МЕТОД УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМОЙ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ГРУППОВЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ И ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ ПОТОКОМ ТРЕБОВАНИЙ

Н. В. Сергеева[1], М. Пагано[2], И. Е. Тананко[1], Е. П. Станкевич[1]

[1]*Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Россия*
[2]*Пизанский университет, Италия*
E-mail: sergeevanv@info.sgu.ru, michele.pagano@unipi.it, tanankoie.sgu@gmail.com, stankevichelena@mail.ru

Рассматривается система массового обслуживания с изменяющимся пуассоновским входящим потоком и одним обслуживающим прибором. Прибор обслуживает требования группами фиксированного размера. Предлагается метод динамического управления интенсивностью обслуживания, который обеспечивает требуемое значение коэффициента использования системы.

CONTROL OF A QUEUEING SYSTEM WITH BATCH SERVICE AND VARIABLE FLOW RATE

N. V. Sergeeva, M. Pagano, I. E. Tananko, E. P. Stankevich

We consider a single-server queuing system with a varying Poisson input flow. The server services customers in fixed size batches. The method for dynamic control of service rate is proposed. This method provides the required value of the system utilization.

Развитие теории и методов анализа систем массового обслуживания с управлением является актуальным научным направлением, так как позволяет решать задачи оптимизации параметров качества функционирования дискретных стохастических систем с образованием очередей. Обзор основных методов управления системами массового обслуживания, основные понятия и классификация управляемых систем приведены в работе [1]. Методы управления в системах массового обслуживания с групповым обслуживанием рассмотрены в работах [2-4]. В данной работе предлагается новый метод динамического управления интенсивностью обслуживания в системе массового обслуживания с групповым обслуживанием и изменяющимся входящим потоком. Разработанный метод управления планируется использовать для управления сетями массового обслуживания с групповым обслуживанием.

Рассмотрим систему массового обслуживания с групповым обслуживанием требований и без управления. В систему поступает пуассоновский входящий поток требований с интенсивностью λ. Система содержит один обслуживающий прибор и очередь бесконечной длины. Предполагается, что прибор обслуживает группу требований размера b. Длительность обслуживания группы требований является случайной величиной, имеющей экспоненциальное распределение с параметром μ. Требования из очереди на обслуживание выбираются произвольно группой размера b в случае, если в очереди находится необходимое количество требований, иначе обслуживающий прибор простаивает до тех пор, пока в очереди не накопится минимум b требований.

Рассматриваемая система функционирует в стационарном режиме, когда коэффициент использования

$$\psi = \frac{\lambda}{b\mu} < 1.$$

В работе [5] доказано, что математическое ожидание (м. о.) длительности пребывания требований в системе вычисляется по формуле

$$\overline{u} = \frac{b-1}{2\lambda} + \frac{1}{M-\lambda},$$

где M – корень уравнения

$$M^{b+1} - (\lambda+\mu)M^b + \lambda^b\mu = 0,$$

принадлежащий интервалу

$$\left(\frac{b(\lambda+\mu)}{b+1}, \frac{(\lambda+\mu)^{b+1} - \lambda^b\mu}{(\lambda+\mu)^b}\right).$$

Доказано, что $\overline{u}(\lambda)$ имеет один минимум.

Из результатов, полученных в работе [6], следует, что, при фиксированной интенсивности обслуживания группы требований и минимальном значении $\overline{u}(\lambda)$, коэффициент использования приблизительно равен 0,48 при $b \le 10$. Поэтому будем полагать, что система функционирует в оптимальном режиме, когда $\psi_{опт} \approx 0{,}48$. Предположим, что в некоторый момент времени интенсивность входящего потока увеличилась, и посмотрим за изменением ψ.

Для этого ψ будем вычислять по формуле

$$\psi(t) = 1 - \sum_{n=0}^{b-1}\pi(n,t),$$

где $\pi(n,t)$ – вероятность того, что в системе в момент времени t находится n требований определяется численным решением уравнений Колмогорова-Чепмена для системы с групповым обслуживанием

$$\begin{cases} \dfrac{d\pi(0,t)}{dt} = -\lambda\pi(0,t) + \mu\pi(b,t), \\ \dfrac{d\pi(n,t)}{dt} = -\lambda\pi(n,t) + \mu\pi(b+n,t) + \lambda\pi(n-1,t), \ 1 \le n \le b-1, \\ \dfrac{d\pi(n,t)}{dt} = -(\lambda+\mu)\pi(n,t) + \mu\pi(b+n,t) + \lambda\pi(n-1,t), \ n \ge b. \end{cases}$$

В качестве примера рассмотрим систему массового обслуживания с $\lambda = 4$, $b = 4$. При данных параметрах системы в стационарном режиме функционирования и $\psi_{опт} \approx 0{,}48$, интенсивность обслуживания группы требований равна $\mu = 2{,}083$. С момента $t = 1$ увеличим мгновенно значение λ на 1, т. е. $\lambda = 5$. Если не менять значение μ, т.е. система продолжит функционировать без управления, то, начиная с момента $t = 1$, в системе наблюдается переходный режим. Начиная с момента $t = 20$, можно считать, что система перешла в стационарный режим функционирования и $\psi = 0{,}6$. На рис. 1 данному процессу соответствует сплошная линия.

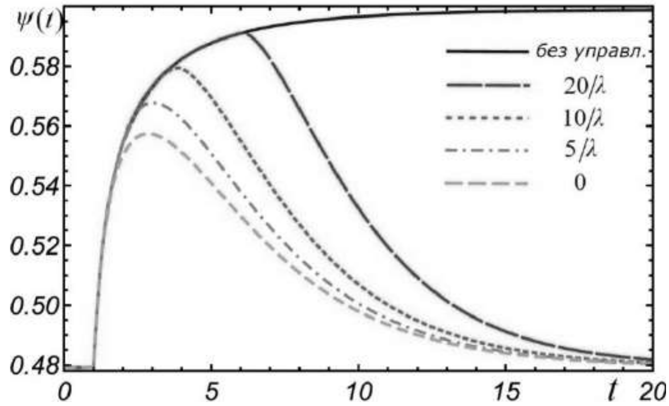

График зависимость ψ от времени

Рассмотрим теперь функционирование системы с динамическим управлением интенсивностью обслуживания μ. Будем также полагать, что $\lambda = 4$, $b = 4$. Целью управления является приведение текущего коэффициента использования к требуемому значению $\psi_{опт} \approx 0{,}48$. Так же как и выше, с момента $t = 1$ увеличим мгновенно значение λ на 1. Метод динамического управления заключается в изменении μ в соответствии с правилом

$$\mu := \mu + k(\psi - \psi_{опт}),$$

где k – коэффициент пропорциональности, $k = 0{,}01$ [7].

На рис. 1 также приведены зависимости коэффициента использования системы массового обслуживания от времени с управлением интенсивностью обслуживания μ. Пунктирная линия соответствует мгновенному включению управления, штрих-пунктирная линия – задержке на $5/\lambda$ единиц времени (ед. вр.), точечная – задержке на $10/\lambda$ ед. вр., длинный пунктир – задержке на $20/\lambda$ ед. вр. Из графиков видно, что в интервале $[0{,}1)$ система находится в стационарном режиме, когда $\lambda = 4$. Далее, когда в момент $t = 1$ интенсивность потока становится равной 5, в системе наступает переходный режим, который длится примерно до момента $t = 20$. При этом интенсивность обслуживания требований становится равной 2,604. Если не применять управление, то система вновь достигнет стационарного режима функционирования. При этом коэффициент использования системы $\psi > \psi_{опт}$. Применение управления интенсивностью обслуживания возвращает систему в оптимальный режим функционирования, причем, чем больше длительность задержки включения управления интенсивностью обслуживания, тем позже система возвращается в оптимальный режим функционирования.

Системы массового обслуживания с групповым обслуживанием и предложенным методом динамического управления могут применяться, например, для решения экономических задач в логистических компаниях, занимающихся грузопассажирскими перевозками.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках выполнения государственного задания (проект No FSRR-2020-0006).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рыков В. В.* Управляемые системы массового обслуживания // Итоги науки и техн. Сер. Теор. вероятн. Мат. стат. Теор. кибернет. 1975. Т. 12. С. 43-153.

2. *Selim Sh. Z.* Time-Dependent Solution and Optimal Control of a Bulk Service Queue // Journal of Applied Probability. 1997. Vol. 34. № 1. P. 258-266.

3. *Deb R., Sefozo R. F.* Optimal Control of Batch Service Queues // Advances in Applied Probability. 1973. Vol. 5. Is. 2. P. 340-361.

4. *Abolnikov L., Dshalalow J. H.* On a Multilevel Controlled Bulk Queueing System $M^X/G^{r,R}/1/N$ // Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. 1992. Vol. 5. № 3. P. 237-260.

5. *Stankevich E., Tananko I., Pagano M.* Optimization of Open Queuing Networks with Batch Services // Mathematics. 2022. Vol. 10. P. 3027.

6. *Станкевич Е. П., Тананко И. Е., Пагано М.* Задача оптимизации системы массового обслуживания с групповым обслуживанием требований // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2022): Материалы XXI Международной конференции имени А.Ф. Терпугова (Узбекистан, Карши, Каршинский государственный университет, 25-29 октября 2022 г.). – в печати.

7. *Иванов В. А., Медведев В. С., Чемоданов Б. К., Ющенко А. С.* Математические основы теории автоматического управления: Учеб. пособие: В 3 т. Т. 1. М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. 552 с.