Классификация периодических гомеоморфизмов двумерного тора*

Д. А. Баранов

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Нижний Новгород
denbaranov0066@gmail.com

Результаты данного доклада были получены совместно с и О.В. Починкой и посвящены классификации периодических гомеоморфизмов тора.

Пусть S_p – замкнутая ориентируемая поверхность рода p и $f : S_p \to S_p$ – сохраняющий ориентацию периодический гомеоморфизм.

Гомеоморфизм f называется *периодическим*, если существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $f^n = id$. Наименьшее из таких n называется периодом f.

Обозначим через $\overline{B}$ множество точек гомеоморфизма f, период которых меньше периода гомеоморфизма.

В силу результатов Я. Нильсена [1] множество $\overline{B}$ конечно и состоит из конечного числа орбит $\mathcal{O}_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ периода n_i, являющегося делителем n. Положим $\lambda_i = \frac{n}{n_i}$, тогда для каждого λ_i существует единственное взаимно простое с ним число $\delta_i \in \{1, \ldots, \lambda_i - 1\}$ такое, что для любой точки $\bar{x} \in \mathcal{O}_i$ существует окрестность $D_{\bar{x}}$, в которой гомеоморфизм $f^{n_i}|_{D_{\bar{x}}}$ топологически сопряжен с отображением комплексной плоскости: $z \to e^{\frac{2\pi\delta_i}{\lambda_i}i} z$.

Также с каждым периодическим преобразованием связаны следующие объекты:

- группа отображений $G = \{id, f, \ldots, f^{n-1}\}$, изоморфная $\mathbb{Z}_n = \{0, \ldots, n-1\}$, и действующая на S_p так, что *модульная поверхность* $\Sigma_g = S/G$ рода g является замкнутой поверхностью;
- *естественная проекция* $\pi : S_p \to \Sigma_g$, которая является n-листным накрытием всюду, кроме точек множества $B = \pi(\overline{B})$.

Каждому периодическому гомеоморфизму f однозначно соответствует набор *периодических данных* $(n, p, g, n_1, ..., n_k, \delta_1, ..., \delta_k)$.

*Публикация подготовлена в ходе проведения исследования (№ 21-04-004) в рамках Программы «Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)» в 2021–2022 гг.

Следуя [1] гомеоморфизмы $f, f' : S_p \to S_p$ называются *топологически сопряженными*, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $h : S_p \to S_p$ такой, что $f' = h \circ f \circ h^{-1}$.

Также в [1] доказано, что два периодических преобразования f, f' поверхности S топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их периодические данные совпадают.

Теорема 1. *Пусть $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ - сохраняющий ориентацию периодический гомеоморфизм периода n, тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *f – гомотопен тождественному отображению;*
2. *$B = \emptyset$;*
3. *$g = 1$;*
4. *f топологически сопряжен диффеоморфизму $\Psi_n\left(e^{i2x\pi}, e^{i2y\pi}\right) = \left(e^{i2\pi\left(x+\frac{1}{n}\right)}, e^{i2y\pi}\right)$.*

Теорема 2. *Существует семь классов топологической сопряженности не гомотопных тождественному периодических гомеоморфизмов тора со следующими периодическими данными в каждом классе:*

1. *f_1: $n = 6, k = 3, n_1 = 3, n_2 = 2, n_3 = 1$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 1$;*
2. *f_2, $n = 3$, $k = 3$, $n_1 = n_2 = n_3 = 1$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 1$;*
3. *f_3, $n = 2$, $k = 4$, $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 1$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 1$;*
4. *f_4, $n = 3$, $k = 3$, $n_1 = n_2 = n_3 = 1$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 2$;*
5. *f_5, $n = 6, k = 3, n_1 = 3, n_2 = 2, n_3 = 1$, $\delta_1 = \delta_2 = 1$, $\delta_3 = 5$;*
6. *f_6: $n = 4$, $k = 3$, $n_1 = 2$, $n_2 = n_3 = 1$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 1$;*
7. *f_7, $n = 4$, $k = 3$, $n_1 = 2$, $n_2 = n_3 = 1$, $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = \delta_3 = 3$.*

Список литературы

1. J. Nielsen, Die struktur periodischer transformationen von flachen, Math.-fys. Medd. Danske Vid. Selsk. 15 (1937).