Реализация гомеоморфизмов поверхностей алгебраически конечного типа диффеоморфизмами Морса–Смейла с ориентируемой гетероклиникой *

В. З. Гринес, А. И. Морозов✉*, О. В. Починка*

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Нижний Новгород
✉aimorozov@hse.ru

В настоящей работе описана реализация каждого гомотопического класса типа T_2 диффеоморфизмом Морса–Смейла с ориентируемым гетероклиническим множеством. Такие диффеоморфизмы задают относительно простую динамику, так как, в силу работы А. Н. Безденежных и В. З. Гринеса [1, 2], такие диффеоморфизмы имеют конечное число гетероклинических орбит.

Пусть $S_{g,k}$, $g \geqslant 0$, $k \geqslant 0$ – связная компактная ориентируемая поверхность рода g с краем, состоящим из k компонент связности. Положим $S_{g,0} = S_g$. Везде далее отображения поверхностей предполагаются сохраняющими ориентацию

Гомеоморфизм $h : S_g \to S_g$, $g \geqslant 1$ называется *приводимым* системой C непересекающихся между собой простых замкнутых кривых C_i, $i = 1, \ldots, l$, негомотопных нулю и попарно не гомотопных друг другу, если система кривых C инвариантна относительно h.

Приводимый непериодический гомеоморфизм $h : S_g \to S_g$, $g \geqslant 1$ называется *гомеоморфизмом алгебраически конечного типа*, если существует h-инвариантная окрестность $\mathbb{C}$ кривых множества C, состоящая из объединения двумерных колец и такая, что для каждой компоненты связности S_{g_j,k_j}, $j = 1, \ldots, n$ множества $S_g \setminus int\,\mathbb{C}$ существует число $m_j \in \mathbb{N}$ такое, что $h^{m_j}|_{S_{g_j,k_j}} : S_{g_j,k_j} \to S_{g_j,k_j}$ – периодический гомеоморфизм.

Пусть σ_i, σ_j – седловые точки диффеоморфизма f такие, что $W^s_{\sigma_i} \cap W^u_{\sigma_j} \neq \emptyset$. Напомним, что пересечение $W^s_{\sigma_i} \cap W^u_{\sigma_j}$ является счетным множеством и каждая точка этого множества называется *гетероклинической точкой*, а каждая орбита гетероклинической точки называется *гетероклинической орбитой*. Для любой гетероклинической точки $x \in W^s_{\sigma_i} \cap W^u_{\sigma_j}$ определим упорядоченную пару векторов $(\vec{\upsilon}^u_x, \vec{\upsilon}^s_x)$, где:

*Работа выполнена при поддержке Международной Лабораторией Динамических Систем и Приложений, НИУ ВШЭ НН, грант Правительства Российской Федерации, номер контракта № 075-15-2019-1931

- $\vec{v}_x^u$ – касательный вектор к неустойчивому многообразию точки σ_j в точке x;
- $\vec{v}_x^s$ – касательный вектор к устойчивому многообразию точки σ_i в точке x.

Следуя [2] и [3, стр. 7], назовем гетероклиническое пересечение диффеоморфизма f *ориентируемым*, если упорядоченные пары векторов $(\vec{v}_x^u, \vec{v}_x^s)$ задают одинаковую ориентацию несущей поверхности S_g. В противном случае гетероклиническое пересечение назовем *неориентируемым*.

Теорема 1. *В каждом гомотопическом классе* $[h]$ *гомеоморфизма* $h : S_g \to S_g$, $g \geqslant 1$ *алгебраически конечного типа существует диффеоморфизм Морса–Смейла* $f : S_g \to S_g$ *с ориентируемым гетероклиническим пересечением.*

Список литературы

1. *Bezdenezhnykh A. N.* Dissertation: Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms with an orientable heteroclinic set on two-dimensional manifolds // Gorky Order of the Red Flag of Labor State University. N.I. Lobachevsky. Gorky, 1985.
2. *Bezdenezhnykh A. N. and Grines V. Z.* Diffeomorphisms with orientable heteroclinic sets on two-dimensional manifolds. Methods of the quantitative theory of differential equations // Gorkii State University, Gorkii, 1985. P. 139–152.
3. *Aranson S. Kh. and Grines V. Z.* Topological classification of cascades on closed two-dimensional manifolds // Advances in Mathematical Sciences. 1990. Vol. 45. 1 (271. pp. 3–32.)
4. *Smale S.* Diferentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 73, no. 6. P. 747–817.