

## Дискретные хаотические и гиперхаотические аттракторы в отображении двух связанных парабол\*

*Е. В. Курыжов<sup>✉</sup>, Д. И. Мину, Е. Ю. Каратецкая*

Национальный исследовательский университет  
«Высшая школа экономики», Нижний Новгород  
<sup>✉</sup> eugenkuryzhov@yandex.ru

Настоящая работа посвящена изучению некоторых аспектов возникновения хаотических режимов в двумерном эндоморфизме, описывающем динамику двух связанных идентичных отображений параболы:

$$\begin{cases} \bar{x} = 1 - ax^2 + \varepsilon(x - y) \\ \bar{y} = 1 - ay^2 + \varepsilon(y - x). \end{cases} \quad (1)$$

Некоторые бифуркации этого отображения были изучены в работе [1]. Мы показываем, что в рассматриваемом отображении могут наблюдаться хаотические аттракторы, которые по виду и сценарию возникновения напоминают хорошо известные аттракторы трехмерных диффеоморфизмов.

В первой части работы мы проводим исследование аттракторов лоренцевского типа в модели двух связанных парабол. Дискретные аттракторы Лоренца в случае трехмерных диффеоморфизмов были впервые рассмотрены и изучены в работе [2]. В ней, как и в работе [3], для трехмерных отображений показано, что дискретные аттракторы Лоренца могут возникать в окрестности периодических точек с парой мультипликаторов  $(+1, -1)$ . Бифуркационные диаграммы в окрестности таких точек (называемых также *fold-flip*) подробно изучены в работе [4], где показано, что в зависимости от знаков коэффициентов нормальной формы существует четыре различных типа такой бифуркации. Для трехмерных отображений один из них, как показано в работе [3], может приводить к возникновению дискретных аттракторов Лоренца. Мы показываем что в отображении (1) бифуркация *fold-flip* имеет именно этот тип и в ее окрестности возникают аттракторы лоренцевского вида.

В работе [5] рождение гиперхаотических аттракторов в системе двух осцилляторов, имеющих слабую связь, было обусловлено переходом к

---

\*Работа выполнена при поддержке гранта Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2019-1931.

хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода в каждом осцилляторе. В отображении (1) имеет место такой же переход к хаосу, когда параметр связи  $\varepsilon = 0$ . Как следствие, в данной системе можно наблюдать гиперхаос при  $\varepsilon \neq 0$ . В ходе исследования мы также обнаружили существование гиперхаотического аттрактора шильниковского типа. В работах [6–8] были предложены и изучены сценарии перехода от устойчивой неподвижной точки к гиперхаосу в трехмерных диффеоморфизмах и четырехмерных потоках. Мы показываем, что похожие сценарии могут приводить к гиперхаосу в рассматриваемом двумерном эндоморфизме при значениях параметра  $\varepsilon \neq 0$ .

### Список литературы

1. *Biragov V., Ovsyannikov I. M., Turaev D.* A study of one endomorphism of a plane // *Methods of Qualitative Theory and Theory of Bifurcations*. 1988. P. 72–86.
2. *Gonchenko S. V., Ovsyannikov I. I., Simó C., Turaev D.* Three-dimensional Hénon-like maps and wild Lorenz-like attractors // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2005. T. 15, no. 11. P. 3493–3508.
3. *Гонченко А. С., Самылина Е. А.* Об области существования дискретного аттрактора Лоренца в неголомомной модели кельтского камня // *Известия высших учебных заведений. Радиофизика*. 2019. Т. 62, № 5. С. 412–428.
4. *Kuznetsov Y. A., Meijer H. G. E., van Veen L.* The fold-flip bifurcation // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2004. T. 14, no. 07. P. 2253–228.
5. *Harrison M. A., Lai Y. C.* Route to high-dimensional chaos // *Physical Review E*. 1999. Vol. 59, no. 4. R3799.
6. *Garashchuk I. R., Sinelshchikov D. I., Kazakov A. O., Kudryashov N. A.* Hyperchaos and multistability in the model of two interacting microbubble contrast agents // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2019. Vol. 29, no. 6. 063131.
7. *Shykhmamedov A., Karatetskaia E., Kazakov A., Stankevich N.* Hyperchaotic attractors of three-dimensional maps and scenarios of their appearance. arXiv preprint. 2020. arXiv:2012.05099.
8. *Stankevich N., Kazakov A., Gonchenko S.* Scenarios of hyperchaos occurrence in 4D Rössler system. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2020. Vol. 30, no. 12. 123129.