ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕЯВНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Т. В. Жуковская[1], И. Д. Серова[2]

[1]*Тамбовский государственный технический университет, Россия*
[2]*Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, Россия*
E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru, irinka_36@mail.ru

Рассматривается задача управления для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, не разрешённого относительно производной. Сформулированы утверждения о существовании и оценке решения, аналогичные теореме Чаплыгина о дифференциальном неравенстве.

CONTROL PROBLEM FOR AN IMPLICIT ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION

T. V. Zhukovskaia, I. D. Serova

A control problem is considered for an ordinary differential equation of the first order, which is not resolved with respect to the derivative. We formulate assertions about the existence and estimate of a solution similar to Chaplygin's theorem on differential inequality.

Различные процессы экономики требуют принятия управляющих решений для достижения требуемых показателей. Математические модели таких процессов приводят к задачам управления. Аппарат исследования таких задач в случае, когда динамика экономической системы описывается не разрешёнными относительно производной (неявными) дифференциальными уравнениями, практически не разработан.

Здесь предлагается подход к исследованию задач управления для неявных дифференциальных уравнений, основанный на результатах об упорядоченно накрывающих отображениях, полученных в [1],[2]. Данная заметка является продолжением работы [3].

Напомним определение понятия накрывания.

Пусть заданы частично упорядоченные пространства $(X,\leq)$ и $(Y,\leq)$. Для произвольных $v\in X$, $V\subset X$ определим множества

$$\mathrm{O}_X(v)=\{x\in X: x\leq v\},\quad \mathrm{O}_X(V)=\bigcup_{v\in V}\mathrm{O}_X(v).$$

Аналогичные обозначения будем использовать для соответствующих множеств в пространстве Y. Отображение $g:X\to Y$ называется (*упорядоченно*) *накрывающим множество* $Y_0\subset Y$, если имеет место соотношение (см. [1], [2])

$$\forall\, x_0\in X_0\ \ \mathrm{O}_Y(g(x_0))\bigcap Y_0\subset g(\mathrm{O}_X(x_0)).$$

В случае одноэлементного множества $Y_0 = \{y_0\}$ приведенное соотношение равносильно соотношению

$$\forall\, x_0 \in X_0 \quad y_0 \le g(x_0) \;\Rightarrow\; \exists x \in \mathrm{O}_X(x_0) \quad g(x) = y_0 .$$

Обозначим через $K(R^m)$ совокупность компактных подмножеств пространства R^m, через AC и W пространства абсолютно непрерывных и, соответственно, измеримых функций $[a,b] \to R^m$. Для произвольного множества $V \subset AC \times W$ определим операторы проектирования $\pi_1 : V \to AC$, $\pi_2 : V \to W$ соотношениями

$$\forall\, v = (x,u) \in V \quad \pi_1 v = x\,, \quad \pi_2 v = u.$$

Пусть заданы: функция $f\colon [a,b] \times R^n \times R^n \times R^n \times R^m \to R^k$, многозначное отображение $U\colon [a,b] \times R^n \times R^n \to K(R^m)$ и вектор $\gamma \in R^n$. Предположим, что для любых $(x,z,w,u) \in R^n \times R^n \times R^n \times R^m$ и п.в. $t \in [a,b]$ выполнены следующие условия: функция $f(\cdot,x,z,w,u)\colon [a,b] \to R^k$ является измеримой, функция $f(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,u)\colon [a,b] \times R^n \times R^n \times R^n \to R^k$ суперпозиционно измерима (т.е. для любых измеримых функций $x(\cdot)$, $z(\cdot)$, $w(\cdot)$ функция $f(\cdot,x(\cdot),z(\cdot),w(\cdot),u)$ измерима); функция $f(t,x,z,\cdot,u)\colon R^n \to R^k$ непрерывна и накрывает множество $\{0\} \subset R^k$; функция $f(t,\cdot,\cdot,w,u)\colon R^n \times R^n \to R^k$ убывает по каждому аргументу $x_1,\ldots,x_n$, $z_1,\ldots,z_n$ и непрерывна справа; $f(t,x,z,w,\cdot)\colon R^m \to R^k$ непрерывна и убывает по каждому аргументу $u_1,\ldots,u_n$; отображение $U(\cdot,\, x,z)\colon [a,b] \to K(R^m)$ измеримо; отображение $U(t,\cdot,\cdot)\colon R^n \times R^n \to K(R^m)$ изотонно и непрерывно справа по каждому аргументу $x_1,\ldots,x_n$, $z_1,\ldots,z_n$.

Рассмотрим на $[a,b]$ задачу Коши для управляемой системы

$$f(t,\, x,\, \dot{x},\, \dot{x},\, u) = 0\,, \tag{1}$$

$$u(t) \in U(t,\, x(t),\, \dot{x}(t))\,, \tag{2}$$

с начальным условием

$$x(a) = \gamma\,. \tag{3}$$

Обозначим через S множество пар $(x,u) \in AC \times W$, являющихся решениями задачи (1), (2), (3), а через $\dot{S}$ – множество пар $(\dot{x},u)$, где $x,u \in S$.

Для рассматриваемой управляемой системы имеет место следующее утверждение – аналог классической теоремы Чаплыгина (см. [4]) о дифференциальном неравенстве.

Теорема 1. *Пусть* $v_0 \in AC$ *, положим*

$$B_0 \colon [a,b] \to K(R^m)\,,\; B_0(t) = U(t,\, v_0(t), \dot{v}_0(t))\,,$$

и пусть u_0 *– любое измеримое сечение многозначного отображения* B_0*. Тогда, если справедливы неравенства*

$$v_0(a) \ge \gamma \text{ и } f(t,\, v_0(t),\, \dot{v}_0(t),\, \dot{v}_0(t),\, u_0(t)) \ge 0 \text{ при п.в. } t \in [a,b],$$

то существует решение $(x,u)\in S$ *задачи* (1), (2), (3) *такое, что* $\dot{x}\le \dot{v}_0$ *и* $u \le u_0$. *Кроме того, в множестве* $\dot{S}$ *существует пара* $(\underline{\dot{x}},\underline{u})$ *такая, что* $\underline{\dot{x}}$ – *минимальный элемент в* $\pi_1(\dot{S})$, *а* $\underline{u}$ – *минимальный элемент в* $\pi_2(\dot{S})$, *и для этих элементов выполнено* $\underline{\dot{x}}\le \dot{v}_0$, $\underline{u} \le u_0$.

Рассмотрим скалярную управляемую систему (1), (2), (3), т.е. будем полагать, что $n=m=k=1$. В этом случае в условиях теоремы 1 можно не только гарантировать существование в множествах $\pi_1(\dot{S})$ и $\pi_2(\dot{S})$ минимальных элементов, но и наименьших элементов. А именно, для скалярной управляемой системы (1), (2), (3) справедливо следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть выполнены предположения теоремы 1 для скалярных отображений* $f:[a,b]\times R\times R\times R\times R\to K(R)$, $U:[a,b]\times R\times R\to K(R)$ *и числа* $\gamma\in R$. *Тогда в множестве* $\dot{S}$ *решений задачи* (1), (2), (3) *существует пара* $(\underline{\dot{x}},\underline{u})$, *в которой* $\underline{\dot{x}}$ – *наименьший элемент в* $\pi_1(\dot{S})$, *а* $\underline{u}$ – *наименьший элемент в* $\pi_2(\dot{S})$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда № 22-21-00772, https://rscf.ru/project/22-21-00772/.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арутюнов А. В., Жуковский Е. С., Жуковский С. Е.* О точках совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах // Доклады Академии наук. 2013. Вып. 453. № 5. С. 475-478.

2. *Arutyunov A. V., Zhukovskiy E. S., Zhukovskiy S. E.* Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. 2015. Vol. 179. № 1. P. 13-33.

3. *Zhukovskiy E. S., Serova I. D., Panasenko E. A., Burlakov E. O.* On Order Covering Set-Valued Mappings and Their Applications to the Investigation of Implicit Differential Inclusions and Dynamic Models of Economic Processes // Advances in Systems Science and Applications. 2022. Vol. 22. № 1. P. 176-191.

4. *Чаплыгин С. А.* Основания нового способа приближённого интегрирования дифференциальных уравнений. М., 1919 (Собрание сочинений. Т. I. Гостехиздат, 1948. С. 348-368).