МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЧИСЛА КЛИЕНТОВ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ В ВИДЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПОВТОРНЫМИ ОБРАЩЕНИЯМИ

Е. Г. Чегодаева, С. П. Моисеева, Е. П. Полин

Томский государственный университет, Россия
E-mail: liza_chegodaeva@mail.ru, smoiseeva@mail.ru, polin_evgeny@mail.ru

Рассматривается математическая модель страховой компании с неограниченным страховым полем, входящим потоком клиентов, зависящим от числа уже обслуживающихся в компании клиентов, величиной продолжительности договора страхования с экспоненциальной функцией распределения и возможностью повторного обращения клиента в компанию. Дисциплина обслуживания определяется тем, что заявка занимает любой из свободных приборов в системе, на котором выполняется ее обслуживание в течение случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону. Завершившая обслуживание заявка с некоторой вероятностью покидает систему или обращается к системе для повторного обслуживания. Методом производящих функций определены выражения для вероятностных характеристик числа занятых приборов в системе в стационарном режиме. Получена производящая функция рассматриваемого случайного процесса, имеющая вид производящей функции случайной величины, имеющей отрицательное биномиальное распределение вероятностей.

MATHEMATICAL MODEL OF THE NUMBER OF CLIENTS OF AN INSURANCE COMPANY IN THE FORM OF A QUEUING SYSTEM WITH REPEATED APPLICATIONS

E. G. Chegodaeva, S. P. Moiseeva, E. P. Polin

We consider a mathematical model of an insurance company with an unlimited insurance field, an incoming flow of clients depending on the number of clients already served by the company, the duration of an insurance contract with an exponential distribution function, and the possibility of a client reapplying to the company. The service discipline is determined by the fact that the request occupies any of the free devices in the system, on which it is serviced during a random time distributed according to an exponential law. A claim that has completed service leaves the system with some probability or turns to the system for re-service. Using the method of generating functions, expressions for the probabilistic characteristics of the number of occupied devices in the system in the stationary mode are determined. The generating function of the random process under consideration is obtained, which has the form of a generating function of a random variable with a negative binomial probability distribution.

Одним из приложений теории массового обслуживания [1] может служить модель страховой компании. Клиенты, желающие приобрести услугу страхования, обращаются в компанию независимо друг от друга с определенной частотой. Помимо этого, каждый клиент с некоторой вероятностью порекомендует своим знакомым услуги компании, которой он пользуется, тем самым создавая эффект «неявной рекламы» или «сарафанного радио». Следовательно, интенсивность поступления клиентов зависит от числа уже обратившихся клиентов.

Также каждый довольный клиент может обратиться в компанию повторно – это характеризует наличие обратной связи в нашей системе.

В данной статье рассматривается математическая модель страховой компании с неограниченным страховым полем [2], входящим потоком клиентов, зависящим от числа уже обслуживающихся в компании клиентов, величиной продолжительности договора страхования с экспоненциальной функцией распределения и возможностью повторного обращения клиента в компанию.

Рассматривается бесконечнолинейная система массового обслуживания (СМО) (рис. 1) на вход которой поступает поток, зависящий от числа занятых приборов.

Обозначим $i(t)$ – процесс изменения числа занятых приборов в системе в момент времени t. Интенсивность входящего потока определяется в виде $\lambda(i) = a + bi$, где a является постоянной, выражающей независимую скорость поступления заявок; b имеет смысл вероятности, с которой каждая заявка, содержащаяся в системе, влечет за собой появление новой.

Время обслуживания будем считать случайной величиной, имеющей экспоненциальное распределение с параметром μ, то есть имеет функцию распределения вероятностей вида:

$$B(x) = 1 - e^{-\mu x}.$$

Завершившая обслуживание заявка с вероятностью $1-r$ покидает систему, а с вероятностью r обращается к системе для повторного обслуживания. Число повторных обращений, реализованных за время t обозначим за $n(t)$.

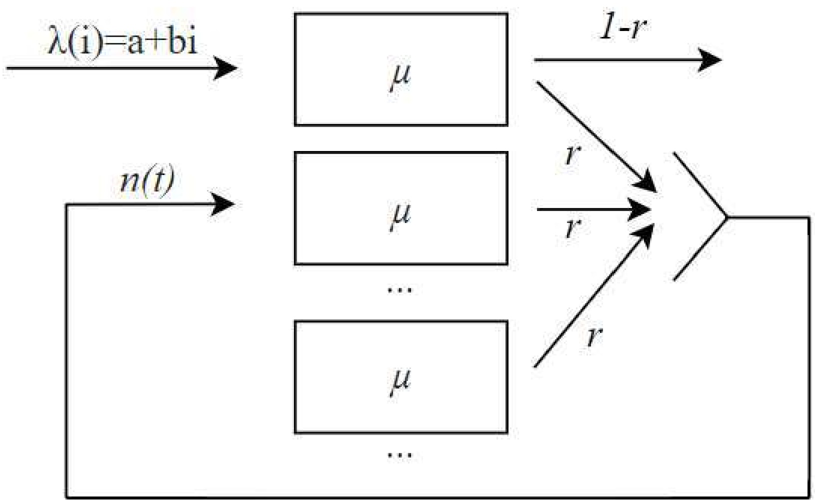

Рис. 1. СМО M(i)|M|∞ с интенсивностью входящего потока вида $\lambda(i) = a + bi$

Ставится задача нахождения распределения вероятностей числа занятых приборов в системе.

Для исследования случайного марковского процесса изменения числа занятых приборов в системе можно применить теорию цепей Маркова с непрерывным временем. Для распределения вероятностей рассматриваемого случайного процесса $i(t)$ запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова [3]:

$$\frac{\partial P_0(t)}{\partial t} = -aP_0(t) + \mu(1-r)P_1(t),$$

$$\frac{\partial P_i(t)}{\partial t} = -(a+bi+\mu i)P_i(t) + (a-b+bi)P_{i-1}(t) +$$

$$+(i+1)\mu(1-r)P_{i+1}(t) + i\mu r P_i(t),\ i \ge 1 \qquad (1)$$

с начальными условиями:

$$P_i(0) = \begin{cases} 1, & \textit{если } i = 0, \\ 0, & \textit{если } i > 0. \end{cases}$$

Для решения системы (1) воспользуемся методом производящих функций [4]. Определим производящую функцию в виде

$$F(z,t) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i P_i(t).$$

Из системы дифференциальных уравнений Колмогорова (1) для функций $F(z,t)$ получаем линейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial F(z,t)}{\partial t} + (1-z)(bz - \mu(1-r))\frac{\partial F(z,t)}{\partial z} = a(z-1)F(z,t), \qquad (2)$$

$$F(z,0) = 1.$$

Решив уравнение (2), получаем вид производящей функции $F(z,t)$:

$$F(z,t) = \frac{\left(\dfrac{\mu(1-r)}{b} - 1\right)^{\frac{a}{b}}}{\left[(z-1)(e^{(b-\mu(1-r))t} - 1) + \left(\dfrac{\mu(1-r)}{b} - 1\right)\right]^{\frac{a}{b}}}. \qquad (3)$$

Полученное выражение позволяет найти основные вероятностные характеристики.

Математическое ожидание характеризует среднее число заявок в системе и имеет вид:

$$M\{i(t)\} = m_1(t) = \left.\frac{\partial F(z,t)}{\partial z}\right|_{z=1} = \frac{a\left(1 - e^{(b-\mu(1-r))t}\right)}{\mu(1-r) - b}.$$

Выражение для нахождения дисперсии имеет вид:

$$D\{i(t)\} = \frac{a\left(e^{(b-\mu(1-r))t} - 1\right)^2}{b\left(\dfrac{\mu(1-r)}{b} - 1\right)^2} - \frac{a\left(e^{(b-\mu(1-r))t} - 1\right)}{b\left(\dfrac{\mu(1-r)}{b} - 1\right)}.$$

Далее рассмотрим стационарный режим функционирования системы.

Выполним предельный переход при $t \to \infty$ и получим вид производящей функции в стационарном режиме функционирования системы:

$$F(z) = \left(\frac{\mu(1-r)}{b} - 1 \right)^{\frac{a}{b}} \frac{1}{\left(\frac{\mu(1-r)}{b} - z \right)^{\frac{a}{b}}} = \left(\frac{1 - \frac{b}{\mu(1-r)}}{\frac{b}{\mu(1-r)} z - 1} \right)^{\frac{a}{b}}. \tag{4}$$

Обозначив $\frac{b}{\mu(1-r)} = \rho$, (4) перепишем в виде

$$F(z) = \left(\frac{1-\rho}{\rho z - 1} \right)^{\frac{a}{b}}.$$

Полученная производящая функция имеет вид производящей функции случайной величины, имеющей отрицательное биномиальное распределение с параметрами $\frac{a}{b}$, $1 - \frac{\mu(1-r)}{b}$. Величина $1 - \frac{\mu(1-r)}{b}$ принимает значения от 0 до 1, так как она имеет смысл вероятности. Отсюда следует, что $b < \mu\left(1-r\right)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бочаров П. П.* Теория массового обслуживания / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин М. : Изд-во РУДН, 1995. 520 с.

2. *Гафуров Ш. Р., Гугнин В. И., Аманов С. Н.* Язык бизнеса. Ташкент : Шарк, 1995. 738 с.

3. *Моисеева С. П.* Теория случайных процессов. Томск: Издательский Дом Томского государственного университета, 2014. 57 с.

4. *Назаров А. А., Терпугов А. Ф.* Теория массового обслуживания: учеб. пособие. 2-е изд., Томск : Изд-во НТЛ. 2010. 228 с.