

ОЦЕНКА МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭПИДЕМИИ

Ю. А. Билоус¹, А. А. Жукова²

¹*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Россия*

²*Московский физико-технический институт, Россия*

E-mail: yulia.hribkova@mail.ru, zhukova.aa@phystech.edu

Работа посвящена оценкам макроэкономических эффектов в математической модели распространения эпидемии, что является сейчас актуальной проблемой. Новизна работы заключается в том, что мы объединяем эпидемиологические модели SIR, SEIRD с оценкой экономических показателей таких как трудовые ресурсы, капитал и ВВП. Целью работы является исследование влияния пандемии на экономику, а именно важно исследовать динамику экономических показателей с учетом эпидемии, то есть моделирование динамики капитала, трудовых ресурсов и ВВП в условиях пандемии. Поставленная цель достигается путем разработки модели, которая объединяет в себе эпидемиологическую и экономическую модель, посредством задания трудовых ресурсов через переменные компартментных моделей, подстановкой в формулу для капитала, а также моделирование экономических показателей с разными значениями параметров в математическом пакете Maple.

EVALUATION OF MACROECONOMIC EFFECTS IN THE MATHEMATICAL MODEL OF THE EPIDEMIC DISTRIBUTION

Yu. A. Bilous, A. A. Zhukova

The work is devoted to the assessment of macroeconomic effects in the mathematical model of the spread of the epidemic, which is now an urgent problem. The novelty of the work lies in the fact that we combine the epidemiological models of SIR, SEIRD with an assessment of economic indicators such as labor, capital and GDP. The aim of the work is to study the impact of the pandemic on the economy, namely, it is important to study the dynamics of economic indicators taking into account the epidemic, that is, modeling the dynamics of capital, labor resources and GDP in a pandemic. This goal is achieved by developing a model that combines an epidemiological and economic model, by specifying labor resources through the variables of compartmental models, by substituting into the formula for capital, and by modeling economic indicators with different parameter values in the Maple mathematical package.

Для моделирования пандемии Covid-19 используются эпидемиологические модели такие как SIR, SIRD, SEIRD и другие компартментные модели [1-6]. В данной работе мы использовали несколько эпидемиологических моделей чтобы учесть латентный период и численность людей, которые умерли в результате эпидемии. В статьях [3], [15] анализ математических моделей делается с помощью использования машинного обучения, таких языков программирования как Python, C++, R, с помощью математических пакетов Matlab, Maple и Mathematica. Наиболее практичным с точки зрения выкладок и математических

соотношений нами выбран пакет Maple. В данной работе рассмотрено, как динамика эпидемии в рамках SIR и SEIRD моделей влияет на экономические показатели, а именно капитал, трудовые ресурсы и ВВП. Показатель ВВП моделируем с помощью формулы Коба-Дугласа, с разными степенями α и β для капитала и трудовых ресурсов. Мы изучаем как наличие разных категорий заболевших влияет на экономику.

Базовая SIR модель задается системой дифференциальных уравнений. Трудовые ресурсы выражены через эпидемиологические параметры. Капитал описывает модель роста Солоу, с динамикой трудовых ресурсов.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}s(t) = -\frac{97s(t)i(t)}{500}, \frac{d}{dt}i(t) = \frac{97s(t)i(t)}{500} - \frac{i(t)}{10}, \\ \frac{d}{dt}K(t) = \frac{3K(t)^{1/4}L(t)^{3/4}}{10} - \frac{K(t)}{10}, \frac{d}{dt}L(t) = -\frac{97s(t)i(t)}{500} + \frac{i(t)}{100}. \end{cases}$$

Из рис. 1 видно, что если в результате эпидемии переболели и вернулись к работе только 10 % людей, то капитал сначала увеличивается мало, а далее убывает к стационарному состоянию ниже пика, но начиная от выздоровления в 20 % людей и увеличивая процент выздоровления людей, которые выживают в результате эпидемий и возвращаются на работу, можно наблюдать, что график капитала становится выше и круче, что означает увеличение стоимости ресурсов компании.

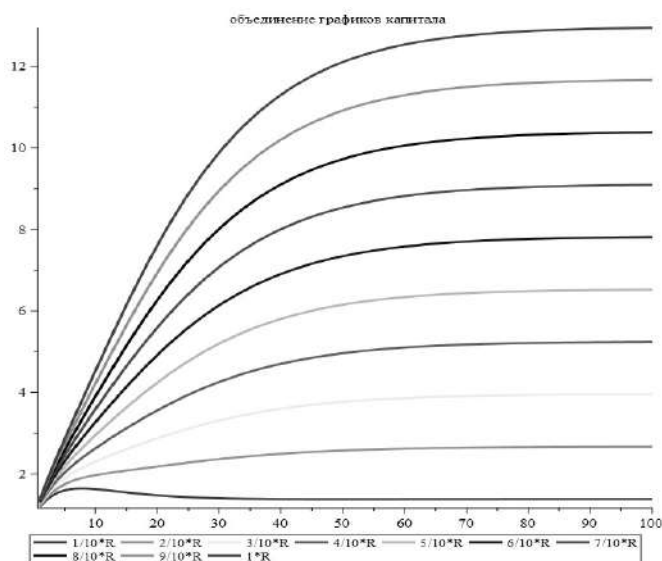


Рис. 1. Капитал при разном значении доли выздоровевших

Рис. 2 показывает: если выздоравливают только 10 % людей, то трудовые ресурсы стремительно идут к снижению, тем самым показывая, что людей, способных работать почти нет, а начиная от 15 до 30 дней, происходит почти достижение нуля, что означает, что людей, которые в состоянии работать просто нет. С увеличением выздоравливающих людей на 10 % каждый раз вплоть пока в результате эпидемии все не выздоровеют, картина трудовых ресурсов становится лучше, а именно «яма» трудовых ресурсов L становится все меньше, и

начиная с выздоровления в 50 %, происходит рост трудовых ресурсов, после прохождения ее, тем самым сокращая время, когда люди не могут работать в результате болезни.

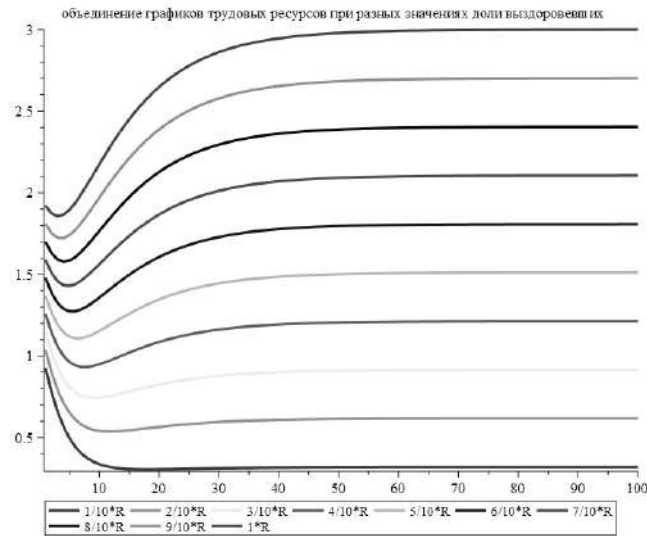


Рис. 2. Трудовые ресурсы при разном значении доли выздоровевших

На рис. 3 изображен график для ВВП с параметрами α равным $1/4$, β равным $3/4$, это означает, что на экономику больше влияет как мы задаем трудовые ресурсы. Увеличение сбережений также хорошо влияет на рост экономики в данном случае, но также можно заметить, что при маленьком значении нормы сбережения в 10 – 20 % график ВВП сначала является выпуклым вниз, а начиная с 15 дней становится выпуклым вверх, чем выше процент сбережения, тем круче, быстрее и выше растет экономика.

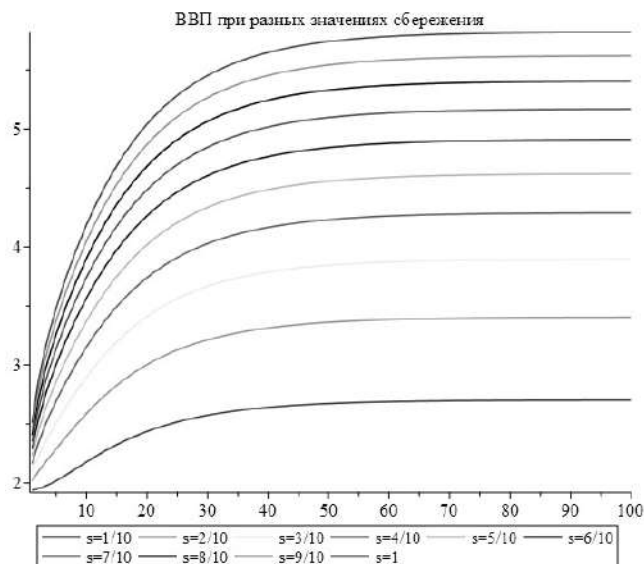


Рис. 3. ВВП для разного значения параметра сбережения

Из рис. 4 следует то, что параметр амортизации так же плохо влияет на ВВП. При значении амортизации – 10 % ВВП самое большое, потом до 40 % происходит резкие спады, но графики остаются выпуклыми вверх, начиная с 50 % и до 100 % происходит сначала спад, потом подъем, и график становится выпуклым вниз, а затем начиная с 10 дней опять становится выпуклым вверх, и стабилизация происходит начиная с 40 дней, но значение ВВП остается по прежнему очень маленькое, что плохо для экономики страны.

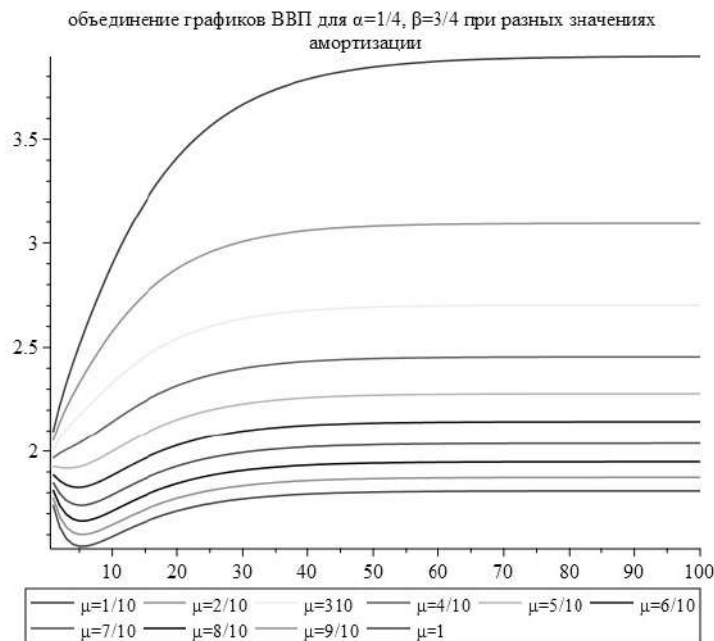


Рис. 4. ВВП для разного значения параметра амортизации

Модель SEIRD учитывает инкубационный период и разделение на выздоровевших и умерших. Данная модель задает трудовые ресурсы как здоровых, людей, которые не знают, что они заразились болезнью, выздоровевших, и так же, как и в предыдущей модели, будем учитывать, что есть часть инфицированных людей, которые в состоянии работать, находясь дома. Эта компартиментная модель интересна тем, что при определенных параметрах у нас в корне меняется экономическая ситуация. Рассмотрим, как именно у нас влияет показатели, которые мы задаем, на капитал, трудовые ресурсы и ВВП. Эпидемиологическая SEIRD модель задается системой дифференциальных уравнений. Далее запишем трудовые ресурсы, через эпидемиологические параметры. Капитал мы будем искать, используя модель Солоу, подставляя туда трудовые ресурсы, которые мы опишем ниже. И далее получим систему из пяти дифференциальных уравнений: В данную систему поставим начальные условия для эпидемиологических показателей и найдем с помощью них значение трудовых ресурсов в момент времени $t=0$, а далее все это подставим в нашу систему дифференциальных уравнений и численно найдем решение капитала, трудовых ресурсов, инфицированных, здоровых и людей, находящихся в инкубационном периоде.

Рис. 5 показывает, что чем меньше уровень смертности в данной модели, тем выше значения капитала, при увеличении уровня смертности получаем снижение уровня капитала, причем при значениях от 20 % до 50 % получаем переход от выпуклой вверх до выпуклой вниз, а далее у нас опять при увеличении уровня смертности стабилизируется и получаем только выпуклую вверх. При 70 процентах получаем интересный случай, когда ресурсы компании оказываются лучше, чем при 30 процентах.

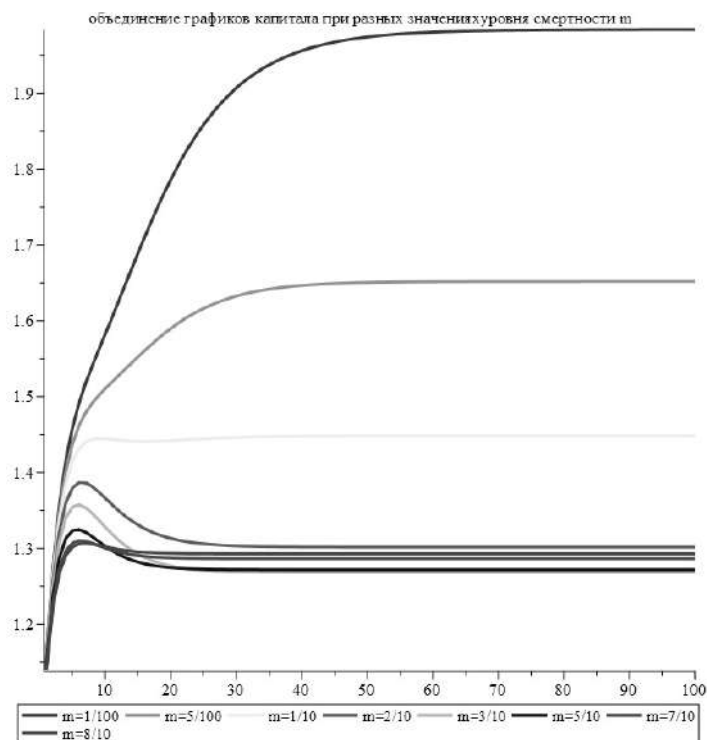


Рис. 5. Капитал для разного уровня смертности

Из рис. 6 можно сделать следующие выводы об трудовых ресурсах при разном уровне смертности: чем меньше уровень смертности в данной модели, тем выше значения трудовых ресурсов, при увеличении уровня смертности получаем снижение трудовых ресурсов, начиная от 10 %, у нас получается уменьшение L причем довольно резкое, но достигая 70 %, трудовые ресурсы превышают значение в 30 %, начиная с 10 дней. Тем самым получается, что для экономики лучше, когда либо очень мало людей погибает, либо наоборот.

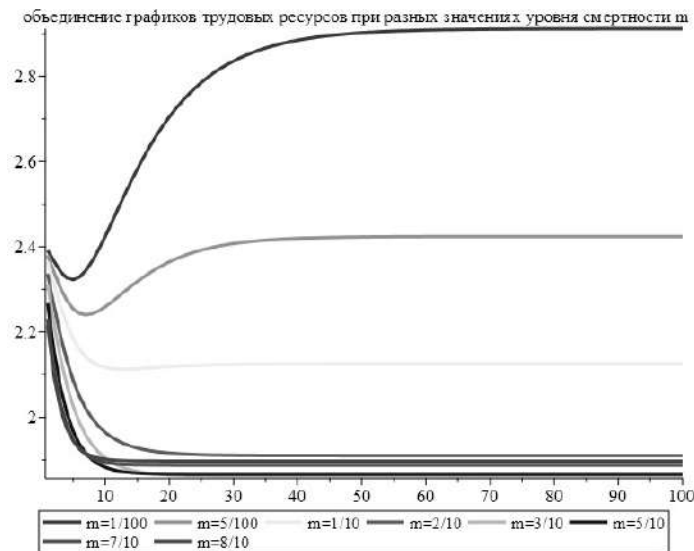


Рис. 6. Трудовые ресурсы для разного уровня смертности

Из рис. 7 можно сделать следующие выводы о ВВП, чем меньше уровень смертности в данной модели, тем выше значения ВВП, при увеличении уровня смертности получаем снижение ВВП, и начиная от 20 %, у нас получается уменьшение, причем довольно резко, но при достижении уровня смертности 70 %, можно наблюдать рост экономики, который в итоге пересекает значение ВВП при смертности в 30 %, так же можно заметить, что начиная от 70 % мы наблюдаем выпуклость вверх как и до 20 %, что показывает что у нас опять начинается рост, а не спад экономики.

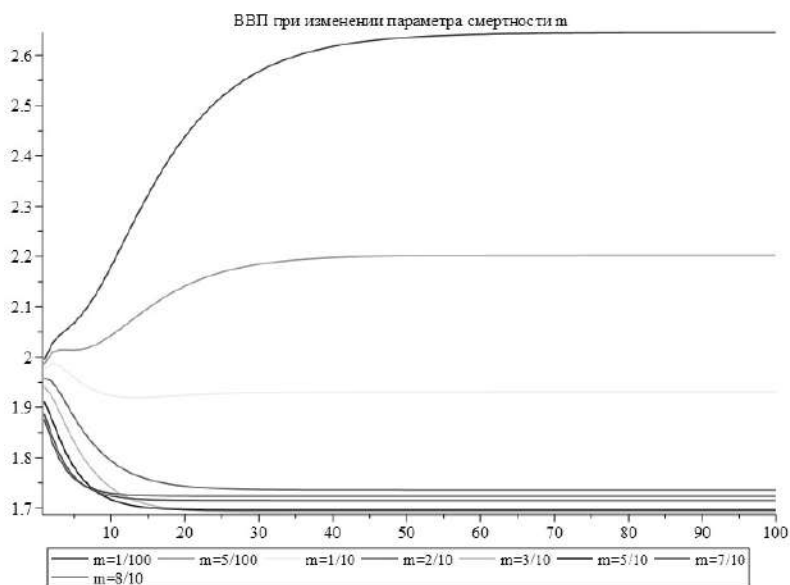


Рис. 7. ВВП для $\alpha = 0.25, \beta = 0.75$ для разного уровня смертности

Для нахождения стационарного состояния будем считать, что население постоянно $N = s(t) + e(t) + i(t) + r(t) + d(t)$, по начальным условиям N равно $31/10$.

Будем искать стационарное состояние системы, для этого применим теорию ЛОДУ к нашей объединенной модели. Для этого нам необходимо будет решить систему из 9 уравнений. Решая данную систему, приходим к следующему выводу: стационарное состояние для эпидемиологических переменных: $e(t)$ равным 0, $i(t)$ равным 0 и $d(t)$ равно 0. Стационарное состояние для трудовых ресурсов будет являться суммой здоровых и выздоровевших людей. Стационарное значение капитала так же можно найти, подставив в формулу стационарные трудовые ресурсы. Получены расчеты стационарных состояний и переходной динамики. В будущем можно продолжить исследовать устойчивость системы вокруг стационарного состояния с применением теории ОДУ [12-13].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kermack W. O., McKendrick A. G.* A Contribution to the mathematical theory of epidemics // Proceedings of the Royal Society. 1927. № 115. P. 700-721.
2. *Ross R., Hamer W.* The SIR model and the Foundations of Public Health // MATerials MATemàtics Volum. 2013. № 3. 17 pp.
3. *Веселов Д. А.* «Модели рыночной экономики: модель Солоу и модель кругооборота. Роль государства в экономике». 2014.
4. *Li J., Blakeley D., Smith R. J.* The failure of R_0 // Computational and Mathematical Methods in Medicine. 2011. doi:10.1155/2011/527610.
5. *Piccolomini E. L., Zama F.* Preliminary analysis of COVID-19 spread in Italy with an adaptive SEIRD model // arXiv preprint arXiv: 2003. 09909. 2020.
6. *Canto F. J. A., Avila-Vales E. J.* Fitting parameters of SEIR and SIRD models of COVID-19 pandemic in Mexico // Preprint. 2020. С. 1-11.
7. *Schlickeiser R., Kröger M.* Analytical Modeling of the Temporal Evolution of Epidemics Outbreaks Accounting for Vaccinations. 2021.
8. Определение трудовых ресурсов Росстат. [Электронный ресурс]. URL: https://gks.ru/bgd/free/B99_10/IssWWW.exe/Stg/d030/i030130r.htm (дата обращения: 25.11.2021).
9. Определение ВВП Росстат. [Электронный ресурс]. URL: https://gks.ru/free_doc/new_site/vvp/metod.htm (дата обращения: 25.11.2021).
10. *Шагас Н. Л., Туманова Е. А.* / Учебник. Макроэкономика – 2. 2006. 427 с.
11. *Ашманов С. А.* Введение в математическую экономику. М. : Наука, 1984. Т. 296.
12. *Филиппов А. Ф.* «Сборник задач по дифференциальным уравнениям». 2000. 176 с.
13. Качественное исследование динамических систем. [Электронный ресурс]. URL: <https://math-it.petrstu.ru> (дата обращения: 25.11.2021).
14. *Криворотько О. И., Кабанихин С. И., Зятьков Н. Ю., Приходько А. Ю., Прохошин Н. М., Шишленин М. А.* Математическое моделирование и прогнозирование COVID-19 в Москве и Новосибирской области // Сиб. журн. вычисл. Матем. 2020. С. 395-414.
15. *Samuel M. Jenness, Steven M. Goodreau Martina Morris* EpiModel: An R package for mathematical modeling of infectious disease over networks // J. of Statistical Software. 2018. Vol. 84. № 8.
16. *Hussein K., Thirlwall A. P.* The AK model of “New” growth theory is the Harrod-Domar growth equation: Investment and growth revisited // Journal of Post Keynesian Economics. 2000. Т. 22. №. 3. С. 427-435.