О СОСТОЯТЕЛЬНОСТИ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОЦЕНОК РЕГРЕССИИ НА ОСНОВЕ ДИСКРЕТНЫХ СУММ ФУРЬЕ-ЯКОБИ НА НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ

В. В. Новиков

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Россия
E-mail: vvnovikov@yandex.ru

Рассматривается непараметрическая регрессия на основе дискретных сумм Фурье по системе многочленов, образующих ортонормированную систему на неравномерных сетках с весом типа Якоби. При наличии некоторых ограничений на функцию регрессии и на распределение узлов сетки получены условия состоятельности указанной регрессионной процедуры.

ON A CONSISTENCY OF NONPARAMETRIC ESTIMATES OF REGRESSION BASED ON THE FOURIER-JACOBI DISCRETE SUMS ON NON-UNIFORM GRIDS

V. V. Novikov

A nonparametric regression based on the Fourier discrete sums in polynomials constituting an orthogonal system on finite non-uniforme grid with Jacobi type weight is considered. Under certain restrictions on the regression function and on the distribution of grid nodes a sufficient condition for consistency of regression function estimate is obtained.

Пусть на отрезке $[-1,1]$ заданы две сетки $-1 = x_0 < \ldots < x_n = 1$ и $t_i = (x_i + x_{i+1})/2$, $i = 0,\ldots,n-1$. Через $p_k(x) = p_{k,n}^{(\alpha,\beta)}(x)$, $k = 0,\ldots,n-1$, обозначим последовательность дискретных многочленов Якоби, ортонормированных на сетке $\{x_i\}_{i=0}^{n-1}$ относительно скалярного произведения

$$(g,h) = \sum_{i=0}^{n-1} g(x_i)h(x_i)w(x_i)\Delta t_i,$$

где $w(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ – вес Якоби, $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$. Рассмотрим, непараметрическую регрессионную модель

$$Y_i = f(X_i) + \varepsilon_i, i = 0,\ldots,n,$$

где $f(x)$ – неизвестная функция регрессии, подлежащая оцениванию на основе эмпирических данных $\{(X_i, Y_i)\}_{i=0}^{n}$, а $\{\varepsilon_i\}_{i=0}^{n}$ – случайные ошибки. Будем считать, что величина X неслучайна, причем $X_i = x_i$ $i = 0,\ldots,n-1$. Возьмем в качестве оценки $\hat{f}(x)$ функции регрессии $f(x)$ дискретную сумму Фурье порядка $N < n$ функции f по системе $\{p_k(x)\}$, где значения $f(x_i)$ заменены на Y_i:

$$\hat{f}_N(x)=\sum_{k=0}^{N}\hat{c}_k p_k(x),\ \hat{c}_k=(Y,p_k):=\sum_{i=0}^{n-1}Y_i p_k(x_i)w(x_i)\Delta t_i. \qquad (1)$$

О статистических свойствах оценок типа (1), а также об аппроксимативных свойствах дискретных сумм Фурье для различных ортогональных систем см., например, [1], [2] и содержащуюся там библиографию.

Теорема. *Пусть* $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+$ *и выполнены условия:*

1) $\mathrm{E}\varepsilon_i=0$, $\mathrm{E}(\varepsilon_i\varepsilon_j)=0$*, при* $i\neq j$, $\mathrm{E}\varepsilon_i^2<\sigma^2$, $i=1,\ldots,n$*, где* σ^2 *– некоторая постоянная;*

2) *функция* $f(x)$ *на отрезке* $[-1,1]$ *удовлетворяет условию Дини-Липшица;*

3) $N(n)=O\left(\delta_n^{-1/(q+3)}\right),\ n\to\infty,\ q:=\max\{\alpha;\beta\},\ \delta_n:=\max\limits_{0\le i\le n-1}\Delta t_i.$

Тогда оценка (1) *является состоятельной для* $x\in[a,b]\subset(-1,1)$, т. е. *для указанных x имеем*

$$\hat{f}_N(x)\xrightarrow{p}f(x)\ \text{при}\ N\to\infty.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Greblicki W., Pawlak M.* Nonparametric System Identification. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.

2. *Нурмагомедов А. А.* Аппроксимативные свойства дискретных сумм Фурье по многочленам, ортогональным на неравномерных сетках // Владикавк. мат. журн. 2020. Т. 22. Вып. 2. С. 34-47.