ОБ УПРАВЛЕНИИ КАПИТАЛОМ НАКОПИТЕЛЬНОГО ФОНДА С ФУНКЦИЯМИ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ, РАБОТАЮЩЕЙ НА (B, S)-РЫНКЕ, С ОПИСЫВАЕМОЙ БАЗИРУЮЩЕЙСЯ НА СКАЧКООБРАЗНОМ ПРОЦЕССЕ ОРНШТЕЙНА-УЛЕНБЕКА ЦЕНОЙ РИСКОВОГО АКТИВА

Т. В. Жмыхова[1], И. Н. Шницар[2]

[1]*Донбасская национальная академия строительства и архитектуры, Макеевка, Россия*
[2]*Донецкий национальный университет, Россия*
E-mail: zhmykhovatanya@mail.ru, irina.shnitsar@gmail.com

Найдено оптимальное распределение вкладов между рисковыми и безрисковыми активами, которые обеспечат лучшую оценку снизу для вероятности неразорения страховой компании среди предложенного класса оценок для накопительного фонда с функциями страховой компании, инвестирующей на полный финансовый рынок, причем цена акции описывается моделью, базирующейся на скачкообразном процессе Орнштейна-Уленбека, скачки которого происходят в пуассоновские моменты времени и описываются последовательностью независимых нормально распределенных случайных величин.

ON MANAGEMENT OF THE CAPITAL FUND WITH THE FUNCTIONS OF AN INSURANCE COMPANY, OPERATING IN A (B, S)-MARKET, WITH THE PRICE OF A RISKY ASSET BASED ON THE ORNSTEIN-UHLENBECK JUMP PROCESS DESCRIBEED

T. V. Zhmykhova, I. N. Shnitsar

The optimal allocation of deposits between risky and risk-free assets has been found, which will provide the best estimate from below of the probability of insurance company`s ruin among the proposed class of estimates for a savings fund with the functions of an insurance company investing in the full financial market, and the share price is described by a model based on the Ornstein-Uhlenbeck jump process, whose jumps occur at Poisson moments time and are described by a sequence of independent normally distributed random variables.

Рассмотрим накопительный фонд с функциями страховой компании, которая на момент времени t имеет капитал $X_x(t)(X(0)=x)$, суммарные премии, которые получил фонд, за временя $[t;t+\Delta t]$ составят $cX_x(t)\Delta t$, где $cX_x(t)(c>0)$ – скорость поступления премий в фонд, зависящее от величины денег в фонде. Введем управляющие величины $\eta=\dfrac{\varsigma}{K}$, где ς – величина иска, $K>0$ – некоторое число (может быть достаточно большое), тогда из [1], если

$$\frac{\varsigma}{K}<\beta\leftrightarrow\varsigma<K\beta\Rightarrow X_x(t)\chi(\eta,\beta)=X_x(t)\frac{\varsigma}{K};$$

$$\frac{\varsigma}{K}\geq\beta\leftrightarrow\varsigma\geq K\beta\Rightarrow X_x(t)\chi(\eta,\beta)=X_x(t)\beta.$$

Суммарные выплаты по искам за время $[t;t+\Delta t]$ составляют $\sum_{j=N(t)+1}^{N(t+\Delta t)} X_x(t)\chi\left(\frac{\varsigma_j}{K},\beta\right)$, где $N(t)$ – процесс Пуассона с параметром $\lambda>0$ интерпретируется как число исков, предъявляемых в фонд за промежуток времени $(0;t]$; ζ_j – независимые от $N(t)$, одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F(x),(F(0)=0)$ размеры исков имеют конечные экспоненциальные моменты, $M\eta_j=a$ величина выплаты по иску $X(t)\chi(\eta,\beta)$ и определяется следующим образом:

$$\chi\left(\frac{\zeta}{K},\beta\right)X_x(t)=\begin{cases}\frac{\zeta}{K}X_x(t), 0<\frac{\zeta}{K}<\beta<1,\\ \beta X_x(t), \frac{\zeta}{K}\ge\beta.\end{cases} \tag{1}$$

В силу представления сложного процесса Пуассона в виде стохастического интеграла по пуассоновской мере [2] имеем:

$$\sum_{j=N(t)+1}^{N(t+\Delta t)} X_x(t)\chi\left(\frac{\zeta_j}{K},\beta\right)\approx\int_r^{r+\Delta t}\int_0^{+\infty} X_x(s)\chi\left(\frac{y}{K},\beta\right)\nu(dy,ds), \tag{2}$$

где $\nu(A,t)$ – пуассоновская мера, $M\nu(A,t)=\lambda t\int_A dF(x)$.

Пусть задан финансовый (B,S) – рынок, состоящий из двух активов: B – безрискового и S – рискового.

Цена безрискового актива (банковского счета) описывается уравнением:

$$dB(t)=rB(t)dt, B(0)>0, \tag{3}$$

где r – процентная ставка банка, причем $r(t)=r>0$, $B(0)$ – сумма на депозите в начальный момент времени.

Цена рискового актива (акции) описывается моделью [3]:

$$dS_N(t)=S_N\left[(\mu-\gamma\xi_N(t))dt+\int_{-\infty}^{+\infty}\left[e^{\alpha}-1\right]\tilde{\nu}(d\alpha,dt)\right], \tag{4}$$

тут $\xi_N(t)=\xi(t)W_N\left(\sup_{0\le s\le t}|\xi(t)|\right)$, где $W_N(x)=\begin{cases}1,|x|\le N\\0,|x|>N\end{cases}$, то есть $\xi_N(t)$ урезанный процесс $\xi(t)$ за уровнями $-N,N$, причем $\xi(t)$ – процесс Орнштейна-Уленбека со скачками:

$$\xi(t)=-\gamma\int_0^t\xi(s)ds+W(Z(t)),\ \gamma>0,$$

где $W(Z(t))$ – подчиненный винеровский процесс, $W(t)$ – стандартный винеровский процесс, $Z(t)$ – процесс с неубывающими траекториями, стартующий из нуля, процесс $Z(t)$ является процессом Пуассона с параметром $\lambda(\lambda>0)$, независящим от $W(t)$, процесс $W(Z(t))$ – сложный процесс Пуассона, допускающий представление виде стохастического интеграла по пуассоновской мере [4], а именно

$$W(Z(t)) = \sum_{i=0}^{Z(\xi)} \xi_i = \int_0^{\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha \widetilde{v}(d\alpha, ds),$$

где $\widetilde{v}(A,t) = v(A,t) - Mv(A,t), Mv(A,t) = \lambda t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A \exp(-\alpha^2/2) d\alpha$.

Безарбитражность модели (4) также была доказана в [3].

Пусть фонд размещает свой капитал $X_x(t), t \geq 0, (X(0) = x)$ на финансовом (B, S) – рынке, цены активов которого описываются уравнениями (3)-(4), причем $uX_x(t)$, $0 < u < 1$ – часть капитала, вложенная в акции, соответственно $(1-u)X_x(t)$ – это та часть капитала, которую фонд размещает на банковском депозите. Будем считать, что фонд работает только с собственным капиталом, поступление средств извне не рассматривается, причем $\mu > r$, иначе смешанное инвестирование вообще нецелесообразно.

Учитывая (3) и (4), а также в силу того, что для пуассоновской меры справедливо представление $v_\lambda(A,t) = \widetilde{v}(A,t) + \lambda t \int_A dF(x)$ капитал фонда описывается балансовым уравнением:

$$dX_x^N(t) = X_x^N(t) \Bigg(u\mu + (1-u)r - u\gamma\xi_N(t) - \lambda \int_0^{+\infty} \chi\left(\frac{y}{K}, \beta\right) F(dy) +$$
$$+ u \int_{-\infty}^{+\infty} (e^\alpha - 1) \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha^2/2} du \Bigg) dt + c dt + uX_x^N(t) \int_{-\infty}^{+\infty} (e^\alpha - 1) y(d\alpha, dt) + \quad (5)$$
$$+ \int_0^{+\infty} X_x^N(t) \chi\left(\frac{y}{K}, \beta\right) v_\lambda(dy, dt).$$

В силу того, что уравнение (5) при положительном начальном капитале $x(x > 0)$ имеет положительное решение – фонд, динамика капитал которого описывается балансовым уравнением (5), никогда не разоряется [5].

Была поставлена задача: найти управление $0 \leq u \leq 1$, такое, чтобы вероятность разорения страховой компании, капитал которой описывается уравнением (5), за бесконечное время была оценена величиной, которая стремится к нулю при стремлении начального капитала $X(0) = x$ к бесконечности и эта оценка должна быть наименьшей по $0 \leq u \leq 1$.

Решение (5) было найдено в виде

$$\theta_t = \xi_t^0(N) X_x^N(t), \quad (6)$$

где

$$\xi_t^0 = \exp\Bigg\{ -\left[u\mu + (1-u)r - u\gamma\xi_N(t) + u\lambda(\sqrt{e} - 1) \right] t - \lambda \int_0^{+\infty} \chi\left(\frac{y}{K}, \beta\right) F(dy) \Bigg) dt +$$
$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(\frac{1}{1 + u[e^\alpha - 1]} - 1 \right) v(d\alpha, dt) \Bigg\}, \ \xi_0^0 = 1, \quad (7)$$

$$X_x(t)=\frac{\theta_t}{\xi_t^0}=\left[\xi_t^0\right]^{-1}\left[x+\int_0^t \xi_t^0 cds\right]. \qquad . \tag{8}$$

Далее были проведены вычисления для найденного капитала (8), получены оценки для $M\left[\xi_t^0(t)\right]^{2m}$, найдены d_m и основной результат сформулирован в виде теоремы:

Теорема [6]**.** Пусть $\mu > r > 0$, если для какого – то целого $m > 0$ $\int x^{2m} dF(x) < +\infty$ то имеет место неравенство

$$\sup_{0\le\tau<+\infty} M\left|\int_0^\tau\int \xi_s^0(N)\delta v_1(d\delta,ds)\right|^{2m} \le b^{2m}\left(\frac{\lambda_0 C_{2m}^2}{2d}\right)^m\left[1+\sqrt{\frac{2d}{\lambda_0 C_{2m}^2}}\right]^{-2m(m-1)}, \tag{9}$$

здесь $b=\left[\int x^{2m}dF(x)\right]^{1/2m}$, $M\left[\xi_t^0(N)\right]^{2m}\le \exp\{-2md_m t\}$.

Далее, пусть $0<u\le 1$ доставляет максимум функции $\varphi(u)$ то есть $\max\limits_{0<t\le 1}\varphi(u)=\varphi(u^*)$, тогда при $c\ge\alpha\lambda$ в силу положительности процесса $\xi_t^0(N)$ воспользовавшись неравенством получим

$$X_x^N(t)=\left[\xi_t^0(N)\right]^{-1}\left[x+\int_0^t \xi_t^0(N)cds\right] P\left\{\inf_{0\le t\le T} X_x^N(t)\le 0\right\}=$$

$$=P\left\{\inf_{0\le t\le T}\left[\xi_t^0(N)\right]^{-1}\left[x+\int_0^t\xi_t^0(N)cds\right]\le 0\right\}=P\left\{\inf_{0\le t\le T}\left[x+\int_0^t\xi_t^0(N)cds\right]\le 0\right\}\le$$

$$\le\frac{M\left|\int_0^T\xi_s^0(N)cds\right|^{2m}}{x^{2m}}\le\frac{b^{2m}\left(\frac{\lambda_1 C_{2m}^2}{2d}\right)^m\left[1+\sqrt{\frac{2d}{\lambda_1 C_{2m}^2}}\right]^{-2m(m-1)}}{x^{2m}}. \tag{10}$$

В силу того, что имеет место вложение $\left\{\inf\limits_{0\le t\le\alpha} X_x^N(t)\le 0\right\}\subseteq\left\{\inf\limits_{0\le t\le\beta} X_x^N(t)\le 0\right\}$, $\alpha\le\beta$. Получим последовательность множеств, которые расширяются. Тогда $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} P\left\{\inf\limits_{0\le t\le\alpha} X_x^N(t)\le 0\right\}=P\left\{\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\left\{\inf\limits_{0\le t\le\alpha} X_x^N(t)\le 0\right\}\right\}=P\left\{\inf\limits_{0\le t\le+\infty} X_x^N(t)\le 0\right\}$.

Переходя к пределу при $T\to+\infty$, из (10) имеем оценку вероятности разорения страховой компании

$$P\left\{\inf_{0\le t<+\infty} X(t)\le 0\right\}\le\frac{b^{2m}\left(\frac{\lambda_1 C_{2m}^2}{2d_m}\right)\left[1+\sqrt{\frac{2d_m}{\lambda_1 C_{2m}^2}}\right]^{2m(m-1)}}{x^{2m}}. \tag{11}$$

Таким образом, найдено оптимальное распределение вкладов между рисковыми и безрисковыми активами, которые обеспечат лучшую оценку снизу для вероятности разорения страховой компании среди предложенного класса оценок для накопительного фонда с функциями страховой компании, инвестирующей на полный финансовый рынок, причем цена акции описывается моделью, базирующейся на скачкообразном процессе Орнштейна-Уленбека, скачки которого происходят в пуассоновские моменты времени и описываются последовательностью независимых нормально $N(0,1)$ – распределенных случайных величин.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бондарев Б. В., Баев А. В.* Управление накопительно-потребительским фондом с функциями страховой компании // Украинский математический вестник. 2006. № 2. Т. 3. С. 166-186.

2. *Бондарев Б. В.* Математические модели в страховании. Донецк: Изд-во Апекс, 2002. 116 с.

3. *Баев А. В., Бондарев Б. В., Жмыхова Т. В., Шурко Г. К.* Об управлении капиталом одной страховой компании, работающей на *(B, S)*-рынке // Прикладная статистика. Актуарная и финансовая математика. 2013. № 1. С. 3-19.

4. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наукова думка, 1968. 354 с.

5. *Бондарев Б. В., Баев А. В.* Функционирования страховой компании на *(B, S)*-рынке // Прикладная статистика. Актуарная и финансовая математика. 2003. № 1-2. С. 11-26.