О топологической эквивалентности ламинаций, порождаемых псевдогиперболическими аттракторами*

В. З. Гринес, А. О. Казаков, Д. И. Минц✉

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Нижний Новгород
✉ dmincz@hse.ru

Согласно работе [1] введём следующее определение. Гомеоморфизм двумерного тора $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ называется гомеоморфизмом типа Данжуа, если выполняются следующие условия:

1. f изотопен тождественному;
2. f полусопряжён с некоторым минимальным сдвигом $g : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ при помощи отображения $p : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ (т.е. $p \circ f = g \circ p$), которое является непрерывным и гомотопным тождественному;
3. Множество $B(f, p)$ такое, что для любой точки $b \in B(f, p)$ её полный прообраз $p^{-1}(b)$ состоит более чем из одной точки, является непустым и счётным.

Из [1] (предложение 1) следует, что гомеоморфизм $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ типа Данжуа имеет единственное минимальное множество, которое является связным. Среди гомеоморфизмов двумерного тора типа Данжуа особое место занимают гомеоморфизмы, минимальное множество которых является множеством Серпинского (далее – гомеоморфизмы, имеющие минимальное множество Серпинского).

Согласно работе [2] множеством Серпинского на двумерном торе $\mathbb{T}^2$ называется множество $S = \mathbb{T}^2 \setminus \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} D_k$, где $\{D_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ – семейство множеств со следующими свойствами:

1. $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} D_k$ плотно в $\mathbb{T}^2$;
2. Для любого $k \in \mathbb{Z}$ множество D_k – это вложение открытого диска $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1\}$;
3. $Cl(D_k) \cap Cl(D_{k'}) = \varnothing$ при $k \neq k'$;
4. Для любого $\varepsilon > 0$ существует лишь конечное число множеств D_k таких, что $diam\,(D_k) > \varepsilon$.

*Доклад выполнен при поддержке гранта РНФ (проект 17-11-01041), а также при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2019-1931.

В работе [3] построены диффеоморфизмы трёхмерного тора $\mathbb{T}^3$, неблуждающее множество которых состоит из источниковой неподвижной точки и псевдогиперболического аттрактора Λ и которые получены из алгебраического автоморфизма Аносова при помощи бифуркации рождения инвариантной кривой. В [3] доказано, что одномерная нигде не плотная ламинация, образованная неустойчивыми многообразиями точек из Λ, определяет на глобальной секущей (в данном случае это двумерный тор $\mathbb{T}^2$) отображение первого возвращения, которое является диффеоморфизмом типа Данжуа. Более того, данное отображение имеет минимальное множество Серпинского. Решение задачи топологической эквивалентности двух ламинаций данного вида требует решения проблемы топологической сопряжённости гомеоморфизмов двумерного тора типа Данжуа, имеющих минимальное множество Серпинского. Решение данной проблемы даёт следующая теорема, которая является основным результатом настоящего доклада.

Теорема 1. *Пусть f_1 и f_2 гомеоморфизмы двумерного тора $\mathbb{T}^2$ типа Данжуа, имеющие минимальные множества Серпинского S_1 и S_2 и полусопряжённые минимальным сдвигам g_1 и g_2 соответственно. Тогда гомеоморфизмы f_1 и f_2 топологически сопряжены тогда и только тогда, когда существует линейное преобразование $\varphi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ такое, что $\varphi \circ g_1 = g_2 \circ \varphi$, $\varphi(B_1(f_1, p_1)) = B_2(f_2, p_2)$.*

Заметим, что решение задачи топологической эквивалентности ламинаций, порождаемых DA-аттракторами двумерного тора, связано с вопросом топологической классификации гомеоморфизмов Данжуа окружности, которая представлена в работе [4].

Список литературы

1. *Norton A., Sullivan D.* Wandering domains and invariant conformal structures for mappings of the 2-torus // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 1996. Vol. 21, no. 1. P. 51–68.
2. *Biś A., Nakayama H., Walczak P.* Locally connected exceptional minimal sets of surface homeomorphisms // Annales de l'institut Fourier. 2004. Vol. 54, no. 3. P. 711–731.
3. *McSwiggen P. D.* Diffeomorphisms of the torus with wandering domains // Proceedings of the American Mathematical Society. 1993. Vol. 117, no. 4. P. 1175–1186.
4. *Markley N. G.* Homeomorphisms of the circle without periodic points // Proceedings of the London Mathematical Society. 1970. Vol. 3, no. 4. P. 688–698.