + \beta_2 y(1) = 0.$$

Применим к ряду в правой части (5) ту же технику, что и в [7]. Используя идею А. Н. Крылова об ускорении сходимости рядов, представим ряд в (5) в виде суммы:

$$u(x,t) = u_{01}(x,t) + u_1(x,t), \tag{6}$$

где $u_{01}(x,t)$ есть ряд из (5) с заменой R_λ на $R^0_\lambda = (L_0 - \lambda E)^{-1}$, L_0 есть L при $q(x) = 0$.

В случае классического решения ряд $u_{01}(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно при каждом фиксированном t, и его сумма есть:

$$u_{01}(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde\varphi(x+t) + \tilde\varphi(x-t)], \tag{7}$$

где $\tilde\varphi(x) = \varphi(x)$ при $x \in [0,1]$.

Функция $\tilde\varphi(x)$ определяется следующей теоремой.

Теорема 1. *Если $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям существования классического решения задачи* (1)–(4)*, то справедлива формула:*

$$(\tilde\varphi(-x), \tilde\varphi(1+x))^T =$$
$$= (\tilde\varphi(x), \tilde\varphi(1-x))^T + 2M\int\limits_0^x e^{M(x-t)}\,(\tilde\varphi(t), \tilde\varphi(1-t))^T\,dt, \tag{8}$$

где $\tilde\varphi(x) = \varphi(x)$ при $x \in [0,1]$, T – знак транспонирования, $M = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ -\alpha_2 & -\beta_2\end{pmatrix}$.

Будем теперь рассматривать формулу (8), считая, что $\varphi(x) \in L[0,1]$. Она дает однозначное продолжение $\tilde\varphi(x)$ функции $\varphi(x) \in L[0,1]$ на всю ось $(-\infty,\infty)$.

Ряд $u_{01}(x,t)$ теперь, вообще говоря, расходящийся, но мы будем считать его формальным решением той же смешанной задачи (задача (1)–(4) при $q(x)=0$), но понимаемой чисто формально.

Будем называть такую задачу обобщенной смешанной задачей. Расходящемуся ряду $u_{01}(x,t)$ в качестве суммы назначаем правую часть (7). Но эта правая часть имеет смысл при любых $x\in(-\infty,\infty)$. Будем в этом случае обозначать ее $a_0(x,t)$.

Возвращаемся к формуле (6). Второму слагаемому в ней соответствует также обобщенная смешанная задача

$$
\begin{gathered}
u_{1tt}(x,t)=u_{1xx}(x,t)-q(x)u_1(x,t)+f_0(x,t), \quad x,t\in[0,1]\times[0,\infty),\\
U_i(u)=0, \quad i=1,2,\\
u_1(x,0)=u_{1t}(x,0)=0, \quad f_0(x,t)=-q(x)a_0(x,t).
\end{gathered}
$$

Формальным решением методом Фурье этой задачи является [7]:

$$
u_1(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r}+\sum_{n\ge n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\int\limits_0^t R_\lambda(f_0(\cdot,\tau))\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\,d\lambda, \quad (9)
$$

где $R_\lambda(f_0(\cdot,\tau))$ означает, что R_λ применяется к $f_0(x,\tau)$ по переменной x.

И мы заменяем теперь ряд $u_1(x,t)$ из (6) на ряд (9). Подобно (6), представляем ряд (9) в виде суммы

$$
u_1(x,t)=u_{02}(x,t)+u_2(x,t),
$$

где $u_{02}(x,t)$ есть ряд (9) с заменой R_λ и R_λ^0.

Так как $\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}=\int\limits_0^{t-\tau}\cos\rho\eta\,d\eta$, то ряд для $u_{02}(x,t)$ преобразуется как расходящийся ряд к виду

$$
u_{02}(x,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^{t-\tau}Z_0(x,\eta;f_0(\cdot,\tau))\,d\eta,
$$

где $Z_0(x,\eta;f_0(\cdot,\tau))$ есть ряд, аналогичный ряду $Z_0(x,t,\varphi)$ формального решения задачи (1)–(4) при $q(x)=0$.

Ряд $Z_0(x,\eta;f_0(\cdot,\tau))$ имеет сумму

$$
Z_0(x,\eta;f_0(\cdot,\tau))=\frac{1}{2}\left[\tilde f_0(x+\eta,\tau)+\tilde f_0(x-\eta,\tau)\right].
$$

Отсюда получаем, что сумма ряда $u_{02}(x,t)$ есть

$$u_{02}(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}_0(\eta,\tau)\, d\eta. \tag{10}$$

Правую часть (10) при $x \in (-\infty, \infty)$ обозначим $a_1(x,t)$. Для ряда $u_2(x,t)$ определим, как и выше, соответствующую ему обобщенную смешанную задачу, для этой задачи запишем ряд ее формального решения и т. д. Так шаг за шагом, держа жесткую связь: смешанная задача – ряд ее формального решения, мы приходим к ряду

$$A(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x,t), \tag{11}$$

где

$$a_m(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}_{m-1}(\eta,\tau)\, d\eta \quad (m \ge 1),$$
$$f_m(x,t) = -q(x)a_m(x,t).$$

Справедлива

Теорема 2. *Ряд $A(x,t)$ при $x, t \in Q_T = [0,1] \times [0,T]$ сходится абсолютно и равномерно с экспоненциальной скоростью при любом $T > 0$.*

Будем по определению считать ряд $A(x,t)$ решением определенной выше обобщенной смешанной задачи (1)–(4).

В статье В. В. Корнева в настоящем сборнике показано, что при соответствующих условиях на параметры смешанной задачи ряд $A(x,t)$ дает ее классическое решение. В этом случае, так же, как и в [4], получаем, что использование расходящихся рядов приводит сравнительно просто к более сильным результатам и при минимальном использовании математических средств, чем в случае сходящихся рядов, когда приходилось применять глубокие факты действительного анализа (пример А. Н. Колмогорова, теорема Карлесона – Ханта, теорема Хаусдорфа – Юнга и др.).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и функциональные уравнения, связанные с аналогами геометрической прогрессии // Понтрягинские чтения – XXX : материалы междунар. конф. (Воронеж, 3–9 мая 2019 г.). Воронеж : ИД ВГУ, 2019. С. 291–300.
2. *Эйлер Л.* Дифференциальное исчисление. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1949. 580 с.
3. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. М. : Изд-во иностр. лит., 1951. 504 с.

4. *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и метод Фурье для волнового уравнения // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 20-й международ. Сарат. зимн. шк. (Саратов, 28 января–1 февраля 2020 г.). Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2020. С. 433–439.

5. *Корнев В. В., Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и обобщенное решение одной смешанной задачи для волнового уравнения // Понтрягинские чтения–XXXI : материалы междунар. конф. (Воронеж, 3–9 мая 2020 г.). Воронеж : ИД ВГУ, 2020. С. 113–117.

6. *Ломов И. С.* Метод А. П. Хромова решения смешанной задачи для гиперболического уравнения. Обобщенная формула Даламбера // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 20-й междунар. Сарат. зимн. шк. (Саратов, 28 января–1 февраля 2020 г.). Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2020. С. 231–236.

7. *Хромов А. П., Корнев В. В.* Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59, № 2. С. 286–300.

8. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Резольвентный подход в методе Фурье // Докл. АН. 2014. Т. 458, № 2. С. 138–140.

УДК 519.642.5

Г. В. Хромова

ОБРАЩЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Поступила 15.09.2020 г.

Рассматривается интегральное уравнение 1-го рода:

$$Au \equiv \int_0^x (x-t)^\beta u(t)dt = f(x), \tag{1}$$

$0 < \beta < 1,\ u(x)-$ непрерывна.

Приводится вид обратного оператора по аналогии с тем, как это делается в случае $\beta < 0$ [1].

Теорема. *Справедлива формула:*

$$A^{-1}f = \frac{sin\pi\beta}{\pi\beta}\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x (x-t)^{-\beta} f(t)dt. \tag{2}$$

Доказательство. Как и в [1], умножаем обе части уравнения (1) на $(x-t)^\gamma$ и берем интеграл от 0 до x:

$$\int_0^x (x-t)^\gamma dt \int_0^t (t-\tau)^\beta u(\tau)d\tau = \int_0^x (x-t)^\gamma f(t)dt. \tag{3}$$

В левой части меняем порядок интегрирования. Тогда она примет вид:

$$\int_0^x u(\tau)d\tau \int_\tau^x (x-t)^\gamma (t-\tau)^\beta dt.$$

Делаем замену переменных

$$t = \tau + y(x-\tau)$$

и приходим к выражению

$$\int_0^x (x-t)^{\gamma+\beta+1} u(\tau)d\tau \int_0^1 y^\beta (1-y)^\gamma dy.$$

Если мы теперь, как в [1], выберем γ из условия $\gamma + \beta + 1 = 0$, то придем к расходящемуся интегралу $\int_0^1 y^\beta (1-y)^{-(1+\beta)} dy$. Поэтому положим $\gamma = -\beta$. В этом случае равенство (3) примет вид

$$\int_0^x (x-t)u(t)dt = (B(1+\beta, 1-\beta))^{-1} \int_0^x (x-t)^{-\beta} f(t)dt, \qquad (4)$$

где $B(1+\beta, 1-\beta)$ – бета-функция.

Учитывая, что

$$B(1+\beta, 1-\beta) = \frac{\Gamma(1+\beta)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(2)},$$

где $\Gamma(\cdot)$—гамма-функция [2, с. 463], и используя известные свойства гамма-функции [2, с. 866], а затем дифференцируя (4) два раза, приходим к утверждению теоремы.

Формулу (2) можно использовать при решении прикладных задач, т.е. когда правая часть уравнения (1) задана приближенно. Тогда можно построить метод регуляризации аналогично тому, как это делается в [3].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Михлин С. Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям. М. : Физматгиз, 1959. 232 с.

2. Математическая энциклопедия. : в 5 т. М. : Сов. энцикл., 1977. Т. 1. 576 с.

3. *Хромова Г. В.* О равномерных приближениях к решению интегрального уравнения Абеля // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 10. С. 1703–1712.

УДК 517.984

В. А. Юрко

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С СИНГУЛЯРНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Поступила 21.09.2020 г.

1. Рассмотрим сингулярное дифференциальное уравнение

$$-\frac{d}{dt}\Big(p_2(t)\frac{dz}{dt}\Big)+p_1(t)z(t)=\lambda p_0(t)z(t),\quad t\in(a,b),\tag{1}$$

где комплекснозначные функции $p_k(t)$ имеют нули и/или особенности на концах интервала (a,b). Точнее, $p_k(t)=(t-a)^{s_{k0}}(b-t)^{s_{k1}}p_{k0}(t)$, где s_{km} – вещественные числа, $p_{k0}(t)\in C^2[a,b]$, $p_{00}(t)p_{20}(t)\neq 0$, $p_{00}(t)/p_{20}(t)>0$ для $t\in[a,b]$. Пусть $s_{2m}<s_{0m}+2$, $s_{2m}\le s_{1m}+2$, $m=0,1$. Так как решения уравнения (1) могут иметь особенности на концах интервала, то возникает вопрос как определять краевые условия в этих точках. В данной статье предлагается общий подход определения сингулярных краевых условий. Изучаются свойства спектра краевых задач для уравнения (1) с сингулярными краевыми условиями. Доказана полнота собственных и присоединенных функций (с. п. ф.) в соответствующих банаховых пространствах и получено решение обратных спектральных задач. При этом используются результаты из [1–3].

2. Обозначим $s_m=s_{0m}-s_{2m},\ m=0,1$,

$$r(t)=\frac{p_0(t)}{p_2(t)},\ \chi(t)=\frac{p_1(t)}{p_2(t)}+\frac{d}{dt}\Big(\frac{\dot p_2(t)}{2p_2(t)}\Big)+\Big(\frac{\dot p_2(t)}{2p_2(t)}\Big)^2,$$

$$R(t)=\Big(r(t)\Big)^{1/2},\ T=\int_a^b R(\xi)\,d\xi.$$

Тогда $s_m>-2$, $m=0,1$, и существуют конечные пределы

$$\chi_0=\lim_{t\to a+0}(t-a)^2\chi(t),\quad \chi_1=\lim_{t\to b-0}(b-t)^2\chi(t).$$

Обозначим $\nu=(\chi_0+1/4)^{1/2}/(s_0+2)$, $\gamma=(\chi_1+1/4)^{1/2}/(s_1+2)$. Пусть для определенности $\mathrm{Re}\,\nu>0$, $\mathrm{Re}\,\gamma>0$, $\nu,\gamma\notin\mathbf{N}$. Заменой $x=\int_a^t R(\xi)\,d\xi,\ y(x)=(p_0(t)p_2(t))^{1/4}z(t)$ приведем (1) к уравнению

$$-y''(x)+q(x)y(x)=\lambda y(x),\quad x\in(0,T),\tag{2}$$

$$q(x)=\ddot r(t)(4r^2(t))^{-1}-5\dot r(t)(16r^3(t))^{-1}+\chi(t)(r(t))^{-1};\ q(x)\in C[0,T],$$

$$q(x)=\frac{\omega}{x^2}+q_0(x),\ x\in(0,T/2],\ q(x)=\frac{\omega_1}{(T-x)^2}+q_0(x),\ x\in(T/2,T),$$

где $\omega=\nu^2-1/4,\ \omega_1=\gamma^2-1/4$. Будем предполагать, что $q_0(x)x^{2\theta}(T-x)^{2\theta_1}\in\mathcal{L}(0,T)$, где $\theta:=1/2-\operatorname{Re}\nu,\ \theta_1:=1/2-\operatorname{Re}\gamma$.

Пусть $\lambda=\rho^2,\ \arg\rho\in(-\pi/2,\pi/2]$. Рассмотрим функции

$$C_j(x,\lambda)=x^{\mu_j}\sum_{k=0}^{\infty}c_{jk}(\rho x)^{2k},\ j=1,2,\quad c_{10}c_{20}=(2\nu)^{-1},$$

$$\mu_j=(-1)^j\nu+1/2,\ c_{jk}=(-1)^k c_{j0}\,(\prod_{s=1}^{k}((2s+\mu_j)(2s+\mu_j-1)-\omega))^{-1}.$$

Здесь и в дальнейшем, $z^\mu=\exp(\mu(\ln|z|+i\arg z)),\ \arg z\in(-\pi,\pi]$. Функции $C_j(x,\lambda),\ j=1,2$ являются решениями уравнения $-y''+\omega x^{-2}y=\lambda y$. Пусть $S_j(x,\lambda),\ j=1,2$ – решения следующих интегральных уравнений:

$$S_j(x,\lambda)=C_j(x,\lambda)+\int_0^x g(x,t,\lambda)(q(t)-\omega t^{-2})S_j(t,\lambda)\,dt,\quad 0<x<T,$$

где $g(x,t,\lambda)=C_1(t,\lambda)C_2(x,\lambda)-C_1(x,\lambda)C_2(t,\lambda)$. Функции $S_j(x,\lambda)$ образуют фундаментальную систему решений для уравнения (2), причем

$$\langle S_1(x,\lambda),S_2(x,\lambda)\rangle\equiv 1,\tag{3}$$

где $\langle y(x),\tilde y(x)\rangle:=y(x)\tilde y'(x)-y'(x)\tilde y(x)$. Назовем $S_j(x,\lambda)$ решениями типа Бесселя уравнения (2) относительно точки $x=0$. Пусть $S_{j1}(x,\lambda),\ j=1,2,\ 0<x<T$ – решения типа Бесселя уравнения $-y_1''(x)+q(T-x)y_1(x)=\lambda y_1(x)$ относительно точки $x=0$. Тогда функции $S_j^+(x,\lambda):=(-1)^{j-1}S_{j1}(T-x,\lambda)$ являются решениями типа Бесселя уравнения (2) относительно точки $x=T$. Ясно, что

$$\langle S_1^+(x,\lambda),S_2^+(x,\lambda)\rangle\equiv 1.\tag{4}$$

При $k=1,2$ введем линейные формы

$$\sigma_k(y):=(-1)^{k-1}\langle y(x),S_{3-k}(x,\lambda)\rangle_{|x=0},$$

$$\sigma_k^+(y):=(-1)^{k-1}\langle y(x),S_{3-k}^+(x,\lambda)\rangle_{|x=T}.$$

Из (3) и (4) вытекает, что $\sigma_k(S_j)=\sigma_k^+(S_j^+)=\delta_{jk},\ j,k=1,2$, где δ_{jk} – символ Кронекера. Задача типа Коши для уравнения (2) с начальными условиями $\sigma_k(y) = c_k$, $k = 1, 2$, имеет единственное решение $y(x) = c_1 S_1(x,\lambda) + c_2 S_2(x,\lambda)$. Аналогично задача типа Коши для уравнения (2) с начальными условиями $\sigma_k^+(y) = c_k$, $k = 1, 2$, имеет единственное решение $y(x) = c_1 S_1^+(x,\lambda) + c_2 S_2^+(x,\lambda)$.

Линейные формы $\sigma_k(y)$ и $\sigma_k^+(y)$ позволяют ввести сингулярные краевые условия для уравнения (2):

$$a_{k1}\sigma_1(y) + a_{k2}\sigma_2(y) + a_{k1}^+\sigma_1^+(y) + a_{k2}^+\sigma_2^+(y) = 0,\ k = 1, 2, \tag{5}$$

где $rank\,[a_{k1}, a_{k2}, a_{k1}^+, a_{k2}^+,]_{k=1,2} = 2$. Нормализация условий (5) дает 3 класса краевых условий.

Случай 1. Пусть $\mathrm{rank}\,[a_{k2}, a_{k2}^+]_{k=1,2} = 2$. Тогда, разрешая (5) относительно $\sigma_2(y)$ и $\sigma_2^+(y)$, приходим к эквивалентным краевым условиям вида

$$\left.\begin{aligned} U_1(y) &:= \sigma_2(y) + a_1\sigma_1(y) + a_1^+\sigma_1^+(y) = 0, \\ U_2(y) &:= \sigma_2^+(y) + a_2\sigma_1(y) + a_2^+\sigma_1^+(y) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Случай 2. Пусть $\mathrm{rank}\,[a_{k2}, a_{k2}^+]_{k=1,2} = 1$. Тогда (5) приводится к виду

$$a_{11}\sigma_1(y) + a_{12}\sigma_2(y) + a_{11}^+\sigma_1^+(y) + a_{12}^+\sigma_2^+(y) = a_{01}\sigma_1(y) + a_{01}^+\sigma_1^+(y) = 0,$$

$$|a_{12}| + |a_{11}^+| > 0.$$

Случай 3. Пусть $\mathrm{rank}\,[a_{k2}, a_{k2}^+]_{k=1,2} = 0$, т.е. $a_{k2} = a_{k2}^+ = 0$, $k = 1, 2$. Тогда (5) сводится к распадающимся краевым условиям $\sigma_1(y) = \sigma_1^+(y) = 0$.

Для определенности будем рассматривать ниже краевую задачу L для уравнения (2) с краевыми условиям (6). Отметим, что аналогично можно ввести сингулярные краевые условия для уравнения (1).

3. Обозначим $\Delta(\lambda) := \det[U_k(S_j)]_{k,j=1,2}$. Нули $\{\lambda_n\}$ функции $\Delta(\lambda)$ совпадают с собственными значениями задачи L.

Теорема 1. *Краевая задача L имеет счетное множество собственных значений $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$, причем*

$$\rho_n := \sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi}{T}(n + p + \frac{\mu_1 + \mu_1^+}{2} + O(\frac{1}{n^\beta})), \quad n \to \infty,$$

где $\beta := \min(1, 2Re\,\nu, 2Re\,\gamma)$, а $p \in \mathbf{Z}$ зависит только от ν, γ.

Пусть α, η – вещественные числа и $1 \leq p < \infty$. Введем банаховы пространства $B_{\alpha,\eta,p} = \{f(x) : f(x)x^{-\alpha}(T-x)^{-\eta} \in \mathcal{L}_p(0,T)\}$ с нормой $\|f\|_{\alpha,\eta,p} = \|f(x)x^{-\alpha}(T-x)^{-\eta}\|_p$, где $\|.\|_p$ – норма в $\mathcal{L}_p(0,T)$. Имеем

$$B_{\alpha,\eta,p} \subseteq B_{\beta,\xi,s},\ \ 1 \leq s \leq p < \infty,\ \beta - \alpha < s^{-1} - p^{-1},\ \xi - \eta < s^{-1} - p^{-1}$$

(символ $\subseteq$ обозначает плотное вложение). В частности, $B_{\alpha,\eta,p} \subseteq \mathcal{L}_s(0,T)$ при $1 \le s \le p < \infty$, $\alpha > p^{-1} - s^{-1}$, $\eta > p^{-1} - s^{-1}$.

Теорема 2. *Система с.п.ф. краевой задачи L полна в пространстве $B_{\beta,\xi,s}$ при $1 \le s < \infty$, $\beta < \theta + 1/s$, $\xi < \theta_1 + 1/s$.*

Следствие 1. *Система с.п.ф. краевой задачи L полна в $\mathcal{L}_s(0,T)$ при* $1/s > \max(Re\,\nu - 1/2,\ Re\,\gamma - 1/2)$.

Рассмотрим краевую задачу Q для уравнения (1) с краевыми условиями

$$\tau_2(z) + a_1\tau_1(z) + a_1^+\tau_1^+(z) = 0,\ \tau_2^+(z) + a_2\tau_1(z) + a_2^+\tau_1^+(z) = 0.$$

Собственные значения задачи Q совпадают с собственными значениями задачи L, и теорема 1 остается верной и для Q. Обозначим $w = (s_0 + 2)\theta/2 - (s_{00} + s_{20})/4$, $w_1 = (s_1 + 2)\theta_1/2 - (s_{01} + s_{21})/4$. Следующая теорема является следствием теоремы 2.

Теорема 3. *Система с.п.ф. краевой задачи Q полна в пространстве $B_{\beta,\xi,s}$ при $1 \le s < \infty$, $\beta < w + 1/s$, $\xi < w_1 + 1/s$. В частности, система с.п.ф. Q полна в $\mathcal{L}_s(0,T)$ при $1/s > \max(-w,\ -w_1)$.*

4. Рассмотрим краевую задачу L_0 для уравнения (2) с краевыми условиями

$$U(y) := \sigma_2(y) - a_1\sigma_1(y) = 0,\ V(y) := \sigma_2^+(y) + a_2\sigma_1^+(y) = 0,$$

где a_1, a_2 – вещественные числа. Пусть $\varphi(x,\lambda)$ и $\psi(x,\lambda)$ – решения уравнения (2) при начальных условиях $\sigma_1(\varphi) = 1$, $\sigma_2(\varphi) = a_1$ и $\sigma_1^+(\psi) = 1$, $\sigma_2^+(\psi) = -a_2$ соответственно. Тогда $U(\varphi) = 0$, $V(\psi) = 0$. Положим $\Delta_0(\lambda) = \langle\psi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda)\rangle$. Нули $\{\lambda_n^0\}$ функции $\Delta_0(\lambda)$ совпадают с собственными значениями задачи L_0. Все нули являются простыми и вещественными.

Пусть $\Phi(x,\lambda)$ – решение уравнения (2) при условиях $U(\Phi) = 1, V(\Phi) = 0$. Обозначим $M(\lambda) := U_0(\Phi)$, где $U_0(y) := \sigma_1(y)$. Функция $M(\lambda)$ называется функцией Вейля для краевой задачи L_0. Имеем $M(\lambda) = -d(\lambda)/\Delta_0(\lambda)$, $d(\lambda) := U_0(\psi)$.

Обратная задача 1. Дана функция Вейля $M(\lambda)$, найти $q(x), a_1, a_2$.

Теорема 4. *Задание функции $M(\lambda)$ однозначно определяет $q(x)$, a_1, a_2.*

Функция $M(\lambda)$ является мероморфной с простыми полюсами в точках λ_n^0. Положим $\alpha_n = \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n^0} M(\lambda)$. Совокупность $\{\lambda_n^0, \alpha_n\}_{n\ge0}$ назовем спектральными данными.

Обратная задача 2. Заданы спектральные данные $\{\lambda_n^0, \alpha_n\}_{n\ge0}$, найти $q(x), a_1, a_2$.

Теорема 5.*Задание* $\{\lambda_n^0, \alpha_n\}_{n\ge 0}$ *однозначно определяет* $q(x)$, a_1, a_2.

Пусть $\{\mu_n\}_{n\ge 0}$ – собственные значения краевой задачи L_1 для уравнения (2) с краевыми условиями $U_0(y) = V(y) = 0$.

Обратная задача 3. Заданы два спектра $\{\lambda_n^0,\, \mu_n\}_{n\ge 0}$, найти $q(x)$, a_1, a_2.

Теорема 6. *Задание двух спектров* $\{\lambda_n^0,\, \mu_n\}_{n\ge 0}$ *однозначно определяет* $q(x)$, a_1, a_2.

Методом спектральных отображений [1] получены конструктивные процедуры решения этих обратных задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00102).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Yurko V. A.* Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-Posed Problems. Series 31. Utrecht, VSP, 2002. 306 p.

2. *Freiling G., Yurko V. A.* Boundary value problems with regular singularities and singular boundary conditions // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2005. Vol. 2005, № 9. P. 1481–1495.

3. *Freiling G., Yurko V. A.* Inverse problems for differential operators with singular boundary conditions // Mathematishe Nachrichten. 2005. Vol. 278, № 12–13. P. 1561–1578.

УДК 531.383:532.516

О. В. Блинкова, Д. В. Кондратов

ЗАДАЧА ГИДРОУПРУГОСТИ ДЕПМФЕРА С УПРУГИМ СТАТОРОМ И ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Поступила 11.09.2020 г.

Одна из основных задач современного машино- и агрегатостроения – изучение различных упругих материалов и многослойных упругих структур – становится все более распространенным явлением для создания современной авиационной и машиностроительной продукции. Например, механика слоистой вязкопластичности элементов конструкции описана в [1], а математическое моделирование динамических процессов в гидродинамической опоре с трехслойным статором выполнено в [2]. Постановка задачи моделирования слоя взаимодействия вязкой сжимаемой жидкости с упругим трехслойным статором и жесткой опорой вибратора описана в [3, 4]. Нелинейные колебания пластин в осевом пульсирующем потоке рассмотрены в [5].

Рассматривается механическая система из абсолютно жесткой пластины – вибратора и упругой пластины – статора, представляющая собой упругую стенку щелевого канала. Пространство между пластинами вибратором и статором заполнено вязкой сжимаемой жидкостью. Внутренняя поверхность вибратора считается плоской и является одной из стенок щелевого канала. Предполагается, что вибратор имеет подвес, который обладает упругой податливостью. В результате пульсации давления в жидкости в соответствии с гармоническим законом возникают колебания вибратора в вертикальном направлении относительно статора. Считается также, что температура жидкости, вибратора и упругого статора является постоянной.

Далее осуществляем переход к безразмерным переменным, что позволяет выделить малые параметры задачи: относительную ширину слоя вязкой сжимаемой жидкости и относительный прогиб пластины. Для упрощения уравнений гидродинамики вязкой сжимаемой жидкости применяется метод возмущений с использованием выявленных ранее малых параметров задачи. Затем уравнения гидродинамики и уравнения динамики упругой пластины решаются совместно методом Бубнова–Галеркина. Таким образом, задача формулируется и решается в безразмерных переменных для механической системы, состоящей из абсолютно жесткого вибратора, упругого статора и подвижного слоя вязкой сжимаемой жидкости между ними. Получено выражение для амплитудно-частотной характеристики упругого статора. Расчеты показывают влияние ширины слоя вязкой сжимаемой жидкости и ее температуры на амплитудно-частотную характеристику упругой пластины.

Исследование амплитудно-частотных характеристик упругого статора позволит определить режимы работы, при которых возникают резонансные явления, и может быть учтено при строительстве новых конструкций в современном машиностроении и авиакосмической промышленности. Представленная математическая модель может найти применение в газостатических опорах и гасителях колебаний.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 18-01-00127а, 19-01-00014-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Яровая А. В.* Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. М. : Физматлит, 2005. 576 с.

2. *Попов В. С., Христофорова А. В.* Математическое моделирование динамических процессов в гидродинамической опоре с трехслойным статором // Вестн. Сарат. гос. техн. ун-та. 2007. Т. 3, № 1. С. 38–45.

3. *Кондратов Д. В., Блинкова О. В.* Математическая модель взаимодействия сдавливаемого слоя вязкой сжимаемой жидкости с упругой трехслойной пластиной с легким несжимаемым заполнителем // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2018. № 1. С. 4–11.

4. *Кондратов Д. В., Блинкова О. В.* Задача моделирования сдавливаемого слоя вязкой сжимаемой жидкости с упругой трехслойной пластиной с легким несжимаемым заполнителем // Компьютерные науки и информационные технологии : материалы Междунар. науч. конф. Саратов : ИЦ «Наука», 2018. С. 56–59.

5. *Marco Amabili, Eleonora Tubaldi, Farbod Alijani.* Non-linear vibrations of plates in axial pulsating flow // Journal of Fluids and Structures. July 2015. Vol 56. DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2015.03.021

УДК 531.383:532.516
А. Г. Гягаева, Д. В. Кондратов

ЗАДАЧА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СЛОЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С УПРУГОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕРЕГУЛЯРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ПЛАСТИНОЙ

Поступила 20.09.2020 г.

Широкое применение тонкостенных конструкций, взаимодействующих с вязкой несжимаемой жидкостью, в различных областях науки и техники требует построения таких математических моделей, которые были бы приемлемы для инженерной практики. Тонкостенные конструкции, такие как пластины и оболочки, применяются в машиностроении, приборостроении, авиационной и космической промышленности [1–3]. Исследования колебаний различных пластин, взаимодействующих с вязкой жидкостью, проводились в [4–6]. Однако в них не рассматривались задачи колебания нелинейной геометрически нерегулярной пластины, взаимодействующей с вязкой несжимаемой жидкостью.

Рассмотрим гидродинамическую опору (демпфер), в котором вибратор опоры – абсолютно жесткое тело, совершающее колебания по гармоническому закону в вертикальной плоскости. Статор опоры – прямоугольная упругая геометрически нерегулярная пластина. При этом внутренняя поверхность пластины, находящаяся в контакте с жидкостью, является плоской, а внешняя поверхность имеет n ребер жесткости. Статор шарнирно закреплен на концах. Вязкая несжимаемая жидкость полностью заполняет щелевой зазор между абсолютно твердым вибратором и упругим геометрически нерегулярным статором. Кроме того, на левом и правом торцах считаются заданными законы пульсации давления.

Математическая модель представленной механической системы состоит из дифференциальных уравнений в частных производных – уравнений динамики жидкости и уравнений динамики геометрически нерегулярная пластины с соответствующими граничными условиями, и обыкновенного дифференциального уравнения, описывающего закон движения вибратора.

Для решения поставленной задачи вначале применяется метод возмущений, который позволит линеаризовать уравнения гидродинамики, и потом решить их, а затем для решений уравнений динамики упругой нелинейной геометрически нерегулярной пластины будет применяться метод Бубнова–Галеркина.

Таким, образом, представлена математическая модель взаимодействия упругой геометрически регулярной нелинейной пластины – статора и абсолютно жесткого вибратора через пульсирующий слой вязкой несжимаемой жидкости. Результаты, представленные в данном исследовании, могут быть использованы при моделировании процессов в сложных системах, применяемых в машиностроении.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00014-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1.*Башта Т. М.* Машиностроительная гидравлика. М. : Машгиз, 1963. 696 с.

2. *Агеев Р. В., Кондратов Д. В., Маслов Ю. В.* Применение аддитивных технологий при проектировании и производстве деталей аэрокосмических объектов // Полет : общерос. науч.-техн. журн. 2013. № 6. С. 35–39.

3. *Анциферов С. А., Кондратов Д. В., Могилевич Л. И.* Возмущающие моменты в поплавковом гироскопе с упругим корпусом прибора на вибрирующем основании при несимметричном торцевом истечении // Изв. Рос. акад. наук. Механика твердого тела. 2009. № 3. С. 25–35.

4. *Доннелл Л. Г.* Балки, пластины и оболочки. М. : Наука, 1982. 568 с.

5. *Могилевич Л. И., Попов В. С., Старовойтов Э. И.* Гидроупругость виброопоры с трехслойной круглой упругой пластиной с несжимаемым заполнителем // Наука и техника транспорта. 2006. № 2. С. 56–63.

6. *Кондратов Д. В., Могилевич Л. И., Попов В. С., Попова А. А.* Гидроупругие колебания круглой пластины, установленной на основание Винклера // Динамика систем, механизмов и машин. 2017. Т. 5, № 1. С. 34–41.

УДК 534.014

В. С. Кожанов, Г. Д. Севостьянов

ДВИЖЕНИЕ ВЗВЕШЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В ЖИДКОСТИ ПРИ ПОСТУПАТЕЛЬНОМ ПРОДОЛЬНОМ КОЛЕБАНИИ ДНА

Поступила 12.09.2020 г.

Движение несжимаемой вязкой жидкости в полупространстве возникает за счет поступательных колебаний горизонтальной стенки в ее плоскости. Взвешенная твердая частица движется в горизонтальной плоскости. Дан расчет траектории частицы для разных колебаний. Одномерные колебания исследовал Стокс [1].

1. Пусть вязкая несжимаемая жидкость заполняет полупространство $z > 0$, ограниченное твердой горизонтальной плоскостью ($z = 0$). Движение рассматривается в неподвижной системе координат $Ox_gy_gz_g$. Если

стенка $z = 0$ совершает поступательные колебания с координатами скорости $\overline{V}_w$

$$u_w = A\cos\omega_1 t, \quad v_w = B\sin\omega_2 t \tag{1}$$

в своей плоскости (ω_1, $\omega_2 > 0$ – круговые частоты, A, $B > 0$ – амплитуды), то скорость жидкости $\overline{V}_f(u_f, v_f)$ не зависит от x и y, т.е.

$$u_f = u_f(z,t), \quad v_f = v_f(z,t).$$

Тогда из уравнений Навье–Стокса при отсутствии градиента давления имеем два уравнения теплопроводности:

$$(u_f)_t = \nu(u_f)_{zz}, \quad (v_f)_t = \nu(v_f)_{zz}, \quad \nu = \mu/\rho_f > 0, \tag{2}$$

ν, μ – кинематический и динамический коэффициенты вязкости соответственно, ρ_f – плотность жидкости (для воды $\mu = 0.01$ г/с·см, $\nu = 0.01$ см^2/с).

Решение (2) с учетом условий на стенке ($u_f = u_w$, $v_f = v_w$, $z = 0$) равно:

$$\begin{gathered} u_f = Ae^{-z/\delta_1}\cos\left(\frac{z}{\delta_1} - \omega_1 t\right), \quad \delta_1 = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega_1}}, \\ v_f = -Be^{-z/\delta_2}\sin\left(\frac{z}{\delta_2} - \omega_2 t\right), \quad \delta_2 = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega_2}}, \quad z = H = \mathrm{const} > 0, \end{gathered} \tag{3}$$

где δ_1, δ_2 – глубины проникновения, см.

С ростом высоты $z = H$ амплитуда колебаний жидкости резко уменьшается, имеется сдвиг фазы по сравнению с фазой колебаний стенки.

Точка стенки описывает в прямоугольнике ($2A \times 2B$) разные кривые (эллипс, кривые Лиссажу, кривые Пеано) в зависимости от величины ω_2/ω_1.

2. В переменном потоке несжимаемой вязкой жидкости движение твердой сферической частицы диаметра d описывается уравнением Чена (Chen C. M.) ([2, с. 4]):

$$m_p\overline{W}_p = 3\pi\mu d(\overline{V}_f - \overline{V}_p) + m_f\overline{W}_f + \frac{1}{2}m_f(\overline{W}_f - \overline{W}_p) + \overline{F}_B + \overline{F}_e. \tag{4}$$

Здесь $m_p = \pi d^3\rho_p/6$ – масса частицы (средней плотности ρ_p), $m_f = \pi d^3\rho_f/6$ – масса вытесненной частицей жидкости; справа 1-й член – сила сопротивления Стокса, 2-й член учитывает ускорение жидкости, 3-й член учитывает присоединенную массу жидкости, 4-й член – сила Бассе, последний член – внешняя потенциальная сила.

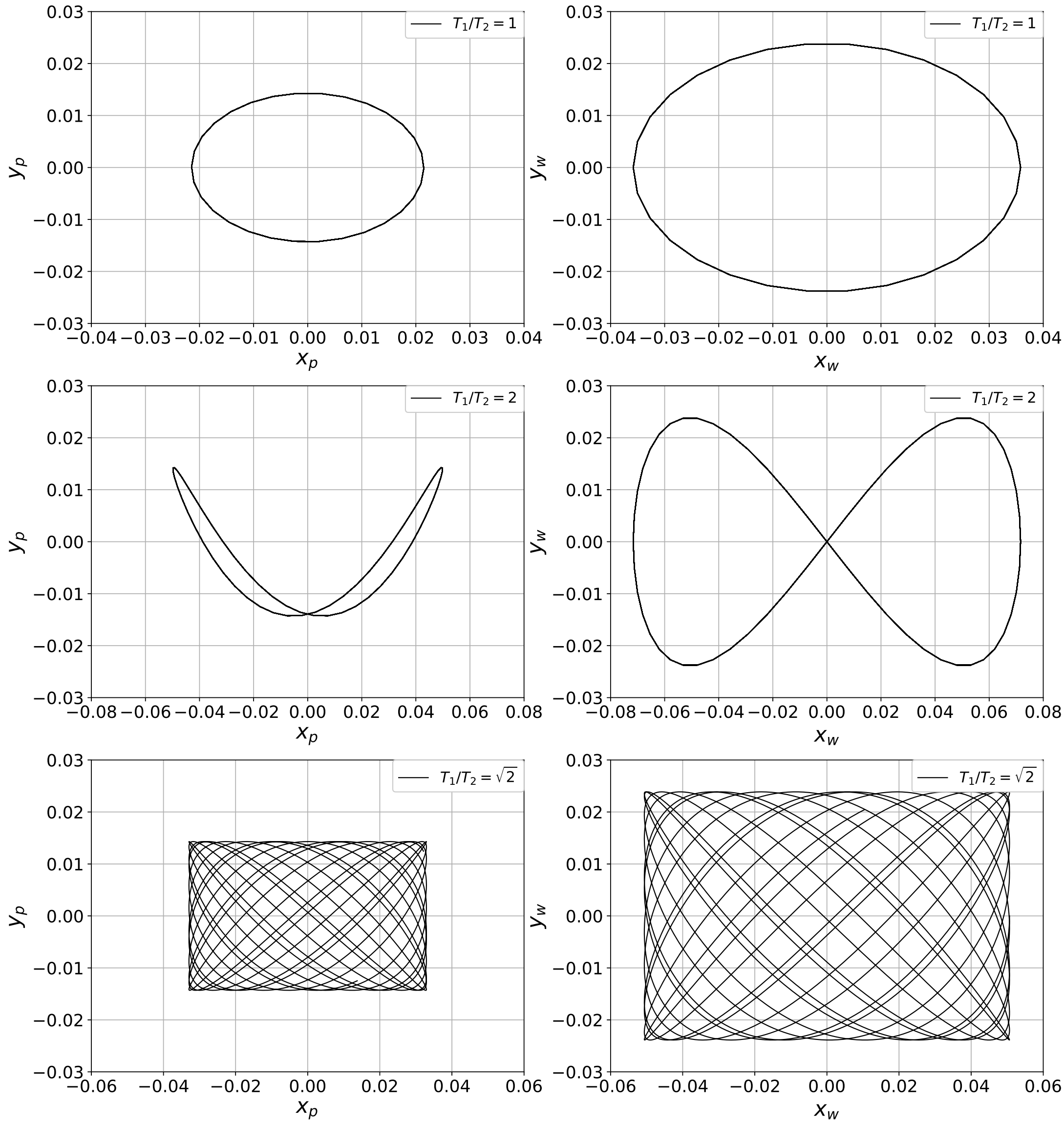
Сила Бассе равна

$$\overline{F}_B = \frac{3}{2} d^2 \sqrt{\pi\mu\rho_f} \int\limits_{-\infty}^{t} \left(\frac{d\overline{V}_f}{d\xi} - \frac{d\overline{V}_p}{d\xi} \right) \frac{d\xi}{\sqrt{t-\xi}}. \tag{5}$$

Если частица взвешена ($\rho_p = \rho_f = \rho$, $m_p = m_f$), то $\overline{V}_p = \overline{V}_f$ без силы $\overline{F}_e$, что имеет место в нашем случае. Поэтому $\overline{V}_p = \overline{V}_f$ вычисляется по формулам (3).

Запишем координаты точки стенки и частицы. Из (1), введя периоды колебаний $T_1 = 2\pi/\omega_1$, $T_2 = 2\pi/\omega_2$, найдем координаты точки стенки:

$$\begin{aligned} x_w &= \frac{AT_1}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{T_1} + x_{w0}, \\ y_w &= -\frac{BT_2}{2\pi} \cos \frac{2\pi t}{T_2} + y_{w0}. \end{aligned} \tag{6}$$



Из (3) определим координаты частицы:

$$
\begin{aligned}
x_p &= \frac{AT_1}{2\pi} e^{-H/\delta_1} \sin\left(\frac{H}{\delta_1} - \frac{2\pi t}{T_1}\right) + x_{p0}, \quad \delta_1 = \sqrt{\frac{T_1\nu}{\pi}},\\
y_p &= -\frac{BT_2}{2\pi} e^{-H/\delta_2} \cos\left(\frac{H}{\delta_2} - \frac{2\pi t}{T_2}\right) + y_{p0}, \quad \delta_2 = \sqrt{\frac{T_2\nu}{\pi}}.
\end{aligned} \tag{7}
$$

На рисунке изображены траектории движения частицы и стенки для следующих значений параметров: $A = 0.075$ м, $B = 0.05$ м, $T_2 = 3$ с, $H = 0.05$ м. Три случая соответствуют трем соотношениям T_1/T_2.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Stokes G.G.* On the effect of the internal friction of fluid on the motion of pendulums // Trans. Cambridge Philos. Soc. 1851. Vol. 9. P. 8–106.
2. *Хинце И.О.* Турбулентность, ее механизм и теория. М. : Физматгиз, 1963. 680 с.

УДК 519.6:629.78

И. А. Панкратов

ОБ АППРОКСИМАЦИИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Поступила 19.09.2020 г.

В работе предложен способ аппроксимации уравнений ориентации орбитальной системы координат, основанный на методе поточечной коллокации. В отличие от результатов работы [1] при применении данного метода удалось увеличить максимальное значение эксцентриситета орбиты космического аппарата (КА), для которого было проведено математическое моделирование движения управляемого КА.

1. Постановка задачи

Предположим, что постоянный по модулю вектор ускорения $\boldsymbol{u}$ от тяги реактивного двигателя во всё время управляемого движения КА направлен ортогонально плоскости его орбиты. Тогда движение центра масс КА описывается безразмерными уравнениями [2]:

$$
\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{d\varphi} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}^b, \quad \boldsymbol{\omega}^b = N^b (r^b)^3 u^b\, \boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_3, \quad r^b = \frac{1}{1 + e\cos\varphi}. \tag{1}
$$

Здесь $\boldsymbol{\lambda}$ – нормированный кватернион ориентации орбитальной системы координат (СК) в инерциальной СК X; φ – истинная аномалия;

$\circ$ – символ кватернионного умножения; N^b – характерный безразмерный параметр задачи; r^b – безразмерный радиус-вектор центра масс КА; u^b – проекция вектора ускорения $\boldsymbol{u}$ на направление вектора момента скорости центра масс КА; $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_3$ – векторные мнимые единицы Гамильтона; e – эксцентриситет орбиты КА.

Аналитическое решение кватернионного уравнения (1) в случае произвольного управления $u^b = u^b(\varphi)$ не найдено. Задача интегрирования этого уравнения есть задача Дарбу. Решение указанной задачи в замкнутой форме известно лишь для некоторых частных случаев (см., например, работы [3, 4]).

Пусть необходимо найти приближённое решение кватернионного уравнения (1) при $\varphi \in [0;\ \varphi^*]$ с начальным условием

$$\text{при } \varphi = 0 \text{ рад} \quad \boldsymbol{\lambda}(0) = \boldsymbol{\lambda}^{(0)}$$

для случая, когда $u^b = \text{const}$.

Отметим, что оптимальное по Понтрягину управление, соответствующее задаче быстродействия и задаче минимизации затрат характеристической скорости, сохраняет постоянное значение на смежных участках активного движения КА [5].

2. Метод решения задачи

Выберем систему базисных функций $N_k(\varphi)$, $k = \overline{1, M}$, которые являются линейно независимыми на отрезке $[0;\ \varphi^*]$. Предположим, что орбита КА является эллиптической $(0 < e < 1)$. Будем искать решение задачи в виде разложения по базисным функциям ($\boldsymbol{a}_k$ – пока неизвестные кватернионные коэффициенты):

$$\boldsymbol{\lambda} \approx \hat{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda}^{\text{круг}}(\varphi) + \sum_{k=1}^{M} \boldsymbol{a}_k N_k(\varphi). \tag{2}$$

Здесь $\boldsymbol{\lambda}^{\text{круг}}(\varphi) = \boldsymbol{\lambda}^{(0)} \circ \left(\cos\dfrac{\omega\varphi}{2} + \dfrac{1}{\omega} \sin\dfrac{\omega\varphi}{2} \boldsymbol{\omega}^b \right)$, $\omega = |\boldsymbol{\omega}^b|$ – решение уравнения (1) в случае, когда КА движется по круговой орбите $(e = 0)$ [6, 7].

Подставляя разложение (2) в уравнение (1), получим невязку $R^{\boldsymbol{\lambda}}_{[0;\varphi^*]}$ следующего вида:

$$R^{\boldsymbol{\lambda}}_{[0;\varphi^*]} = \sum_{k=1}^{M} \boldsymbol{a}_k \circ \left\{ 2\frac{dN_k(\varphi)}{d\varphi} - N_k(\varphi) \cdot \left[N^b u^b (r^b)^3 \, \boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_3 \right] \right\} + \\ + \boldsymbol{\lambda}^{\text{круг}}(\varphi) \circ N^b u^b \left[1 - (r^b)^3 \right] \boldsymbol{i}_1.$$

Для получения приближённого равенства $R^{\boldsymbol{\lambda}}_{[0;\varphi^*]} \approx \boldsymbol{0}$ при $\varphi \in [0;\ \varphi^*]$ воспользуемся методом поточечной коллокации [8, 9]. Выберем M точек коллокации $\varphi_s = s\cdot\varphi^*/M$, $s = \overline{1, M}$. Потребуем, чтобы в точках коллокации невязка $R^{\boldsymbol{\lambda}}_{[0;\varphi^*]}$ была равна нулю. Тогда для определения неизвестных коэффициентов в разложении (2) будем иметь систему линейных алгебраических уравнений, коэффициенты которой являются кватернионами.

Погрешность определения ориентации орбитальной системы координат имеет вид

$$err(e) = \max_{\varphi\in[0;\,\pi/2]} \left|\boldsymbol{\lambda}^{\text{прибл}}(\varphi,\, e) - \boldsymbol{\lambda}^{\text{РК}}(\varphi,\, e)\right|.$$

Здесь $\boldsymbol{\lambda}^{\text{прибл}}(\varphi,\, e)$ – приближённое решение, в котором коэффициенты $\boldsymbol{a}_k$ получены из решения вышеуказанной системы линейных алгебраических уравнений; а $\boldsymbol{\lambda}^{\text{РК}}(\varphi,\, e)$ – результат интегрирования уравнения (1) методом Рунге–Кутты 4-го порядка точности с шагом $h = 0.001$ рад.

Пусть начальное положение КА соответствует ориентации орбиты спутниковой группировки ГЛОНАСС ($N^b u^b = 0.35$). В таблице приведены значения погрешности $err(e)$ для случая, когда базисные функции являются полиномами ($N_k = \varphi^k$).

e	$M = 2$	$M = 3$	$M = 4$	$M = 5$	$M = 6$	$M = 7$
0.01	$9.1 \cdot 10^{-4}$	$3.5 \cdot 10^{-4}$	$1.8 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$	$8.5 \cdot 10^{-5}$	$6.3 \cdot 10^{-5}$
0.02	$1.8 \cdot 10^{-3}$	$6.8 \cdot 10^{-4}$	$3.4 \cdot 10^{-4}$	$2.3 \cdot 10^{-4}$	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$
0.03	$2.6 \cdot 10^{-3}$	$9.9 \cdot 10^{-4}$	$5.0 \cdot 10^{-4}$	$3.4 \cdot 10^{-4}$	$2.4 \cdot 10^{-4}$	$1.8 \cdot 10^{-4}$
0.04	$3.4 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$6.4 \cdot 10^{-4}$	$4.3 \cdot 10^{-4}$	$3.1 \cdot 10^{-4}$	$2.3 \cdot 10^{-4}$
0.05	$4.2 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$7.8 \cdot 10^{-4}$	$5.3 \cdot 10^{-4}$	$3.7 \cdot 10^{-4}$	$2.8 \cdot 10^{-4}$
0.06	$5.0 \cdot 10^{-3}$	$1.8 \cdot 10^{-3}$	$9.1 \cdot 10^{-4}$	$6.1 \cdot 10^{-4}$	$4.3 \cdot 10^{-4}$	$3.2 \cdot 10^{-4}$
0.07	$5.7 \cdot 10^{-3}$	$2.0 \cdot 10^{-3}$	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$6.9 \cdot 10^{-4}$	$4.9 \cdot 10^{-4}$	$3.6 \cdot 10^{-4}$
0.08	$6.4 \cdot 10^{-3}$	$2.2 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$7.7 \cdot 10^{-4}$	$5.5 \cdot 10^{-4}$	$4.0 \cdot 10^{-4}$
0.09	$7.1 \cdot 10^{-3}$	$2.5 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$8.4 \cdot 10^{-4}$	$6.0 \cdot 10^{-4}$	$4.4 \cdot 10^{-4}$
0.10	$7.8 \cdot 10^{-3}$	$2.7 \cdot 10^{-3}$	$1.4 \cdot 10^{-3}$	$9.1 \cdot 10^{-4}$	$6.4 \cdot 10^{-4}$	$4.8 \cdot 10^{-4}$

В ходе проведения математического моделирования движения КА было установлено, что при увеличении количества базисных функций M погрешность определения ориентации орбитальной системы координат уменьшается.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00205).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Панкратов И. А.* Аналитическое решение уравнений ориентации околокруговой орбиты космического аппарата // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 1. С. 97–105. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-97-105

2. *Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н.* Решение задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата с использованием кватернионных уравнений ориентации орбитальной системы координат // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 1. С. 84–92.

3. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М. : Наука, 1973. 320 с.

4. *Молоденков А. В.* К решению задачи Дарбу // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2007. № 2. С. 3–13.

5. *Челноков Ю. Н.* Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76, вып. 6. С. 895–912.

6. *Челноков Ю. Н.* Об определении ориентации объекта в параметрах Родрига – Гамильтона по его угловой скорости // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1977. № 3. С. 11–20.

7. *Панкратов И. А., Челноков Ю. Н.* Аналитическое решение дифференциальных уравнений ориентации круговой орбиты космического аппарата // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, вып. 1. С. 84–89.

8. *Зенкевич О., Морган К.* Конечные элементы и аппроксимация. М. : Мир, 1986. 318 с.

9. *Коннор Дж., Бреббиа К.* Метод конечных элементов в механике жидкости. Л. : Судостроение, 1979. 264 с.

СОДЕРЖАНИЕ

СЕКЦИЯ МАТЕМАТИКИ

СЕКЦИЯ МЕХАНИКИ

Научное издание

МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА

Сборник научных трудов

ВЫПУСК 22

Редактор *Т. А. Трубникова*
Технический редактор *Т. А. Трубникова*
Корректор *Т. А. Трубникова*
Оригинал-макет подготовил *И. А. Каргин*

Подписано в печать 25.12.2020.
Формат $60\times84^1/_{16}$.
Усл. печ. л. 4.66 (5.0). Тираж 100 экз. Заказ 38-Т.

Издательство Саратовского университета. 410012, Саратов, Астраханская, 83.
Типография Саратовского университета. 410012, Саратов, Б. Казачья, 112А.

ISSN 1609-4751
9 771609 475100

ИЗДАТЕЛЬСТВО
САРАТОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА