Критерий топологической сопряжённости поверхностных потоков Морса–Смейла без траекторий, идущих из одного предельного цикла в другой*

В. Е. Круглов✉, *О. В. Починка*

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Нижний Новгород
✉ kruglovslava21@mail.ru

Два потока $f^t, f'^t\colon M \to M$ на поверхности M называются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h\colon M \to M$, посылающий траектории потока f^t в траектории потока f'^t, сохраняя направления траекторий. Два потока f^t и f'^t называются *топологически сопряжёнными*, если h сохраняет не только направления траекторий, но и время движения. Найти инвариант, описывающий класс топологической эквивалентности или топологической сопряжённости потока в некотором классе потоков, означает получить *топологическую классификацию* этого класса. Для некоторых классов их классификации в смысле эквивалентности и сопряжённости совпадают, однако в других случаях они абсолютно различны.

Потоки Морса–Смейла были введены на плоскости А.А. Андроновым и Л.С. Понтрягиным в [1]. Неблуждающее множество таких потоков состоит из конечного числа гиперболических неподвижных точек и конечного числа гиперболических предельных циклов, кроме того, седловые сепаратрисы пересекаются только трансверсально, что на поверхности означает отсутствие траекторий, соединяющих седловые точки. На поверхностях потоки Морса–Смейла были многократно топологически классифицированы посредством различных инвариантов. Некоторые из наиболее известных это *схема Леонтович–Майера* [2], [3] для более широкого класса потоков на сфере, *ориентированный граф Пейшото* [4] для случая произвольной замкнутой поверхности и *молекула Ошемкова–Шарко* [3] для того же случая.

С момента появления эпохальной работы Ж. Палиса [6] стало известно, что класс топологической эквивалентности потока но поверхности может содержать бесконечное число классов топологической сопряжённости, которые описываются параметрами, называемыми *модулями*. Ж. Палис доказал, что любая сепаратриса-связка (соединяюшая сёдла)

*При поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2019-1931.

создаёт модуль, равный отношению собственных значений непересекающихся инвариантных многообразий сёдел, участвующих в связке.

Очевидно, любой предельный цикл даёт модуль, равный периоду цикла. Кроме того, в работе [7] доказано, что ячейка, ограниченная двумя предельными циклами, производит бесконечное число модулей.

В настоящей работе решается проблема топологической классификации потоков Морса–Смейла без траекторий, идущих из одного предельного цикла в другой, в смысле топологической сопряжённости. Для этого используются результаты работы [8], посвящённой классификации Ω-устойчивых потоков в смысле топологической эквивалентности посредством оснащённого графа. Вводится понятие нового оснащённого графа $\Upsilon^{**}_{\phi^t}$ потока ϕ^t, дополнительно оснащённого периодами предельных циклов.

Теорема 1. *Потоки Морса–Смейла ϕ^t, ϕ'^t на поверхности без траекторий, идущих из одного предельного цикла в другой, топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их графы $\Upsilon^{**}_{\phi^t}$ и $\Upsilon^{**}_{\phi'^t}$ изоморфны.*

Список литературы

1. *Андронов А. А., Понтрягин Л. С.* Грубые системы // Доклады Академии наук СССР. 1937. Т. 14, № 5. С. 247–250.
2. *Леонтович Е. А., Майер А. Г.* О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории // Доклады Академии наук СССР. 1937. Т. 14, № 5. С. 251–257.
3. *Леонтович Е. А., Майер А. Г.* О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории // Доклады Академии наук СССР. 1955. Т. 103, № 4. С. 557–560.
4. *Peixoto M. M.* On the classification of flows on 2-manifolds // In Dynamical systems (Proc. Sympos., Univ. Bahia, Salvador, 1971). 1973. P. 389–419.
5. *Ошемков А. А., Шарко В. В.* О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях // Математический сборник. 1998. Т. 189, № 8. С. 93–140.
6. *Palis J.* A differentiable invariant of topological conjugacy and moduli of stability // Asterisque. 1978. Vol. 51, P. 335–346.
7. *Kruglov V., Pochinka O., Talanova G.* On functional moduli of surface flows // Proceedings of the International Geometry Center. 2020. Vol. 13, no. 1. P. 49–60.
8. *Kruglov V., Malyshev D., Pochinka O.* Topological classification of Ω-stable flows on surfaces by means of effectively distinguishable multigraphs // Discrete Contin. Dyn. Syst. 2018. Vol. 38, no. 9. P. 4305–4327.