Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
Зональная научная библиотека имени В. А. Артисевич
Отдел научной информации

Карл Фридрих Гаусс

как основоположник теории хаотических динамических систем

К 245-летию со дня рождения

Виртуальная выставка

Саратов
2022

БИО-
БИБЛИО-
ГРАФИЯ

Иога́нн Карл Фри́дрих Га́усс (нем. *Johann Carl Friedrich Gauß*; **30 апреля 1777**, ***Брауншвейг*** – **23 февраля 1855**, ***Гёттинген***) – немецкий математик, механик, физик, астроном и геодезист. Считается одним из величайших математиков всех времён, «королём математиков». Лауреат медали Копли (**1838**), член Лондонского королевского общества (**1804**), иностранный член Парижской (**1820**) и Шведской (**1821**) академий наук, иностранный член-корреспондент (**1802**) и иностранный почётный член (**1824**) Петербургской академии наук.

Дед Гаусса был бедным крестьянином; отец, *Гебхард Дитрих Гаусс*, – садовником, каменщиком, смотрителем каналов; мать, *Доротея Бенц*, – дочерью каменщика. Будучи неграмотной, мать не записала дату рождения сына, запомнив только, что он родился в среду, за восемь дней до праздника Вознесения, который отмечается спустя **40** дней после Пасхи. В **1799** году Гаусс вычислил точную дату своего рождения, разработав метод определения даты Пасхи на любой год.

С именем Гаусса связаны фундаментальные исследования почти во всех основных областях математики: в алгебре, теории чисел, дифференциальной и неевклидовой геометрии, математическом анализе, теории функций комплексного переменного, теории вероятностей, а также в аналитической и небесной механике, астрономии, физике и геодезии. В каждой области глубина проникновения в материал, смелость мысли и значительность результата были поражающими.

С **1795** по **1798** год Гаусс учился в Гёттингенском университете. Это – наиболее плодотворный период в жизни Гаусса. С **1796** года Гаусс ведёт краткий дневник своих открытий (***см. слайд 17***). Многое он, подобно Ньютону, не публиковал, хотя это были результаты исключительной важности.

1798 год: закончен шедевр «***Арифметические исследования***» (лат. ***Disquisitiones Arithmeticae***). Впервые «***Арифметические исследования***» были изданы на немецком языке в **1801** году. Французское издание «Арифметических исследований» вышло уже в **1807** году (***см. слайд 5, 16***).

С **1799** года Гаусс – приват-доцент Брауншвейгского университета. В **1801** году избирается членом-корреспондентом Петербургской Академии наук.

После **1801** года Гаусс, не порывая с теорией чисел, расширил круг своих интересов, включив в него и естественные науки, в первую очередь астрономию (***см. слайд 8***).

1806 год: по рекомендации Александра фон Гумбольдта Гаусса назначают профессором в Гёттингене и директором Гёттингенской обсерватории. Эту должность он занимал до самой смерти.

1809 год: новый шедевр, «***Теория движения небесных тел***». Изложена каноническая теория учёта возмущений орбит (***см. слайд 5***).

1812 год: исследование гипергеометрического ряда, обобщающего разложение практически всех известных тогда функций (***см. слайд 16***).

1815 год: публикует первое строгое доказательство основной теоремы алгебры.

1820 год: Гауссу поручают произвести геодезическую съёмку Ганновера. Для этого он разработал соответствующие вычислительные методы (в том числе методику практического применения своего метода наименьших квадратов), приведшие к созданию нового научного направления — высшей геодезии, и организовал съёмку местности и составление карт (***см. слайд 6, 7***).

1821 год: в связи с работами по геодезии Гаусс начинает исторический цикл работ по теории поверхностей. В науку входит понятие «гауссовой кривизны». Положено начало дифференциальной геометрии. Итогом изысканий Гаусса была работа «***Исследования относительно кривых поверхностей***» (**1822**) (***см. слайд 9***).

1824 год: избирается иностранным почётным членом Петербургской Академии наук.

1839 год: **62**-летний Гаусс овладевает русским языком и в письмах в Петербургскую Академию просит прислать ему русские журналы и книги. Предполагают, что это связано с интересом Гаусса к работам Лобачевского, который в **1842** году по рекомендации Гаусса был избран иностранным членом-корреспондентом Гёттингенского королевского общества.

1840 год: в работе «Диоптрические исследования» Гаусс разработал теорию построения изображений в сложных оптических системах (***см. слайд 8***).

После смерти Гаусса в **1855** году король Ганновера *Георг V* приказал отчеканить медаль, на которой были выгравированы портрет Гаусса и почётный титул «***Mathematicorum Princeps***» – «король математиков».

Несколько студентов, учеников Гаусса, стали выдающимися математиками, например: *Риман*, *Дедекинд*, *Бессель*, *Мёбиус*.

На то, чтобы собрать и отредактировать труды Гаусса, потребовалось несколько десятилетий. В процессе этой работы обнаруживался новый материал, менялись редакторы и их установки. Первоначальный план – расположить материал по темам – никогда не отменялся, но осуществить его полностью оказалось невозможным. Этот план удалось осуществить для первых шести томов: первые два тома посвящены теории чисел, третий анализу и т.д. Тома **VII** – **XII** содержат дополнительный материал. С самого начала было ясно, что в этом издании нельзя ограничиваться тем, что опубликовал сам Гаусс, и уже в томе **II** есть рукописи из архива Гаусса; однако критерии того, что следует включить в издание, постепенно расширялись от тома к тому.

Подзаголовки томов:

Том I. «***Арифметические исследования***» (Disquisitiones Arithmeticae).

Том II. Высшая арифметика (Höhere Arithmetik).

Том III. Анализ (Analysis).

Том IV. Исчисление вероятностей и геометрия (Wahrscheinlichkeitsrechnung und Geometrie).

Том V. Математическая физика (Mathematische Physik).

Том VI. Астрономические работы и статьи (Astronomische Abhandlungen und Aufsätze).

Том VII. Теоретическая астрономия (Theoretische Astronomie).

Том VIII. Арифметика, анализ, исчисление вероятностей, астрономия (Arithmetik, Analysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Astronomie).

Том IX. Геодезия (Geodäsie).

Том X, 1. Арифметика, алгебра, анализ, геометрия, дневник (Arithmetik, Algebra, Analysis, Geometrie, Tagebuch).

Том X, 2. Очерки о научной деятельности Гаусса в области чистой математики и механики (Abhandlungen über Gauss'wissenschaftliche Tätigkeit auf den Gebieten der reiner Mathematik und Mechanik).

Том XI, 1. Дополнительные статьи по физике, хронологии и астрономии (Nachträge zur Physik, Chronologie und Astronomie).

Том XI, 2. Очерки о научной деятельности Гаусса в области геодезии, физики и астрономии (Abhandlungen über Gauss'wissenschaftliche Tätigkeit auf den Gebieten der Geodäsie, Physik und Astronomie).

Том XII. Разное. Атлас земного магнетизма (Varia. Atlas des Erdmagnetismus).

В нашей библиотеке имеются тома **IX**–**XI**.

Практически все первоисточники собраны и легко доступны в «***Нижне-саксонской государственной и университетской библиотеке***» (***Neidersächsische Staats- und Universität-bibliothek***) в Гёттингене... Некоторые второстепенные материалы находятся в других местах – в музее Брауншвейга, в архивах Санкт-Петербургской академии наук и, возможно, в Берлине, но, в общем, они представляют лишь сентиментальный или антикварный интерес и нужны лишь тем, кого интересуют определенные специфические детали.

Все основные свои статьи Гаусс публиковал по-латыни. Уже в его время это было несколько старомодно, а для большинства современных математиков это делает их недоступными. Полезны резюме на немецком языке, которыми Гаусс снабдил многие из своих коротких статей... В течение девятнадцатого века большинство крупных статей было переведено на немецкий, а некоторые – и на английский и французский (и другие языки).

Гаусс чрезвычайно строго относился к своим печатным трудам и никогда не публиковал даже выдающиеся результаты, если считал свою работу над этой темой незавершённой. На его личной печати было изображено дерево с несколькими плодами, под девизом: «***Pauca sed matura***» (немного, но зрело). Изучение архива Гаусса показало, что он медлил с публикацией ряда своих открытий, и в результате его опередили другие математики.

(Материал из Википедии)

КАРЛ ФРИДРИХ ГАУСС

ТРУДЫ ПО ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

473566
Гаусс, К. Ф. Труды по теории чисел / К. Ф. Гаусс ; общая редакция И. М. Виноградова ; комментарии Б. Н. Делоне ; перевод А. Н. Крылова. – Москва : Издательство Академии Наук СССР, 1959. – 343 с. : таб., карты, 11 рис., 1 портр. – Библиогр. с. 334-336 (20 назв.) + в комментариях и сносках. – Текст : непосредственный.

ЧЛЕНА-КОРР. АН СССР Б. Н. ДЕЛОНЕ

ПЕРЕВОД
КАНД. ФИЗ.-МАТЕМ. НАУК
В. Б. ДЕМЬЯНОВА

$$\boxed{a \equiv b \pmod{m}}$$

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА · 1959

ТЕОРІЯ

ДВИЖЕНІЯ НЕБЕСНЫХЪ ТѢЛЪ,

ОБРАЩАЮЩИХСЯ

ВОКРУГЪ СОЛНЦА ПО КОНИЧЕСКИМЪ СѢЧЕНІЯМЪ.

сочиненіе

Карла Фридриха Гаусса.

Перевелъ съ Латинскаго

Студентъ Императорскаго Московскаго Университета

Догель.

226916
Гаусс, К. Ф. Теория движения небесных тел, обращающихся вокруг Солнца по коническим сечениям = Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium / К. Ф. Гаусс ; перевод с латинского Догеля. – Москва : Типография Бахметева, 1861. – 293 + 21 с. : таб., 3 рис. – Текст : непосредственный.

МОСКВА.
Въ Типографіи Бахметева.
1861.

К. Ф. ГАУСС

ИЗБРАННЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ СОЧИНЕНИЯ

Под общей редакцией С. Г. Судакова

ИЗДАТЕЛЬСТВО ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
• МОСКВА • 1957 •

К. Ф. ГАУСС

ТОМ I

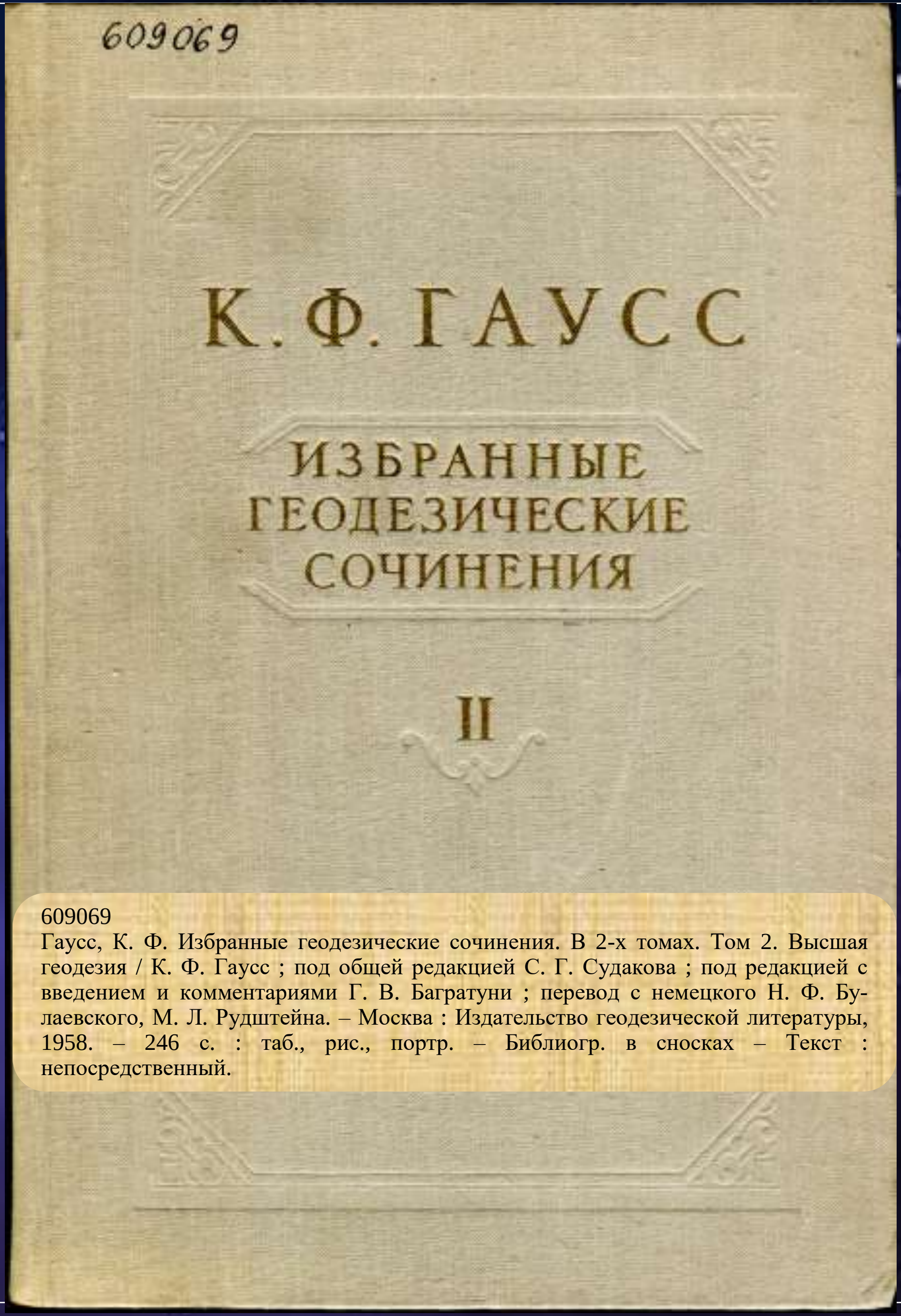
СПОСОБ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Под редакцией, с введением Г. В. Багратуни

ПЕРЕВОД С ЛАТИНСКОГО И НЕМЕЦКОГО Н. Ф. БУЛАЕВСКОГО

Гаусс, К. Ф. Избранные геодезические сочинения. В 2-х томах. Том 1. Способ наименьших квадратов / К. Ф. Гаусс ; под общей редакцией С. Г. Судакова ; под редакцией с введением Г. В. Багратуни ; перевод с латинского и немецкого Н. Ф. Булаевского. – Москва : Издательство геодезической литературы, 1957. – 153 с. : таб., 1 портр. – Библиогр. в сносках – Текст : непосредственный.

ИЗДАТЕЛЬСТВО ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
• МОСКВА • 1957 •



609069
Гаусс, К. Ф. Избранные геодезические сочинения. В 2-х томах. Том 2. Высшая геодезия / К. Ф. Гаусс ; под общей редакцией С. Г. Судакова ; под редакцией с введением и комментариями Г. В. Багратуни ; перевод с немецкого Н. Ф. Булаевского, М. Л. Рудштейна. – Москва : Издательство геодезической литературы, 1958. – 246 с. : таб., рис., портр. – Библиогр. в сносках – Текст : непосредственный.


К. Ф. ГАУСС

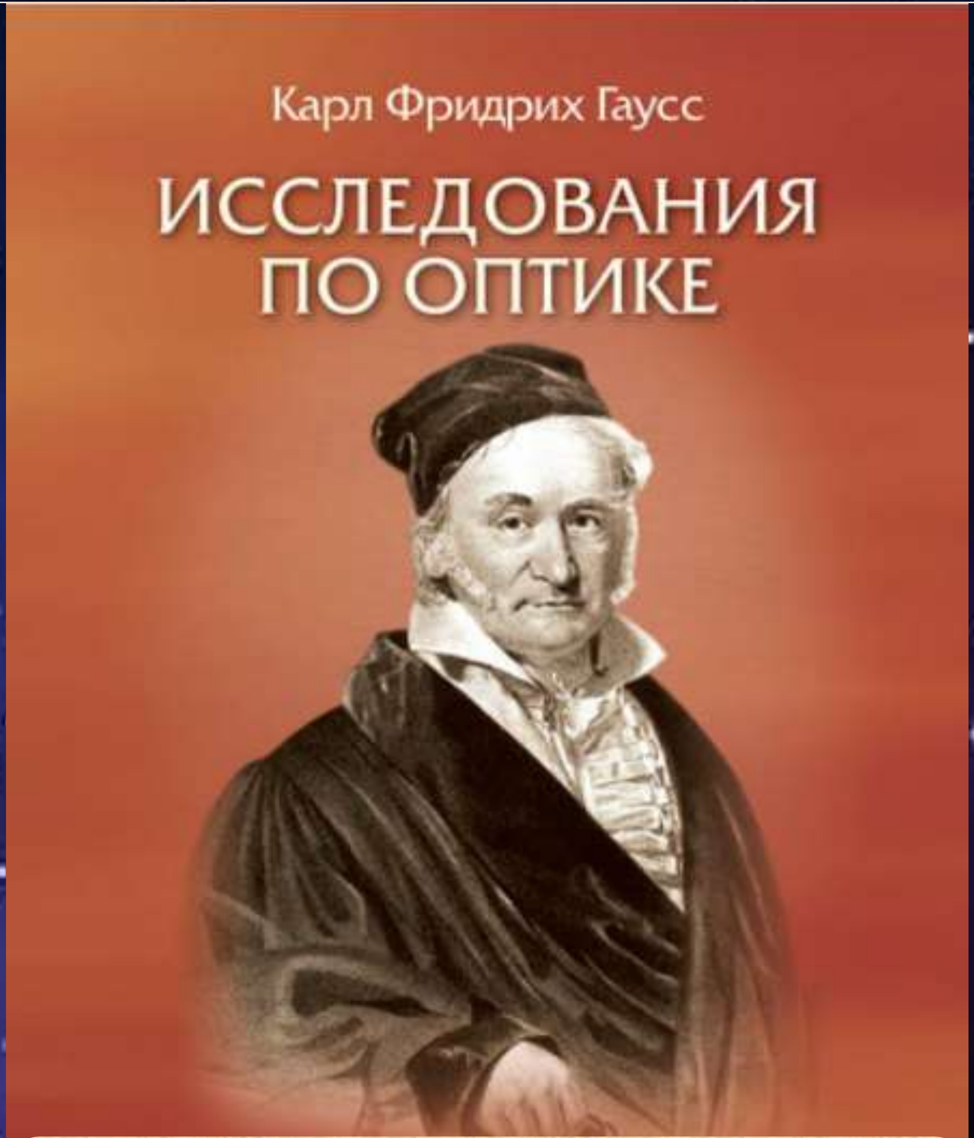
ТОМ
II

ВЫСШАЯ
ГЕОДЕЗИЯ

Под редакцией с введением
и комментариями
Г. В. Багратуни

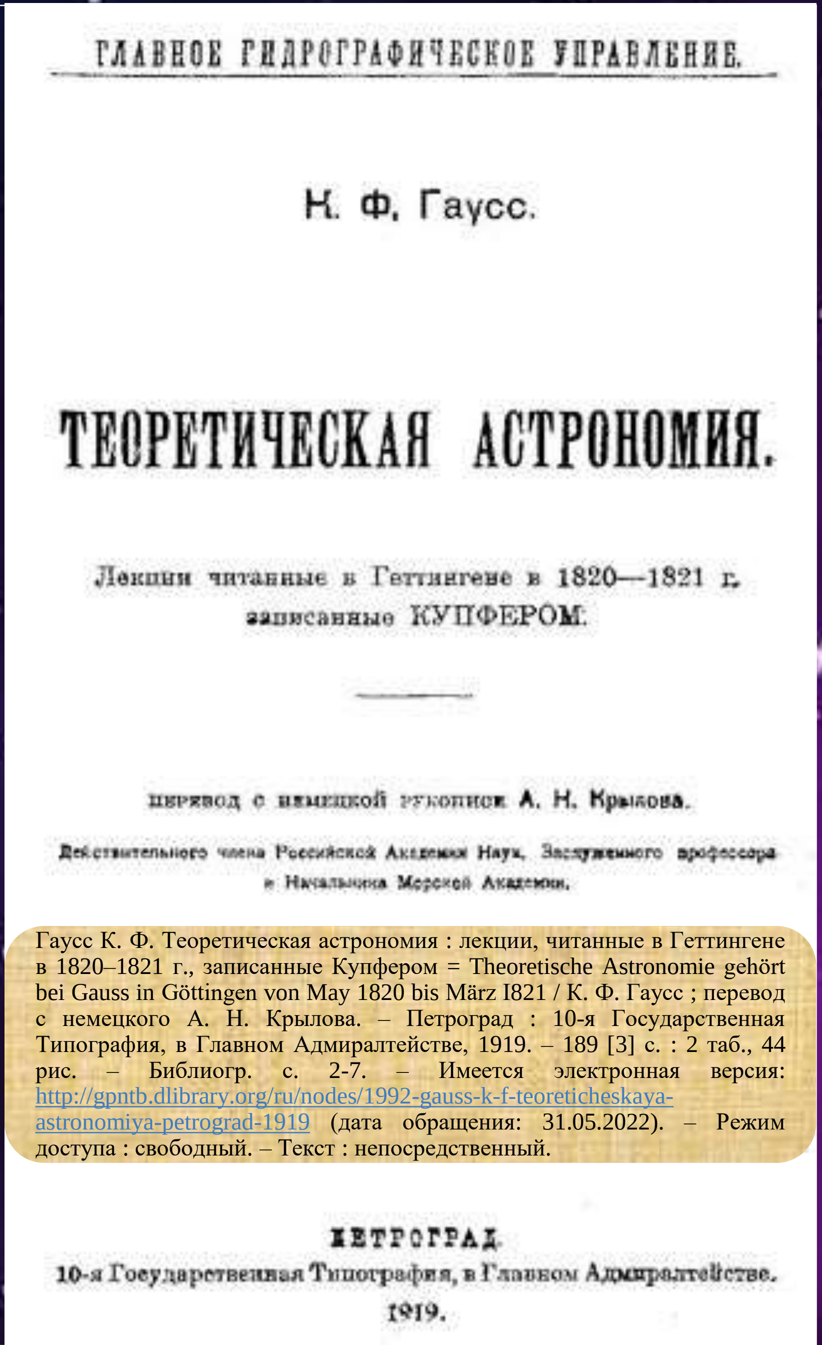
ПЕРЕВОД С НЕМЕЦКОГО
Н. Ф. БУЛАЕВСКОГО,
М. Л. РУДШТЕЙНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
• МОСКВА • 1958 •



Гаусс, К. Ф. Исследования по оптике = Dioptrische Untersuchungen / К. Ф. Гаусс ; перевод с немецкого Р. Е. Ильинского, с комментариями и дополнением. – Москва : Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2019. – 128 с. : 37 рис. – Библиогр. с. 83-88 (65 назв.), с. 126-127 (19 назв.). – ISBN 978-5-4544-0639-0. – Имеется электронная версия: https://rusneb.ru/catalog/000199_000009_07000490499 (дата обращения: 16.05.2022). – Режим доступа : для зарегистрированных пользователей (регистрация свободная, через ЕСИА (ГосУслуги)). – Текст : непосредственный.

8



ГЛАВНОЕ ГИДРОГРАФИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ.

К. Ф. Гаусс.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ АСТРОНОМИЯ.

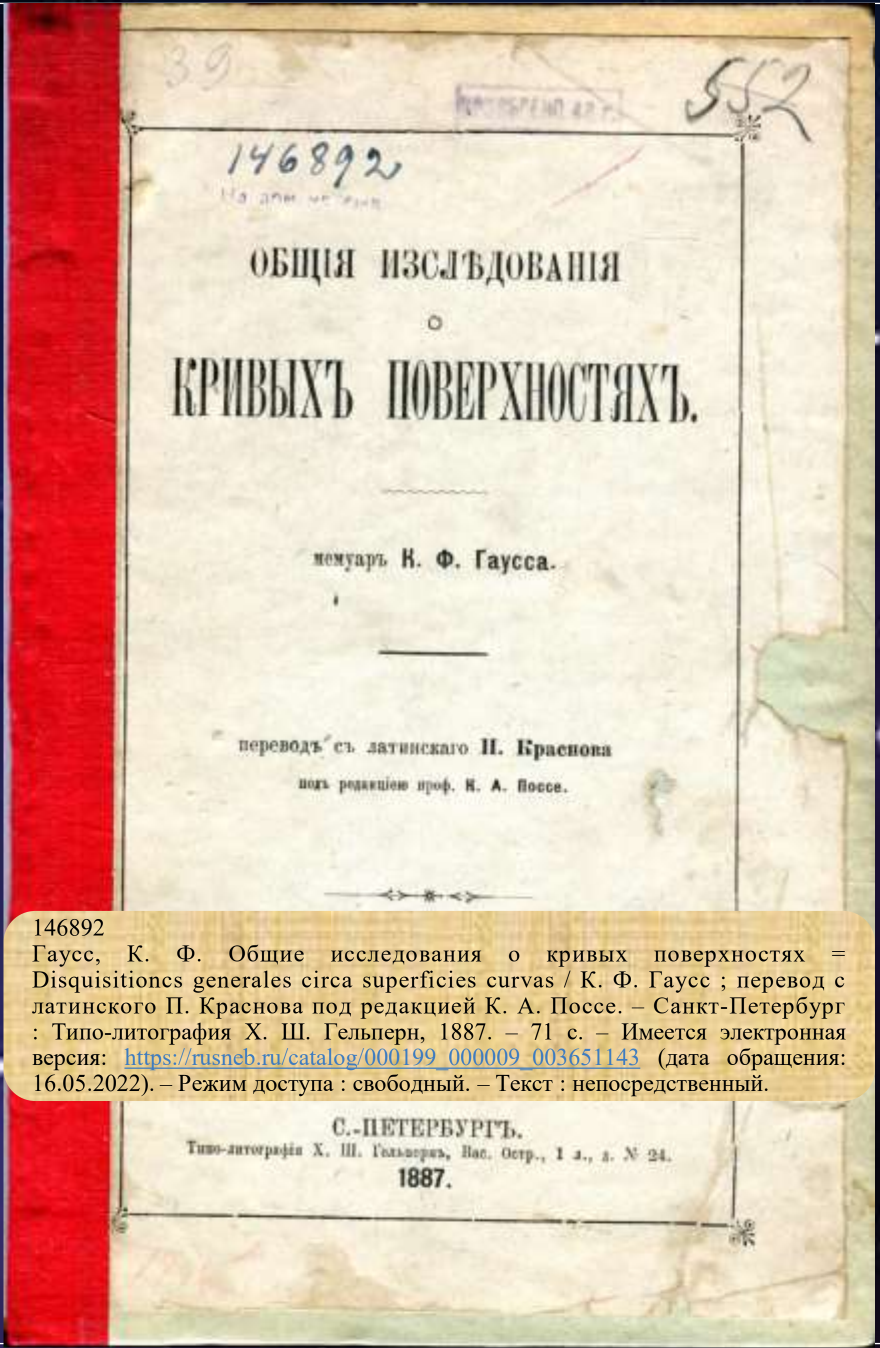
Лекции читанные в Геттингене в 1820—1821 г. записанные КУПФЕРОМ.

перевод с немецкой рукописи А. Н. Крылова.

Действительного члена Российской Академии Наук, Заслуженного профессора и Начальника Морской Академии.

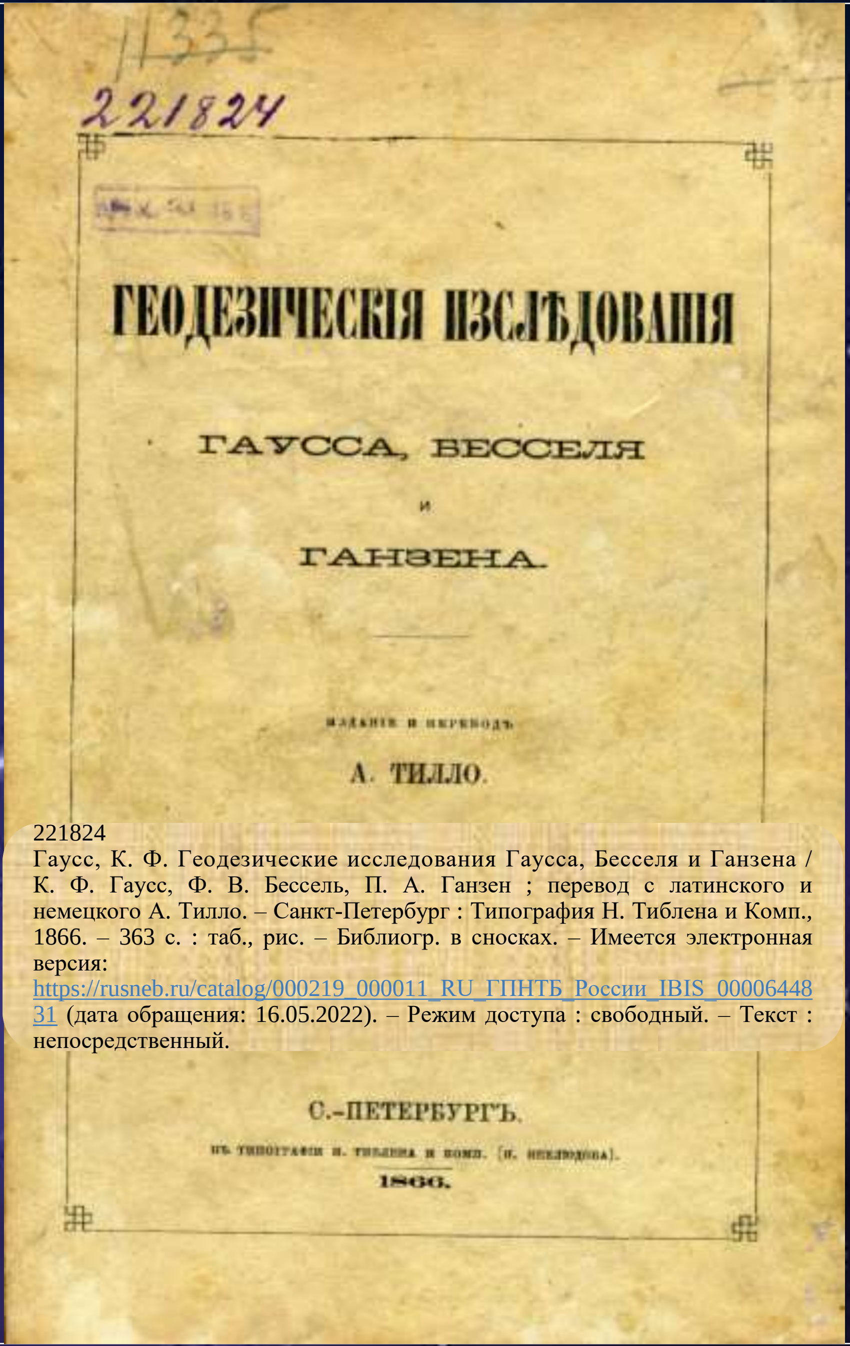
ПЕТРОГРАД.
10-я Государственная Типография, в Главном Адмиралтействе.
1919.

Гаусс К. Ф. Теоретическая астрономия : лекции, читанные в Геттингене в 1820–1821 г., записанные Купфером = Theoretische Astronomie gehört bei Gauss in Göttingen von May 1820 bis März I821 / К. Ф. Гаусс ; перевод с немецкого А. Н. Крылова. – Петроград : 10-я Государственная Типография, в Главном Адмиралтействе, 1919. – 189 [3] с. : 2 таб., 44 рис. – Библиогр. с. 2-7. – Имеется электронная версия: http://gpntb.dlibrary.org/ru/nodes/1992-gauss-k-f-teoreticheskaya-astronomiya-petrograd-1919 (дата обращения: 31.05.2022). – Режим доступа : свободный. – Текст : непосредственный.



146892
Гаусс, К. Ф. Общие исследования о кривых поверхностях = Disquisitioncs generales circa superficies curvas / К. Ф. Гаусс ; перевод с латинского П. Краснова под редакцией К. А. Поссе. – Санкт-Петербург : Типо-литография Х. Ш. Гельперн, 1887. – 71 с. – Имеется электронная версия: https://rusneb.ru/catalog/000199_000009_003651143 (дата обращения: 16.05.2022). – Режим доступа : свободный. – Текст : непосредственный.

226912
Об основаниях геометрии : издано Физико-математическим обществом к столетнему юбилею Н. И. Лобачевского / К. Ф. Гаусс, Е. Бельтрами, Б. Риман [и др.]. – 2-е издание. – Казань : Типо-литография Императорского Университета, 1895. – 123 (+ LVIII) с. : 1 рис. – Библиогр. в сносках. – Имеется электронная версия 1-го издания: https://repo.kpfu.ru/jspui/handle/net/311 (дата обращения: 31.05.2022). – Режим доступа : свободный. – Текст : непосредственный.


221824

ГЕОДЕЗИЧЕСКІЯ ИЗСЛѢДОВАНІЯ

ГАУССА, БЕССЕЛЯ

и

ГАНЗЕНА

изданіе и переводъ

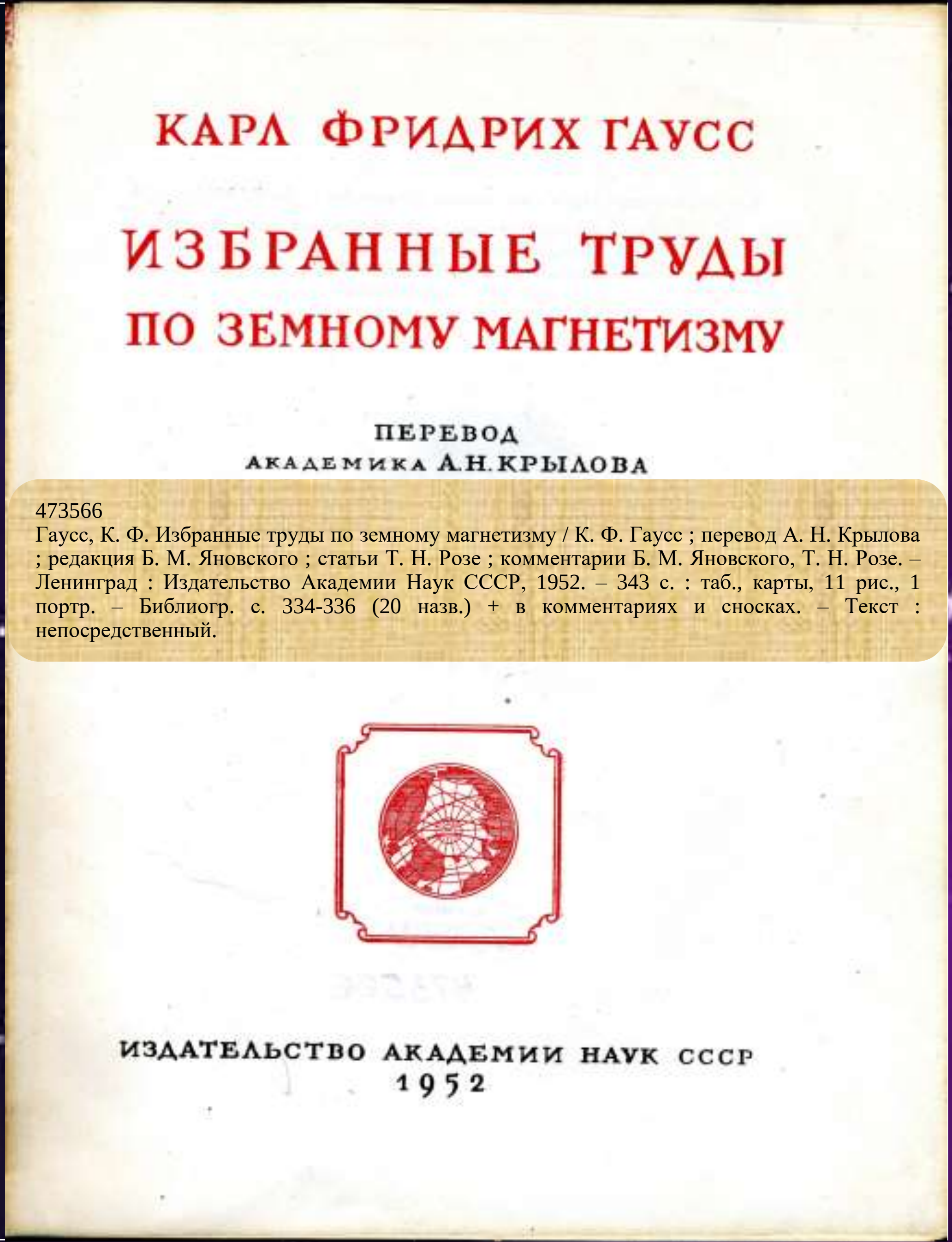
А. ТИЛЛО.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

въ типографіи Н. Тиблена и комп. (Н. Неклюдова).

1866.

221824
Гаусс, К. Ф. Геодезические исследования Гаусса, Бесселя и Ганзена / К. Ф. Гаусс, Ф. В. Бессель, П. А. Ганзен ; перевод с латинского и немецкого А. Тилло. – Санкт-Петербург : Типография Н. Тиблена и Комп., 1866. – 363 с. : таб., рис. – Библиогр. в сносках. – Имеется электронная версия: https://rusneb.ru/catalog/000219_000011_RU_ГПНТБ_России_IBIS_0000644831 (дата обращения: 16.05.2022). – Режим доступа : свободный. – Текст : непосредственный.


КАРЛ ФРИДРИХ ГАУСС

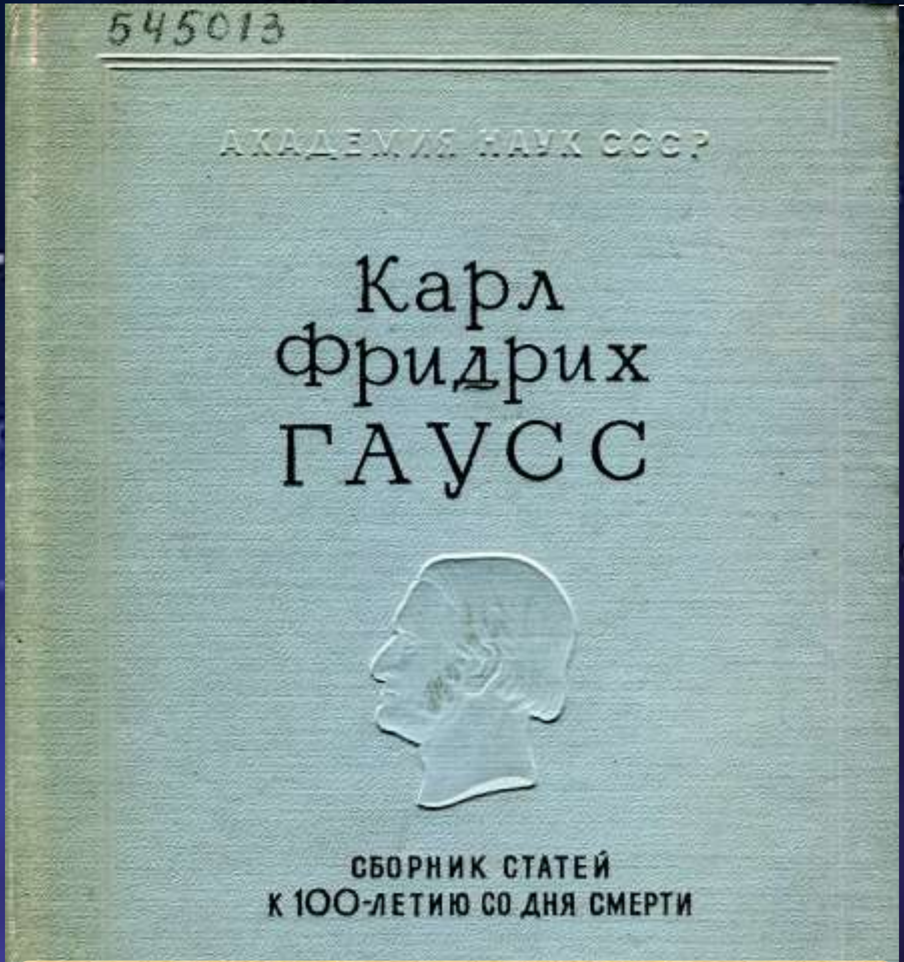
ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ ПО ЗЕМНОМУ МАГНЕТИЗМУ

ПЕРЕВОД АКАДЕМИКА А. Н. КРЫЛОВА

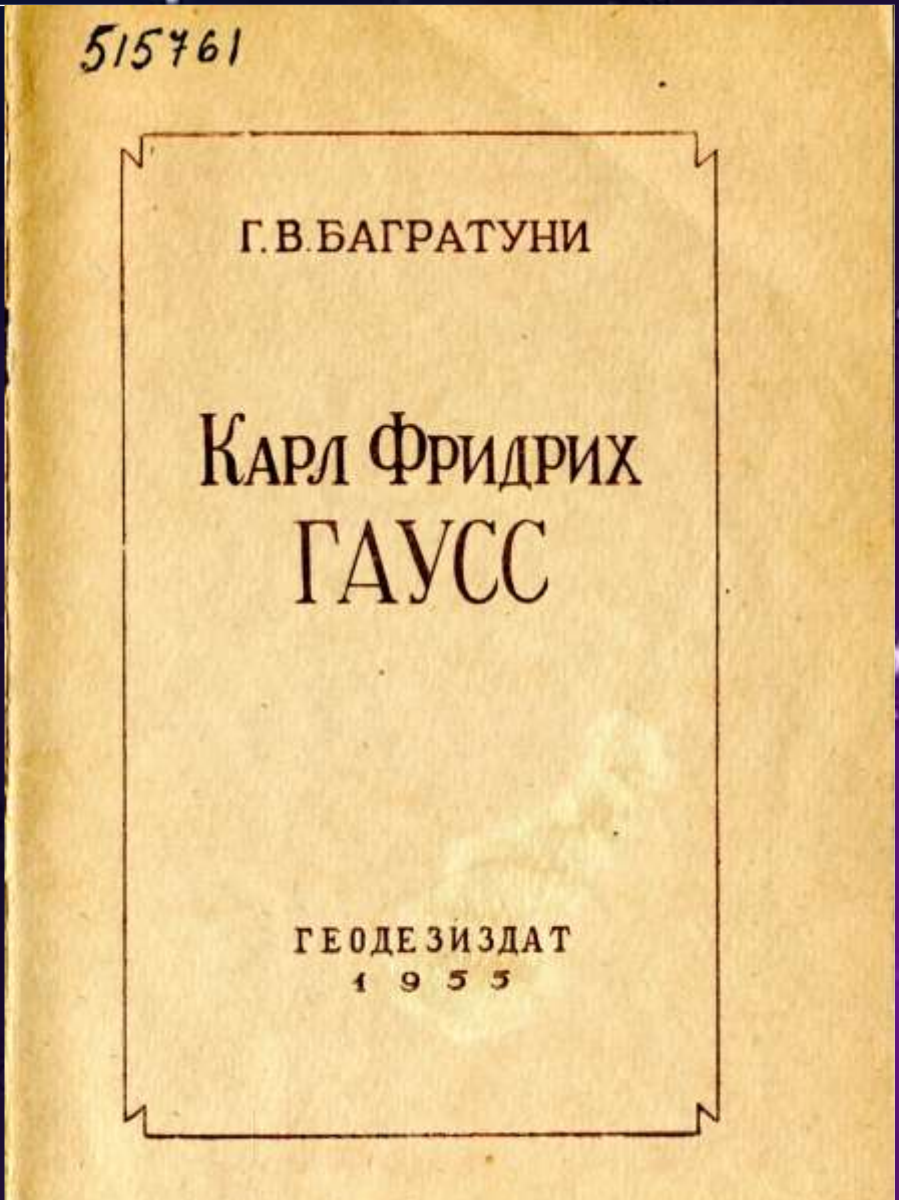
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

1952

473566
Гаусс, К. Ф. Избранные труды по земному магнетизму / К. Ф. Гаусс ; перевод А. Н. Крылова ; редакция Б. М. Яновского ; статьи Т. Н. Розе ; комментарии Б. М. Яновского, Т. Н. Розе. – Ленинград : Издательство Академии Наук СССР, 1952. – 343 с. : таб., карты, 11 рис., 1 портр. – Библиогр. с. 334-336 (20 назв.) + в комментариях и сносках. – Текст : непосредственный.



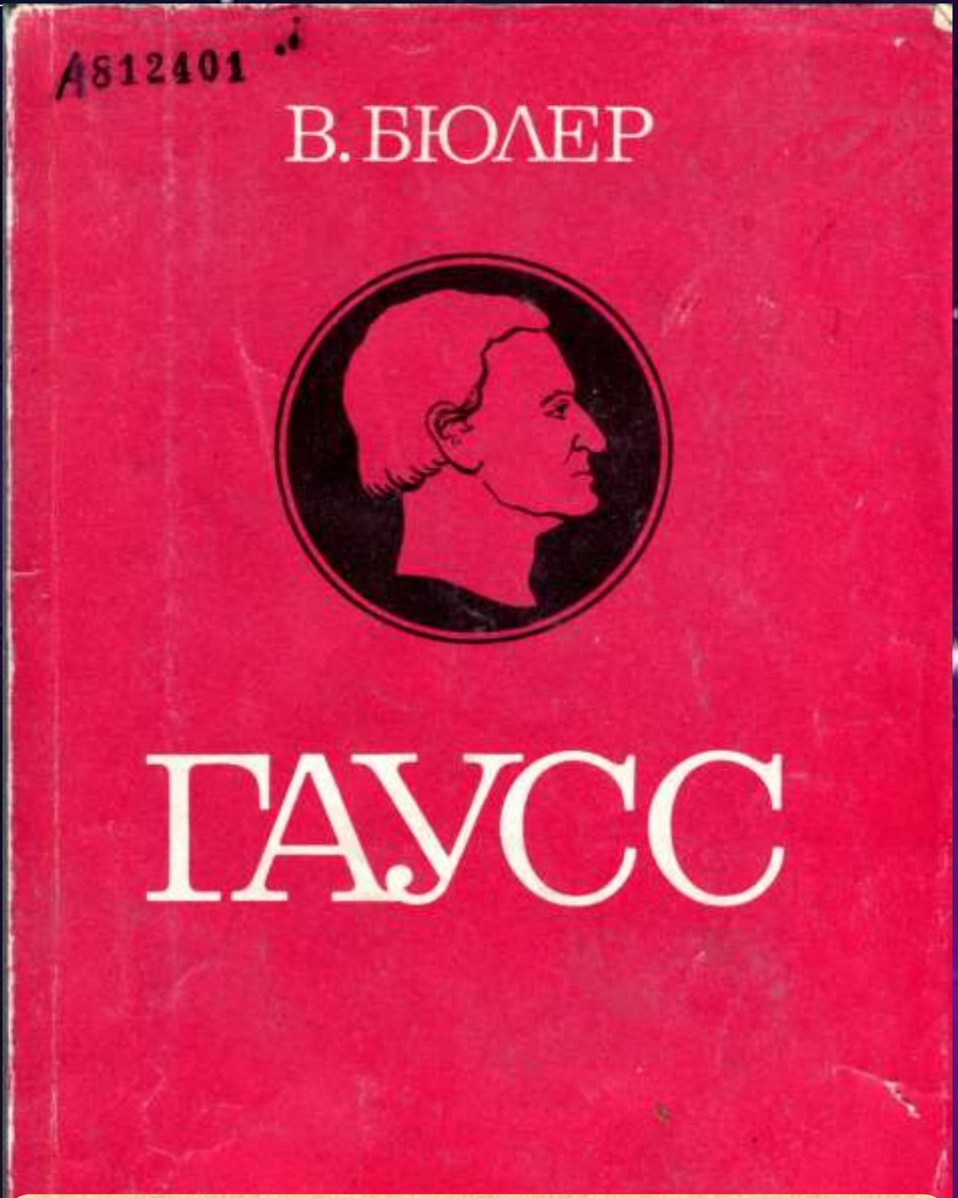
Карл Фридрих Гаусс : сборник статей (к 100-летию со дня смерти) / под общей редакцией И. М. Виноградова. – Москва : Издательство Академии наук СССР, 1956. – 312 с. : таб., рис., 3 фото, 3 портр. – Библиогр. в сносках. – Текст : непосредственный.



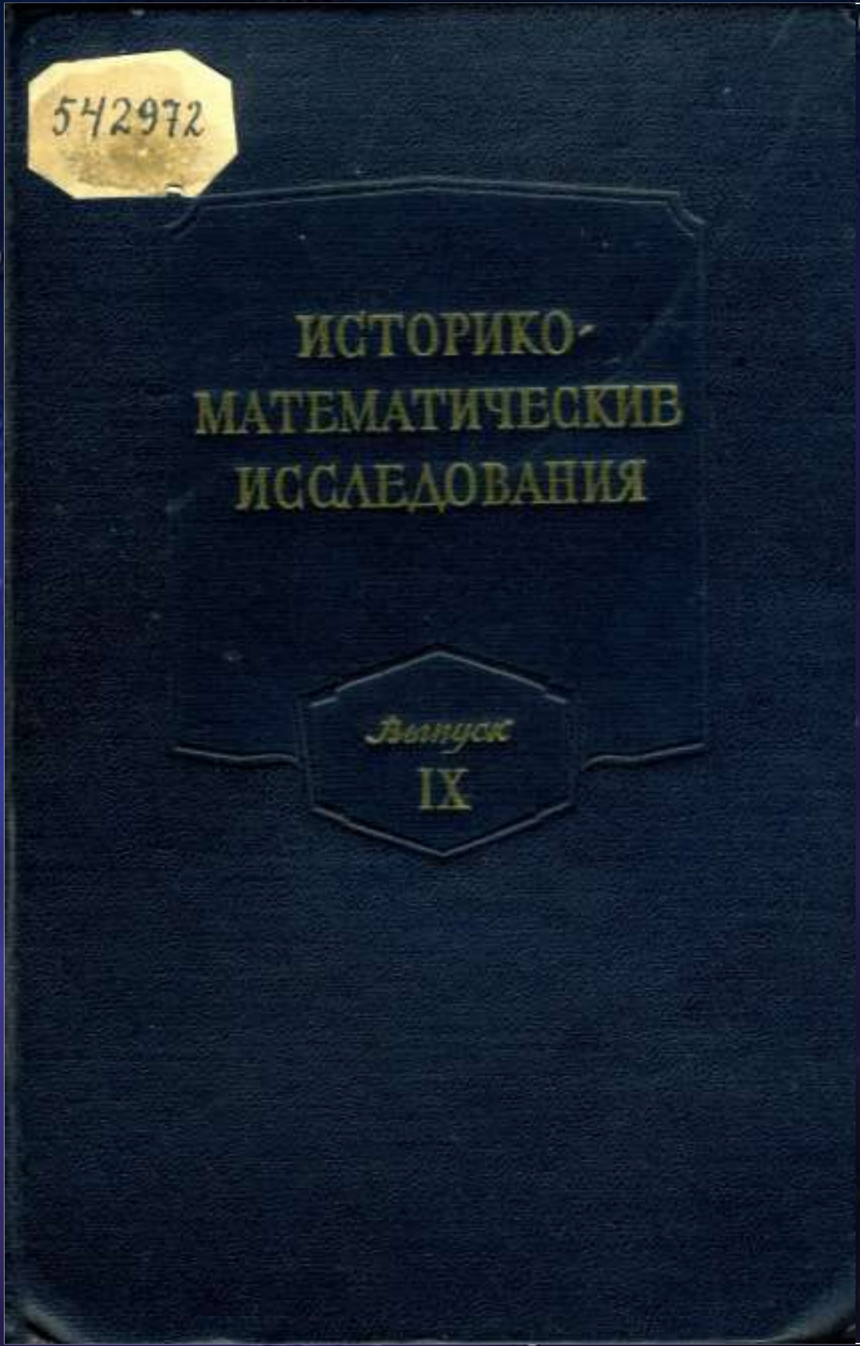
515761
Багратуни, Г. В. Карл Фридрих Гаусс. Краткий очерк геодезических исследований / Г. В. Багратуни. – Москва : Издательство Геодезической Литературы, 1955. – 44 с. : 1 портр., 1 фото. – Библиогр. с. 43 (6 назв.) + в сносках. – Текст : непосредственный.

145411
Бобынин, В. В. Карл Фридрих Гаусс. Очерк его жизни и деятельности с приложением списка сочинений / В. В. Бобынин (составил). – Москва : Типография А. И. Мамонтова и К°, 1889. – 92 с. – Библиогр. с. 76-92 (123 назв.). – (Биографии знаменитых математиков / редакция журнала «Физико-Математические Науки в их настоящем и прошедшем», вып. 5). – Текст : непосредственный.

12



A812401
Бюлер, В. К. Гаусс. Биографическое исследование = Gauss. A biographical study / В. К. Бюлер ; перевод с английского А. Л. Тоома под редакцией С. Г. Гиндикина. – Москва : Наука, 1989. – 208 с. : 3 портр., 5 рис. – Библиогр. с. 201-204. – ISBN 5-02-013919-X. – Текст : непосредственный.



Норден, Л. И. Гаусс и Лобачевский / Л. И. Норден. – Текст : непосредственный // Историко-математические исследования : сборник / Академия Наук СССР. Институт истории естествознания и техники. – Москва : Наука, 1955. – Выпуск 9. – С. 145-168 : 6 рис. – Библиогр. в сносках.

13

ГАУСС И ЛОБАЧЕВСКИЙ [1]

А. П. Норден

Проблема обоснования геометрии Евклида привлекала внимание Гаусса с 1792 г.[2])—года рождения Лобачевского. Однако первым сохранившимся документом, свидетельствующим о результатах его размышлений по теории параллельных, является следующее место из письма от 16 декабря 1799 г. к Фаркашу Больаи:

«Я лично далеко продвинулся в моих работах (хотя другие совершенно не связанные с этим занятия оставляют мне для этого и мало времени); однако дорога, которую я выбрал, ведет скорее не к желательной цели, а к тому, чтобы сделать сомнительной истинность геометрии. Правда, я достиг многого, что для большинства могло бы сойти за доказательство, но все это не доказывает в моих глазах ровно *ничего*; например, если бы кто-либо мог доказать, что возможен такой прямолинейный треугольник, площадь которого больше любой наперед заданной, то я был бы в состоянии строго доказать всю геометрию. Большинство сочтет это за аксиому, я же—нет. Так могло бы быть, что площадь всегда будет ниже (infra) некоторого данного предела, сколь бы удаленными друг от друга в пространстве ни были предположены три вершины треугольника.

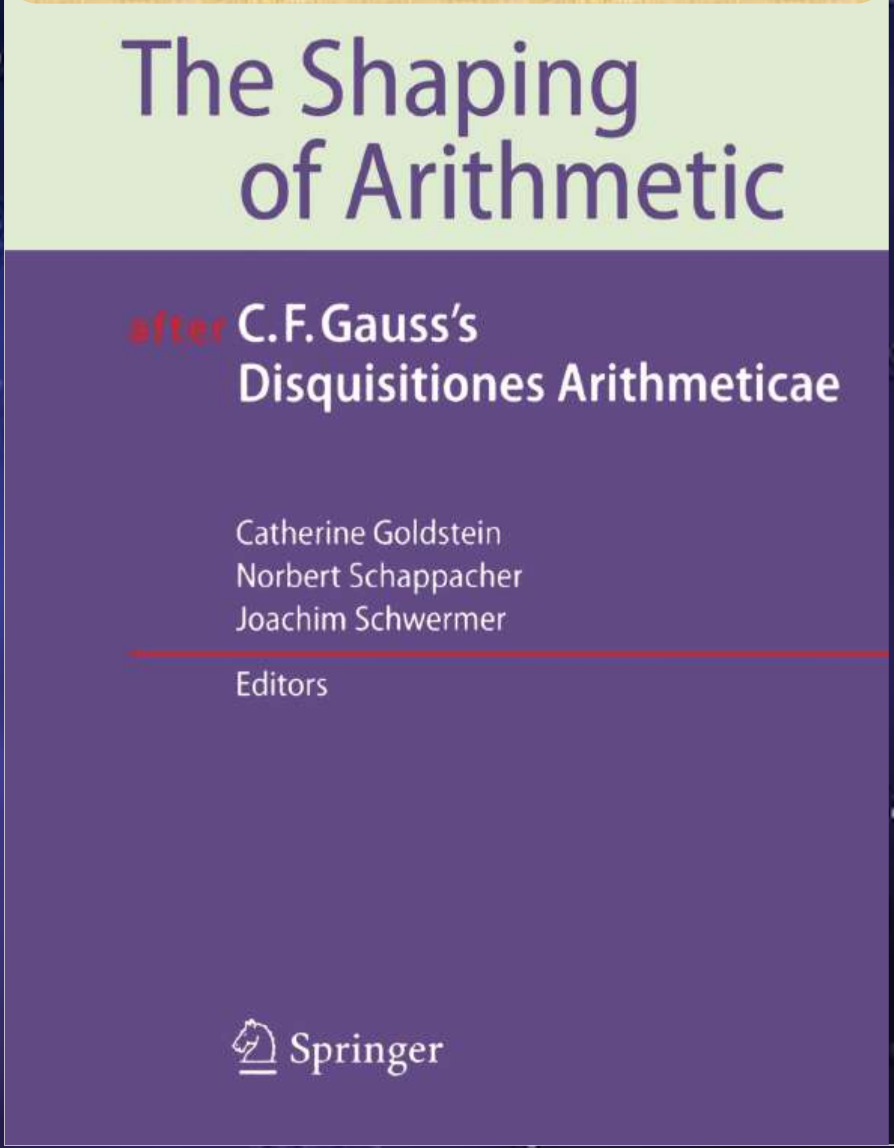
---

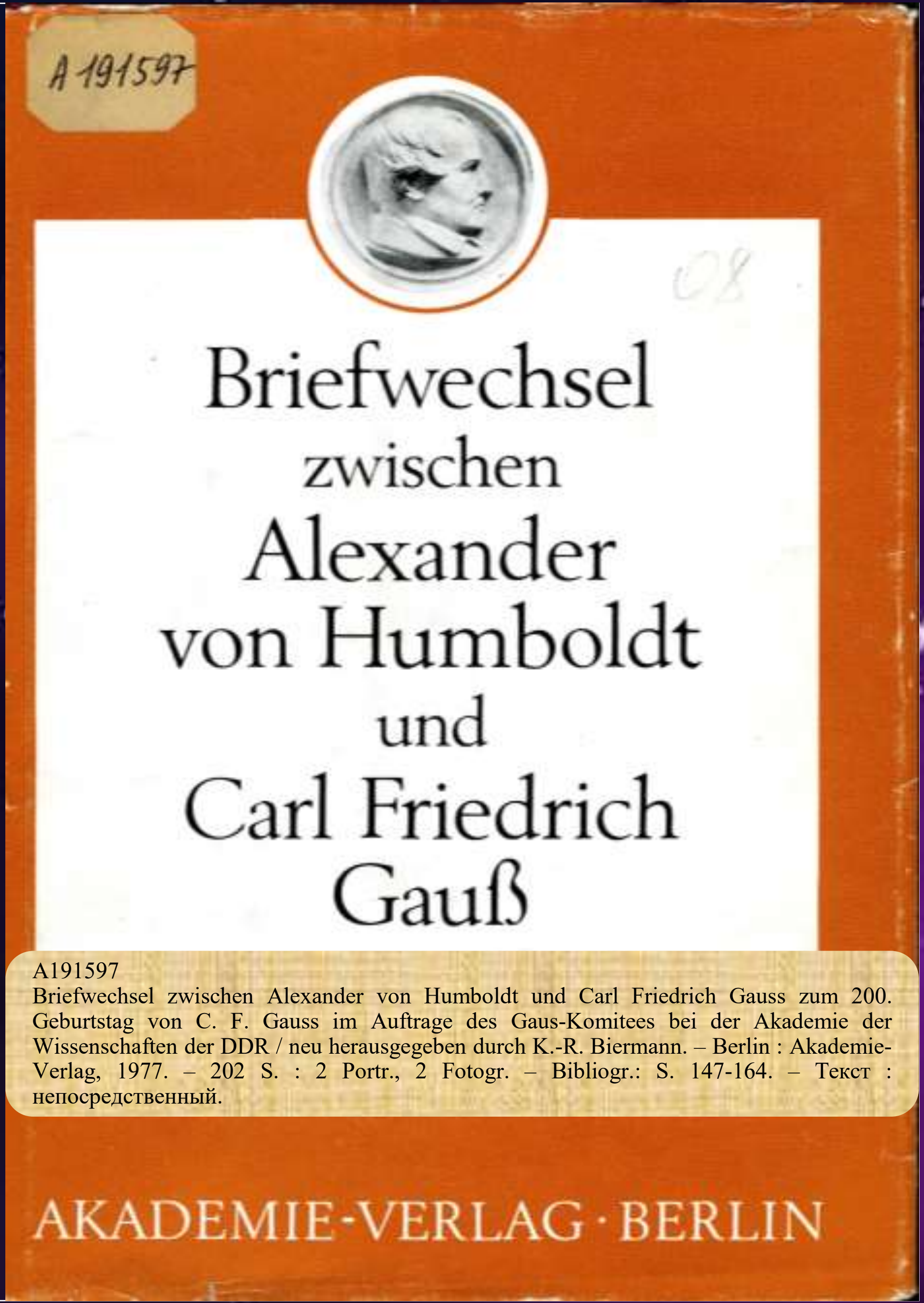
[1]) Автор частично использовал здесь материал своей статьи, помещенной в сборнике «Карл Фридрих Гаусс. К столетию со дня смерти» (Изд. АН СССР, 1955).

[2]) C. F. Gauss, Werke, т. VIII, Лейпциг, 1900, стр. 238. В дальнейшем при цитировании этого источника в тексте в скобках указывается просто т. VIII.

785380, 785381, 785382
Кельман, Д. Измеряя мир = Die Vermessung der Welt : роман / Д. Кельман ; перевод с немецкого Г. Косарика. – Санкт-Петербург : Амфора. ТИД «Амфора» ; [Б. м.] : Петроглиф, 2013. – 317, [3] с. – ISBN 978-5-367-02651-1 (Амфора) ; ISBN 978-5-4357-0162-3 (Петроглиф). – Текст : непосредственный.

The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae / C. Goldstein, N. Schappacher, J. Schwermer Editors. – DOI 10.1007/978-3-540-34720-0. – Berlin ; Heidelberg : Springer, 2007. – 578 (+ XII) pages : 36 Figs. – Bibliogr.: в конце глав. – ISBN 978-3-540-20441-1 (Hardcover) ; 978-3-540-34720-0 (eBook). – Имеется электронная версия: https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-540-34720-0 (дата обращения: 13.05.2022). – Режим доступа: по подписке СГУ. – Текст : непосредственный.





A191597
Briefwechsel zwischen Alexander von Humboldt und Carl Friedrich Gauss zum 200. Geburtstag von C. F. Gauss im Auftrage des Gaus-Komitees bei der Akademie der Wissenschaften der DDR / neu herausgegeben durch K.-R. Biermann. – Berlin : Akademie-Verlag, 1977. – 202 S. : 2 Portr., 2 Fotogr. – Bibliogr.: S. 147-164. – Текст : непосредственный.

Allgemeine Untersuchungen

über die

unendliche Reihe

$$1+\frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\ .\ 2\ .\ \gamma(\gamma+1)}xx+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\text{u. s. w.}$$

von

Carl Friedrich Gauss.

Mit Einschluss der nachgelassenen Fortsetzung aus dem Lateinischen übersetzt

von

Dr. Heinrich Simon.

A185185
Gauss, C. F. Allgemeine Untersuchungen über die unendliche Reihe 1 + αβ/1*γ*x + α(α+1)β(β+1)/1*2*γ(γ+1)*xx + α(α+1)(α+2)β(β+1)(β+2)/1*2*3*γ(γ+1)(γ+2)*x3 + u. s. w. (Mit Einschluss der nachgelassenen Fortsetzung aus dem Lateinischen übersetzt Dr. Heinrich Simon.) / C. F. Gauss. – Berlin : Julius Springer, 1888. – 86 S. : 1 Portr., 20 Fig. – Bibliogr.: S. 82-84. – Текст : непосредственный.

Berlin.

Verlag von Julius Springer.

1888.

16

RECHERCHES ARITHMÉTIQUES,

Par M. Ch.-Fr. GAUSS (de Brunswick);

Traduites par A.-C.-M. POULLET-DELISLE,

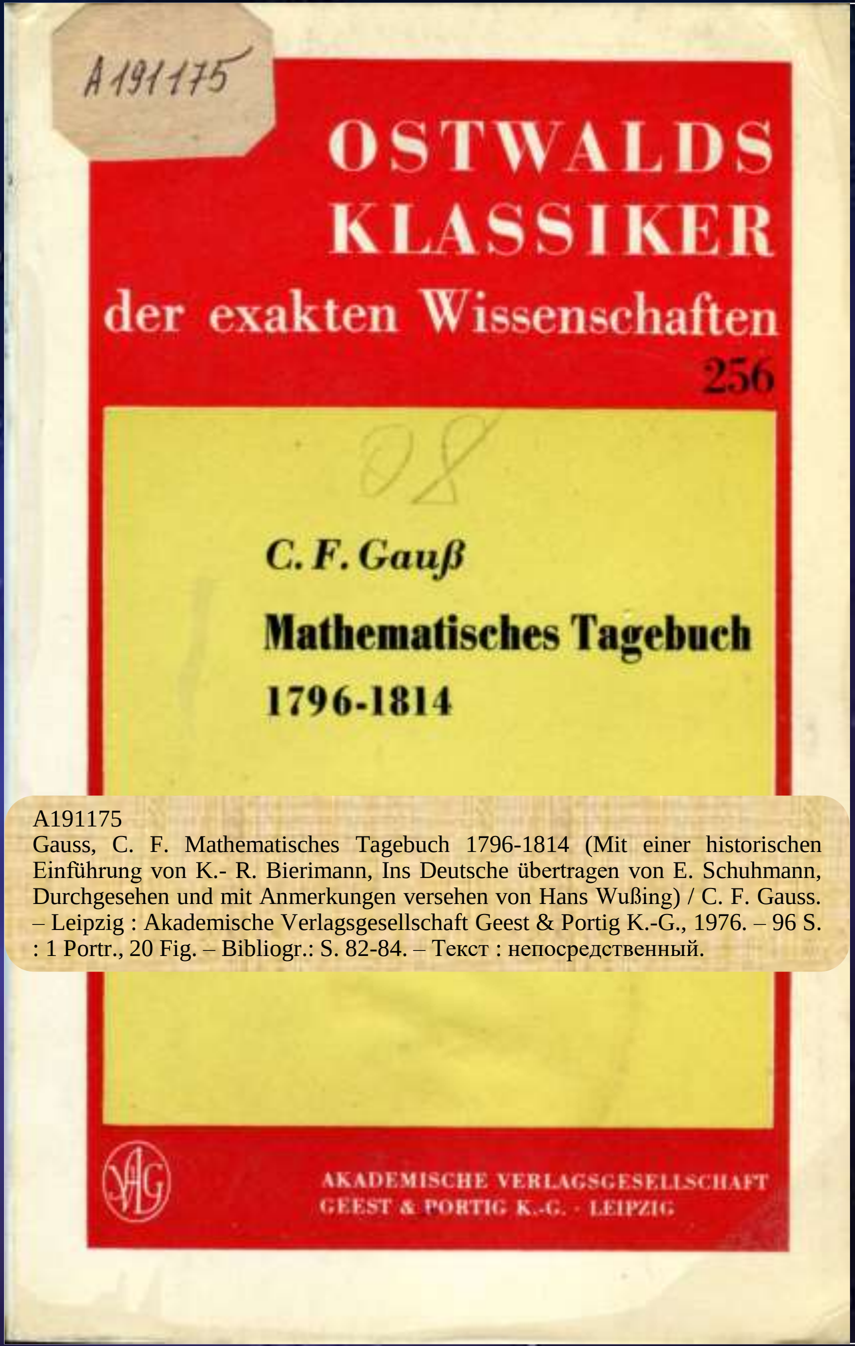
Professeur de Mathématiques au Lycée d'Orléans.

203922
Gauss, Ch.-Fr. Recherches arithmétiques / Ch.-Fr. Gauss ; traduites A. – C. – M. Poullet-Delisle. – Paris : Courcier, 1807. – 502 (+ XXII) p. – Bibliogr.: в сносках. – Текст : непосредственный.

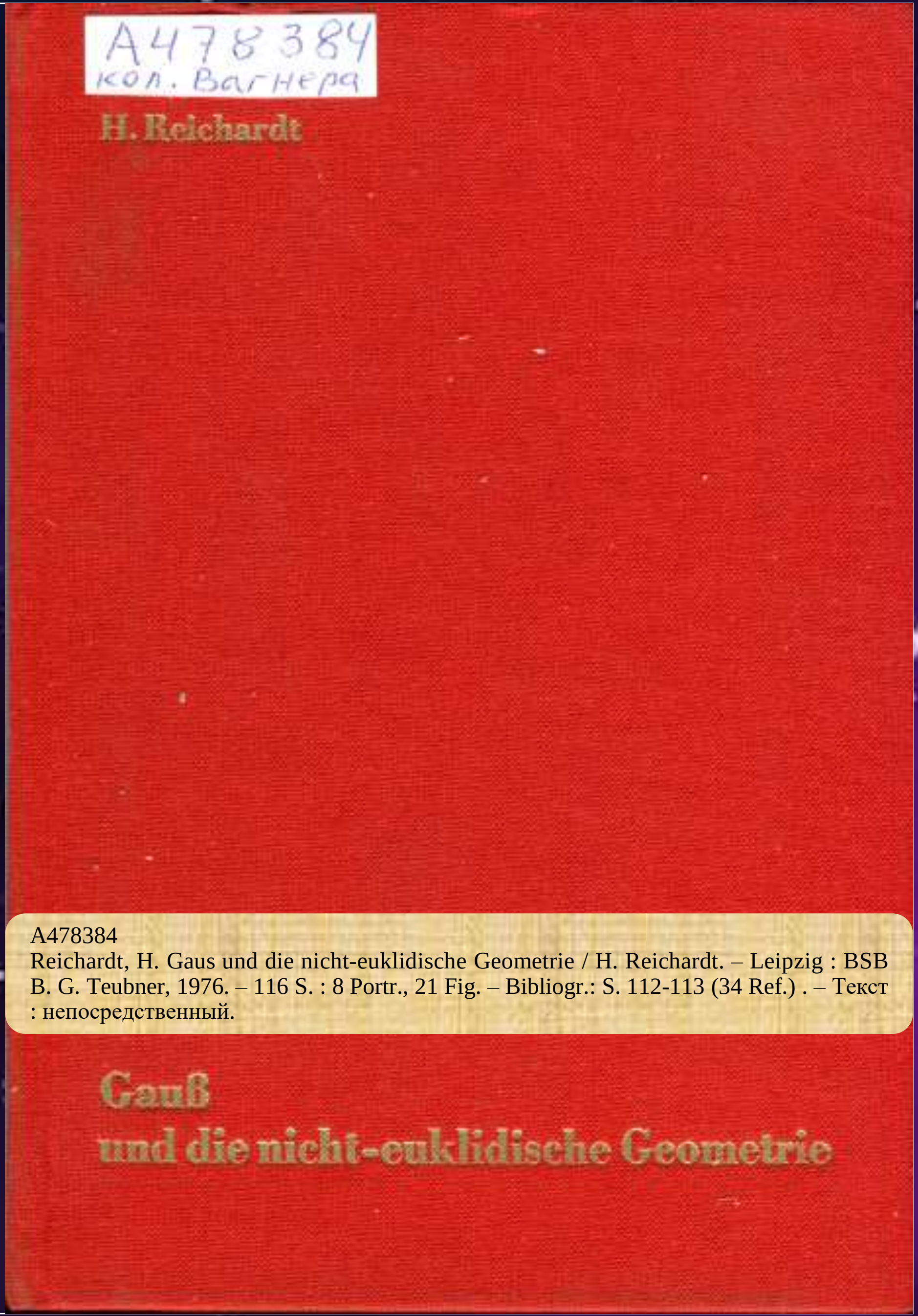
A PARIS,

Chez Courcier, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, nº 57.

1807.

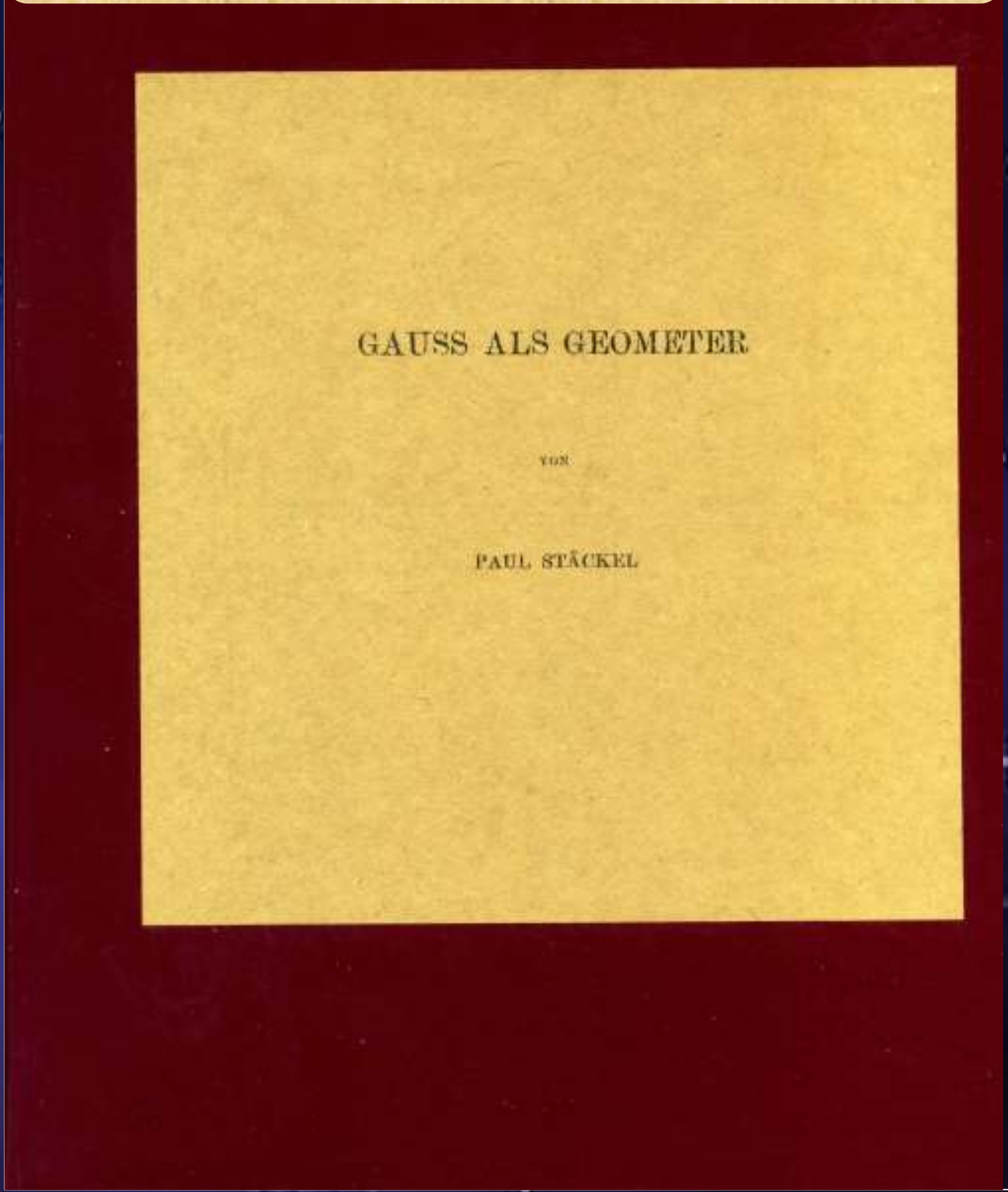


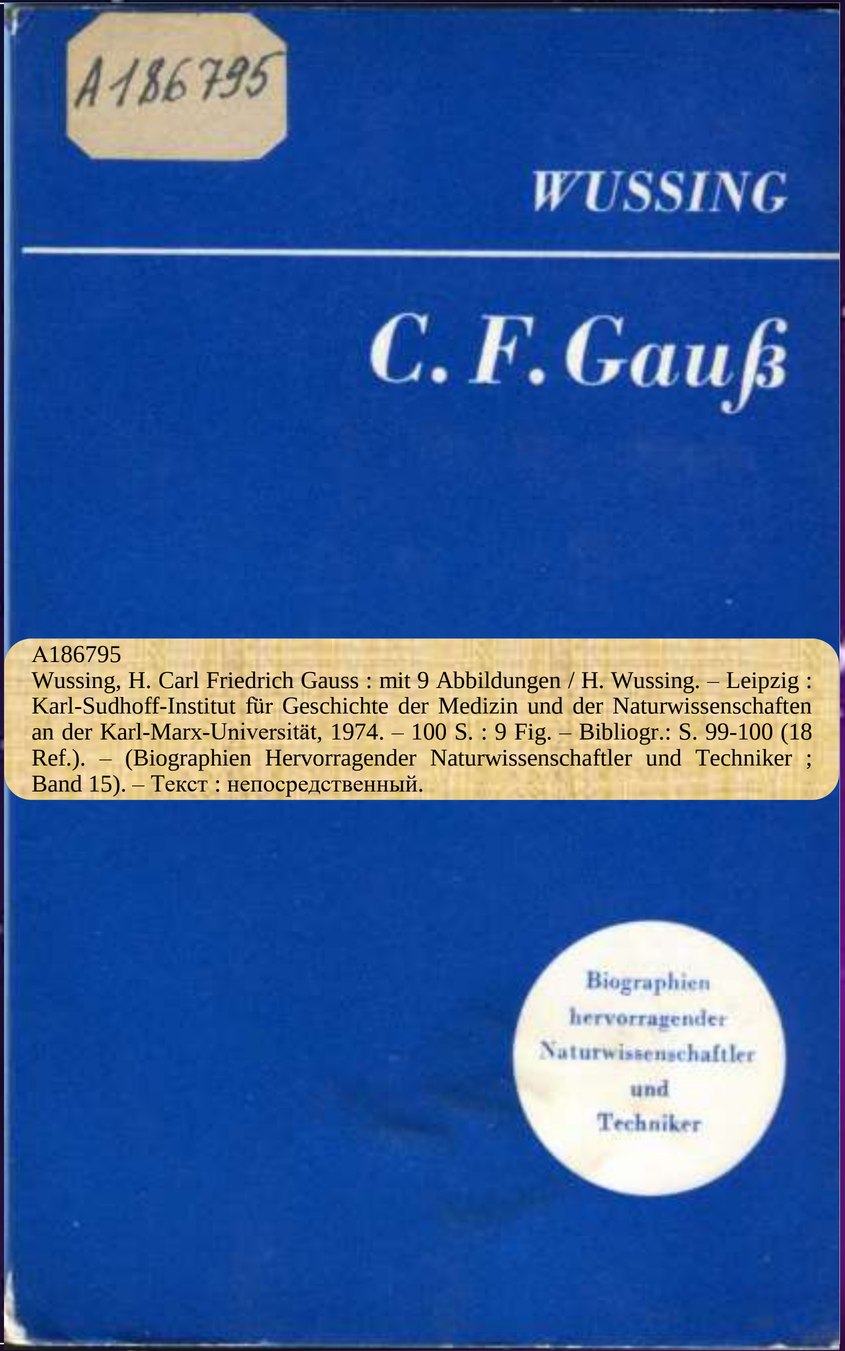
A191175
Gauss, C. F. Mathematisches Tagebuch 1796-1814 (Mit einer historischen Einführung von K.- R. Bierimann, Ins Deutsche übertragen von E. Schuhmann, Durchgesehen und mit Anmerkungen versehen von Hans Wußing) / C. F. Gauss. – Leipzig : Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., 1976. – 96 S. : 1 Portr., 20 Fig. – Bibliogr.: S. 82-84. – Текст : непосредственный.



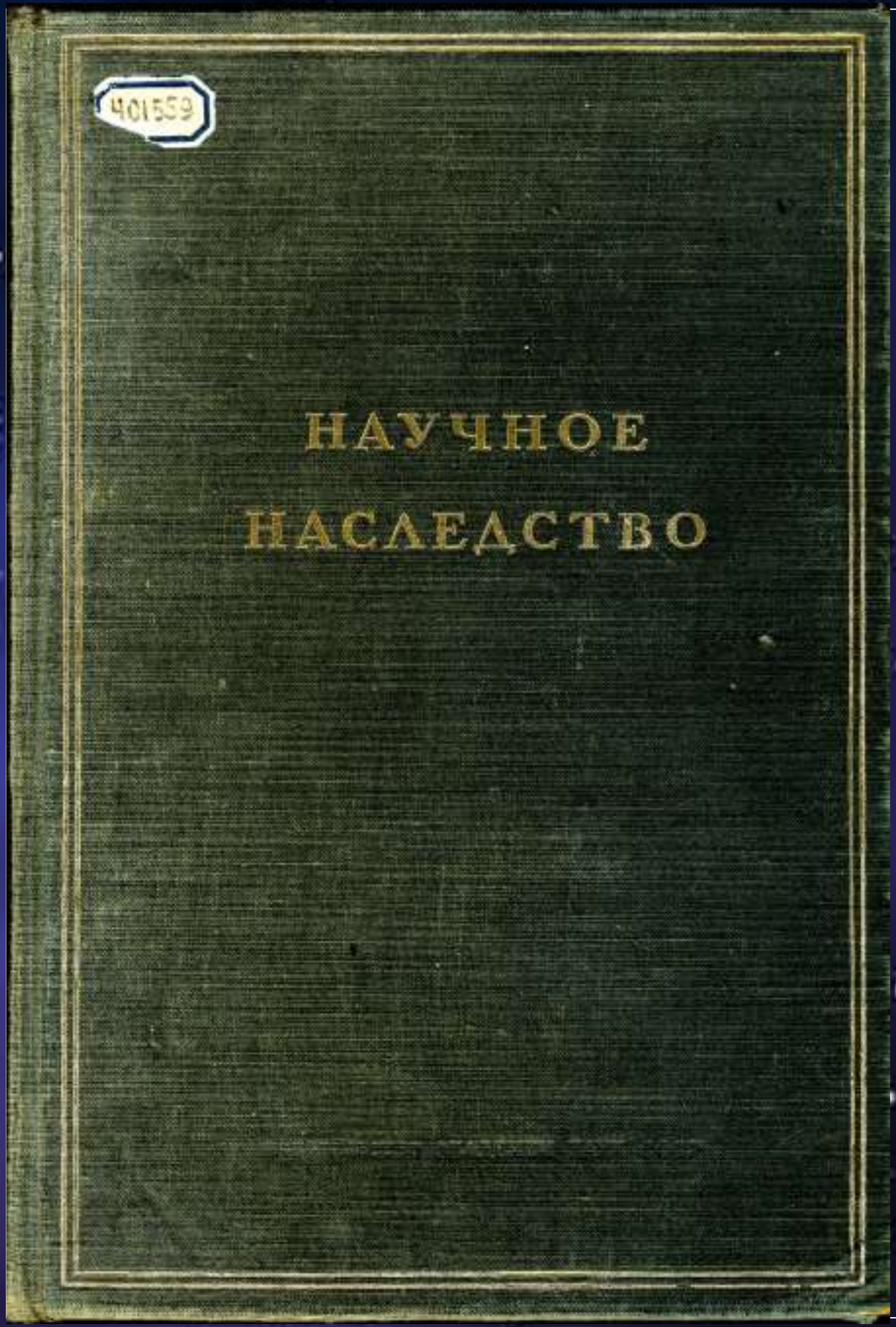
A478384
Reichardt, H. Gaus und die nicht-euklidische Geometrie / H. Reichardt. – Leipzig : BSB B. G. Teubner, 1976. – 116 S. : 8 Portr., 21 Fig. – Bibliogr.: S. 112-113 (34 Ref.) . – Текст : непосредственный.

A478284
Stäckel, P. C. F. Gauss als Geometer / P. Stäckel. – Текст : непосредственный // Abdruck aus Heft 5 der Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauss. Gesammelt von F. Klein, M. Brendel und L. Schlesinger. – Wiesbaden : Vieweg+Teubner Verlag (Springer Fachmedien), 1918. – 121 S. : 1 Fig. Bibliogr.: S. 119-120 + в сносках. – Текст : непосредственный.





A186795
Wussing, H. Carl Friedrich Gauss : mit 9 Abbildungen / H. Wussing. – Leipzig : Karl-Sudhoff-Institut für Geschichte der Medizin und der Naturwissenschaften an der Karl-Marx-Universität, 1974. – 100 S. : 9 Fig. – Bibliogr.: S. 99-100 (18 Ref.). – (Biographien Hervorragender Naturwissenschaftler und Techniker ; Band 15). – Текст : непосредственный.



Из переписки П. С. Лапласа, К. Ф. Гаусса, Ф. В. Бесселя и других с академиком Ф. И. Шубертом. – Текст : непосредственный // Научное наследство. Том первый / под редакцией Х. С. Коштоянца (ответственный редактор) [и др.]. – Москва ; Ленинград : Издательство Академии Наук СССР, 1948. – С. 771-831 + 1 портр. – Библиогр. в сносках и в тексте.

ПИСЬМА
П. С. ЛАПЛАСА, К. Ф. ГАУССА, Ф. В. БЕССЕЛЯ И ДРУГИХ К АКАДЕМИКУ Ф. И. ШУБЕРТУ *

(ПЕРЕВОД)

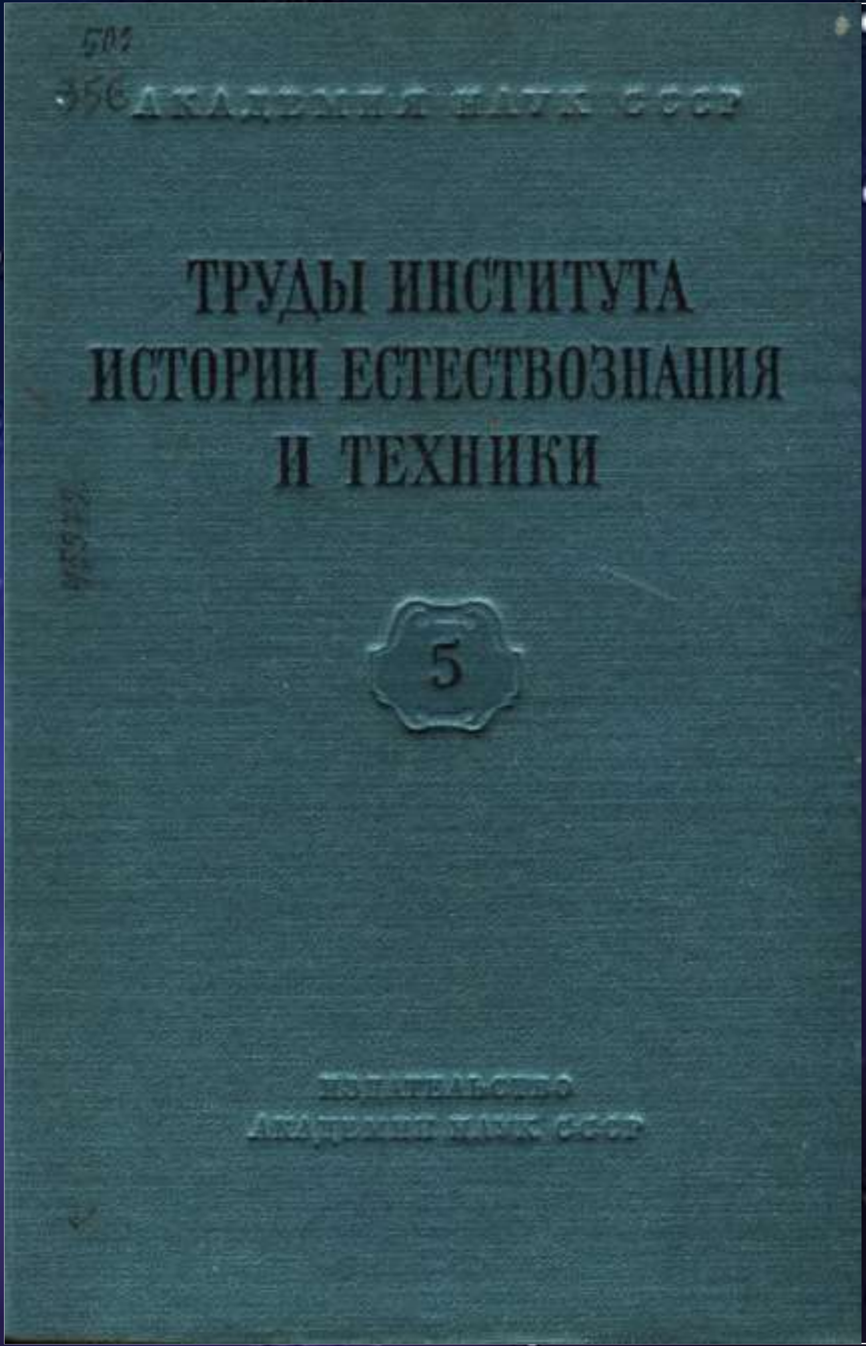
Письмо 1 (П. С. Лапласа)

(France-littérature, № 28)
Париж, 5 ноября 1811

Милостивый государь,

Мною получено письмо, которое Вы сделали честь мне написать, вместе с приложенными к нему наблюдениями нынешней кометы. [1] Соответственно с Вашим пожеланием, я передал их в Институт и в Бюро Долгот. Эти учреждения поручили мне передать Вам их благодарность; в то же время они просят Вас прислать им продолжение Ваших наблюдений, которые будут очень важны для точного определения элементов орбиты кометы и для установления ее эллиптичности, если эта эллиптичность имеет заметную величину. Это светило наблюдали непрерывно на императорской обсерватории в Париже, и было произведено несколько наблюдений меридианным кругом. Господин Бувар вывел из одних этих наблюдений следующие элементы, пользуясь методом второй книги «Небесной Механики».

* Оригиналы публикуемых здесь писем помещены на стр. 823—831. Публикуются А. Д. Люблинской по автографам из коллекции П. Л. Вакселя, находящейся в Ленинграде, в Гос. Публ. библиотеке им. Салтыкова-Щедрина. Перевод А. И. Рубина под редакцией Н. И. Идельсона. Каждое письмо помечено архивным шифром (France-littérature, № 24 и т. п.). — *Ред.*



Кольман, Э. Л. Неопубликованное письмо Гаусса / Э. Л. Кольман. – Текст : непосредственный // Труды Института истории естествознания и техники. – 1955. – Т. 5. – С. 385-394 : 2 фото, 2 таб. – Библиогр. в примечаниях.

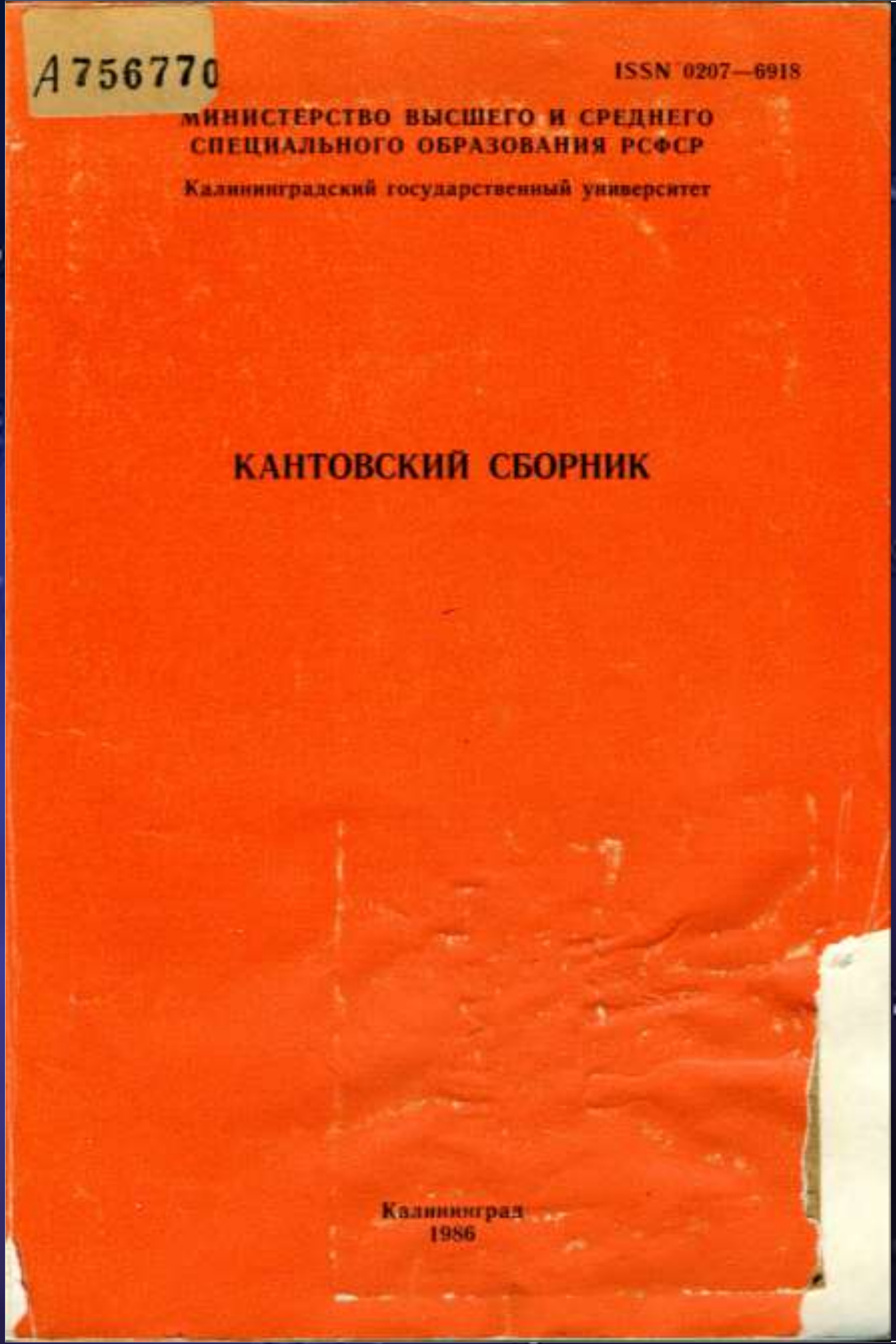
Э. КОЛЬМАН

НЕОПУБЛИКОВАННОЕ ПИСЬМО К. Ф. ГАУССА[1]

Мы печатаем письмо К. Ф. Гаусса от 29 июля 1844 г. непременному секретарю Петербургской Академии наук Павлу Николаевичу Фуссу, свидетельствующее о разносторонних интересах великого немецкого математика, в частности о его многолетних занятиях русским языком, его внимании к русской науке, истории, литературе и социальным условиям России.

Письмо почетного члена Петербургской Академии наук Карла Фридриха Гаусса, написанное по-немецки латинским шрифтом на обеих сторонах листа тонкой писчей бумаги голубого цвета, формата 21,5 × 27 см, черными чернилами, порыжевшими от времени, хранится в Ленинградском архиве Академии наук СССР в «Протокольных бумагах» (ф. I, оп. 2, № 24, § 208). На письме имеются пометки: «Прочитано 9 августа 1844» (по-французски), в левом верхнем углу — «№ 779» (вероятно, входящий номер того времени), в правом верхнем углу — «I кл., 208» (что означает физико-математическое отделение и параграф записи протокола заседания этого отделения от 9 августа 1844 г., где письмо было доложено П. Н. Фуссом). Эта запись гласит (по-французски): «Непременный секретарь прочитал письмо, датированное Геттинген 29 июля, в котором г-н Гаусс сообщает ему элементы последней кометы Мовэ, вычисленные г-ном Гольдшмидтом по наблюдениям самого г-на Мовэ от 7 июля, г-на Рюмкера от 16 июля и г-на Гаусса от 23 июля, к чему последний присовокупляет эфемериду до 5 сентября. Секретарь сообщил, что он немедленно оповестил об этом гг. астрономов в Пулкове».

[1] В прямых скобках проставлены номера примечаний, помещенных за переводом письма Гаусса.



Ихсанова, В. Н. Переписка Фридриха Вильгельма Бесселя с Карлом Фридрихом Гауссом / В. Н. Ихсанова. – Текст : непосредственный // Кантовский сборник: межвузовский тематический сборник научных трудов. – Калининград : Калининградский университет. – 1986. – Вып. 11. – С. 120-130. – Имеется электронная версия: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=32732266 (дата обращения: 29.05.2022). – Режим доступа : свободный. – ISSN 0207-6918.

[9] Гегель. Сочинения: В 14-ти т. М., 1939. Т. 6. С. 306.
[10] Флоренский П. А. Разум и диалектика//Богословский вестник. Сергиев Посад, 1914. Т. 3. С. 91.
[11] Флоренский П. А. Столп и утверждение истины... С. 91.
[12] ЖМП. 1983. № 5. С. 74.
[13] Флоренский П. А. Столп и утверждение истины... С. 65.
[14] Там же. С. 160.
[15] Там же. С. 147.
[16] Там же. С. 483.
[17] Там же. С. 163.
[18] Флоренский П. А. Разум и диалектика... С. 91.
[19] Флоренский П. А. Первые шаги философии. Сергиев Посад, 1917. С. 11.
[20] Флоренский П. А. Столп и утверждение истины... С. 63.
[21] Там же. С. 160.
[22] Там же. С. 158.
[23] Ленин В. И. Полн. собр. соч. Т. 15. С. 368.
[24] См.: Под знаменем марксизма. 1922. № 9—10. С. 229—230.
[25] ЖМП. 1982. № 4. С. 67.

ПЕРЕПИСКА ФРИДРИХА ВИЛЬГЕЛЬМА БЕССЕЛЯ С КАРЛОМ ФРИДРИХОМ ГАУССОМ *

В. Н. Ихсанова
(Главная Астрономическая обсерватория АН СССР, Пулково)

Два века минуло с того дня, как появился на свет величайший астроном, геодезист и математик XIX в., а слава его по-прежнему горит яркой, немеркнущей звездой. Фридрих Вильгельм Бессель оставил огромное научное наследие: его перу принадлежит более 400 работ, в числе которых 21 том трудов Кенигсбергской обсерватории, монументальные научные сочинения, отдельные статьи.

Берлинская, Парижская, Шведская, Бостонская и другие академии избрали Бесселя своим членом. В 30-летнем возрасте он был единогласно избран почетным членом Санкт-Петербургской Академии наук.

* В июне 1984 г. в Калининградском университете проходил юбилейный Бесселевский семинар, посвященный 200-летию великого ученого. Выдающиеся научные достижения Фр. В. Бесселя в области наблюдательной астрономии рассматривались на семинаре в неразрывной связи с теоретическими идеями Канта в области космогонии. Основной доклад — доцента К. К. Лавриновича «Бессель, Кант и закон тяготения» — был опубликован в «Кантовском сборнике» (Калининград, 1984. Вып. 9). Предлагаемая вниманию читателей статья написана на материалах одного из содокладов юбилейного семинара.— *Ред.*

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОЛЬЯТТИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Сборник трудов
VIII Международной научной конференции
«Математика. Образование. Культура»
(к 240-летию со дня рождения
Карла Фридриха Гаусса)

Тольятти, 26–29 апреля 2017 года

Марданов, М. Д. Научное наследие Карла Фридриха Гаусса в развитии современной математики (к 240-летию со дня рождения) / М. Д. Марданов, Р. М. Асланов. – Текст : непосредственный // Математика и математическое образование, сборник трудов (по материалам VIII международной научной конференции «Математика. Образование. Культура» (к 240-летию Карла Фридриха Гаусса). Тольятти, 26–29 апреля 2017 года). – Тольятти : Тольяттинский государственный университет, 2017. – С. 6-15 : 1 портр. – Библиогр.: с. 15 (20 + 8 назв.). – Имеется электронная версия: https://elibrary.ru/item.asp?id=29363412 (дата обращения: 22.04.2022). – Режим доступа : свободный.

Тольятти
Издательство ТГУ
2017

НАУЧНОЕ НАСЛЕДИЕ КАРЛА ФРИДРИХА ГАУССА В РАЗВИТИИ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ (к 240-летию со дня рождения)

Марданов Мисир Джумаил оглы
доктор физико-математических наук, профессор, директор Института математики и механики Национальной Академии Наук Азербайджана,
Асланов Рамиз Муталлим оглы
доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор, заведующий отделом «Научно-технической информации» Института математики и механики Национальной Академии Наук Азербайджана,
Азербайджан, г. Баку, r_aslanov@list.ru

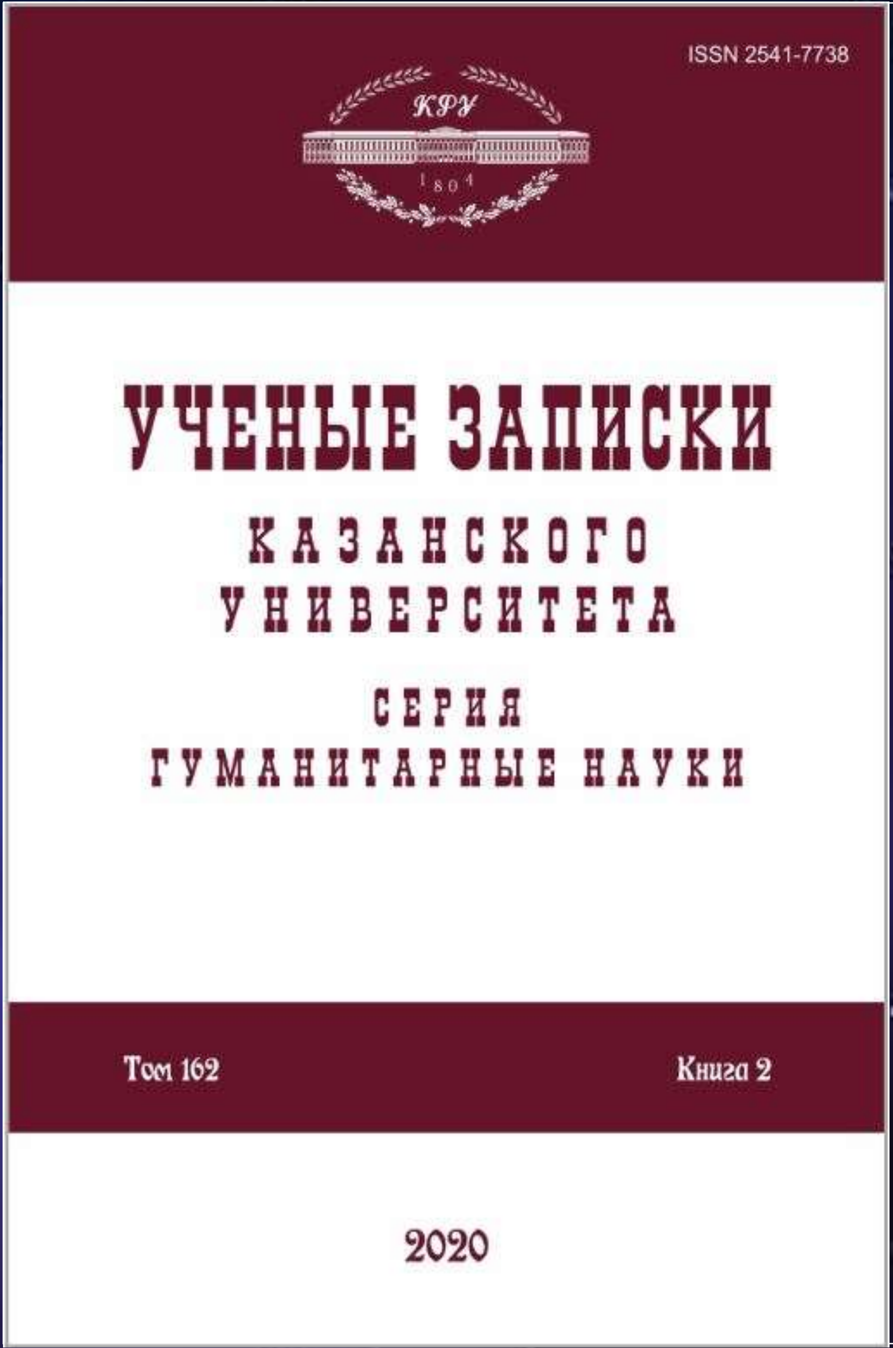
Аннотация. *Краткая биография К.Ф. Гаусса, его научное наследие и роль в развитии современной математики.*
Ключевые слова: арифметика, астрономия, математический анализ, геометрия, физика, геодезия.

SCIENTIFIC HERITAGE OF KARL FRIEDRICH GAUSS IN DEVELOPMENT OF MODERN MATHEMATICS (to 240 years)

Abstract. *Brief biography of K.F. Gauss, his scientific heritage and role in development of modern mathematics.*
Keywords: arithmetic, astronomy, mathematical, analysis, geometry, physics, geodesy.

Иоганн Карл Фридрих Гаусс (нем. Johann Carl Friedrich Gauß) – немецкий математик, механик, физик, астроном и геодезист. С именем Гаусса связаны фундаментальные исследования почти во всех основных областях математики: в алгебре, теории чисел, дифференциальной и неевклидовой геометрии, математическом анализе, теории функций комплексного переменного, теории вероятностей, а также в аналитической и небесной механике, астрономии, физике и геодезии. «В каждой области глубина проникновения в материал, смелость мысли, и значительность результата были поражающими». Гаусса называли «королём математиков». *Награды и звания:* Премия имени Лаланда Парижской АН (1810), Лауреат медали Копли (1838), иностранный член Шведской (1821) и Российской (1824) Академий наук, английского Королевского общества.

Карл Фридрих Гаусс родился 30 апреля 1777 г. в Брауншвейге, Нижняя Саксония, Германия. Родители его были бедны. Дед Гаусса по отцу был бедным крестьянином, его сын (отец Гаусса) Герхард Дидрих работал садовником, смотрителем каналов и каменщиком. По ряду счастливых случайностей Гаусс не продолжил карьеру своего отца, который умер в 1806 г.



Лефельдт, В. Карл Фридрих Гаусс и его занятия русским языком и русской литературой / В. Лефельдт. – Текст : непосредственный // Учёные Записки Казанского Университета. Серия: Гуманитарные Науки. – 2012. – Т. 154, № 5. – С. 237-246. – Библиогр.: с. 246 (2 назв.). – Имеется электронная версия: https://elibrary.ru/item.asp?id=18752044 (дата обращения: 03.06.2022). – Режим доступа : свободный. – ISSN 2541-7738.

УДК 801.01

КАРЛ ФРИДРИХ ГАУСС И ЕГО ЗАНЯТИЯ РУССКИМ ЯЗЫКОМ И РУССКОЙ ЛИТЕРАТУРОЙ[*]

В. Лефельдт

Аннотация

Карлу Фридриху Гауссу было около 60 лет, когда он начал изучать русский язык – чтобы найти какое-то отвлечение от привычных занятий в области математики и физики. Настоящая статья описывает в общих чертах автодидактический метод Гаусса и его удивительные успехи в изучении языка, а также художественную и научную литературу, составлявшую его любимый круг чтения.

Ключевые слова: Карл Фридрих Гаусс, русский язык, русская литература, обратный словарь.

Услышав или прочитав имя Карла Фридриха Гаусса, мы думаем о блестящем астрономе, который математически точно вычислил орбиту малой планеты Церера, что позволило вскоре ее вновь обнаружить, об авторе фундаментального труда «Теория движения небесных тел», думаем о знаменитом исследователе земного магнетизма, об ученом, который раньше других математиков оценил значение воображаемой геометрии Н.И. Лобачевского, в период, когда Н.И. Лобачевский у русских математиков был в опале. Едва ли кто-нибудь связывает имя Карла Фридриха Гаусса с русистикой, с наукой о русском языке[1]. В этой области, однако, он первым наметил путь, значение которого для нашей дисциплины было распознано лишь во второй половине XX века. Только сравнительно недавно, после признания этого направления лингвистической русистики, пионером которого – как мы увидим – был Гаусс, в ней появились важные научные труды и достижения.

Надо сказать, что уже некоторые современники "principis mathematicorum" были убеждены в том, что математика, астрономия, высшая геодезия, земной

---

[*] По материалам доклада по случаю вручения диплома почетного доктора Казанского федерального университета.

[1] Подробное описание занятий К.Ф. Гаусса русским языком и русской литературой можно найти в работе [1] автора предлагаемой статьи. Эта работа содержит перечень всех книг из «русской библиотеки» Гаусса, включая перечисление разных замечаний и заметок, сделанных рукой Гаусса на полях многих книг, а также факсимильную репродукцию обратного словаря русских существительных, прилагательных и глаголов, составленного великим ученым. Сокращенная, но все-таки достаточно развернутая версия указанной работы была опубликована на русском языке в журнале «Русский язык в научном освещении» (см. [2]).

найдено в архиве

ГАУСС И ЕГО СВЯЗИ С РОССИЕЙ

Из мировых ученых XIX в. (если не считать тех, которые подолгу, как А. Гумбольдт, бывали в России) Карл Фридрих Гаусс был наиболее близок к русской науке и культуре. Никто из них не знал русского языка так основательно, как он. Им Гаусс занялся, когда был приглашен в Петербургскую академию наук. Он в подлиннике изучил труды Н. И. Лобачевского, которые оценил по достоинству сразу же после их появления. По настоянию Гаусса, бывшего председателем Геттингенского Королевского общества наук, великий творец неэвклидовой геометрии был избран членом этого общества.

Как известно, переезду Гаусса в Россию помешала постройка обсерватории в Геттингене. Начав так блестяще математическую карьеру, он внезапно решил посвятить себя астрономии и магнитологии, чем немало огорчил выдающихся математиков того времени. Так, К. Г. Я. Якоби с сожалением писал в 1840 г. «Математика была бы совсем в ином положении, если бы практическая астрономия не отвлекла этого огромного гения от его пути» [1].

То обстоятельство, что Гаусс не принял приглашения Петербургской академии, не нарушило дружеских связей с ней. Еще в 1802 г. двадцати пяти лет он был избран членом-корреспондентом, а в 1824 г. почетным ее членом.

Живя в Геттингене, Гаусс поддерживал живую связь с русской наукой и культурой, повседневно общаясь с приезжавшими из России молодыми людьми, проходившими курс в Геттингенском университете, питомцем которого он сам был. Как известно, в Геттингене, где преподавал бывший петербургский академик А. Л. Шлецер (1735—1809 гг.), было много русских студентов, особенно в начале XIX в., когда Александр I отменил распоряжение своего отца, запрещавшее юношам учиться в иностранных университетах. А. С. Пушкин писал о своем герое

«По имени Владимир Ленский
С душою прямо геттингенской.
. . . .
Он из Германии туманной
Привез учености плоды,
Вольнолюбивые мечты,
Дух пылкий и довольно странный...».

Действительно, из среды юношей, учившихся в Геттингене, вышли впоследствии известные деятели, принадлежавшие к передовым кругам русской интеллигенции [1]. С этой молодежью Гаусс общался на протяжении всей жизни. Академик Б. С. Якоби в своей «Записке о научной командировке в Западную Европу в 1851 г.» сообщает, что, посетив Геттинген, где он когда-то сам учился, нанес визит Гауссу и застал его за занятиями русским языком и литературой: «Русские, которые учатся в Геттингене, были в этом деле его наставниками и утверждали, что г. Гаусс пишет и даже говорит по-русски вполне хорошо»[2]. Об этом же рассказывает и известный астроном и геофизик, профессор Казанского университета И. М. Симонов (1794—1855), участник кругосветной экспедиции Ф. Ф. Беллинсгаузена и М. П. Лазарева, открывшей Антарктиду. Вот что мы читаем в его мемуарах:

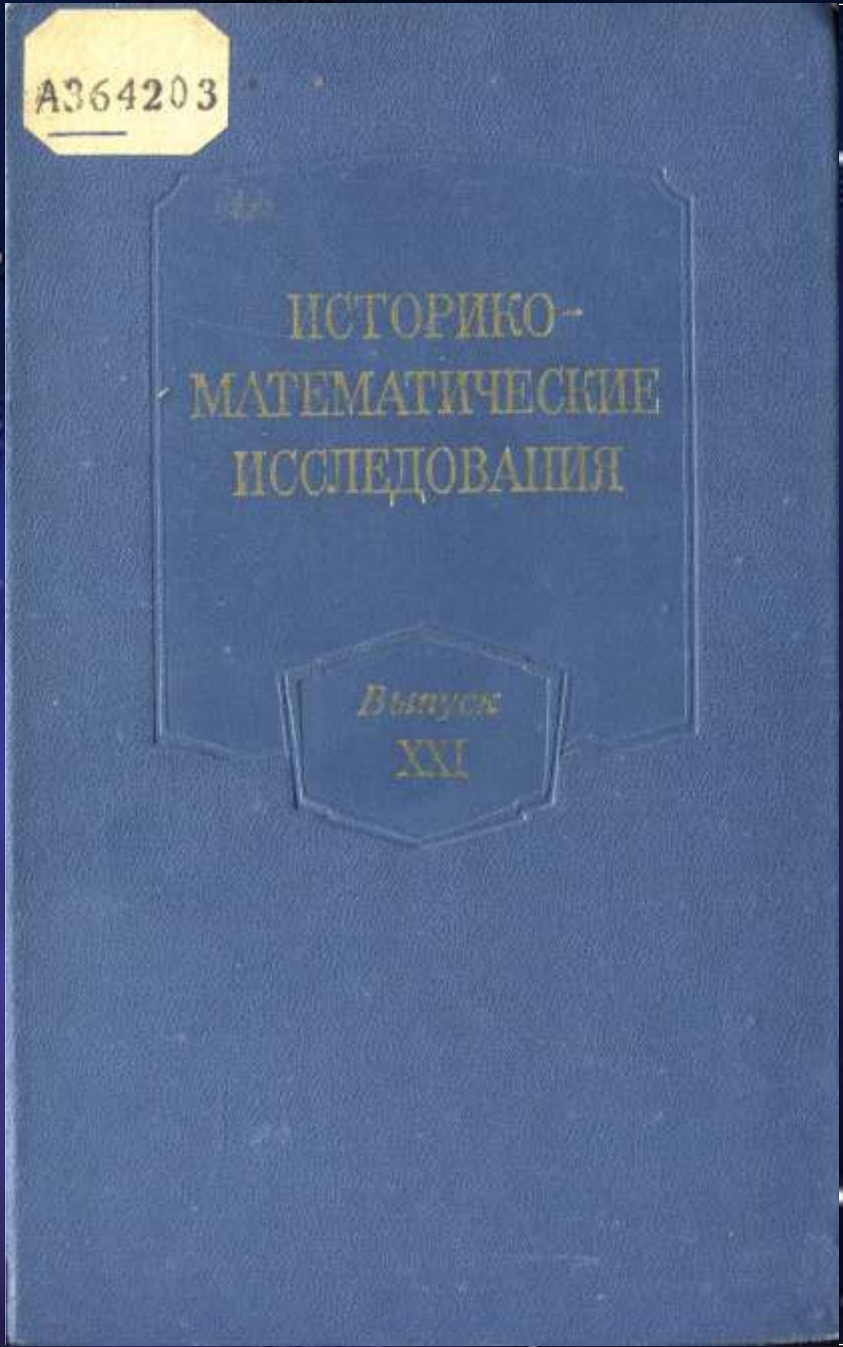
«Я пробыл в Геттингене три дня и каждый день беседовал с знаменитым Гауссом не только об науках, нас занимающих, но не менее того и об российской литературе. Удивительно, что знаменитый математик на

[1] Архив АН СССР, ф. 187, оп. 2, № 611, л. 33.

[1] Эта тема послужила предметом докторской диссертации М. Вишницера, защищенной им в 1906 г. в Берлинском университете (ныне им. А. Гумбольдта). Работа Вишницера была напечатана в издававшейся серии «Beiträge zur russishen Geschichte» под названием «Die Universität Göttingen und die Entwicklung der liberalen Ideen in Russland im ersten Viertel des 19 Jahrhundert». Berlin, 1907.

[2] «Архив АН СССР», ф. 187, оп. 1, № 1, л. 699.

Радовский, М. И. Гаусс и его связи с Россией / М. И. Радовский. – Текст : непосредственный // Природа. – 1964. – № 8. – С. 108-109. – Библиогр. в сносках.



Бирман, К. Р. Гаусс и Гёте / К. Р. Бирман ; перевод с немецкого Н. Н. Гендрихсона. – Текст : непосредственный // Историко-математические исследования : сборник / Академия Наук СССР. Институт истории естествознания и техники. – Москва : Наука, 1976. – Выпуск 21. – С. 261-272. – Библиогр. с. 271-272 (34 назв.).

ГАУСС И ГЕТЕ [1]

К. Р. Бирман

Два современника — «король поэтов» (Dichterfürst) Гёте и «первый среди математиков» (Princeps mathematicorum) Гаусс, достигшие мировой известности уже при жизни и жившие на расстоянии всего 170 км (Веймар — Брауншвейг), а с 1807 г. — только лишь 120 км (Веймар — Гёттинген) — не замечали друг друга. Это весьма странно. Но не менее удивительно отсутствие анализа этого обстоятельства в литературе [2]. Пауль Эпштейн удовольствовался догадкой, что, наверно, Гёте «никогда не знал, что в Гёттингене, в нескольких часах езды от него, жил величайший математик его эпохи» [2, стр. 78]. Вильгельм Лоре [3] ограничился заявлением, что сомневается в правильности предположения Эпштейна. Я попытаюсь сейчас проанализировать положение вещей и тем самым заполнить этот пробел.

Эккерман, как и другие авторы, писавшие о высказываниях Гёте, никогда не слышал, чтобы Гёте когда-либо упомянул имя Гаусса. Точно так же напрасно мы стали бы искать имя Гаусса в произведениях Гёте или в его письмах. В его «Материалах к истории учения о цвете» [4] с их многочисленными ссылками на естествоиспытателей, начиная с древности, мы не встречаем даже упоминания о Гауссе. Гаусс не принадлежит к числу рецензентов иенской «Всеобщей литературной газеты», которую Гёте организовал в 1804 г. и на которую и в дальнейшем оказывал большое влияние [5]. В библиотеке Гёте нет ни единой работы Гаусса [6], хотя в ней имеются некоторые теоретические сочинения по математике. Например, сочинения известного астронома П. А. Ганзена, чьи математические способности ценил и Гаусс. В библиотеках Иены, Гёттингена и Веймара Гёте не брал никаких сочинений

[1] Перевод с немецкой рукописи Н. Н. Гендрихсона.
[2] В работе [1] отсутствует какой-либо анализ; само название служит, скорее, для привлечения внимания геодезистов.

Ожигова, Е. П. О научных связях Гаусса с Петербургской Академией наук / Е. П. Ожигова. – Текст : непосредственный // Сборник «Историко-математические исследования» / Академия Наук СССР. Институт истории естествознания и техники. – Москва : Наука, 1976. – Выпуск 21. – С. 273-284. – Библиогр. с. 284 (13 назв.).

О НАУЧНЫХ СВЯЗЯХ ГАУССА С ПЕТЕРБУРГСКОЙ АКАДЕМИЕЙ НАУК[1]

Е. П. Ожигова

В обширной литературе, посвященной великому немецкому ученому Карлу Фридриху Гауссу (1777—1855), его отношениям с Петербургской академией наук, уделяется довольно скромное место. Биографы ученого ограничиваются обычно упоминанием о приглашении Гаусса в Петербургскую академию на должность астронома-наблюдателя и об его отказе от этого предложения. Иногда высказываются разные соображения о причинах отказа. Порой упоминают о переписке Гаусса с непременным секретарем Академии Н. И. Фуссом и с академиком Ф. И. Шубертом, но забывают при этом, что ряд писем Гаусса в Петербургскую академию наук был опубликован еще в 1934 г. [1] и что еще несколько его писем Ф. И. Шуберту и П. Л. Шиллингу также напечатаны [2—4]. Кроме того, описанию связей Гаусса с русскими учеными была посвящена статья М. И. Радовского «Гаусс и его связи с Россией» [5] и публикации [6].

Дополнительные сведения о взаимоотношениях Гаусса с Петербургской академией наук содержатся в протоколах заседаний Конференции Академии [7, 8]. В настоящей заметке дается краткий обзор записей, касающихся первого периода связей Гаусса с Академией Наук.

По-видимому, первое упоминание имени Гаусса относится к протоколу заседания 7 марта 1799 г. (ст. ст.), когда было зачитано письмо Циммермана от 16 февраля с сообщением о предстоящем выходе в свет «Арифметических исследований» Гаусса.

Немецкий ученый Эбергард Август Вильгельм Циммерман (1743—1815) с 1766 г. был профессором физики в Брауншвейге. Он много путешествовал, бывал и в России, напечатал несколько больших сочинений о своих

[1] По материалам протоколов заседаний Конференции Имп. Академии наук.

Гаусс, К. Ф. Пояснение возможности построения семнадцатиугольника (представлено и прочитано в Конференции 21 июня 1801 г.) / К. Ф. Гаусс ; перевод с немецкого М. В. Крутиковой. – Текст : непосредственный // Сборник «Историко-математические исследования» / Академия Наук СССР. Институт истории естествознания и техники. – Москва : Наука, 1976. – Выпуск 21. – С. 285-291. – Библиогр. в сносках (6 назв.).

ПОЯСНЕНИЕ ВОЗМОЖНОСТИ ПОСТРОЕНИЯ СЕМНАДЦАТИУГОЛЬНИКА

(представлено и прочитано в Конференции 21 июня 1801 г.)[1]

К. Ф. Гаусс

Предложения. (Для сокращения угол 360°/17 обозначается через A.)

1. Имеет место равенство:

$$1 + \cos A + \cos 2A + \cos 3A \ldots + \cos 16A = 0.$$

Эта теорема отчасти уже вытекает из общих и известных; вместе с тем она может быть доказана весьма простым построением. Легкий способ доказательства ее состоит в следующем: если умножить

$$1 + \cos A + \cos 2A + \cos 3A \ldots + \cos 16A \; (= S)$$

на $\cos A$, во всех членах разложить $\cos kA \cdot \cos A$ на

$$\frac{1}{2}\cos(k-1)A + \frac{1}{2}\cos(k+1)A$$

и вместо $\cos 17A$ представить 1 [надо: подставить.—*Е. О.*], то получается $S \cos A = S$, следовательно, $S(1 - \cos A) = 0$, и так как по предположению не может быть $1 - \cos A = 0$, то $S = 0$.

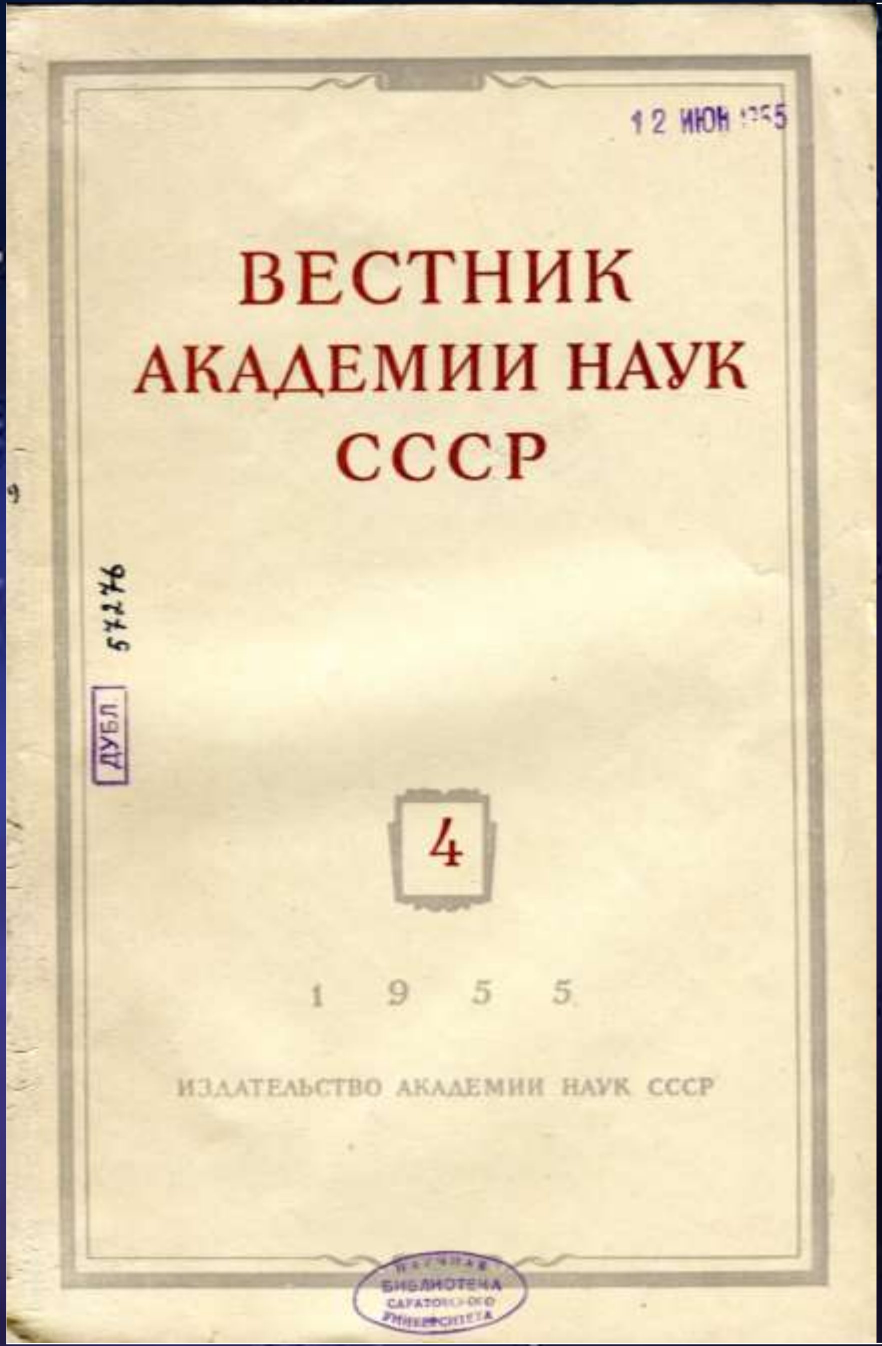
2. $\cos\varphi\cos\varphi' = \frac{1}{2}\cos(\varphi - \varphi') + \frac{1}{2}\cos(\varphi + \varphi')$,

$\cos 17A = 1$, $\cos 16A = \cos A$, $\cos 15A = \cos 2A$ и т. д., и вообще $\cos(17 - k)A = \cos kA$.

Далее, $\cos 18A = \cos A$, $\cos 19A = \cos 2A$ и т.д., и вообще $\cos(17 + k)A = \cos kA$.

Еще более общим образом, если l означает какое-либо целое число, то $\cos(17l \pm k)A = \cos kA$.

[1] Архив АН СССР, Р. 1, оп. 110, ед. хр. 13, л. 9—12. Перевод М. В. Крутиковой. Публикация и примечания Е. П. Ожиговой.



Неопубликованное письмо К. Ф. Гаусса. – Текст : непосредственный // Вестник АН СССР. – 1955. – Выпуск 4. – С. 109-111 : 2 фото. – Библиогр. в сносках.

НЕОПУБЛИКОВАННОЕ ПИСЬМО К. Ф. ГАУССА

Из зарубежных ученых XIX века (если не считать тех, которые подолгу, как например А. Гумбольдт, бывали в России) Карл Фридрих Гаусс был наиболее близок к русской науке и культуре вообще. Никто из них не знал так основательно, как он, русский язык. Гаусс в подлиннике изучал труды Н. И. Лобачевского, которые оценил по достоинству сразу после их появления. По его настоянию великий творец неэвклидовой геометрии был избран членом Геттингенского ученого общества, председателем которого был Гаусс.

Как известно, переезду Гаусса в Россию помешала постройка обсерватории в Геттингене; начав так блестяще математическую карьеру, Гаусс предался занятиям астрономией и магнитологией, чем немало огорчил выдающихся математиков того времени. Например, немецкий ученый К. Якоби (1804—1851) писал в 1840 году своему брату, академику Б. С. Якоби: «Гаусс рассказал мне, что в начале этого столетия он дважды получал приглашение в Петербург, где, повидимому, хотели воскресить при его помощи времена Эйлера. Постройка Геттингенской астрономической обсерватории, которая была ему поручена, помешала ему принять приглашение; вероятно, положение математики было бы совсем иным, если бы практическая астрономия не отвлекла этого огромного гения от его пути»[1].

То обстоятельство, что Гаусс не принял приглашения Петербургской Академии, не помешало его связям с русскими учеными. Еще в 1802 году он был избран членом-корреспондентом, а в 1824 году почетным членом Академии[2].

Живя в Геттингене, Гаусс не терял живой связи с русской наукой и культурой, повседневно общаясь с молодыми людьми из России, проходившими курс в Геттингенском университете, питомцем которого он сам был. В Геттингене учились многие известные впоследствии деятели, принадлежавшие к передовым кругам русской интеллигенции. Академик Б. С. Якоби в своей «Записке о научной командировке в Западную Европу в 1851 г.» сообщает, что он посетил Геттинген, где когда-то сам учился, нанес визит Гауссу и застал его за занятиями русским языком и литературой. Якоби писал:

«Я не преминул выразить чувства уважения знаменитому профессору Гауссу, старейшине астрономов и математиков и самому славному среди них. Хотя он был в очень преклонном возрасте, я застал его в полном здоровье и ясности духа. Он мне сказал, что использует все свои досуги на изучение русского языка и литературы, которые его в высшей степени интересуют. Русские, которые учились в Геттингене, были его наставниками в своем наречии и утверждали, что г. Гаусс пишет и даже говорит по русски вполне хорошо»[3].

Таким образом, вполне очевиден интерес, который представляют для истории науки взаимоотношения Гаусса и русских ученых. Ценным документом в этом отношении является письмо Гаусса к П Л. Шиллингу (1786—1836) — известному русскому ученому, изобретателю первого электромагнитного телеграфа. Публикуемое ниже письмо Гаусса, который и сам занимался постройкой телеграфной линии, подтверждает бесспорный приоритет русского изобретателя. Письмо вскрывает также личные отношения между Гауссом и Шиллингом, до настоящего времени, к сожалению, очень мало изученные.

[1] Архив Академии наук СССР, ф. 187, оп. 2, № 611, л. 33.

[2] См.: Б. Л. Модзалевский. Список членов императорской Академии наук. 1725—1907. СПб., 1908, стр. 145, 164.

[3] Архив Академии наук СССР, ф. 187, оп. 1, л. 699.

НЕЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО И КАРЛ ФРИДРИХ ГАУСС

Потоскуев Евгений Викторович
кандидат физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и геометрии,
Тольяттинский государственный университет
Россия, г. Тольятти, potoskuev39@gmail.com

Аннотация. *В статье рассматривается роль Гаусса и других математиков в развитии неевклидовой геометрии Лобачевского. Отмечается вклад Карла Фридриха Гаусса в теорию поверхностей.*

Ключевые слова: геометрия Лобачевского, Гаусс, теория поверхностей.

Потоскуев, Е. В. Неевклидова геометрия Лобачевского и Карл Фридрих Гаусс / Е. В. Потоскуев. – Текст : непосредственный // Математика и математическое образование : сборник трудов по материалам VIII международной научной конференции «Математика. Образование. Культура» (к 240-летию Карла Фридриха Гаусса). 2017. – Тольятти : Тольяттинский государственный университет, 2017. – С. 22-26 : 5 портр., 1 рис. – Библиогр.: с. 26 (2 назв.). – Имеется электронная версия: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29363414&pff=1 (дата обращения: 05.06.2022). – Режим доступа : свободный.

После «Начал» *Евклида* до создания неевклидовой геометрии Лобачевского (он назвал её «воображаемой») прошло более 20 веков, в течение которых проблема пятого постулата волновала умы многих крупнейших математиков мира того времени. Трудно назвать выдающегося математика, начиная с *Птолемея* (2 в.) и заканчивая автором классического курса элементарной геометрии *Адриеном Мари Лежандром* (1752-1833), кто не прилагал бы усилий к тому, чтобы, по выражению Лобачевского, «заделать брешь теории параллельных».

Евклид
(422—347 гг. до н. э.)

Над проблемой пятого постулата работали профессор Оксфордского университета *Джон Валлис* (1616-1703), итальянский математик *Джироламо Саккери* (1667-1733), опубликовавший книгу под названием «Евклид, очищенный от всех пятен». К числу исследователей проблемы пятого постулата следует отнести и члена Берлинской Академии наук – астронома, математика и философа *Иоганна Генриха Ламберта* (1728-1777), а также профессора Харьковского университета Ф. К. *Швейкарта* (1780-1857) и др.

Н.И. Лобачевский

До начала XIX столетия не возникало сомнений в незыблемости геометрии Евклида и невозможности построения другой геометрии, отличной от евклидовой. Но это «невозможное» совершил великий русский ученый, профессор Казанского университета ***Николай Иванович Лобачевский*** (1792-1856). Он открыл новую геометрию, которая оказалась также логически безупречной и верной, как и геометрия Евклида. А в

22

Машиностроение и компьютерные технологии
Сетевое научное издание
http://www.technomagelpub.ru

Ссылка на статью:
// Машиностроение и компьютерные технологии.
2017. № 09. С. 44–86.

Представлена в редакцию: 16.08.2017

© НП «НЭИКОН»

УДК 929

Карл Фридрих Гаусс (240-летие со дня рождения)

Самохин В.П.[1], **Мещеринова К.В.**[1], **Тихомирова Е.А.**[1,*]
[*]elizarti@bmstu.ru
[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Представлен краткий обзор основных достижений Карла Фридриха Гаусса, выдающегося немецкого математика, механика, астронома и физика, лауреата медали Копли, иностранного члена Российской Академии наук и английского Королевского общества, автора множества научных работ, в том числе фундаментальных в основных областях математики, механики, астрономии, геодезии и электромагнетизма. Приведены сведения о родителях и семейной жизни Гаусса, интересные факты из его деятельности, включая подробности образования и научно-исследовательской работы на фоне исторической обстановки в Европе первой половины XIX века. Приведены факты участия Гаусса в создании системы мер и весов СГС, названной его именем, его контактов с европейской наукой того времени, в частности, с Александром фон Гумбольдтом и Вильгельмом Вебером при исследованиях магнитного поля Земли с подробностями устройства и работы созданного ими электромагнитного телеграфа, первого в Европе. Именем Гаусса названы многие физические объекты и научные парадигмы, ему посвящены многие памятники, в том числе бюст в Зале славы Вальхалла.

Ключевые слова: Карл Фридрих Гаусс, математика, Церера, геодезия, триангуляция, Александр фон Гумбольдт, Ампер, электромагнетизм, Вильгельм Вебер, телеграф

Карл Фридрих Гаусс – выдающийся немецкий математик, механик, астроном, геодезист и физик, лауреат медали Копли, член английского Королевского общества, Шведской и Российской Академий наук считается одним из величайших математиков всех времён, «королём математиков».

«Не считать ничего сделанным, если ещё кое-что осталось сделать» – девиз, которым руководствовался Гаусс всю жизнь.

Карл Гаусс (1828)
(фото с литографии С. Бендиксена)

Самохин, В. П. Карл Фридрих Гаусс (240-летие со дня рождения) / В. П. Самохин, К. В. Мещеринова, Е. А. Тихомирова. – Текст : электронный // Машиностроение и компьютерные технологии. – 2017. – № 9. – С. 44-86 : 29 портр., 70 рис. – Библиогр.: с. 86 (14 назв.). – URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=30767130 (дата обращения: 05.06.2022). – Режим доступа : свободный. – eISSN: 2587-9278.

29

НАУЧНЫЕ ИДЕИ И ОТКРЫТИЯ К.Ф. ГАУССА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ

Утеева Роза Азербаевна
доктор педагогических наук, профессор, зав.кафедрой «Алгебра и геометрия»,
Тольяттинский государственный университет,
Россия, г. Тольятти, R.Uteeva@tltsu.ru

Аннотация. *В статье рассматриваются научные идеи и открытия Карла Фридриха Гаусса, доступные для понимания школьниками и студентами.*
Ключевые слова: Карл Фридрих Гаусс, научные идеи и открытия, математическое образование.

SCIENTIFIC IDEAS AND DISCOVERIES OF C. F. GAUSS AND THEIR APPLICATION IN MATHEMATICAL EDUCATION

Abstract. *The article discusses scientific ideas and discoveries of Carl Friedrich Gauss, available for understanding students.*
Keywords: Carl Friedrich Gauss, scientific ideas and discoveries, mathematical education.

В примерной основной образовательной программе основного общего образования [7] к *предметным результатам* освоения математики на базовом и углубленном уровнях по разделу «Математика в историческом развитии» отнесены следующие знания и умения учащихся:

– описывать отдельные выдающиеся результаты, полученные в ходе развития математики как науки;

– знать примеры математических открытий и их авторов, в связи с отечественной и всемирной историей;

– характеризовать вклад выдающихся математиков в развитие математики и иных научных областей;

– рассматривать математику в контексте истории развития цивилизации и истории развития науки, понимать роль математики в развитии России.

Однако, многолетний опыт работы со школьниками и студентами – будущими учителями математики свидетельствует, что на практике в школе и в вузе еще недостаточно внимания уделяется обучению математике в контексте истории развития цивилизации и истории развития науки.

Утеева, Р. А. Научные идеи и открытия К. Ф. Гаусса и их применение в математическом образовании / Р. А. Утеева. – Текст : непосредственный // Математика и математическое образование : сборник трудов по материалам VIII международной научной конференции «Математика. Образование. Культура» (к 240-летию Карла Фридриха Гаусса). 2017. – Тольятти : Тольяттинский государственный университет, 2017. – С. 27-31. – Библиогр.: с. 31 (9 назв.). – Имеется электронная версия: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29363415 (дата обращения: 05.06.2022). – Режим доступа : свободный.

[1] *Эрик Темпл Белл родился в Шотландии, учился в Стенфордском университете, работал профессором в Вашингтонском, Чикагском университетах, занимал посты Президента Американской математической ассоциации, был членом Академии наук США.*

Игнатушина, И. В. Обзор результатов Г. Монжа и К. Ф. Гаусса по дифференциальной геометрии / И. В. Игнатушина. – Текст : непосредственный // Вестник Пермского Государственного Гуманитарно-Педагогического Университета. Серия № 2. Физико-Математические и Естественные Науки. 2017. № 1. С. 56-70 : 2 рис. – Библиогр.: с. 69-70 (22 назв.). – Имеется электронная версия: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=32432906 (дата обращения: 05.06.2022). – Режим доступа : свободный. – ISSN 2308-720X. – eISSN: 2308-7188.

30

ИСТОРИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

УДК 514.7

Игнатушина Инесса Васильевна
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математики и методики преподавания математики
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Оренбургский государственный педагогический университет»,
Оренбург, Россия
460014, *Оренбург, Советская,* 19, (3532) 77-24-52, *e-mail: streleec@yandex.ru*

ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ Г. МОНЖА И К.Ф. ГАУССА ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Ignatushina Inessa Vasiljevna
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics and Methodology of Teaching Mathematics
Federal State Budget Educational of Higher Education
*«Orenburg State Pedagogical University»*19,*Soviet,*
460014, *Orenburg, Russia,* (3532) 77-24-52, *e-mail: streleec@yandex.ru*

REVIEW OF THE RESULTS OF G. MONZE AND K.F. GAUSS ON DIFFERENTIAL GEOMETRY

Аннотация: *огромную роль в становлении дифференциальной геометрии сыграл выдающийся математик XVIIIв. Леонард Эйлер. Результаты, полученные им в этой области, вызвали интерес у многих математиков того времени и явились основой для дальнейших исследований. В статье показано развитие идей Эйлера в работах Гаспара Монжа и Карла Фридриха Гаусса, деятельность которых, как известно, оказала определяющее влияние на весь ход формирования дифференциальной геометрии. Достижения Монжа привели дифференциальную геометрию к новому этапу, который характеризуется активным использованием аппарата дифференциальных уравнений, что повлекло за собой дальнейшее расширение ее теоретических и практических возможностей. Следующий этап дифференциальной геометрии связан с именем Гаусса и его исследованиями внутренних свойств поверхностей. С появлением результатов Гаусса в этой области дифференциальная геометрия перестала быть только приложением математического анализа и заняла самостоятельное место в математике.*

Ключевые слова: *дифференциальная геометрия; Леонард Эйлер; Гаспар Монж; Карл Фридрих Гаусс; история математики.*

Abstract: *an eminent was mathematician of XVIII century, who played a huge role in the development of differential geometry, was Leonard Euler. The results obtained by him in this field of activity aroused interest among many mathematicians of that time and were the basis for further research. An article shows the development of Euler's ideas in the investigations of Gaspar pair Monge and Carl Friedrich Gauss, whose activities, as is known, had decisive influence on the*


CARL FRIEDRICH
GAUSS

ПРОБЛЕМА ГАУССА

Отображение Гаусса – едва ли не самая первая одномерная динамическая система, открытая в теории чисел более **200** лет назад. Интерес к данному отображению обусловлен не только историческими и математическими аспектами, но и содержательным физическим приложением.

...**26 октября 1800** года Гаусс записал в своем дневнике: *«Вычисления получаются такими сложными, что, кажется, нет никакой надежды»*. Спустя **12** лет в письме к *Пьеру Симону де Лапласу* от **30 января 1812 года**, Гаусс по тому же поводу признавался: *«Предпринятые мной попытки ... были безуспешны»* (***см. слайды 34, 35***).

Гаусс рассматривал разложение произвольного дробного иррационального числа в непрерывную дробь. Итерационная процедура этого разложения состоит в последовательном вычислении целых и дробных частей от величин, обратных правильным дробям, полученным на предшествующем этапе алгоритма. В результате этого процесса, «генератором» которого является преобразование Гаусса, получаются все новые и новые компоненты непрерывной (цепной) дроби. Процедура построения непрерывной дроби связана с алгоритмом Евклида нахождения наибольшего общего делителя двух целых чисел. И именно в контексте изучения свойств алгоритма Евклида задача Гаусса нашла отражение в известных «компьютерных» монографиях Дональда Кнута (***см. слайды 45, 46***).

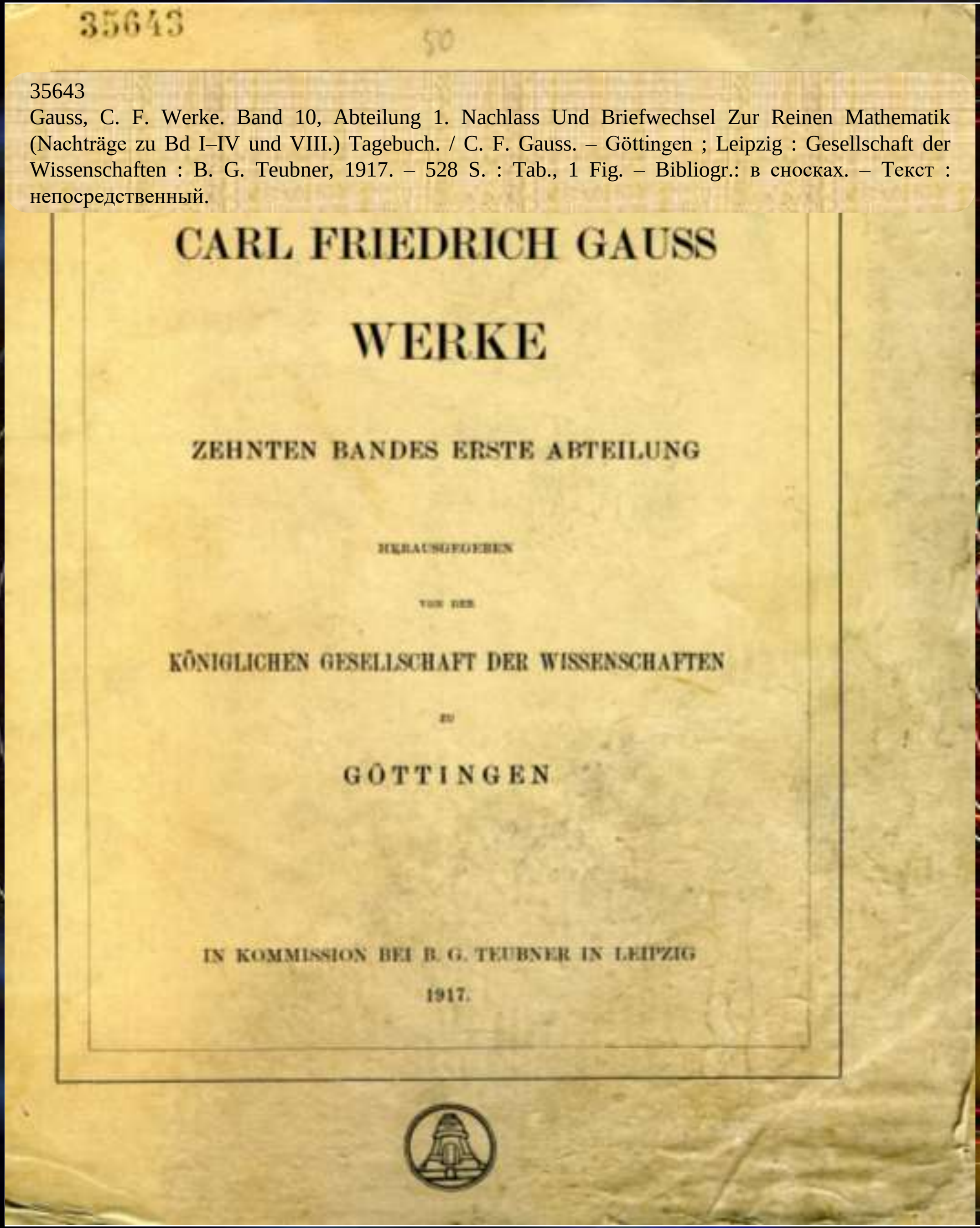
Гаусс ставил сугубо вероятностную задачу. Он полагал, что с ростом «этажности» непрерывной дроби вероятностные законы для составляющих разложения имеют тенденцией стремление к вполне определенному равновесному распределению. Зная данное инвариантное распределение, Гаусс ставил задачей оценить скорость установления равновесного распределения под действием нелинейного преобразования. Сформулированную выше задачу Гаусс решить не смог. Она оказалась гораздо более сложной, чем аппроксимационная задача по оценке скорости приближения самой непрерывной дроби к ее естественному пределу – разлагаемому числу. О своей неудаче Гаусс и признавался в письме к Лапласу. Оценки сходимости исходного распределения случайного числа к инвариантному распределению были получены в **XX** столетии, после того, как задача стала известной математикам из опубликованных архивных материалов. Безусловный приоритет в решении задачи Гаусса принадлежит российским математикам. *Родион Осиевич Кузьмин* в **1928** году первым представил свой вариант решения задачи Гаусса (***см. слайд 36***), и сегодня в математической литературе прочно утвердилась терминология: «теорема Гаусса-Кузьмина», «теорема Кузьмина», «константа Гаусса-Кузьмина-Леви-Вирсинга-Бабенко». В **1935** году *Александр Яковлевич Хинчин*, подробно рассмотрев результат Кузьмина, представил задачу Гаусса как первую задачу метрической теории непрерывных дробей (***см. слайд 38***).

Тематика публикаций, связанных с задачей и отображением Гаусса, перешагнула в **XXI** век. Наиболее обстоятельно итоги решения задачи Гаусса за прошедшее столетие подведены в монографии *Мариуса Иосифеску* и *Кора Краайкэмпа* «***Метрическая теория непрерывных дробей***» (***см. слайд 47***).

Вероятностные распределения коэффициентов непрерывной дроби являются важным элементом вероятностного описания в релятивистской однородной анизотропной космологической модели, демонстрирующей хаотические свойства. Здесь отображение Гаусса выступает как генератор длин «казнеровских эпох», вводимых для описания ранних этапов эволюции пространственно-временной метрики вблизи «особой точки» в решении уравнений Эйнштейна (***см. слайды 62-65***).

Непрерывные дроби как элемент математических моделей нашли и другие интересные применения в физике, технике и хаотической динамике, например, при анализе квазипериодической структуры квазикристаллических веществ, при расчете электротехнических схем и так далее.

35643
Gauss, C. F. Werke. Band 10, Abteilung 1. Nachlass Und Briefwechsel Zur Reinen Mathematik (Nachträge zu Bd I–IV und VIII.) Tagebuch. / C. F. Gauss. – Göttingen ; Leipzig : Gesellschaft der Wissenschaften : B. G. Teubner, 1917. – 528 S. : Tab., 1 Fig. – Bibliogr.: в сносках. – Текст : непосредственный.


35643

50

CARL FRIEDRICH GAUSS

WERKE

ZEHNTEN BANDES ERSTE ABTEILUNG

HERAUSGEGEBEN

VON DER

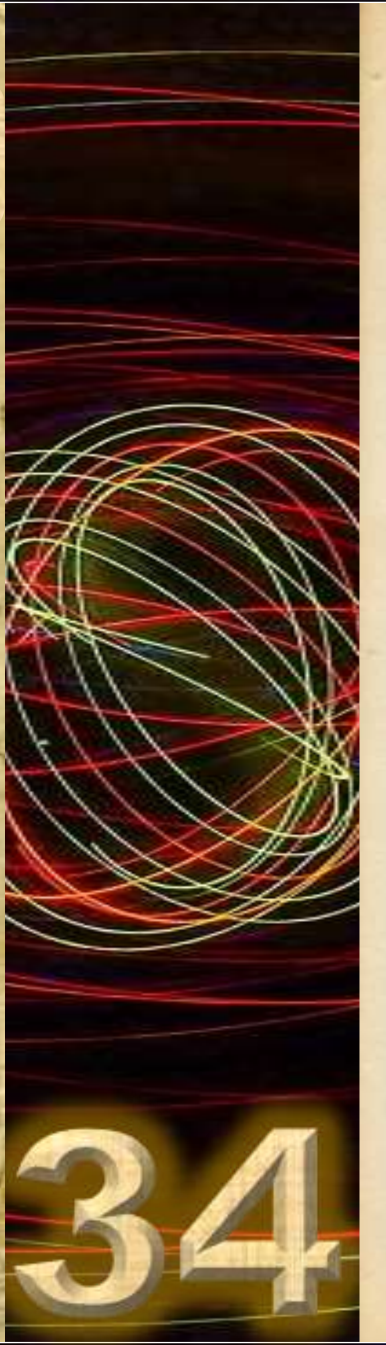
KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU

GÖTTINGEN

IN KOMMISSION BEI B. G. TEUBNER IN LEIPZIG

1917.



Ende der Note) gezeigt hätten, wie die allgemeine Gültigkeit des Gesetzes des continuirlichen Bruches nach Ihrem angedeuteten Verfahren folge. Die Constante 0,577... hatte ich schon vor längerer Zeit auf 23 Stellen auf doppeltem Wege aus 10 und 20 Gliedern berechnet und von der 20sten an von MASCHERONI verschieden gefunden, nemlich $\overset{19}{0}60653$[*]; ich glaube, dass meine Zahl die richtige ist, habe aber die Rechnungen selbst nicht aufgehoben. — Mit verschiedenen Ihrer Untersuchungen werden Sie in meiner nun bald vollendeten Abhandlung Berührungspuncte finden. — Die Ableitungen Artikel 17.[**]], die sich auf divergirende Reihen und divergirende unendliche Producte gründen, also auf einen immer etwas schlüpferigen Weg, möchten doch wol noch einigen Bedenklichkeiten Platz lassen. — . . . .

[5.]

GAUSS an LAPLACE.

Göttingen ce 30. Janvier 1812

Monsieur

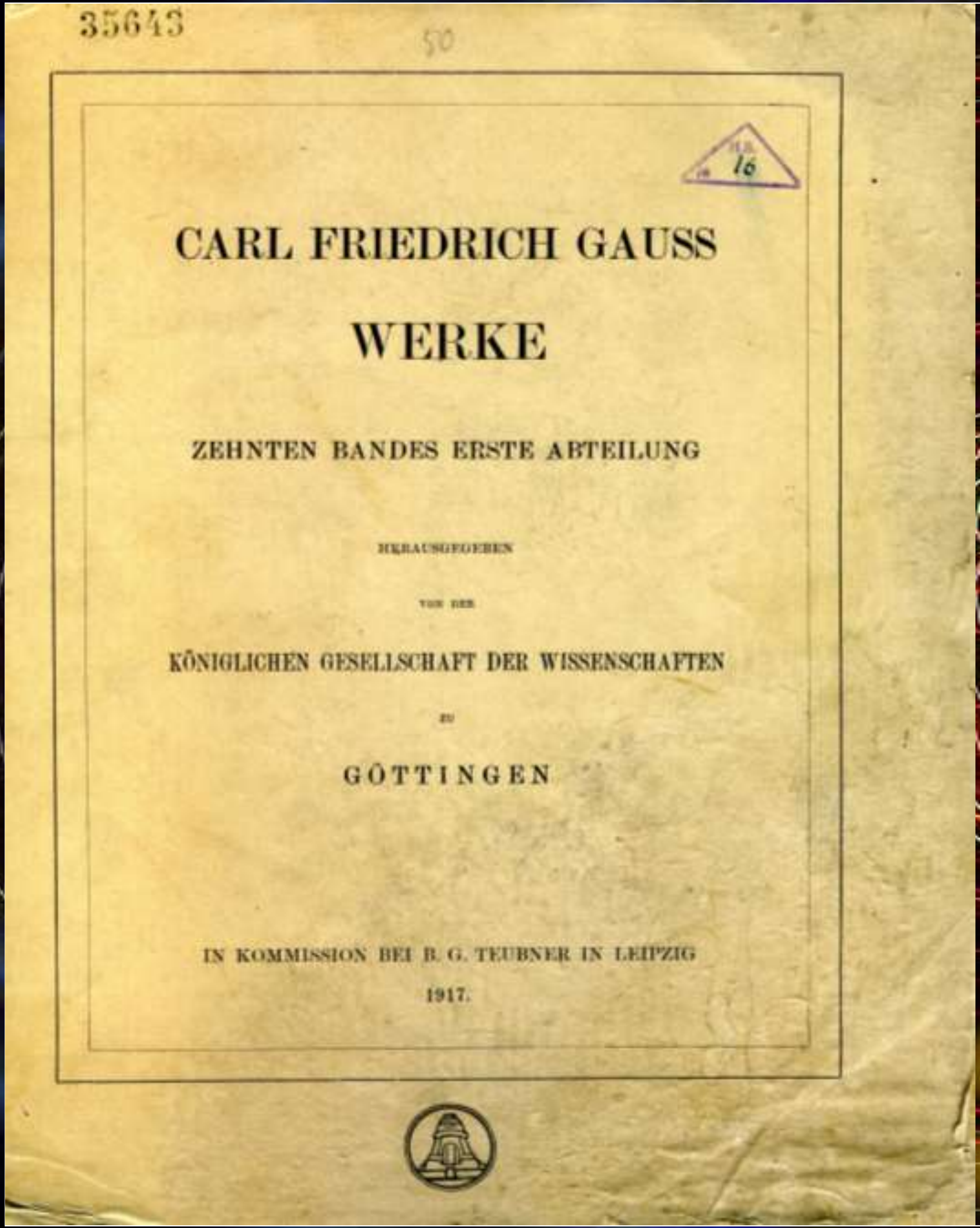
Je vous dis mille remercimens pour les deux memoires que vous m'avés fait l'honneur de m'envoyer[***]] et que j'ai reçus dans ces jours. Les fonctions que vous y traités aussi bien que les questions de probabilités, sur lesquelles vous preparés un grand ouvrage ont un grand attrait pour moi, quoique j'aie peu travaillé moimeme sur les dernieres. Je me rappelle pourtant d'un probleme curieux, duquel je me suis occupé il y a 12 ans, mais lequel je n'ai pas reussi alors à resoudre à ma satisfaction[†]]. Peut être daignerés vous

[*] Siehe MASCHERONI, a. a. O. S. 431; die zwanzigste, einundzwanzigste und zweiundzwanzigste Stelle sind bei MASCHERONI in der Tat fehlerhaft, dagegen sind von der dreiundzwanzigsten Stelle an die Ziffern richtig, bis zur letzten (zweiunddreißigsten), die um eine Einheit erhöht werden muß. Man wird hiernach bei MASCHERONI einen Druckfehler vermuten. Die von GAUSS hier als 2 angegebene dreiundzwanzigste Stelle lautet richtig 1, vergl. auch *Disquisitiones circa seriem* art. 31, Werke III, S. 134, Text und Fußnote. Die bei MASCHERONI fehlerhaften Ziffern hat auch SOLDNER a. a. O. S. 13 richtig angegeben.]

[**] FR. W. BESSEL, Abhandlungen II, 1876, S. 349, 1. Spalte.]

[***] Es handelt sich wohl um die beiden folgenden Abhandlungen von LAPLACE: *Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres et sur leur application aux probabilités*, Mémoires de l'Académie des Sciences **10** (1809), Paris 1810, S. 353 und *Mémoire sur les intégrales définies et sur leur application aux probabilités etc.*, ebenda **11** (1810), Paris 1811, S. 279.]

[†] Siehe die Tagebuchaufzeichnung Nr. 113 vom 25. Oktober 1800.]


35643

CARL FRIEDRICH GAUSS

WERKE

ZEHNTEN BANDES ERSTE ABTEILUNG

HERAUSGEGEBEN

VON DER

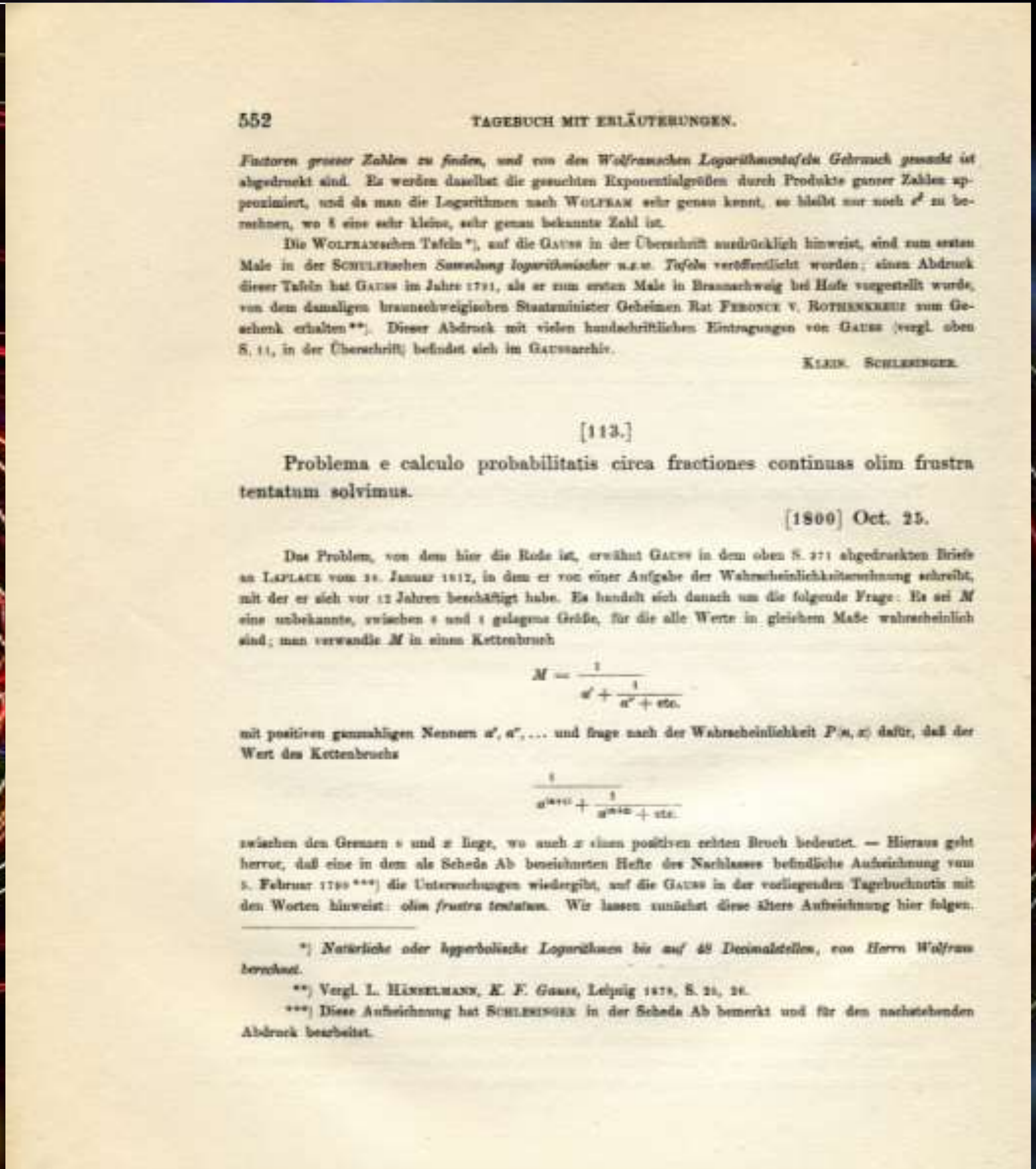
KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU

GÖTTINGEN

IN KOMMISSION BEI B. G. TEUBNER IN LEIPZIG

1917.



Factoren grosser Zahlen zu finden, und von den Wolframschen Logarithmentafeln Gebrauch gemacht ist abgedruckt sind. Es werden daselbst die gesuchten Exponentialgrößen durch Produkte ganzer Zahlen approximiert, und da man die Logarithmen nach WOLFRAM sehr genau kennt, so bleibt nur noch e^{δ} zu berechnen, wo δ eine sehr kleine, sehr genau bekannte Zahl ist.

Die WOLFRAMschen Tafeln *), auf die GAUSS in der Überschrift ausdrücklich hinweist, sind zum ersten Male in der SCHULZEschen *Sammlung logarithmischer u.s.w. Tafeln* veröffentlicht worden; einen Abdruck dieser Tafeln hat GAUSS im Jahre 1791, als er zum ersten Male in Braunschweig bei Hofe vorgestellt wurde, von dem damaligen braunschweigischen Staatsminister Geheimen Rat FERONCE V. ROTHENKREUZ zum Geschenk erhalten **). Dieser Abdruck mit vielen handschriftlichen Eintragungen von GAUSS (vergl. oben S. 11, in der Überschrift) befindet sich im GAUSSarchiv.

KLEIN. SCHLESINGER.

[113.]

Problema e calculo probabilitatis circa fractiones continuas olim frustra tentatum solvimus.

[1800] Oct. 25.

Das Problem, von dem hier die Rede ist, erwähnt GAUSS in dem oben S. 371 abgedruckten Briefe an LAPLACE vom 30. Januar 1812, in dem er von einer Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung schreibt, mit der er sich vor 12 Jahren beschäftigt habe. Es handelt sich danach um die folgende Frage: Es sei M eine unbekannte, zwischen 0 und 1 gelegene Größe, für die alle Werte in gleichem Maße wahrscheinlich sind; man verwandle M in einen Kettenbruch

$$M = \frac{1}{a' + \frac{1}{a'' + \text{etc.}}}$$

mit positiven ganzzahligen Nennern $a', a'', \ldots$ und frage nach der Wahrscheinlichkeit $P(n, x)$ dafür, daß der Wert des Kettenbruchs

$$\frac{1}{a^{(n+1)} + \frac{1}{a^{(n+2)} + \text{etc.}}}$$

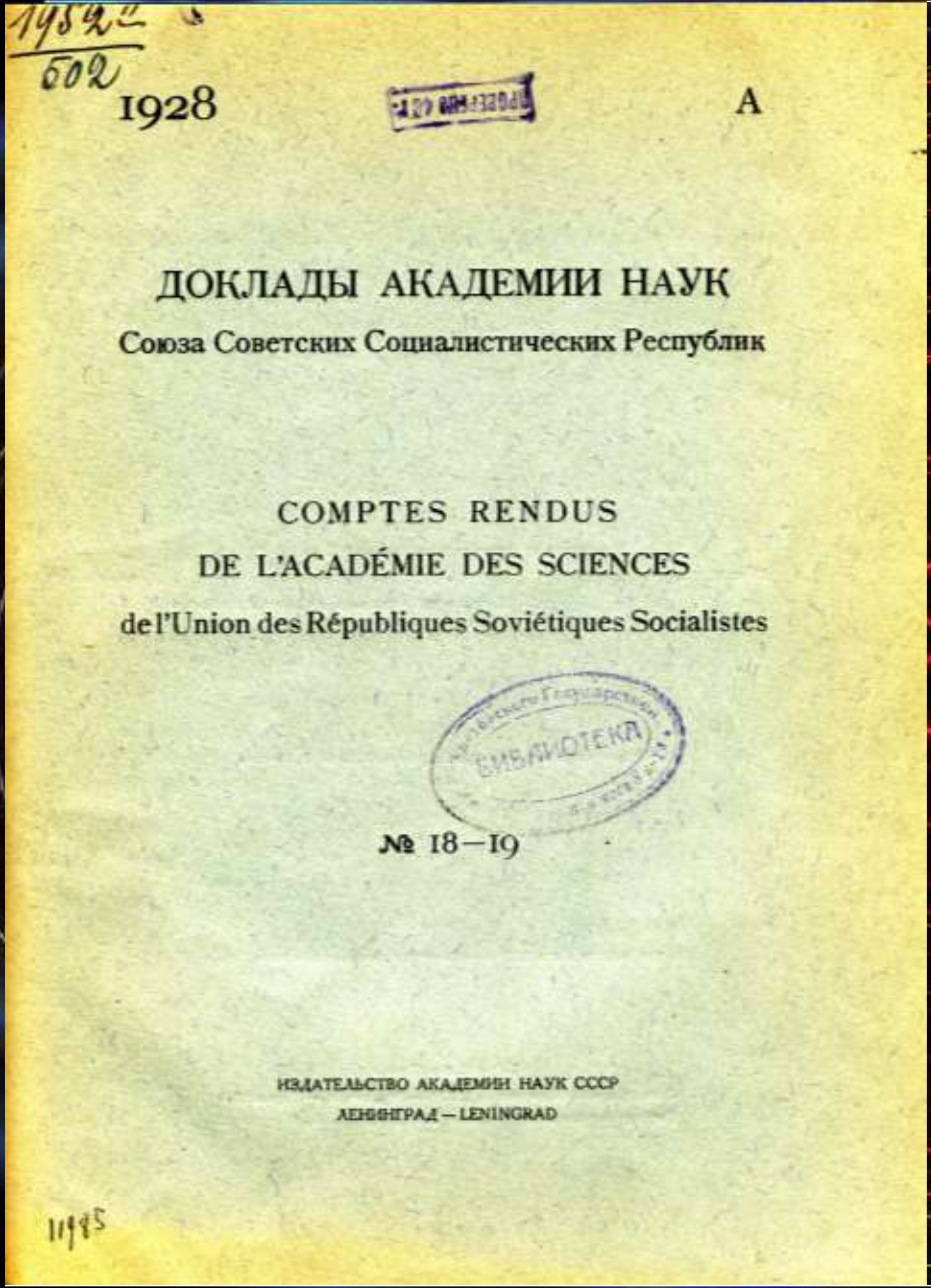
zwischen den Grenzen 0 und x liege, wo auch x einen positiven echten Bruch bedeutet. — Hieraus geht hervor, daß eine in dem als Scheda Ab bezeichneten Hefte des Nachlasses befindliche Aufzeichnung vom 5. Februar 1799 ***) die Untersuchungen wiedergibt, auf die GAUSS in der vorliegenden Tagebuchnotiz mit den Worten hinweist: *olim frustra tentatum*. Wir lassen zunächst diese ältere Aufzeichnung hier folgen.

*) *Natürliche oder hyperbolische Logarithmen bis auf 48 Decimalstellen, von Herrn Wolfram berechnet.*

**) Vergl. L. HÄNSELMANN, *K. F. Gauss*, Leipzig 1878, S. 25, 26.

***) Diese Aufzeichnung hat SCHLESINGER in der Scheda Ab bemerkt und für den nachstehenden Abdruck bearbeitet.

35643
Gauss, C. F. Werke. Band 10, Abteilung 1. Nachlass Und Briefwechsel Zur Reinen Mathematik (Nachträge zu Bd I–IV und VIII.) Tagebuch. / C. F. Gauss. – Göttingen ; Leipzig : Gesellschaft der Wissenschaften : B. G. Teubner, 1917. – 528 S. : Tab., 1 Fig. – Bibliogr.: в сносках. – Текст : непосредственный.



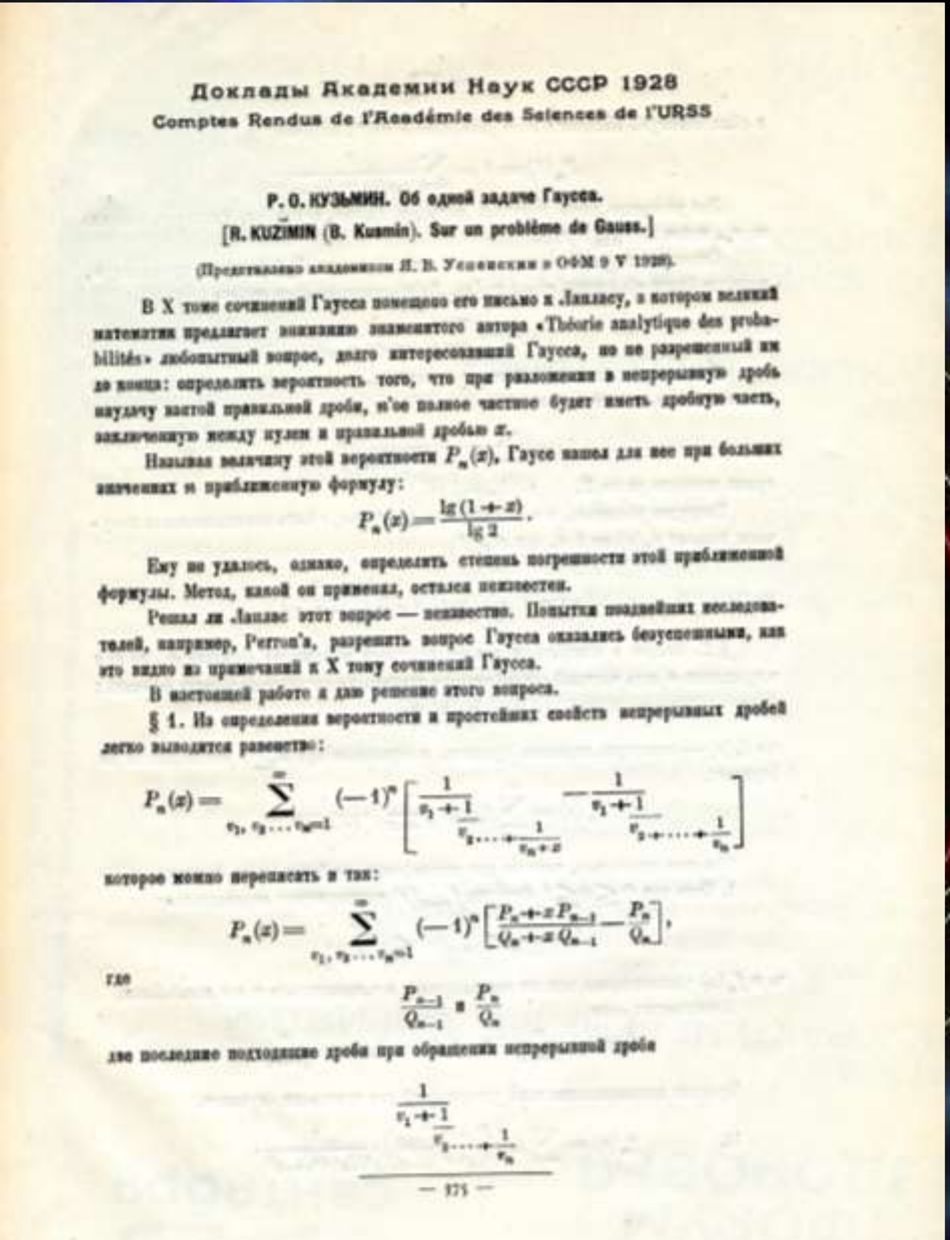
1928 A

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК
Союза Советских Социалистических Республик

COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
de l'Union des Républiques Soviétiques Socialistes

№ 18—19

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
ЛЕНИНГРАД — LENINGRAD



Р. О. КУЗЬМИН. Об одной задаче Гаусса.

[R. KUZIMIN (В. Kusmin). Sur un problème de Gauss.]

(Представлено академиком Я. В. Успенским в ОФМ 9 V 1928).

В X томе сочинений Гаусса помещено его письмо к Лапласу, в котором великий математик предлагает вниманию знаменитого автора «Théorie analytique des probabilités» любопытный вопрос, долго интересовавший Гаусса, но не разрешенный им до конца: определить вероятность того, что при разложении в непрерывную дробь наудачу взятой правильной дроби, n'ое полное частное будет иметь дробную часть, заключенную между нулем и правильной дробью x.

Называя величину этой вероятности $P_n(x)$, Гаусс нашел для нее при больших значениях n приближенную формулу:

$$P_n(x) = \frac{\lg(1+x)}{\lg 2}.$$

Ему не удалось, однако, определить степень погрешности этой приближенной формулы. Метод, какой он применял, остался неизвестен.

Решил ли Лаплас этот вопрос — неизвестно. Попытки позднейших исследователей, например, Perron'а, разрешить вопрос Гаусса оказались безуспешными, как это видно из примечаний к X тому сочинений Гаусса.

В настоящей работе я даю решение этого вопроса.

§ 1. Из определения вероятности и простейших свойств непрерывных дробей легко выводится равенство:

$$P_n(x) = \sum_{\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_n = 1}^{\infty} (-1)^n \left[\cfrac{1}{\nu_1 + \cfrac{1}{\nu_2 + \cdots + \cfrac{1}{\nu_n + x}}} - \cfrac{1}{\nu_1 + \cfrac{1}{\nu_2 + \cdots + \cfrac{1}{\nu_n}}} \right]$$

которое можно переписать и так:

$$P_n(x) = \sum_{\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_n = 1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{P_n + x P_{n-1}}{Q_n + x Q_{n-1}} - \frac{P_n}{Q_n} \right],$$

где

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \text{ и } \frac{P_n}{Q_n}$$

две последние подходящие дроби при обращении непрерывной дроби

$$\cfrac{1}{\nu_1 + \cfrac{1}{\nu_2 + \cdots + \cfrac{1}{\nu_n}}}$$

Кузьмин, Р. О. Об одной задаче Гаусса / Р. О. Кузьмин. – Текст : непосредственный // Доклады АН СССР. Серия А. – 1928. – № 18–19. – С. 375-380.

BULLETIN DE LA S. M. F.

P. LEVY

Sur les lois de probabilité dont dépendent les quotients complets et incomplets d'une fraction continue

Bulletin de la S. M. F., tome 57 (1929), p. 178-194
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1929__57__178_0>

SUR LES LOIS DE PROBABILITÉ DONT DÉPENDENT LES QUOTIENTS COMPLETS ET INCOMPLETS D'UNE FRACTION CONTINUE (1);

PAR M. PAUL LÉVY.

1. *Notations et formules préliminaires.* — Soit un nombre X, dont le développement en fraction continue est défini par les formules bien connues

$$(1)\quad X = a_0 + \frac{1}{x_1},\quad x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2},\quad \ldots,\quad x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}},\quad \ldots$$

a_n représentant le plus grand entier compris dans x_n. La relation entre X et x_n est de la forme

$$(2)\qquad X = \frac{P_n x_n + P_{n-1}}{Q_n x_n + Q_{n-1}},$$

les coefficients P_n et Q_n vérifiant les relations

$$(3)\qquad P_{n+1} = P_n a_n + P_{n-1},\quad Q_{n+1} = Q_n a_n + Q_{n-1},$$

$$(4)\qquad P_n Q_{n+1} - Q_n P_{n+1} = (-1)^n,$$

d'où l'on déduit

$$(5)\qquad \left|\frac{dX}{dx_n}\right| = \frac{1}{(Q_n x_n + Q_{n-1})^2}.$$

Le problème que nous nous proposons est l'étude de la loi de probabilité à laquelle obéit x_n, lorsque X est choisi au hasard. La valeur de $X - a_0$ intervenant seule, on peut supposer $a_0 = 0$;

(1) Les principaux résultats du présent travail ont été résumés dans une Note présentée à l'Académie des Sciences le 10 mars 1929. J'ai appris depuis, par une lettre de M. G. Polya, que le résultat fondamental, exprimé par la formule (35) du n° 4, a été indiqué sans démonstration dans une lettre de Gauss à Laplace, et qu'au sixième Congrès international des Mathématiciens (Bologne, septembre 1928), M. Kuzmin a indiqué la démonstration de cette formule. Cette démonstration n'ayant pas encore été publiée, je ne puis encore la comparer à celle donnée dans le présent travail.

Lévy, P. Sur les lois de probabilité dont dépendent les quotients complets et incomplets d'une fraction continue / P. Lévy. – DOI 10.24033/bsmf.1150. – Текст : непосредственный // Bulletin de la Société Mathématique de France. – 1929. – Т. 57. – P. 178-194. – Bibliogr.: в сносках. – Имеется электронная версия: http://www.numdam.org/articles/10.24033/bsmf.1150 (дата обращения: 27.04.2022). – Режим доступа : свободный. – ISSN 0037-9484.

А424165, А426576, А554748
Хинчин, А. Я. Цепные дроби / А. Я. Хинчин. – 4-е издание, стереотипное. – Москва : Наука, 1978. – 112 с. : 2 рис. – Библиогр. в сносках. – Текст : непосредственный.

сходится. Обозначим через E_n множество чисел α отрезка $(0, 1)$, которые при подходяще выбранном целом k удовлетворяют неравенству

$$\left|\alpha - \frac{k}{n}\right| < \frac{f(n)}{n}$$

$\Big[$очевидно, множество E_n есть просто совокупность интервалов длины $\frac{2f(n)}{n}$, имеющих свои центры в точках $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$, и интервалов $\left(0, \frac{f(n)}{n}\right)$ и $\left(1-\frac{f(n)}{n}, 1\right)\Big]$. Мы имеем:

$$\mathfrak{M}E_n \leqslant 2f(n)$$

$\left(\text{знак} < \text{ имеет место в случае } f(n) > \frac{1}{2}\right)$. Таким образом, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}E_n$$

сходится; отсюда мы заключаем, как мы это делали уже неоднократно, что почти всякое число α отрезка $(0, 1)$ может принадлежать не более чем конечному числу множеств E_n, а это означает, что почти все числа α отрезка $(0, 1)$ при достаточно большом целом положительном q и любом целом p удовлетворяют неравенству

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{f(q)}{q},$$

чем доказывается и второе утверждение теоремы.

В следующем параграфе мы познакомимся с методом, который позволяет решать значительно более глубокие задачи метрической теории цепных дробей.

§ 15. Проблема Гаусса и теорема Кузьмина

В настоящем параграфе мы рассмотрим проблему, которая исторически была первой задачей метрической теории цепных дробей. Эта задача, поставлен-

Кузьмин, Р. О. К метрической теории непрерывных дробей / Р. О. Кузьмин. – Текст : непосредственный // Учёные записки Ленинградского университета. Серия математических наук. – 1948. – Вып. 15. – С. 163-173. – Библиогр. в сносках.

К МЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ

Р. О. Кузьмин

Пусть $\xi = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n + \xi_n}}}$.

Здесь $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — целые положительные числа, а ξ_n — правильная положительная дробь, равно как и ξ.

В черновых тетрадях Гаусса в 1799 г. и в письме Гаусса к Лапласу поставлена задача об асимптотическом выражении при $n \to \infty$ вероятности $P_n(x)$ неравенства $0 < \xi_n < x$. При этом считается, что различные значения ξ равновероятны. Таким образом, $P_n(x)$ есть мера множества точек ξ, у которых $0 < \xi_n < x$, а числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ принимают независимо друг от друга все возможные целые положительные значения.

Гаусс утверждал, что справедливо равенство:

$$P_n(x) = \frac{\log(1+x)}{\log 2} + \Delta_n(x),$$

где $\Delta_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$.

Первое доказательство этой теоремы Гаусса было дано мной в 1928 г.[1] Мне удалось тогда доказать, что справедливо равенство:

$$P_n(x) = \frac{\log(1+x)}{\log 2} + O(e^{-\alpha\sqrt{n}}),$$

где α — соответствующая положительная постоянная.

В 1929 г. Поль Леви,[2] пользуясь совсем другим методом, дал лучший результат, а именно формулу:

[1] Р. О. Кузьмин. Об одной задаче Гаусса, ДАН СССР (1928).

[2] P. Lévy. Sur le développement en fraction continue d'un nombre choisi au hasard, Compositio mathematica, v. 3 (1936).

ACTA MATHEMATICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

TOMUS XII FASCICULI 3—4

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1961

ACTA MATH. HUNG.

Szüsz, P. Über einen Kusminschen Satz / P. Szüsz. – Текст : непосредственный // Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae. – 1961. – Vol. 12, Iss. 3–4. – P. 447-453. – Bibliogr.: P. 453 (6 Ref.).

ÜBER EINEN KUSMINSCHEN SATZ

Von

P. SZÜSZ (Budapest)

(*Vorgelegt von* A. RÉNYI)

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. P. TURÁN *zum 50. Geburtstag gewidmet*

In der vorliegenden Note werden die folgenden Bezeichnungen benutzt:[1]

α bedeutet stets eine zwischen Null und Eins gelegene reelle Zahl; $a_1, a_2, \ldots$ bedeuten die Teilnenner der regelmäßigen Kettenbruchentwicklung von α, d. h.

$$\alpha = [0; a_1, a_2, \ldots]. \tag{1}$$

(Im Falle eines rationalen α bricht die Entwicklung (1) nach endlich vielen Schritten ab.) Ferner wird $a_0 = 0$ und

$$\zeta_0 = \alpha, \quad \zeta_n = a_n + \frac{1}{\zeta_{n+1}} \qquad (n = 0, 1, \ldots), \tag{2}$$

$$z_n = \frac{1}{\zeta_{n+1}} \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{3}$$

gesetzt. Offenbar gilt $0 < z_n \leqq 1$. Es bezeichne $m_n(x)$ das Lebesguesche Maß der Menge der Zahlen α, für die $z_n \leqq x$ gilt $(n = 0, 1, \ldots)$.

Noch GAUSS hat die Frage aufgeworfen, den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} m_n(x)$ zu bestimmen. In einem Brief an LAPLACE behauptete er, es sei ihm gelungen, die Limesrelation

$$\lim_{n\to\infty} m_n(x) = \frac{\log(1+x)}{\log 2} \tag{4}$$

zu beweisen. Sein Beweis wurde jedoch nicht veröffentlicht. Der erste bekannte Beweis von (4) rührt von KUSMIN [1] her.[2] Er bewies statt (4) sogar schärfer

$$m_n(x) = \frac{\log(1+x)}{\log 2} + O(q^{\sqrt{n}}), \tag{5}$$

wobei q eine Konstante bedeutet, die kleiner ist als 1. Aus (4) bzw. (5) haben KHINTCHINE [2], [3] und P. LÉVY [5] verschiedene Schlüsse gezogen, u. a. die Existenz der Dichte der k mit $a_k = r$ (r ist eine natürliche Zahl),

[1] Die Bezeichnungen stimmen mit denen von KHINTCHINE [4] überein.
[2] Der Kusminsche Beweis wurde auch im Buch [4] von KHINTCHINE wiedergegeben.

ACADEMIA SCIENTIARUM POLONA
INSTITUTUM MATHEMATICUM

ACTA ARITHMETICA

a S. LUBELSKI et A. WALFISZ fundata, a W. SIERPIŃSKI continuata

XXIV

PAULO ERDŐS
AETATIS LUSTRUM SEXTUM DECIMUM INGREDIENTI

Wirsing, E. On the theorem of Gauss-Kusmin-Lévy and a Frobenius-type theorem for function spaces / E. Wirsing. – DOI 10.4064/aa-24-5-507-528. – Текст : непосредственный // Acta Arithmetica. – 1974. Vol. 24. – P. 507-528. – Bibliogr.: p. 528 (6 Ref.). – Имеется электронная версия: https://www.impan.pl/en/publishing-house/journals-and-series/acta-arithmetica/all/24/5/100120/on-the-theorem-of-gauss-kusmin-levy-and-a-frobenius-type-theorem-for-function-spaces (дата обращения: 27.05.2022). – Режим доступа : свободный. – ISSN 0065-1036.

WARSZAWA
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

ACTA ARITHMETICA
XXIV (1974)

On the theorem of Gauss-Kusmin-Lévy and a Frobenius-type theorem for function spaces

by

EDUARD WIRSING (Marburg/Lahn)

1. Introduction. If one wants to investigate the distribution of values of a_n in the regular continued-fraction expansion

$$a = [0; a_1, a_2, \ldots] := \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}},$$

where a varies randomly through the interval $(0, 1)$, one is readily led to considering the (Lebesgue-) measure $m_n(x)$ of the set

$$\{a; [0, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots] < x\},$$

where $0 \leqslant x \leqslant 1$ (see for instance Khintchine [3]). Gauss [2], in a letter to Laplace, stated that

$$m_n(x) \to \frac{\log(1+x)}{\log 2} \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

The first one to publish a proof of this theorem was Kusmin [4] in 1928. Actually he proved that if we put

$$m_n(x) = \frac{\log(1+x)}{\log 2} + r_n(x)$$

then $r_n(x) = O(q^{\sqrt{n}})$ as $n \to \infty$, where q is some constant, $0 < q < 1$. Lévy [5] independently proved

$$r_n(x) = O(q^n)$$

by a different method (using probabilistic notions). As Szüsz [6] has shown this same result can also be obtained by Kusmin's approach. Szüsz' proof is easier than the two earlier ones and appears to give a smaller value ($q = 0.485$) than Lévy's $q = 0.7$ if one accepts the trouble of some calculation. He does not give all details though.

ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

1978

ТОМ 238

№ 5

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

Бабенко, К. И. Об одной задаче Гаусса / К. И. Бабенко. – Текст : непосредственный // Доклады АН СССР. – 1978. – Т. 238, № 5. – С. 1021-1024. – Библиогр.: с. 1024 (9 назв.). – Имеется электронная версия: http://mi.mathnet.ru/rus/dan/v238/i5/p1021 (дата обращения: 25.05.2022). – Режим доступа : свободный. – ISSN 0869-5652.

Доклады Академии наук СССР
1978. Том 238, № 5

УДК 517.54

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР К. И. БАБЕНКО

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ГАУССА

1. Любое вещественное число ξ, $0<\xi<1$, единственным образом разлагается в цепную дробь $\xi=[0; a_1, \ldots, a_m, \ldots]$, элементы которой a_i — положительные целые числа. Пусть $\eta_n(\xi)=[0; a_{n+1}, \ldots]$ и $F_n(x)$ — мера множества тех $\xi\in[0, 1]$, для которых $\eta_n(\xi)<x$. В одном из своих писем к Лапласу от 1812 г. Гаусс утверждал, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$, $0\leqslant x\leqslant 1$, $r_n(x)=F_n(x)-\log_2(1+x)$, и поставил вопрос об изучении асимптотики функции $r_n(x)$ при $n\uparrow\infty$. В 1928 г. Р. О. Кузьмин (1) установил, что при $0\leqslant x\leqslant 1$ $r_n(x)=O(e^{-A\sqrt{n}})$, $A>0$, а несколько позже П. Леви (2) доказал, что $|r_n(x)|\leqslant(0{,}68)^n$. В 1961 г. П. Сюс (3) показал, что константу 0,68 можно снизить до 0,4.

2. Гауссу было известно, что $F_{n+1}(x)=(GF_n')(x)$, $n\geqslant 0$, где оператор G: $C[0, 1]\to C[0, 1]$ определяется формулой

$$(Gf)(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{k+x}\right)(k+x)^{-2}. \tag{1}$$

При изучении оператора G полезно использовать следующие его свойства: если $g=Gf$, то

$$\begin{aligned} \max_{0\leqslant x\leqslant 1}[(1+x)|g(x)|]&\leqslant\max_{0\leqslant x\leqslant 1}[(1+x)|f(x)|],\\ \min_{0\leqslant x\leqslant 1}[(1+x)g(x)]&\geqslant\min_{0\leqslant x\leqslant 1}[(1+x)f(x)]. \end{aligned} \tag{2}$$

В 1973 г. Э. Виразинг (4) доказал, что $r_n(x)=\lambda_2^n\int\limits_0^x\psi(t)\,dt+O[x(1-x)\mu^n]$, где $\lambda_2=-0{,}3036630029\ldots$ — собственное число, а ψ — соответствующая собственная функция оператора G; $|\mu|\leqslant|\lambda_2|-0{,}031$. Э. Виразинг исследует последовательность $\{g_n(x)\}_0^\infty$, $g_n(x)=\dfrac{d}{dx}\left[(1+x)\dfrac{dr_n(x)}{dx}\right]$, $0\leqslant x\leqslant 1$, $n\geqslant 0$. Легко видеть, что $g_n=(-U)^n g_0$, $n\geqslant 1$, и что $Uf\geqslant 0$, если $f\geqslant 0$. Последнее свойство лежит в основе рассуждений Э. Виразинга.

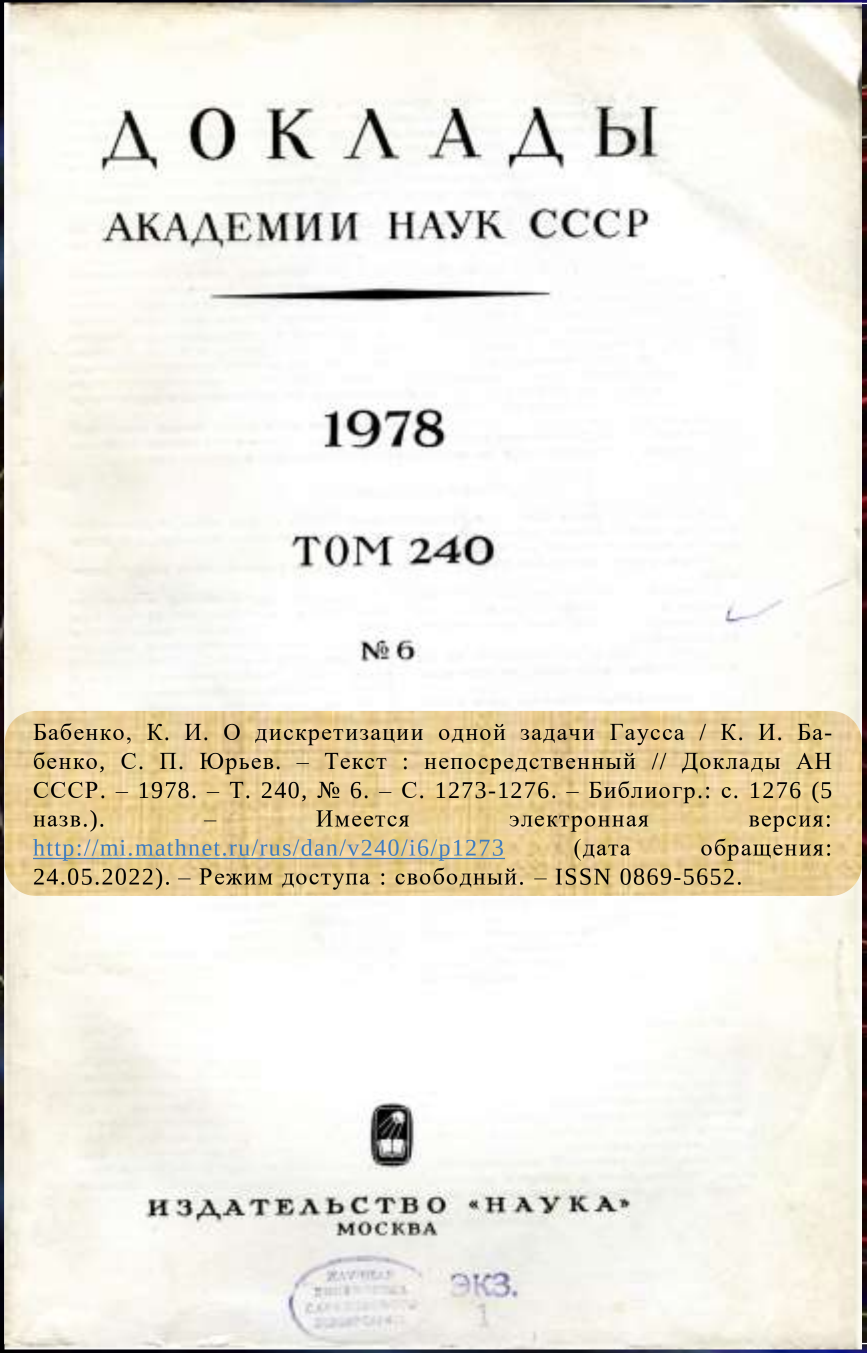
3. Автор и С. П. Юрьев численно исследовали последовательность $\{F_n(x)\}_0^\infty$ (5) и с помощью вычислений на ЭВМ дали строгое доказательство формулы, уточняющей формулу Э. Виразинга. В то время, когда писался препринт (5), автору была неизвестна работа Э. Виразинга, на которую нам любезно указал Д. Кнут.

Обозначим через H_2 банахово пространство функций $f(z)$, регулярных в полуплоскости $\operatorname{Re} z>-{}^1/_2$, и норму в нем определим как

$$\|f\|^2=\sup_{-1/2<x<\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|^2\,dy.$$

Рассмотрим на H_2 оператор $\mathfrak{G}$, определяемый по формуле (1), при условии, что $\operatorname{Re} z>-{}^1/_2$. Ясно, что $\mathfrak{G}$ отображает H_2 в себя.

Теорема 1. *Оператор $\mathfrak{G}$ компактный, спектр его чисто вещественный. Если λ_j, $j=1, 2, \ldots$, — собственные значения $\mathfrak{G}$ с учетом кратности,*



ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

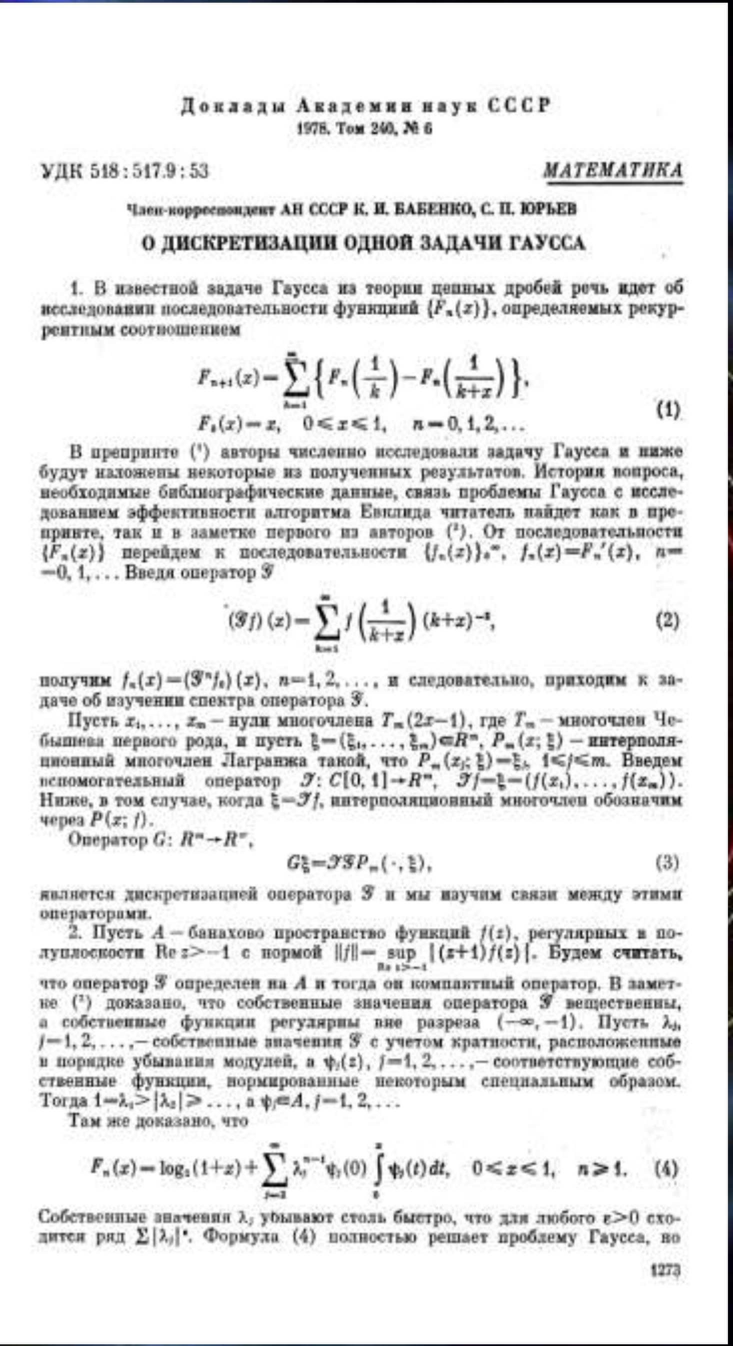
1978

ТОМ 240

№ 6

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

Бабенко, К. И. О дискретизации одной задачи Гаусса / К. И. Бабенко, С. П. Юрьев. – Текст : непосредственный // Доклады АН СССР. – 1978. – Т. 240, № 6. – С. 1273-1276. – Библиогр.: с. 1276 (5 назв.). – Имеется электронная версия: http://mi.mathnet.ru/rus/dan/v240/i6/p1273 (дата обращения: 24.05.2022). – Режим доступа : свободный. – ISSN 0869-5652.



Доклады Академии наук СССР
1978. Том 240, № 6

УДК 518 : 517.9 : 53 — *МАТЕМАТИКА*

Член-корреспондент АН СССР К. И. БАБЕНКО, С. П. ЮРЬЕВ

О ДИСКРЕТИЗАЦИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ГАУССА

1. В известной задаче Гаусса из теории цепных дробей речь идет об исследовании последовательности функций $\{F_n(x)\}$, определяемых рекуррентным соотношением

$$F_{n+1}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{F_n\left(\frac{1}{k}\right)-F_n\left(\frac{1}{k+x}\right)\right\},\quad F_0(x)=x,\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\quad n=0,1,2,\ldots \tag{1}$$

В препринте (¹) авторы численно исследовали задачу Гаусса и ниже будут изложены некоторые из полученных результатов. История вопроса, необходимые библиографические данные, связь проблемы Гаусса с исследованием эффективности алгоритма Евклида читатель найдет как в препринте, так и в заметке первого из авторов (²). От последовательности $\{F_n(x)\}$ перейдем к последовательности $\{f_n(x)\}_0^\infty$, $f_n(x)=F_n'(x)$, $n=0,1,\ldots$ Введя оператор $\mathscr{G}$

$$(\mathscr{G}f)(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{k+x}\right)(k+x)^{-2}, \tag{2}$$

получим $f_n(x)=(\mathscr{G}^n f_0)(x)$, $n=1,2,\ldots$, и следовательно, приходим к задаче об изучении спектра оператора $\mathscr{G}$.

Пусть $x_1,\ldots,x_m$ – нули многочлена $T_m(2x-1)$, где T_m – многочлен Чебышева первого рода, и пусть $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_m)\in R^m$, $P_m(x;\xi)$ – интерполяционный многочлен Лагранжа такой, что $P_m(x_j;\xi)=\xi_j$, $1\leqslant j\leqslant m$. Введем вспомогательный оператор $\mathscr{J}: C[0,1]\to R^m$, $\mathscr{J}f=\xi=(f(x_1),\ldots,f(x_m))$. Ниже, в том случае, когда $\xi=\mathscr{J}f$, интерполяционный многочлен обозначим через $P(x;f)$.

Оператор $G: R^m\to R^m$,

$$G\xi=\mathscr{J}\mathscr{G}P_m(\cdot,\xi), \tag{3}$$

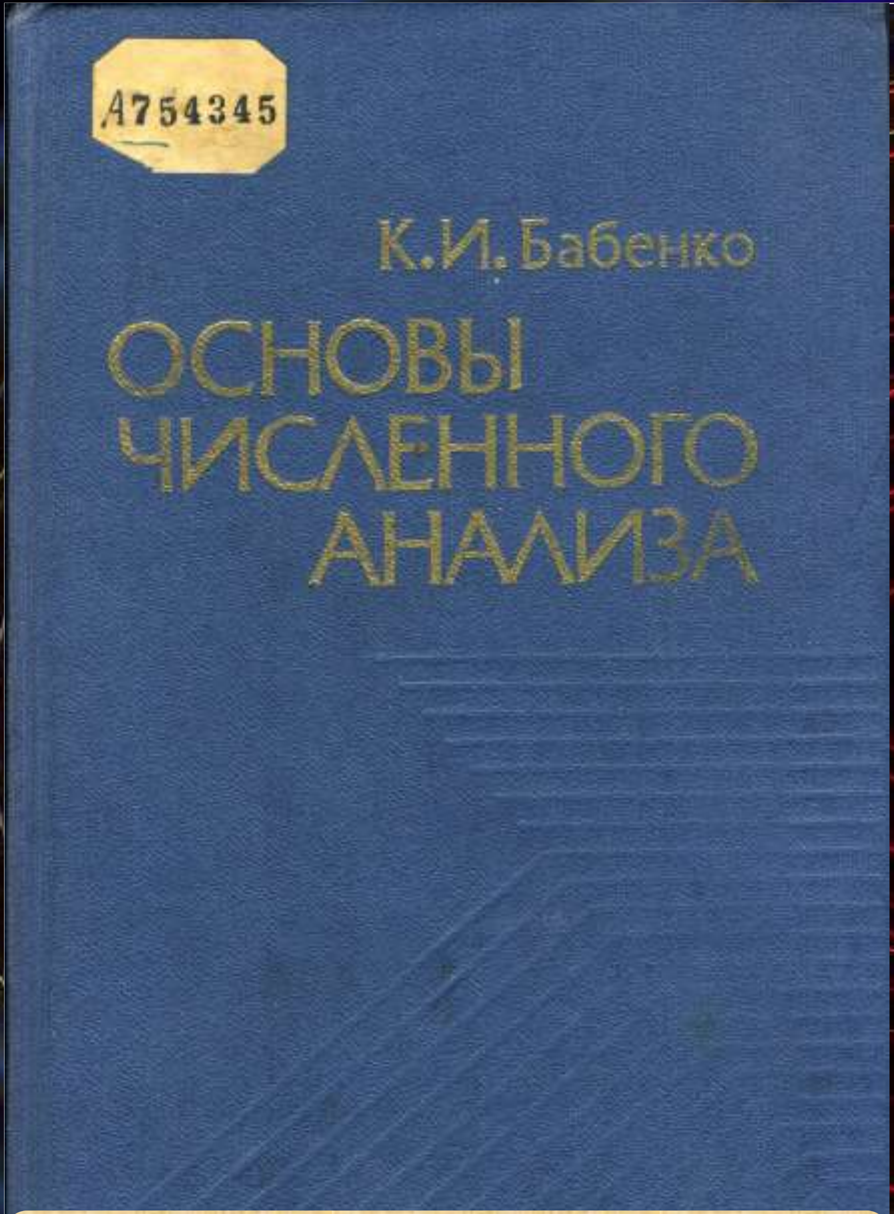
является дискретизацией оператора $\mathscr{G}$ и мы изучим связи между этими операторами.

2. Пусть A – банахово пространство функций $f(z)$, регулярных в полуплоскости $\operatorname{Re} z>-1$ с нормой $\|f\|=\sup\limits_{\operatorname{Re} z>-1}|(z+1)f(z)|$. Будем считать, что оператор $\mathscr{G}$ определен на A и тогда он компактный оператор. В заметке (²) доказано, что собственные значения оператора $\mathscr{G}$ вещественны, а собственные функции регулярны вне разреза $(-\infty,-1)$. Пусть λ_j, $j=1,2,\ldots$, – собственные значения $\mathscr{G}$ с учетом кратности, расположенные в порядке убывания модулей, а $\psi_j(z)$, $j=1,2,\ldots$, – соответствующие собственные функции, нормированные некоторым специальным образом. Тогда $1=\lambda_1>|\lambda_2|\geqslant\ldots$, а $\psi_j\in A$, $j=1,2,\ldots$

Там же доказано, что

$$F_n(x)=\log_2(1+x)+\sum_{j=2}^{\infty}\lambda_j^{n-1}\psi_j(0)\int_0^x\psi_j(t)\,dt,\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\quad n\geqslant 1. \tag{4}$$

Собственные значения λ_j убывают столь быстро, что для любого $\varepsilon>0$ сходится ряд $\sum|\lambda_j|^\varepsilon$. Формула (4) полностью решает проблему Гаусса, но



A754745
Бабенко, К. И. Основы численного анализа / К. И. Бабенко. – Москва : Наука, 1986. – 744 с. : 12 таб., 36 рис. – Библиогр. с. 733-737 (150 назв.). – Текст : непосредственный.

2. В теории цепных дробей известна проблема, поставленная К. Гауссом, об асимптотике разности

$$F_n(x) - \ln(1+x)/\ln 2, \tag{1}$$

где последовательность $\{F_n(x)\}$ определяется по рекуррентной формуле

$$F_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[F_n\left(\frac{1}{k}\right) - F\left(\frac{1}{k+x}\right)\right], \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$n = 0,\ 1, \ldots,\ F_0 \equiv x.$$

Легко доказать, что $F_n(x)$ непрерывно дифференцируема и

$$F_n'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_n'(1/(k+x))}{(k+x)^2},$$

и поэтому, полагая $F_n'(x - 1/2) = g_n(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$, получим

$$g_{n+1}(x) = (Gg_n)(x), \quad n = 0, 1, \ldots,$$

где оператор G определен формулой (6.21). Стало быть,

$$g_n(x) = (G^n g_0)(x),$$

и поэтому асимптотика разности (1) определяется характерами спектра и инвариантных подпространств оператора G.

Учитывая приведенные выше сведения о спектре оператора G, мы видим, что проблема Гаусса сводится к определению собственного числа λ_2, вычислению его кратности и оценке для $|\lambda_3|$. По нашему мнению, эту программу можно осуществить лишь с помощью вычислений на ЭВМ, но они должны быть доказательными. Мы не можем воспроизводить весь ход вычислений, а расскажем только, как доказать, что в круге $\{\lambda: |\lambda - \bar{\mu}_2| < 5\cdot 10^{-4}\}$, где $\bar{\mu}_2 = -0{,}3036630028487$, лежит хотя бы одно собственное значение оператора G. Машинное представление матрицы $\mathscr{G}$ (см. пример 6 § 6) мы обозначим через $\overline{\mathscr{G}}$; $\bar{\mu}_2$ — второе собственное значение матрицы $\overline{\mathscr{G}}$ (порядка 16×16). Отметим, что вычисление матрицы $\overline{\mathscr{G}}$ было произведено с двойной точностью, а затем полученные величины были округлены до одинарной точности, так что

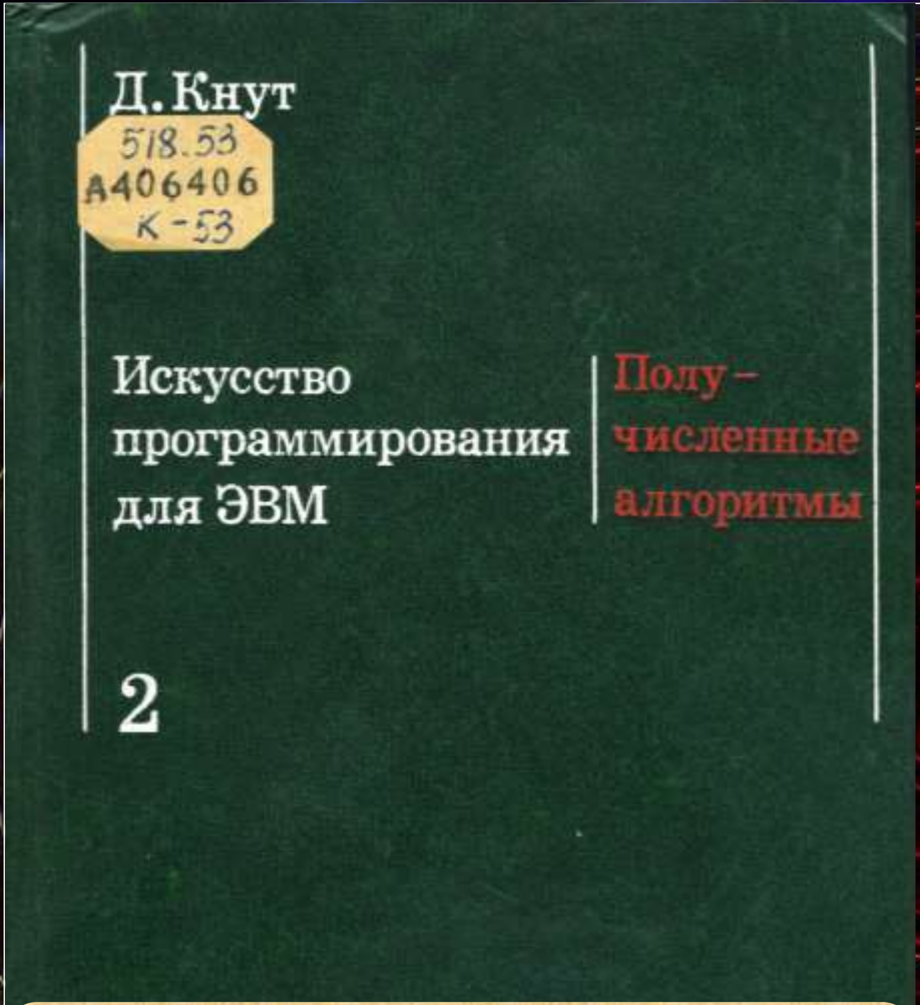
$$|\mathscr{G} - \overline{\mathscr{G}}|_\infty < 2^{-39}. \tag{2}$$

Пусть $\mathscr{C} = \{\lambda: |\lambda - \bar{\mu}_2| = 5\cdot 10^{-4}\}$. Оценим

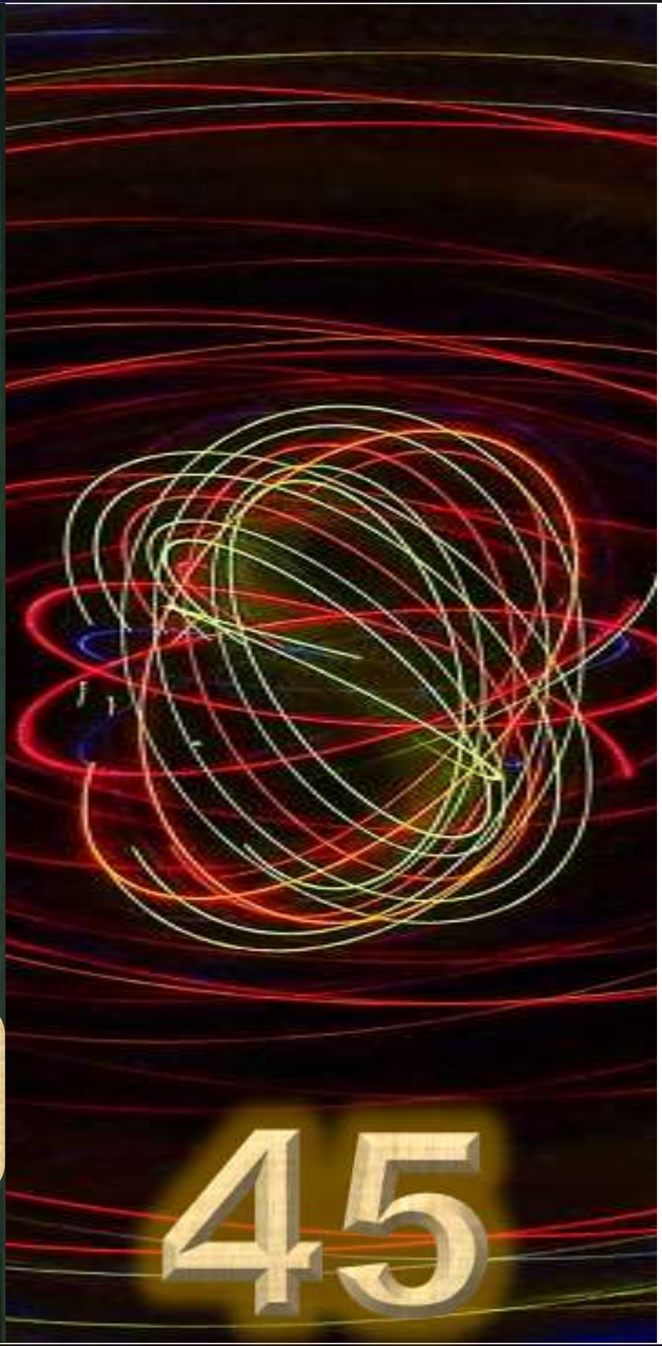
$$\max_{\lambda \in \mathscr{C}} |(\mathscr{G} - \lambda I)^{-1}|_\infty.$$

Прежде всего отметим, что на ЭВМ мы получаем матрицу $(\overline{\mathscr{G}} \ominus \lambda I)^{-1} = \tilde{\mathfrak{R}}_\lambda$, и поэтому, чтобы найти матрицу $\overline{\mathfrak{R}}_\lambda = (\overline{\mathscr{G}} - I\lambda)^{-1}$, нам нужно оценить роль погрешностей округления при вычислении матрицы $\tilde{\mathfrak{R}}_\lambda$. Вычислим матрицу

$$\tilde{\mathscr{F}}_\lambda = \tilde{\mathfrak{R}}_\lambda \circ (\overline{\mathscr{G}} \ominus \lambda I) \ominus I \tag{3}$$



406406
Книт, Д. Э. Искусство программирования для ЭВМ = The art of computer programming. В 4 томах. Том 2. Получисленные алгоритмы / Д. Кнут ; перевод с английского Г. П. Бабенко, Э. Г. Белаги и Л. В. Майорова ; под редакцией К. И. Бабенко. – Москва : Мир, 1977. – 832 с. : таб., листинги программ, 17 (+7) рис. – Библиогр. в тексте и сносках. – Текст : непосредственный.



что $F(x)=\log_2(1+x)$ и что последовательность $F_n(x)$ сходится к этому пределу.

В частности, обоснованно было бы предположить, что

$$F\left(\frac{1}{2}\right)=\log_2\left(\frac{3}{2}\right)\approx 0.58496.$$

Посмотрим, насколько близко подходит $F_n\left(\frac{1}{2}\right)$ к этому значению при малых значениях n. Имеем

$$\begin{aligned}
F_0\left(\frac{1}{2}\right)&=\frac{1}{2};\\
F_1\left(\frac{1}{2}\right)&=\frac{1}{1}-\frac{1}{1+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2+\frac{1}{2}}+\ldots=\\
&=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots\right)=2(1-\ln 2)\approx 0.6137;\\
F_2\left(\frac{1}{2}\right)&=\sum_{m\geqslant 1}\frac{2}{m}\left(\frac{1}{2m+2}-\frac{1}{3m+2}+\frac{1}{4m+2}-\frac{1}{5m+2}+\ldots\right)=\\
&=\sum_{m\geqslant 1}\frac{2}{m^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\ldots\right)-\\
&\quad-\sum_{m\geqslant 1}\frac{4}{m}\left(\frac{1}{2m(2m+2)}-\frac{1}{3m(3m+2)}+\ldots\right)=\\
&=\frac{1}{3}\pi^2(1-\ln 2)-\sum_{m\geqslant 1}\frac{4S_m}{m^2},
\end{aligned}\tag{24}$$

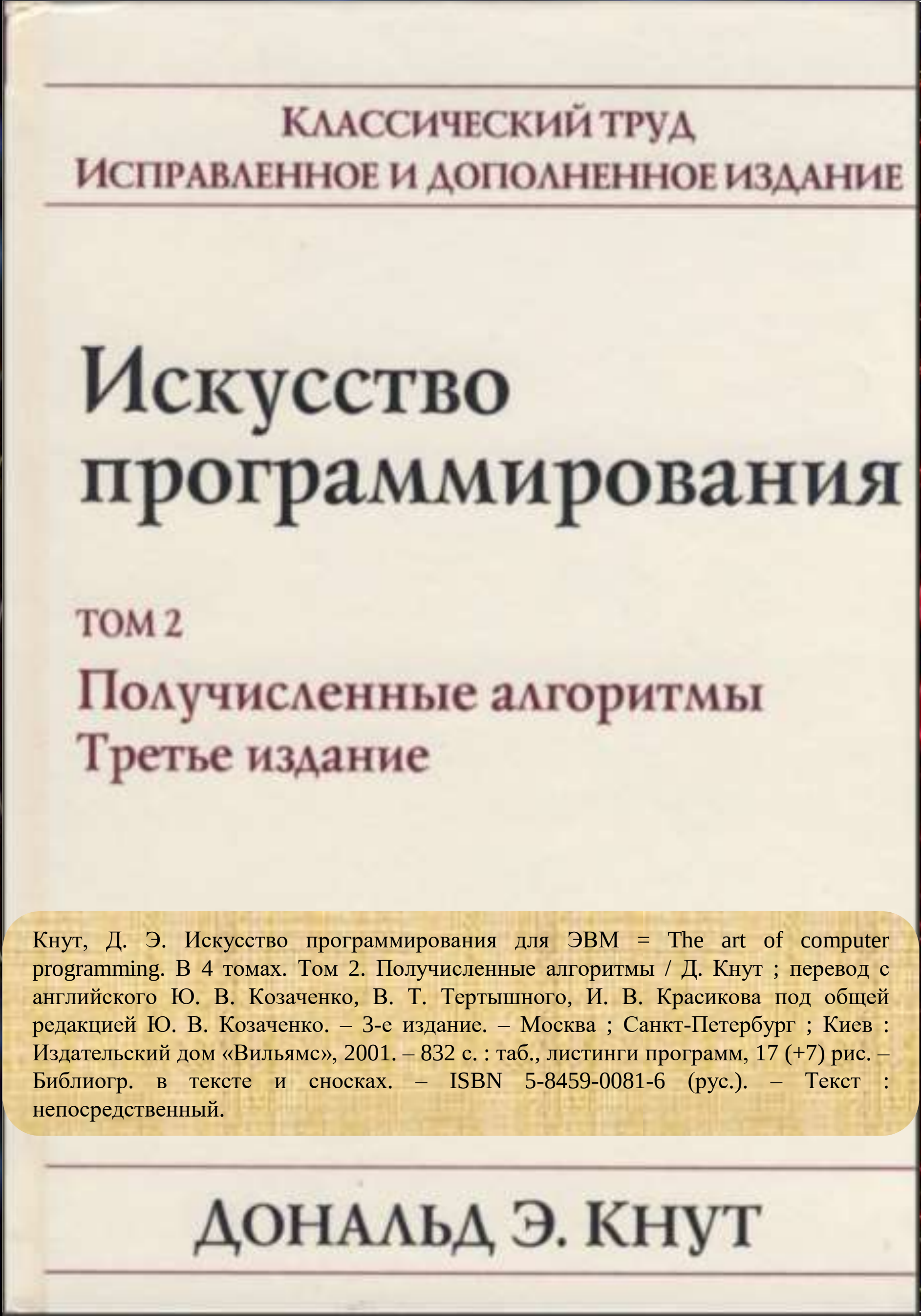
где $S_m=1/(4m+4)-1/(9m+6)+1/(16m+8)-\ldots$. Используя значения H_x для дробных x, приведенные в табл. 3 приложения В, находим, что

$$S_1=\frac{1}{12},\quad S_2=\frac{3}{4}-\ln 2,\quad S_3=\frac{19}{20}-\pi/(2\sqrt{3})$$

и т. д.; вычисляя, получаем $F_2\left(\frac{1}{2}\right)\approx 0.5748$.

Хотя с первым членом нашей последовательности распределений все обстоит хорошо: $F_1(x)=H_x$, ясно, что для больших n получить точное значение $F_n(x)$ трудно.

Распределения $F_n(x)$ были впервые исследованы К. Ф. Гауссом, который начал заниматься этой задачей в 1800 г. В его записях за этот год перечисляются различные рекуррентные соотношения и приводится краткая таблица значений, включающая полученное нами значение для $F_2\left(\frac{1}{2}\right)$ с четырьмя десятичными знаками. Выполнив эти вычисления, Гаусс записал: "Tam



Кнут, Д. Э. Искусство программирования для ЭВМ = The art of computer programming. В 4 томах. Том 2. Получисленные алгоритмы / Д. Кнут ; перевод с английского Ю. В. Козаченко, В. Т. Тертышного, И. В. Красикова под общей редакцией Ю. В. Козаченко. – 3-е издание. – Москва ; Санкт-Петербург ; Киев : Издательский дом «Вильямс», 2001. – 832 с. : таб., листинги программ, 17 (+7) рис. – Библиогр. в тексте и сносках. – ISBN 5-8459-0081-6 (рус.). – Текст : непосредственный.

равномерно распределенного числа $X = X_0$. По определению правильных цепных дробей получаем $F_0(x) = x$ и

$$F_{n+1}(x) = \sum_{k\geq 1} \Pr(k \leq 1/X_n \leq k+x)$$
$$= \sum_{k\geq 1} \Pr(1/(k+x) \leq X_n \leq 1/k)$$
$$= \sum_{k\geq 1} \bigl(F_n(1/k) - F_n(1/(k+x))\bigr). \qquad (23)$$

Если распределения $F_0(x), F_1(x), \ldots$, определяемые этими формулами, сходятся к предельному распределению $F_\infty(x) = F(x)$, то получаем

$$F(x) = \sum_{k\geq 1} \bigl(F(1/k) - F(1/(k+x))\bigr). \qquad (24)$$

(Аналогичное соотношение, 4.5.2–(36), было получено при рассмотрении бинарных алгоритмов определения наибольшего общего делителя.) При любом основании $b > 1$ одна из функций, удовлетворяющих уравнению (24), имеет вид $F(x) = \log_b(1+x)$ (см. упр. 19). Из дополнительного условия $F(1) = 1$ следует, что $b = 2$. Таким образом, вполне обосновано предположение, что $F(x) = \lg(1+x)$ и что последовательность $F_n(x)$ сходится к этому пределу.

Можно было бы предположить, например, что $F(\frac{1}{2}) = \lg(\frac{3}{2}) \approx 0.58496$. Посмотрим, насколько близко $F_n(\frac{1}{2})$ к этому значению при малых n. Имеем $F_0(\frac{1}{2}) = 0.50000$ и

$$F_1(x) = \sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) = H_x;$$
$$F_1(\tfrac{1}{2}) = H_{1/2} = 2 - 2\ln 2 \approx 0.61371;$$
$$F_2(\tfrac{1}{2}) = H_{2/2} - H_{2/3} + H_{2/4} - H_{2/5} + H_{2/6} - H_{2/7} + \cdots$$

(см. табл. 3 приложения A). Обобщение на степенной ряд

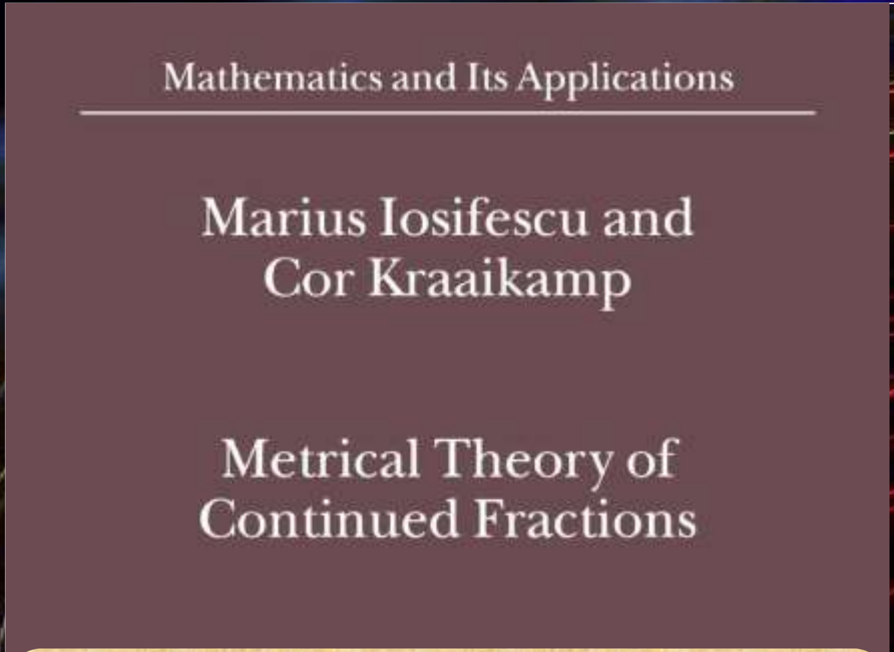
$$H_x = \zeta(2)x - \zeta(3)x^2 + \zeta(4)x^3 - \zeta(5)x^5 + \cdots \qquad (25)$$

позволяет определить численное значение

$$F_2(\tfrac{1}{2}) = 0.57655\,93276\,99914\,08418\,82618\,72122\,27055\,92452- . \qquad (26)$$

Получаем значение, близкое к 0.58496. Но совсем не очевидно, как получить хорошую оценку $F_n(\frac{1}{2})$ при $n = 3$, т. е. при значении, меньшем, чем те значения, которые считаются действительно большими.

Впервые распределения $F_n(x)$ были исследованы К. Ф. Гауссом (C. F. Gauss), который начал решать эту проблему 5 февраля 1799 года. В его записях за 1800 год перечислены различные рекуррентные соотношения и приведена краткая таблица значений, включающая (неточные) приближения для $F_2(\frac{1}{2}) \approx 0.5748$. После завершения этих вычислений Гаусс записал: "Tam complicatæ evadunt, ut nulla spes superesse videatur", т. е. "Они получаются такими сложными, что, кажется, нет никакой надежды". Двенадцать лет спустя Гаусс написал письмо Лапласу, в



Iosifescu, M. Metrical Theory of Continued Fractions / M. Iosifescu, C. Kraaikamp. – DOI 10.1007/978-94-015-9940-5. – Dordrecht : Springer Science+Business Media B.V., 2002. – 383 (+ XIX) pages : Figs. – Bibliogr.: P. 347-376 (385 Ref.). – ISBN 978-1-4020-0892-4 (Hardcover) ; 978-94-015-9940-5 (eBook). – Имеется электронная версия: https://link.springer.com/book/10.1007/978-94-015-9940-5 (дата обращения: 13.06.2022). – Режим доступа: по подписке. – Текст : непосредственный.

Springer-Science+Business Media, B.V.

Chapter 2

Solving Gauss' problem

In this chapter a generalization of Gauss' problem stated in Subsection 1.2.1 is solved. Several applications are also given.

2.0 Banach space preliminaries

2.0.1 A few classical Banach spaces

In this subsection we describe some Banach spaces which are often mentioned throughout the book. We consider just functions defined on I, but almost all considerations below can be easily extended to more general cases.

We denote by $B(I)$ the collection of all bounded measurable functions $f : I \to \mathbf{C}$. This is a commutative Banach algebra with unit under the supremum norm

$$\|f\| = \sup_{x\in I} |f(x)|, \quad f \in B(I).$$

We denote by $C(I)$ the collection of all continuous functions $f : I \to \mathbf{C}$. This is a commutative Banach algebra with unit under the supremum norm. We denote by $C^1(I)$ the collection of all functions $f : I \to \mathbf{C}$ which have a continuous derivative. This is a commutative Banach algebra with unit under the norm

$$\|f\|_1 = \|f\| + \|f'\|, \quad f \in C^1(I).$$

We denote by $L(I)$ the collection of all Lipschitz functions $f : I \to \mathbf{C}$, that is, those for which

$$s(f) := \sup_{x'\neq x''} \frac{|f(x') - f(x'')|}{|x' - x''|} < \infty.$$

M. Iosifescu et al., *Metrical Theory of Continued Fractions*

Corless, R. M. Chaos and continued fractions / R. M. Corless, G. W. Frank, J. G. Monroe. – DOI 10.1016/0167-2789(90)90038-q. – Текст : непосредственный // Physica D. – 1990. – Vol. 46, Iss. 2. – P. 241-253 : 3 Fig. – Bibliogr.: P. 252-253 (31 Ref.). – Имеется электронная версия: https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/016727899090038Q (дата обращения: 22.05.2022). – Режим доступа : по подписке. – ISSN 0167-2789.

CHAOS AND CONTINUED FRACTIONS

R.M. CORLESS, G.W. FRANK and J. Graham MONROE
Department of Applied Mathematics, University of Western Ontario, London, Ontario, Canada

Received 30 October 1989
Accepted 25 May 1990
Communicated by A. Dragt

This paper reports the use of the Gauss map from the theory of simple continued fractions as an example of a chaotic discrete dynamical system. Because of the simplicity of the map and the wealth of classical mathematical results, we are able to gain insight into the interaction between exact dynamical systems and their floating-point simulations. We calculate the correlation dimension and the capacity dimension of the Gauss map, and use these to examine current reconstruction techniques.

1. Introduction

The theory of continued fractions goes back at least to c. 500 A.D. to the work of Āryabhata, and possibly as far back as c. 300 B.C. to Euclid. The theory of chaotic dynamical systems is relatively recent, going back only to the work of Poincaré [23] and Birkhoff [2]. The foundations of the theory of continued fractions, as we know it now, are well established due to the work of Euler, Lagrange, Gauss, and others, while the foundations of chaotic dynamical systems are still evolving. This paper will use the well-established theory of simple continued fractions to critically examine some current methods used in the theory of chaotic dynamical systems.

Ref. [21] gives a good introduction to the classical theory of simple continued fractions, by which we mean continued fractions of the form

$$n_0 + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \dots}}},$$

where the n_i are all positive integers, except n_0, which may be zero or negative. We will denote this as $n_0 + [n_1, n_2, n_3, \dots]$, and in what follows n_0 will usually be zero. Simple continued fractions have found applications in Fabry–Perot interferometry [15], and the concept of "noble" numbers used in orbital stability and quasi-amorphous states of matter [26]. For other uses of simple continued fractions in chaos, see ref. [8]. Other types of continued fraction exist; for example, Gautschi [10], Henrici [14], Jones and Thron [16] and others, use functional or analytic continued fractions in approximation theory, since analytic continued fractions can be very effective for computation. We will not be concerned with such continued fractions. We will summarize in the next section all the classical results that we need, without proof. Proofs can be found in refs. [1, 13, 17, 19–21].

2. Summary of classical results

2.1. The Gauss map

We begin with the classical method for finding the continued fraction representation of a number γ. We put n_0 equal to the integer part of γ, the greatest integer less than or equal to γ. If the fractional part of γ is not zero, we put γ_0 equal

0167-2789/90/$03.50 © 1990 – Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland)

Continued Fractions and Chaos

R. M. Corless

1. INTRODUCTION. This paper is meant for the reader who knows something about continued fractions, and wishes to know more about the theory of chaotic dynamical systems;[1] it is also useful for the person who knows something about chaotic dynamical systems but wishes to see clearly what the effects of numerical simulation of such a system are. This paper is not purely introductory, however: there are new dynamical systems results presented here and also in the companion paper (Corless, Frank & Monroe [1989]), which presents some discussion of dynamical reconstruction techniques and dimension estimates.

The theory of continued fractions goes back at least to c. A.D. 500 to the work of Āryabhata, and possibly as far back as c. 300 B.C. to Euclid. The theory of chaotic dynamical systems is relatively recent, going back only to the work of Poincaré [1899] and Birkhoff [1932]. The foundations of the theory of continued fractions, as we know it now, are well established due to the work of Euler, Lagrange, Gauss, and others, while the foundations of chaotic dynamical systems are still evolving. This paper will use the well-established theory of simple continued fractions to explore some current results of the theory of chaotic dynamical systems.

Olds [1963] gives a good introduction to the classical theory of simple continued fractions, by which we mean continued fractions of the form

$$n_0 + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cdots}}}$$

where the n_i are all positive integers, except n_0 which may be zero or negative. We will denote this as $n_0 + [n_1, n_2, n_3, \dots]$, and in what follows n_0 will usually be zero. Simple continued fractions have found applications in Fabry-Perot interferometry (Ikeda & Mizuno [1984]), and the concept of "noble" numbers used in orbital stability and quasi-amorphous states of matter (Schroeder, [1984]). For other uses of simple continued fractions in chaos, see Devaney [1985]. Other types of continued fraction exist, for example, Gautschi [1970], Henrici [1977], Jones and Thron [1980], and others, use functional or analytic continued fractions in approximation theory, since analytic continued fractions can be very effective for computation. We will not be concerned with such continued fractions. We will summarize in the next section all the classical results that we need, without proof. Proofs can be found in Olds [1963], Hardy and Wright [1979], Niven [1956], Khinchin [1963], Billingsley [1963], and Mañé [1987].

[1] One referee has remarked that "This describes the referee, who admits to having found the paper interesting. Though, I suspect, now, more people know about chaos than continued fractions." The author is inclined to agree, and hopes that this paper will interest some of these people in continued

Corless, R. M. Continued fractions and chaos / R. M. Corless. – DOI 10.2307/2325053. – Текст : непосредственный // The American Mathematical Monthly. – 1992. – Vol. 99, No. 3. – P. 203-215 : 2 Fig. – Bibliogr.: P. 214-215 (33 Ref.). – Имеется электронная версия: https://www.jstor.org/stable/2325053 (дата обращения: 22.05.2022). – Режим доступа : по подписке. – ISSN 0002-9890.

Mayer, D. H. On the relaxation time of Gauss's continued-fraction map I. The Hilbert space approach (Koopmanism) / D. H. Mayer, G. Roepstorff. – DOI 10.1007/BF01009039. – Текст : непосредственный // Journal of Statistical Physics. – 1987. – Vol. 47, Iss. 1–2. – P. 149-171. – Bibliogr.: P. 170-171 (20 Ref.). – Имеется электронная версия: https://link.springer.com/article/10.1007/BF01009039 (дата обращения: 22.05.2022). – Режим доступа : по подписке СГУ. – ISSN 0022-4715.

On the Relaxation Time of Gauss's Continued-Fraction Map I. The Hilbert Space Approach (Koopmanism)

D. Mayer[1] **and G. Roepstorff**[2]

Received July 16; revision received November 25, 1986

It is shown that U^*, the adjoint of Koopman's isometric operator $Uf(x) = f(Tx)$ corresponding to the map $Tx = x^{-1}$ (mod 1) of the unit interval, is isomorphic to a symmetric integral operator when restricted to a Hilbert space of holomorphic functions f. This result, also obtained by Babenko in a different setting, allows us to derive new trace formulas. Using generalized Temple's inequalities, we determine the relaxation time of the above system with great accuracy. In contrast to a widespread belief, it appears to be unrelated to the entropy of the map T.

KEY WORDS: Relaxation time; continued fraction; trace formulas; Temple's inequalities

1 INTRODUCTION

Any number x in the unit interval has a continued fraction expansion. One is thus led to study the transformation T that carries x to x^{-1}(mod 1). The statistical theory of the continued fraction map T has its origin in a discovery by Gauss,[1] who, in a letter to Laplace, stated that the event $T^n x < a$ has asymptotic probability $\log_2(1+a)$ for each a in the unit interval. In modern terms, the statement is that the Lebesgue measure of the set $\{x: T^n x < a\}$ approaches

$$\frac{1}{\log 2}\int_0^a \frac{dx}{1+x} = \lim_n \mathrm{Prob}\{T^n x < a\} \tag{1.1}$$

[1] Institut für Theoretische Physik, RWTH Aachen, D-51 Aachen, West Germany.
[2] Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey 08540. Permanent address: Institut für Theoretische Physik, RWTH Aachen.

Mayer, D. H. On the relaxation time of Gauss' continued-fraction map. II. The Banach space approach (transfer operator method) / D. H. Mayer, G. Roepstorff. – DOI 10.1007/BF01022997. – Текст : непосредственный // Journal of Statistical Physics. – 1988. – Vol. 50, Iss. 1–2. – P. 331-344. – Bibliogr.: P. 344 (12 Ref.). – Имеется электронная версия: https://link.springer.com/article/10.1007/10.1007/BF01022997 (дата обращения: 22.05.2022). – Режим доступа : по подписке СГУ. – ISSN 0022-4715.

On the Relaxation Time of Gauss' Continued-Fraction Map. II. The Banach Space Approach (Transfer Operator Method)

D. Mayer[1] **and G. Roepstorff**[1]

Received July 31, 1986; revision September 25, 1987

The spectrum of the transfer operator $\mathscr{L}$ for the map $Tx = 1/x - [1/x]$ when restricted to a certain Banach space of holomorphic functions is shown to coincide with the spectrum of the adjoint U^* of Koopman's isometric operator $Uf(x) = f \circ T(x)$ when the former is restricted to the Hilbert space $\mathscr{H}^2(\nu)$ introduced in part I of this work. If $\mathscr{N}$ denotes the operator $\mathscr{L} - P_1$ with P_1 the projector onto the eigenfunction to the dominant eigenvalue $\lambda_1 = 1$ of $\mathscr{L}$, then $-\mathscr{N}$ is a u_0-positive operator with respect to some cone and therefore has a dominant positive, simple eigenvalue $-\lambda_2$. A minimax principle holds giving rigorous upper and lower bounds both for λ_2 and the relaxation time of the map T.

KEY WORDS: Transfer operator; continued fraction; relaxation time; minimax principle; trace formulas.

1. INTRODUCTION AND RESULTS

In the first part of this paper,[1] denoted henceforth I, we discussed the Hilbert space approach for the relaxation time τ of Gauss' continued-fraction map $Tx = 1/x - [1/x]$, $x \neq 0$. The main object of study was the adjoint operator U^* of Koopman's operator $Uf(x) = f \circ T(x)$ in the Hilbert space $L_2(\mu)$, where μ denotes the Gauss measure $d\mu(x) = [1/(x+1)]\,dx$. If $\hat{K}$ denotes the restriction of U^* to the Hilbert space $\mathscr{H}^2(\nu)$, some Hardy space of holomorphic functions in the half-plane, then the spectrum of $\hat{K}$ turns out to be real and discrete: $\hat{K}$ is isomorphic to a generalized Hankel transform in some L_2 space over the positive real axis. Using in part

[1] Institut für Theoretische Physik, E, RWTH Aachen, D-51 Aachen, West Germany.

Lochs, G. Statistik der Teilnenner der zu den echten Brüchen gehörigen regelmäßigen Kettenbrüche / G. Lochs. – DOI 10.1007/BF01322657. – Текст : непосредственный // Monatshefte für Mathematik. – 1961. – Vol. 65, Iss. 1. – P. 27-52 : 4 Tab. – Bibliogr.: P. 52 (5 Ref.). – Имеется электронная версия: https://link.springer.com/article/10.1007/BF01322657 (дата обращения: 30.05.2022). – Режим доступа : по подписке СГУ. – ISSN 0026-9255.

Statistik der Teilnenner der zu den echten Brüchen gehörigen regelmäßigen Kettenbrüche

Von

Gustav Lochs, Innsbruck

(Eingegangen am 6. April 1960)

1. Fragestellung und Ergebnisse

Bei der Entwicklung einiger Brüche in regelmäßige Kettenbrüche fiel mir die Häufigkeit des Teilnenners 1 auf. Das brachte mich auf den Gedanken, die Häufigkeit eines bestimmten Teilnenners b in den zu den echten Brüchen gehörigen regelmäßigen Kettenbrüchen zu untersuchen.[1,2] Ein echter Bruch hat zwei Entwicklungen, eine, sie heiße erster Art, bei der der letzte Teilnenner größer als 1 ist, und eine „zweiter Art" mit 1 als letztem Teilnenner. Es seien N und b natürliche Zahlen. Wir denken uns die Entwicklungen erster Art für alle Brüche z/n hingeschrieben, für die $1 \leqslant z < n \leqslant N$ ist, wobei z und n natürliche, aber nicht notwendig teilerfremde Zahlen sind. Die Anzahl der Teilnenner, die gleich b sind, nennen wir $h(N, b)$, die Anzahl aller Teilnenner $h(N)$.

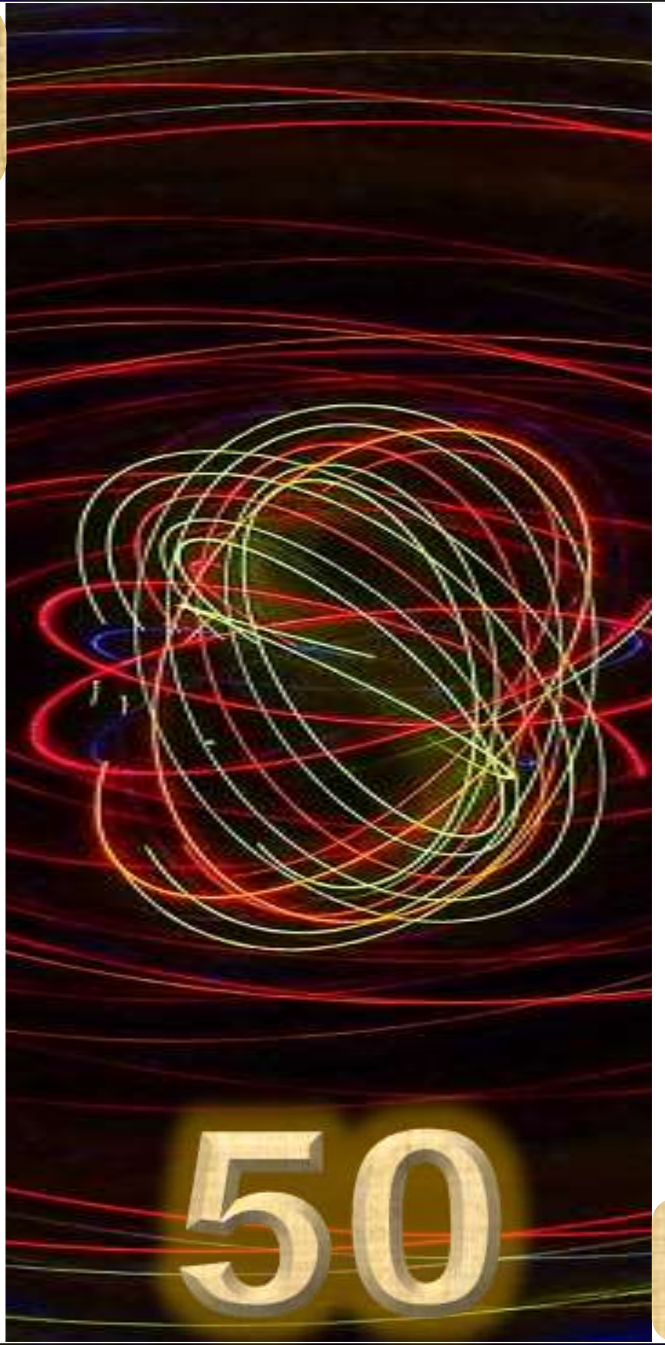
Ist etwa $N = 4$, so handelt es sich um die Entwicklungen: $^1/_2 = [0,2]$, $^1/_3 = [0,3]$, $^2/_3 = [0,1,2]$, $^1/_4 = [0,4]$, $^2/_4 = [0,2]$, $^3/_4 = [0,1,3]$, und es ist $h(4,1) = 2$, $h(4,2) = 3$, $h(4,3) = 2$, $h(4,4) = 1$ und $h(4) = 8$.

Nehmen wir nicht nur die Entwicklungen erster Art, sondern auch die zweiter Art, so erweist es sich als bequem, auch die Entwicklungen $[0,1]$ der unechten Brüche n/n hinzuzunehmen. Die entsprechenden Anzahlen mögen jetzt $H(N, b)$ und $H(N)$ heißen.

Ist wieder $N = 4$, so kommen zu den obigen Entwicklungen also noch folgende hinzu: $^1/_1 = [0,1]$, $^1/_2 = [0,1,1]$, $^2/_2 = [0,1]$, $^1/_3 = [0,2,1]$, $^2/_3 = [0,1,1,1]$,

[1] Über die Nummern 2 bis 6 dieser Arbeit und den entsprechenden Teil der Einleitung habe ich am 3. Österreichischen Mathematikerkongreß in Salzburg, 1952, vorgetragen (Nachrichten d. Öst. Math. Ges. Nr. 21/22, S. 37). Über den größten Teil dieser Arbeit habe ich auch 1958 an der University of Oregon, Eugene, und 1959 an der Universität Münster in W. vorgetragen.

[2] Statt „Entwicklung in einen regelmäßigen Kettenbruch" will ich von nun an nur mehr „Entwicklung" sagen und statt „regelmäßiger Kettenbruch" nur mehr „Kettenbruch".



ELSEVIER

Theoretical Computer Science 194 (1998) 1–34

Theoretical Computer Science

Fundamental Study

Continued fraction algorithms, functional operators, and structure constants[1]

Philippe Flajolet[a,*], Brigitte Vallée[b]

[a] INRIA, Rocquencourt, F-78153 Le Chesnay, France
[b] GREYC, Université de Caen, F-14032 Caen, France

Received November 1996; revised April 1997
Communicated by H. Prodinger

Abstract

Continued fractions lie at the heart of a number of classical algorithms like Euclid's greatest common divisor algorithm or the lattice reduction algorithm of Gauss that constitutes a 2-dimensional generalization. This paper surveys the main properties of functional operators – transfer operators – due to Ruelle and Mayer (also following Lévy, Kuzmin, Wirsing, Hensley, and others) that describe precisely the dynamics of the continued fraction transformation. Spectral characteristics of transfer operators are shown to have many consequences, like the normal law for logarithms of continuants associated to the basic continued fraction algorithm and a purely analytic estimation of the average number of steps of the Euclidean algorithm. Transfer operators also lead to a complete analysis of the "Hakmem" algorithm for comparing two rational numbers via partial continued fraction expansions and of the "digital tree" algorithm for completely sorting n real numbers by means of their continued fraction representations. As a consequence, a small number of "structure constants" appear to govern the behaviour of a variety of continued fraction based algorithms.

Contents

* Corresponding author. E-mail: Philippe.Flajolet@inria.fr.

[1] This survey paper corresponds to an invited talk at the *Seventh International Conference on Fibonacci Numbers and their Applications*, Graz, July 14–19, 1996.

Flajolet, P. Continued fraction algorithms, functional operators, and structure constants / P. Flajolet, B. Vallée. – DOI 10.1016/s0304-3975(97)00123-0. – Текст : непосредственный // Theoretical Computer Science. – 1998. – Vol. 194, Iss. 1-2. – P. 1-34 : 1 Tab., 5 Fig. – Bibliogr.: P. 33-34 (40 Ref.). – Имеется электронная версия: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304397597001230 (дата обращения: 22.05.2022). – Режим доступа : по подписке. – ISSN 0304-3975.

Commun. Math. Phys. 130, 311–333 (1990)

Communications in Mathematical Physics

Mayer, D. H. On the thermodynamic formalism for the gauss map / D. H. Mayer. – DOI 10.1007/BF02473355. – Текст : непосредственный // Communications in Mathematical Physics. – 1990. – Vol. 130, Iss. 2. – P. 311-333. – Bibliogr.: P. 333 (26 Ref.). – Имеется электронная версия: https://doi.org/10.1007/BF02473355 (дата обращения: 22.05.2022). – Режим доступа : по подписке СГУ. – ISSN 0010-3616.

On the Thermodynamic Formalism for the Gauss Map

Dieter H. Mayer

Max-Planck-Institut für Mathematik, Gottfried-Claren-Straße 26, D-5300 Bonn 3, Federal Republic of Germany

Abstract. We study the generalized transfer operator $\mathscr{L}_\beta f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n}\right)^{2\beta} \times f(1/(z+n))$ of the Gauss map $Tx = (1/x) \bmod 1$ on the unit interval. This operator, which for $\beta = 1$ is the familiar Perron–Frobenius operator of T, can be defined for $\operatorname{Re}\beta > \frac{1}{2}$ as a nuclear operator either on the Banach space $A_\infty(D)$ of holomorphic functions over a certain disc D or on the Hilbert space $\mathscr{H}^{(2)}_{\operatorname{Re}\beta}(H_{-1/2})$ of functions belonging to some Hardy class of functions over the half plane $H_{-1/2}$. The spectra of $\mathscr{L}_\beta$ on the two spaces are identical. On the space $\mathscr{H}^{(2)}_{\operatorname{Re}\beta}(H_{-1/2})$ $\mathscr{L}_\beta$ is isomorphic to an integral operator $\mathscr{K}_\beta$ with kernel the Bessel function $\mathfrak{J}_{2\beta-1}(2\sqrt{st})$ and hence to some generalized Hankel transform. This shows that $\mathscr{L}_\beta$ has real spectrum for real $\beta > \frac{1}{2}$. On the space $A_\infty(D)$ the operator $\mathscr{L}_\beta$ can be analytically continued to the entire β-plane with simple poles at $\beta = \beta_k = (1-k)/2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ and residue the rank 1 operator $\mathscr{N}^{(k)} f = \frac{1}{2}(1/k!) f^{(k)}(0)$. From this similar analyticity properties for the Fredholm determinant $\det(1 - \mathscr{L}_\beta)$ of $\mathscr{L}_\beta$ and hence also for Ruelle's zeta function follow. Another application is to the function $\zeta_M(\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} [n]^\beta$, where $[n]$ denotes the irrational $[n] = (n + (n^2+4)^{1/2})/2$. $\zeta_M(\beta)$ extends to a meromorphic function in the β-plane with the only poles at $\beta = \pm 1$ both with residue 1.

1. Generalized Transfer Operators for the Gauss Map

If $I = [0, 1]$ denotes the unit interval in $\mathbb{R}$ the Gauss (or continued fraction-)map $T: [0,1] \to [0,1]$ is defined as

$$Tx = \begin{cases} 1/x \bmod 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

From ergodic theory for general hyperbolic systems $T: M \to M$ it is known [Bo], [Ru1] that systems like the Gauss map allow for a description in terms of symbolic dynamics $\pi: F^{\mathbb{Z}_+} \to M$ with an alphabet F and a transition matrix $\mathbb{A} = (\mathbb{A}_{\sigma,\sigma'})$, $\sigma, \sigma' \in F$, defined through a Markov partition $\mathscr{A} = (\mathscr{O}_\sigma)_{\sigma \in F}$. This way T gets

ACTA ARITHMETICA
LXXXI.2 (1997)

Opérateurs de Ruelle–Mayer généralisés et analyse en moyenne des algorithmes d'Euclide et de Gauss

par

Brigitte Vallée (Caen)

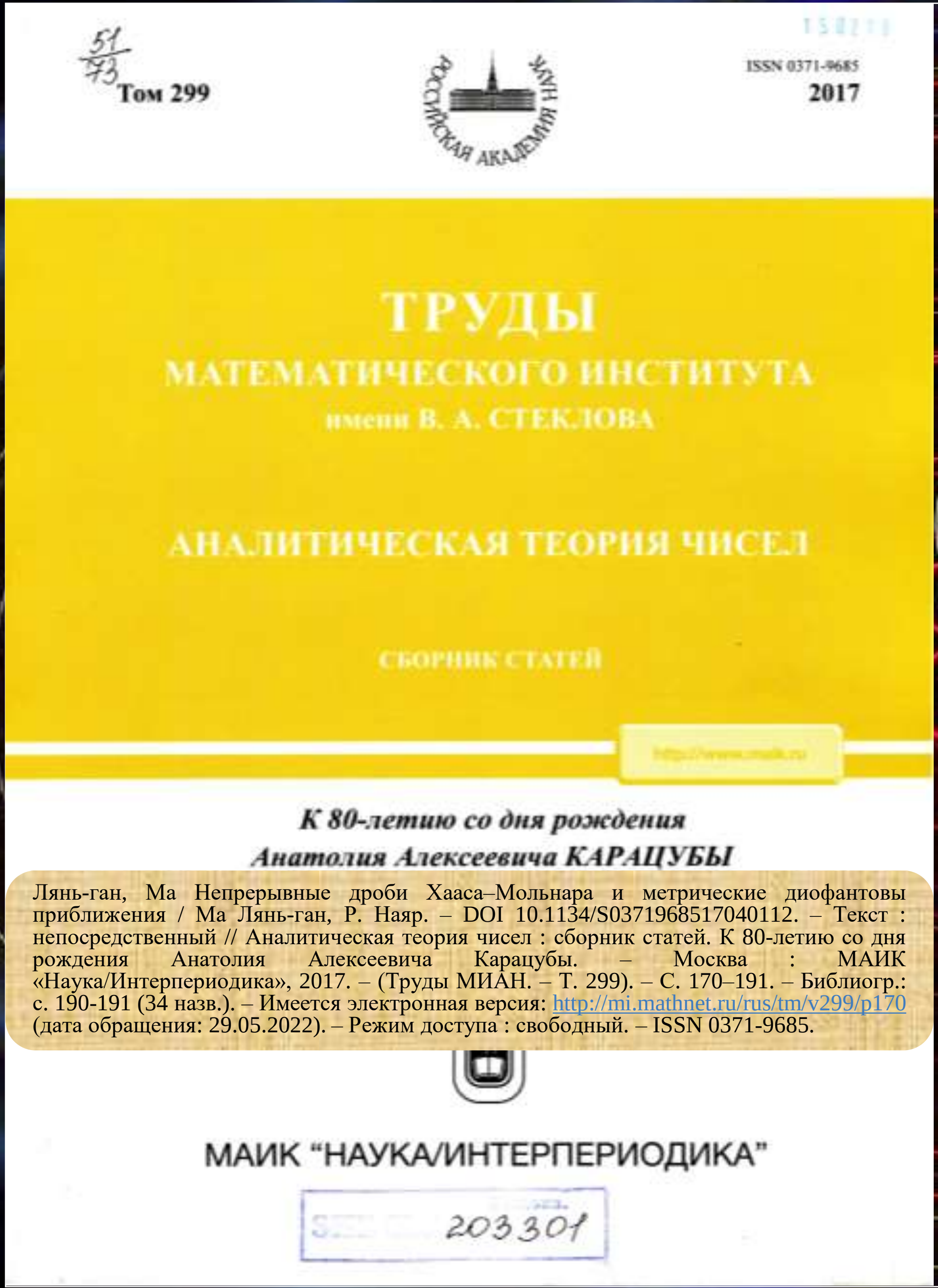
Introduction. L'algorithme d'Euclide, étroitement lié à celui des fractions continues, est un des plus anciens algorithmes existant. Son étude emprunte trois directions relativement distinctes.

(i) La première direction, la plus ancienne, remonte à 1800. Gauss [Ga] a alors posé le problème de l'évolution de la distribution des données au cours de l'algorithme des fractions continues; c'est ce que l'on appelle maintenant *l'analyse dynamique de l'algorithme* : on débute l'algorithme avec une densité initiale f sur $[0, 1]$; quelle est la densité après k itérations de l'algorithme? Gauss a conjecturé l'existence d'une densité-limite solution d'une équation fonctionnelle; il restait à prouver l'existence de cette limite et à mesurer la vitesse de convergence. Les premiers résultats dans ce sens ont été obtenus un siècle plus tard par Kuz'min [Ku] (1928) et Lévy [Le] (1929). Finalement Babenko [Ba] et Wirsing [Wi], autour de 1975, ont complètement résolu le problème en utilisant des méthodes d'analyse fonctionnelle nouvelles dans le domaine : ils ont introduit une famille particulière d'opérateurs qu'on appelle depuis les opérateurs de Ruelle–Mayer. Ces opérateurs $\mathcal{G}_s$ dépendent d'un paramètre s, et Babenko et Wirsing les utilisent en $s = 2$.

(ii) La deuxième direction est celle de l'analyse de la complexité de

Vallée, B. Opérateurs de Ruelle-Mayer généralisés et analyse en moyenne des algorithmes d'Euclide et de Gauss / B. Vallée. – DOI 10.4064/aa-81-2-101-144. – Текст : непосредственный // Acta Arithmetica. – 1997. Vol. 81. – P. 101-144 : 1 Fig. – Bibliogr.: p. 142-144 (33 Ref.). – Имеется электронная версия: https://www.impan.pl/en/publishing-house/journals-and-series/acta-arithmetica/all/81/2/109589/operateurs-de-ruelle-mayer-generalises-et-analyse-en-moyenne-des-algorithmes-d-euclide-et-de-gauss (дата обращения: 27.05.2022). – Режим доступа : свободный. – ISSN 0065-1036.

1991 *Mathematics Subject Classification*: Primary 11K; Secondary 47 and 70G.



Лянь-ган, Ма Непрерывные дроби Хааса–Мольнара и метрические диофантовы приближения / Ма Лянь-ган, Р. Наяр. – DOI 10.1134/S0371968517040112. – Текст : непосредственный // Аналитическая теория чисел : сборник статей. К 80-летию со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы. – Москва : МАИК «Наука/Интерпериодика», 2017. – (Труды МИАН. – Т. 299). – С. 170–191. – Библиогр.: с. 190-191 (34 назв.). – Имеется электронная версия: http://mi.mathnet.ru/rus/tm/v299/p170 (дата обращения: 29.05.2022). – Режим доступа : свободный. – ISSN 0371-9685.

УДК 511.72

Непрерывные дроби Хааса–Мольнара и метрические диофантовы приближения[1]

Ма Лянь-ган[2], Р. Наяр[3]

Поступило 4 августа 2016 г.

Памяти А.А. Карацубы

Отображения Хааса–Мольнара представляют собой семейство отображений единичного интервала, введенное в рассмотрение А. Хаасом и Д. Мольнаром. Это семейство включает в себя отображения Гаусса и Реньи, связанные с разложением в обыкновенную непрерывную дробь, как важные частные случаи. Как было показано Хаасом и Мольнаром, метрическую теорию диофантовых приближений, построенную для отображения Гаусса, можно перенести на случай класса отображений Хааса–Мольнара. В частности, для вещественного числа x пусть $(p_n/q_n)_{n\geq 1}$ — последовательность подходящих дробей и $\theta_n(x) = q_n^2|x - p_n/q_n|$, $n = 1, 2, \ldots$. Метрическое поведение средних Чезаро последовательности $(\theta_n(x))_{n\geq 1}$ исследовалось рядом авторов. Хаас и Мольнар распространили эту теорию на аналоги последовательности $(\theta_n(x))_{n\geq 1}$, отвечающие семейству Хааса–Мольнара разложений в непрерывные дроби. В настоящей работе исследование величин $(\theta_{k_n}(x))_{n\geq 1}$ для некоторых последовательностей $(k_n)_{n\geq 1}$, начатое вторым из авторов, распространяется на случай отображений Хааса–Мольнара.

DOI: 10.1134/S0371968517040112

1. ВВЕДЕНИЕ

Для произвольного числа $x \in [0, 1]$ положим

$$x = [0; v_1, v_2, v_3, \ldots] := \cfrac{1}{v_1 + \cfrac{1}{v_2 + \cfrac{1}{v_3 + \ldots}}}, \qquad (1.1)$$

где $(v_i)_{i\geq 1} \subset \mathbb{N}$ — неполные частные разложения x в обыкновенную непрерывную дробь, связанные соотношениями $v_1(x) = [1/x]$ и

$$v_n(x) = v_{n-1}(G(x)), \qquad n = 2, 3, \ldots,$$

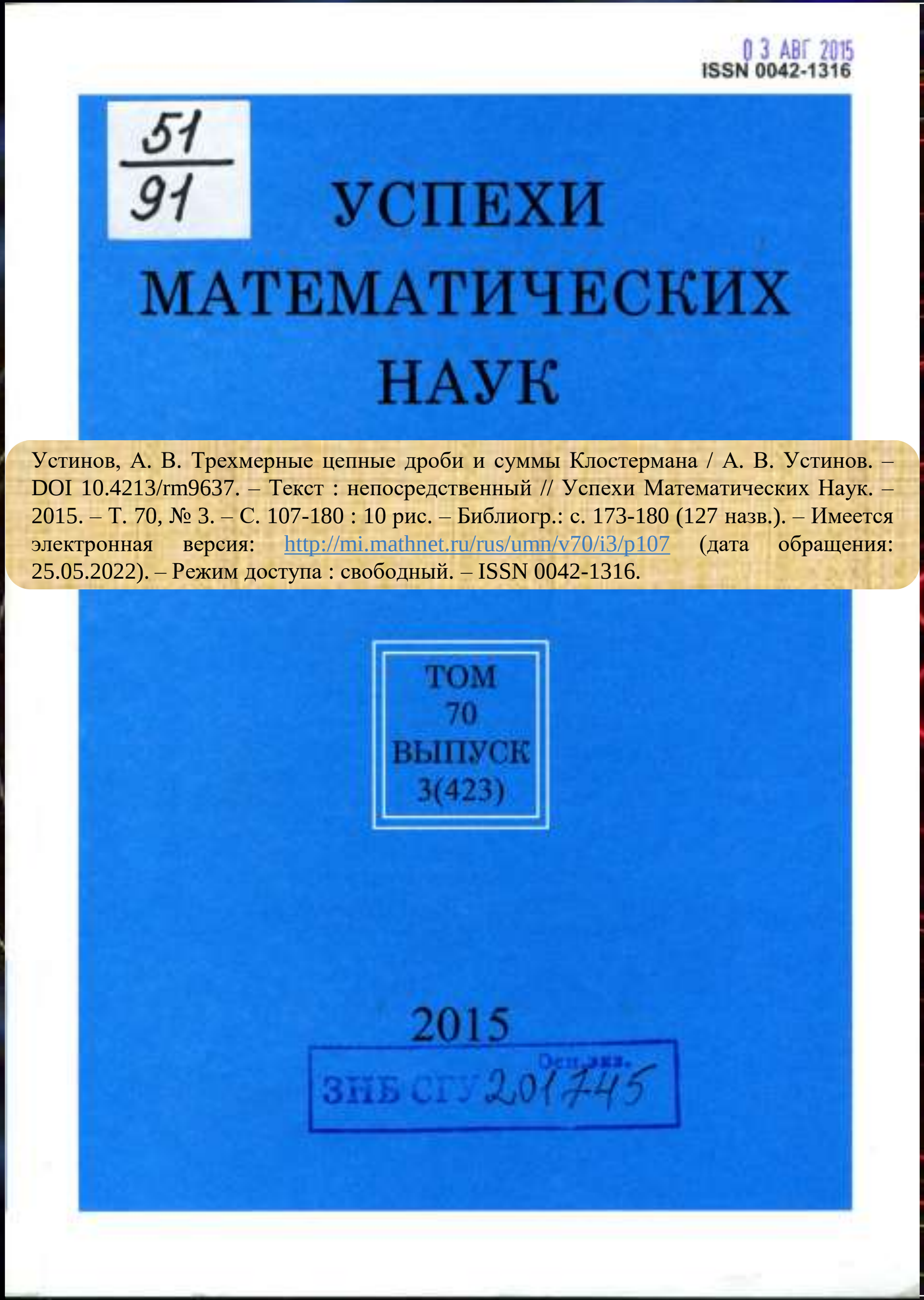
в которых G — отображение Гаусса

$$G(x) = \left\{\frac{1}{x}\right\} = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right].$$

[1] Статья представлена на английском языке. Оригинал будет опубликован в англоязычной версии журнала: *Ma Liangang, Nair R.* Haas–Molnar continued fractions and metric Diophantine approximation // Proc. Steklov Inst. Math. 2017. V. 299.

[2] Department of Mathematics, Binzhou University, City of Binzhou, Shandong Province, P.R. China.
E-mail: maliangang000@163.com

[3] Department of Mathematical Sciences, The University of Liverpool, Liverpool, UK.
E-mail: nair@liverpool.ac.uk



Устинов, А. В. Трехмерные цепные дроби и суммы Клостермана / А. В. Устинов. – DOI 10.4213/rm9637. – Текст : непосредственный // Успехи Математических Наук. – 2015. – Т. 70, № 3. – С. 107-180 : 10 рис. – Библиогр.: с. 173-180 (127 назв.). – Имеется электронная версия: http://mi.mathnet.ru/rus/umn/v70/i3/p107 (дата обращения: 25.05.2022). – Режим доступа : свободный. – ISSN 0042-1316.

УДК 511.336+514.174.6+511.335

Трехмерные цепные дроби и суммы Клостермана

А. В. Устинов

Обзор посвящен результатам, связанным с метрическими свойствами классических цепных дробей и трехмерных цепных дробей Вороного–Минковского. Основное внимание уделяется применению аналитических методов, основанных на оценках сумм Клостермана. В статье развивается аппарат, предназначенный для решения задач на трехмерных решетках. В основе подхода лежит идея редукции к предыдущей размерности, применявшаяся ранее Линником и Скубенко при исследовании целочисленных решений детерминантного уравнения $\det X = P$, где X – матрица размера 3×3 с независимыми коэффициентами и P – растущий параметр.

Предлагаемый метод применяется для изучения статистических свойств трехмерных цепных дробей Вороного–Минковского в решетках с фиксированным определителем. В частности, для среднего числа базисов Минковского доказывается асимптотическая формула со степенным понижением в остаточном члене. Этот результат можно считать трехмерным аналогом теоремы Портера о средней длине конечных цепных дробей.

Библиография: 127 названий.

Ключевые слова: трехмерные цепные дроби, решетки, суммы Клостермана, статистики Гаусса–Кузьмина.

DOI: 10.4213/rm9637

Содержание

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 14-01-90002) и фонда Д. Зимина "Династия".

О статистиках Гаусса—Кузьмина для конечных цепных дробей*

А. В. УСТИНОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: ustinov@mech.math.msu.su

УДК 511.37+511.336

Ключевые слова: конечные цепные дроби, статистики Гаусса—Кузьмина.

Аннотация

В статье рассматриваются конечные цепные дроби для чисел a/b, когда целые точки (a, b) лежат внутри расширяющейся области. Для таких цепных дробей доказываются свойства, аналогичные статистикам Гаусса—Кузьмина.

Abstract

Устинов, А. В. О статистиках Гаусса–Кузьмина для конечных цепных дробей / А. В. Устинов. – Текст : непосредственный // Фундаментальная и прикладная математика. – 2005. – Т. 11, № 6. – С. 195-208. – Библиогр.: с. 208 (17 назв.). – Имеется электронная версия: http://mi.mathnet.ru/rus/fpm/v11/i6/p195 (дата обращения: 26.05.2022). – Режим доступа : свободный. – ISSN 1560-5159.

1. Обозначения

1. Запись $[x_0; x_1, \ldots, x_s]$ означает цепную дробь

$$x_0 + \cfrac{1}{x_1 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{x_s}}}$$

длины s с формальными переменными $x_0, x_1, \ldots, x_s$.

2. Для рационального r представление $r = [t_0; t_1, \ldots, t_s]$ есть каноническое разложение r в цепную дробь, где $t_0 = [r]$ (целая часть r), $t_1, \ldots, t_s$ — натуральные числа и $t_s \geqslant 2$ при $s \geqslant 1$.
3. Для $x \in [0, 1]$ и рационального $r = [t_0; t_1, \ldots, t_s]$ $s_x(r)$ есть количество номеров $j \in \{1, \ldots, s\}$, для которых $[0; t_j, \ldots, t_s] \leqslant x$. В частности, длина цепной дроби $s = s(r)$ есть $s_1(r)$.

*Работа выполнена при поддержке INTAS, грант № 03-51-5070.

УДК 517.524+511.622+511.37

А. В. Устинов

Спиновые цепочки и задача Арнольда о статистиках Гаусса–Кузьмина для квадратичных иррациональностей

Доказываются новые результаты, связанные с теоретико-числовой моделью спиновых цепочек. Решается задача Арнольда о статистиках Гаусса–Кузьмина для квадратичных иррациональностей.

Библиография: 24 названия.

Ключевые слова: цепные дроби, суммы Клостермана, квадратичные иррациональности.

DOI: 10.4213/sm8123

§ 1. Введение

В работе [1] была предложена теоретико-числовая модель спиновых цепочек, основанная на рядах Фарея (дальнейшие результаты см. в [2]–[4]). В этой модели конечной цепочке из спинов, каждый из которых может быть направлен вверх (↑) или вниз (↓), ставится в соответствие произведение матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

по правилу $\uparrow = A$, $\downarrow = B$. Например,

$$\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow = \uparrow^3\downarrow^2\uparrow^4 = A^3B^2A^4.$$

Энергией данной конфигурации называется величина

$$E(\uparrow^{a_1}\downarrow^{a_2}\uparrow^{a_3}\ldots) = \log(\mathrm{Tr}(A^{a_1}B^{a_2}A^{a_3}\ldots)).$$

Пусть G – свободный мультипликативный моноид, порожденный матрицами A и B. С физической точки зрения представляет интерес асимптотическое поведение числа конфигураций с заданной энергией

$$\Phi(N) = \bigl|\{C \in G : \mathrm{Tr}\,C = N\}\bigr|, \qquad N \geqslant 3,$$

и числа конфигураций, в которых энергия не превосходит заданной величины,

$$\Psi(N) = \bigl|\{C \in G : 3 \leqslant \mathrm{Tr}\,C \leqslant N\}\bigr| = \sum_{3 \leqslant n \leqslant N} \Phi(n).$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-12004-офи-м) и фонда "Династия".

Устинов, А. В. Спиновые цепочки и задача Арнольда о статистиках Гаусса–Кузьмина для квадратичных иррациональностей / А. В. Устинов. – DOI 10.4213/sm8123. – Текст : непосредственный // Математический сборник. – 2013. – Т. 204, № 5. – С. 143-160. – Библиогр.: с. 159-160 (24 назв.). – Имеется электронная версия: http://mi.mathnet.ru/rus/msb/v204/i5/p143 (дата обращения: 26.05.2022). – Режим доступа : свободный. – ISSN 0368-8666.

Математические заметки

Том 94 выпуск 4 октябрь 2013

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О резольвенте оператора Гаусса

А. И. Аптекарев, В. С. Буяров

1. Введение. Постановка задачи связана с цепными дробями действительных чисел:

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}} =: [a_0; a_1, a_2, \dots], \tag{1}$$

здесь $\alpha \in \mathbb{R}_+$ и a_n, $n \in \mathbb{N}$ (подробнее см. [1], [2]). Пусть

$$\eta_n(\alpha) := [0; a_{n+1}, a_{n+2}, \dots] \in [0, 1).$$

Обозначим

$$F_n(x) := \operatorname{mes}\{\alpha : \eta_n(\alpha) < x\} = \operatorname{mes}\left\{\alpha : a_{n+1}(\alpha) \geqslant \left[\frac{1}{x}\right]\right\}. \tag{2}$$

Гаусс (1812 г.) в письме Лапласу известил об открытии им предела

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln 2}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{3}$$

и поставил задачу о скорости стремления к этому пределу. Существование предела (3) доказал Кузьмин (1928 г.) (см. [3]). Вирзинг [4] (1974 г.) и независимо Бабенко [5] (1977 г.) решили задачу Гаусса, доказав, что

$$F_n(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln 2} + \lambda^n \phi(x) + \mathcal{O}(\rho^n),$$

где $\lambda = -0.30366300 + \vartheta \cdot 5.85 \cdot 10^{-9}$, $|\vartheta| < 1$, $\phi \in C([0,1])$, $\rho < 0.15$.

Напомним определение оператора Гаусса. Имеем из (2)

$$F_{n+1} := \sum_{j=1}^{\infty} F_n\left(\frac{1}{j}\right) - F_n\left(\frac{1}{j+x}\right), \qquad F_0 = x.$$

Оператор Гаусса G определен на функциях F распределения мер:

$$G[F(x)] := \sum_{j=1}^{\infty} F\left(\frac{1}{j}\right) - F\left(\frac{1}{j+x}\right).$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00245), программы "Ведущие научные школы" (грант № НШ-8033.2010.1); первый автор также поддержан программой № 1 ОМН РАН.

DOI: 10.4213/mzm10322

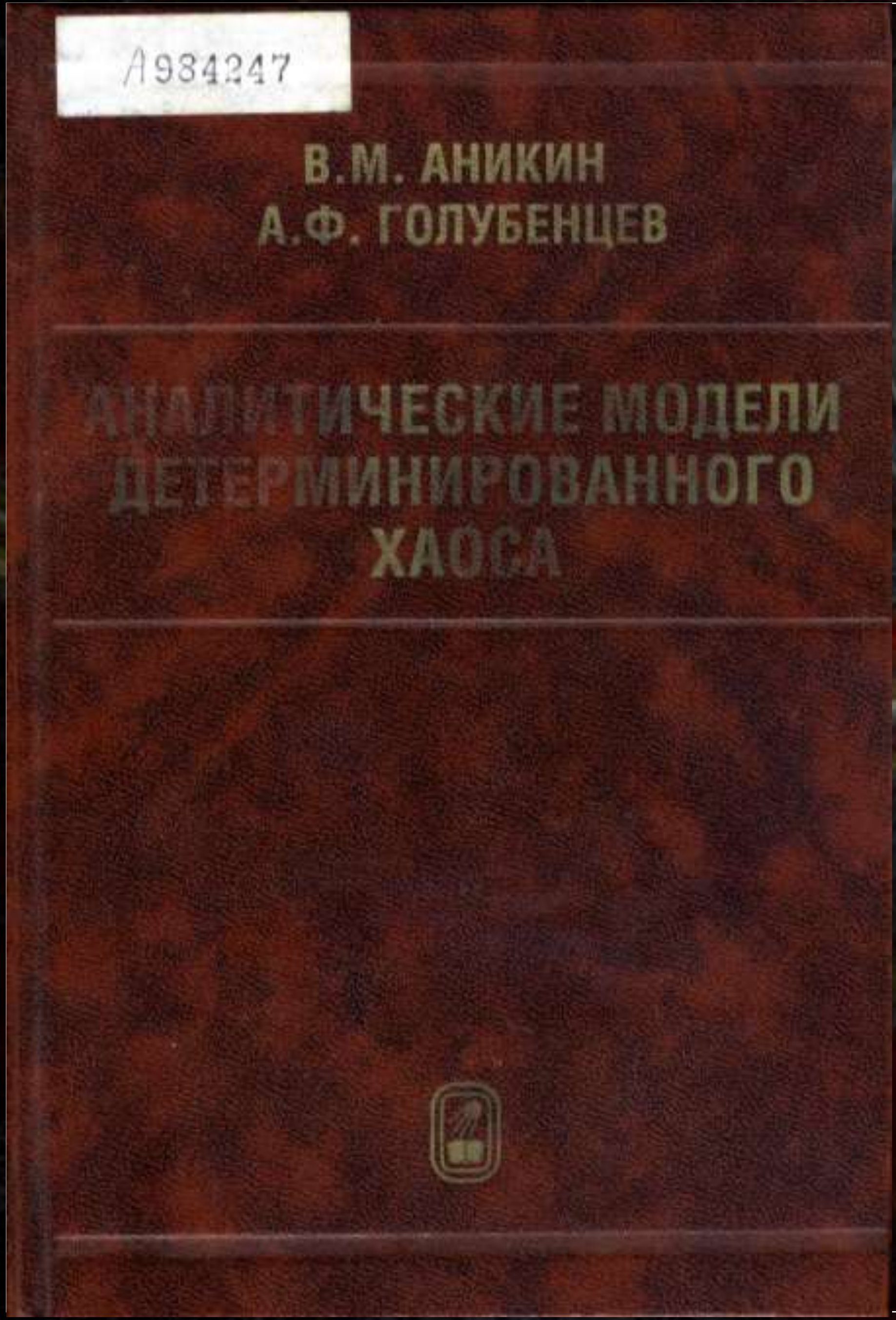
Аптекарев А.И., Ахмедов Р.Э., Буяров В.С.

О представлении оператора Гаусса-Бабенко в степенном базисе

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Аптекарев А.И., Ахмедов Р.Э., Буяров В.С. О представлении оператора Гаусса-Бабенко в степенном базисе // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 69. 23 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-69

Аптекарев, А. И. О представлении оператора Гаусса-Бабенко в степенном базисе / А. И. Аптекарев, Р. Э. Ахмедов, В. С. Буяров. – Текст : непосредственный // Препринты Института прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН. – 2012. – № 69. – 23 с. – Библиогр.: с. 23 (5 назв.). – Имеется электронная версия: http://mi.mathnet.ru/rus/ipmp/y2012/p69 (дата обращения: 24.05.2022). – Режим доступа : свободный. – ISSN 2071-2898 (print). – ISSN 2071-2901 (online).

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГАУССА И Д Е Т Е Р М И Н И - Р О В А Н Н Ы Й Х А О С



А975810, А980611, А980612, А984247
Аникин, В. М. Аналитические модели детерминированного хаоса / В. М. Аникин, А. Ф. Голубенцев. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 328 с. : 3 таб., 49 рис. – Библиогр.: с. 302-323 по главам. – ISBN 978-5-9221-0879-9. – Текст : непосредственный.

Глава 3

ОТОБРАЖЕНИЕ ГАУССА: ЭВОЛЮЦИОННЫЕ И ВЕРОЯТНОСТНЫЕ СВОЙСТВА

Настоящая глава посвящена описанию эволюционных и вероятностных свойств отображения Гаусса — едва ли не самой первой одномерной динамической системы, открытой в теории чисел 200 лет назад. Интерес к данному отображению обусловлен не только историческими и математическими аспектами (хотя явно заслуживает внимания тот факт, что тематика, связанная с задачей Гаусса, перешагнула в очередное (!) столетие), но и содержательным физическим приложением, которое данное отображение нашло в релятивистской космологии.

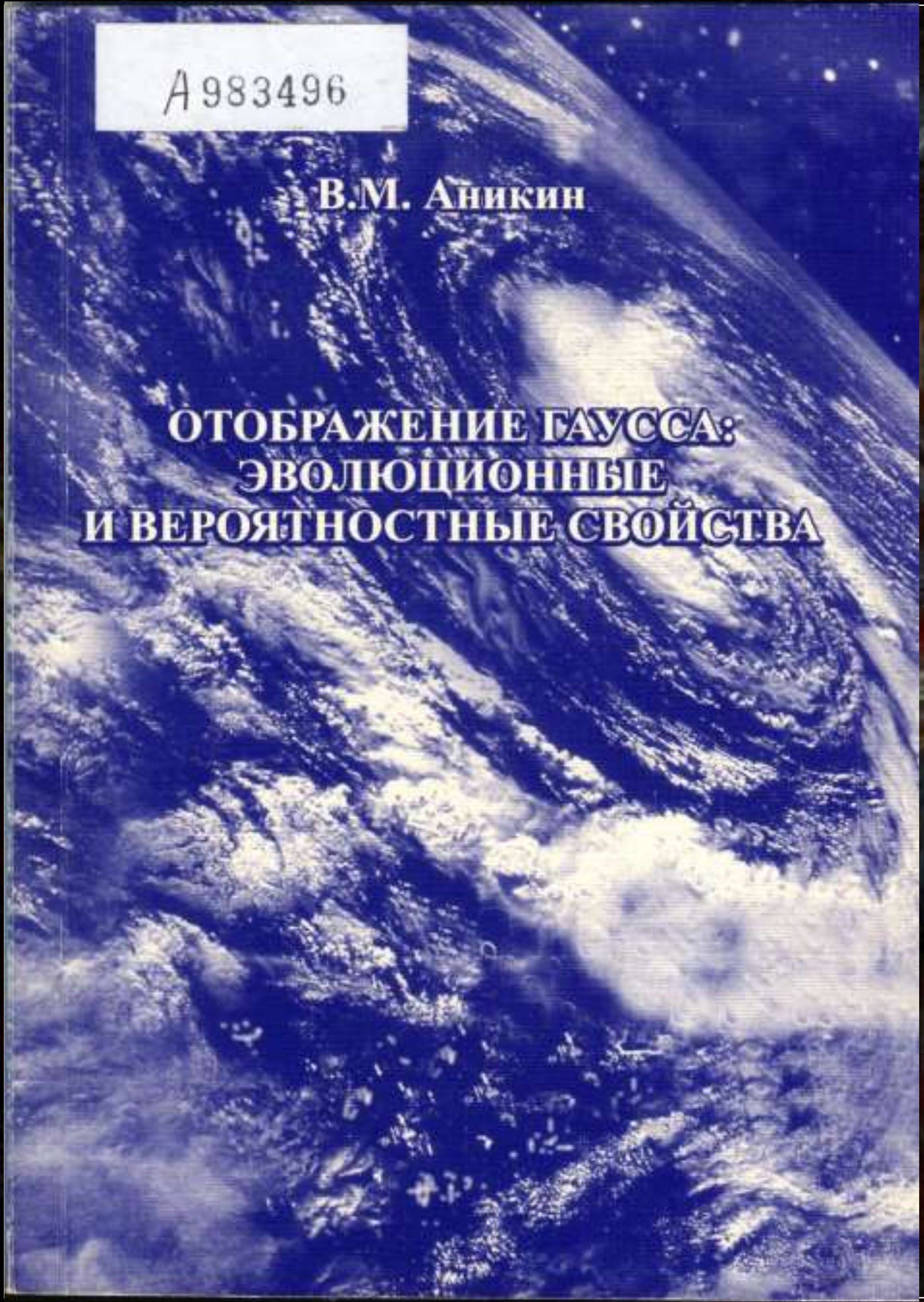
Чуть более подробно наметим рассматриваемую проблематику, начав *ab ove*.

... 26 октября 1800 г. Карл Фридрих Гаусс, общепризнанный «princeps mathematicorum», записал в своем дневнике: «*Вычисления получаются такими сложными, что, кажется, нет никакой надежды*». Спустя 12 лет в письме к Пьеру Симону де Лапласу от 30 января 1812 г., Гаусс по тому же поводу признавался: «*Предпринятые мной попытки ... были безуспешны*» [1–12] [1]).

Здесь не случайно упомянуты именно дневник и переписка Гаусса. Особенностью его научного стиля [2] является большое количество неопубликованных работ, о которых стало известно лишь из архивных материалов. Так, выяснилось, что Гауссу принадлежит приоритет в открытии эллиптических функций, создании начал неевклидовой геометрии, исследовании динамической системы в теории чисел, связанной с разложением числа в непрерывную (цепную) дробь. И при этом Гаусс стал свидетелем переоткрытия эллиптических функций норвежцем Нильсом Г. Абелем и немцем Карлом Г. Я. Якоби, а также формулировки неевклидовых (термин принадлежит Гауссу [2])!) геометрий венгром

[1]) Математический дневник К. Ф. Гаусса за 1796–1814 гг., случайно обнаруженный в 1898 г., и упомянутое письмо к Лапласу 1812 г. опубликованы в 1917 г. в первой части X тома Собрания трудов великого математика [1]. Математический дневник Гаусса комментируется в [2, 10].

[2]) См.: *Ланцош К.* Альберт Эйнштейн и строение космоса. М.: Наука, 1967. С. 81.



58

А975293, А983495, А983496
Аникин, В. М. Отображение Гаусса: эволюционные и вероятностные свойства : учеб. пособие / В. М. Аникин. – Саратов : Издательство Саратовского университета, 2007. – 81 с. : 7 портр., 16 рис. – Библиогр.: с. 71-74 (47 назв.). – ISBN 978-5-292-03679-1. – Текст : непосредственный.

ВВЕДЕНИЕ

В учебном пособии на примере отображения Гаусса излагаются основные понятия теории дискретных динамических систем (отображений), демонстрирующих хаотическое поведение. Выбор автором в качестве базового объекта данного отображения вызван рядом причин как методологического свойства (изучение гауссова преобразования затрагивает многие важные вопросы детерминированного хаоса), так и интересными прикладными возможностями отображения и весьма интригующей двухсотлетней историей его исследований [1–12], серьезно способствовавших развитию операторных методов описания хаотических систем.

Предварительно рассмотрим теоретическую базу и математический инструментарий, применяемые при анализе хаотических отображений [13–27]. Это позволит сделать изложение до определенной степени замкнутым, что в свою очередь даст возможность использовать материал пособия как в рамках специального курса, так и в качестве одного из разделов общего курса, в более широком аспекте посвященного изучению динамических систем с хаотическими свойствами. В основном тексте пособия введенные понятия и характеристики конкретизированы в контексте «проблемного подхода» при изучении отображения Гаусса.

Предметом нашего изучения являются одномерные отображения, описываемые детерминированными разностными уравнениями первого порядка

$$x_{n+1} = g(x_n, \lambda); \quad x_n \in X \subset \mathbb{R}; \quad n = 0,1,\ldots. \tag{B1}$$

Уравнения вида (B1) задают итеративную (основанную на повторениях) вычислительную процедуру, позволяющую, исходя из заданного начального условия x_0, определить последовательности значений переменной целочисленного аргумента $x_n = x(n; x_0)$ на некотором множестве (сегменте) X действительной прямой. Нас интересует ситуация, когда уравнение (B1) отображает множество X в себя, а его *незамкнутые* (отличные от циклов) траектории – решения

$$\begin{gathered} x_0,\, x_1 = g(x_0),\, x_2 = g(x_1) = g(g(x_0)) = g^2(x_0),\ldots, \\ x_n = g(x_{n-1}) = \underbrace{g(g(\ldots g(x_0)))}_{n\ раз} = g^n(x_0),\ldots \end{gathered} \tag{B2}$$

Голубенцев, А. Ф. Евклид, Гаусс и детерминированный хаос / А. Ф. Голубенцев, В. М. Аникин. – Текст : непосредственный // Известия Саратовского университета. Новая серия. – 2003. – Т. 3, № 2. – С. 168-178. – Библиогр.: с. 177-178 (33 назв.) + в сносках (4 назв.). – ISSN 1814-733X.

20. *Salii V.N.* Quasi-boolean lattices and associations // Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai. 43. Lect. in Univ. Algebra. Szeged (Hungary), 1983. Amsterdam: North-Holland, 1986. PP. 429-454.

21. *Салий В.Н.* Квазибулевы степени элементарных абелевых p-групп // Матем. заметки. 1999. Т. 66, № 2. С. 264-274.

22. *Салий В.Н.* Представление ассоциаций полными взаимно однозначными квазибулевыми преобразованиями // Упорядоченные множества и решетки. Вып. 9. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1986. С. 89-99.

23. *Rutherford D.E.* Inverses of Boolean matrices // Proc. Glasgow Math. Assoc. 1963. Vol. 6, № 1. PP. 49-53.

24. *Скорняков Л.А.* Обратимые матрицы над дистрибутивными структурами // Сиб. матем. ж. 1986. Т. 27, № 2. С. 182-185.

25. *Салий В.Н.* Универсальная алгебра и автоматы. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1988.

26. *Бухараев Р.Г.* Основы теории вероятностных автоматов. М.: Наука, 1985.

27. *Брауэр В.* Введение в теорию конечных автоматов. М.: Радио и Связь, 1987.

28. *Wee W.G., Fu K.S.* A formulation of fuzzy automata and its applications as a model of learning systems // IEEE Trans. Syst. Sci. and Cybern. 1969. Vol. SSC 5, № 6. PP. 215-223.

29. *Салий В.Н.* Решеточные автоматы и классификация неисправностей сложных систем // Методы и системы технической диагностики. Вып. 2. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1981. С. 35-39.

30. *Muir A., Warner M.W.* Lattice valued relations and automata // Discr. Appl. Math. 1984. Vol. 7, № 1. PP. 65-78.

31. Общая алгебра / Под ред. Скорнякова Л.А. М.: Наука, 1991. Т.2.

32. *Салий В.Н.* К теории булевозначных автоматов // IX Всесоюзн. совещание по логике, методологии и философии науки. Харьков, 8-10 октября 1986 г. Тезисы докл. Киев: Институт математики АН УССР, 1986. С. 10-11.

33. *Салий В.Н.* К представлению языков в квазибулевых автоматах // Методы и системы технической диагностики. Вып. 18. Материалы X Межд. конференции по проблемам теоретической кибернетики. Саратов, 22-24 июня 1993 г. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1993. С. 153-155.

УДК 531+531.19

ЕВКЛИД, ГАУСС И ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС

А.Ф. Голубенцев, доктор физико-математических наук, профессор
В.М. Аникин, кандидат физико-математических наук, доцент

СГУ, кафедра вычислительной физики и автоматизации научных исследований физического факультета

E-mail: AnikinVM@info.sgu.ru

Излагается история решения задачи Гаусса для непрерывных дробей, возникшей в результате применения алгоритма Евклида к иррациональным дробям и приведшей к появлению первой хаотической динамической системы в теории чисел. Приводятся основные характеристики отображения Гаусса. В качестве нового результата формулируется модифицированная задача Гаусса и рассчитываются многомерные плотности вероятности для неполных частных непрерывной дроби, когда исходное случайное число распределено не по равномерному закону (как в классической задаче Гаусса), а согласно инвариантному распределению отображения Гаусса. В данном случае неполные частные являются *одинаково распределенными зависимыми случайными* величинами. Полученные распределения дополняют вероятностное описание релятивистских анизотропных космологических моделей ранних стадий эволюции Вселенной, задавая совместное распределение длин отдельных периодов эволюции (длины выражаются в числах "казнеровских эпох") при хаотической осцилляции пространственно-временной метрики вблизи особой точки.

Euclid, Gauss and deterministic chaos

A.F. Goloubentsev, V.M. Anikin

The Gauss problem for continued fractions is shortly discussed. Some new results are presented. In particular, multidimensional probability distributions for coefficients of continued fractions that approximate a real number having the invariant Gauss distribution are exactly calculated. These results are applicable in homogeneous cosmological models with an oscillatory character of evolution on approach to a singularity.

Введение

В 1800 году Карл Фридрих Гаусс, общепризнанный «princeps mathematicorum», записал в своем дневнике: «*Вычисления получаются такими сложными, что, кажется, нет никакой надежды*». Спустя 12 лет в письме к Пьеру Симону Лапласу Гаусс по тому же поводу признавался: «*Предпринятые мной попытки... были безуспешны*» [1-5][1].

Чуть более 200 лет назад К.Ф. Гаусс указал на связь между алгоритмом Евклида и разложением чисел в непрерывную (цепную) дробь. Применив алгоритм Евклида, Гаусс сформули-

[1] Математический дневник К.Ф.Гаусса за 1796–1814 гг., случайно обнаруженный в 1898 г., а также упомянутое письмо к Лапласу 1812 г. опубликованы в первой части X тома Собрания трудов великого математика: Carl Friedrich Gauss. Werke. Bds, I – XII. Kőnigliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1863 – 1933. В 1973 году это издание было перепечатано издательством Georg Olms Verlag, Hildesheim – New York [1].

ISSN 0868-6238

Памяти А.Ф.Голубенцева

ВОПРОСЫ ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ

Голубенцев, А. Ф. Модифицированная задача Гаусса / А. Ф. Голубенцев, В. М. Аникин. – Текст : непосредственный // Вопросы прикладной физики: Межвузовский научный сборник / Под редакцией Ю. В. Гуляева, Н. И. Синицына и В. М. Аникина. – Саратов : Издательство Саратовского университета, 2004. – Вып. 11. – С. 41-50. – Библиогр.: с. 49-50 (35 назв.) + в сносках (2 назв.). – ISSN 0868-6238.

Выпуск 11

2004

60

УДК 531+531.19

МОДИФИЦИРОВАННАЯ ЗАДАЧА ГАУССА

$\boxed{\text{А. Ф. Голубенцев,}}$ В.М. Аникин

Саратовский государственный университет

Приводятся новые решения задачи Гаусса для разложения случайного иррационального числа из интервала (0,1) в непрерывную дробь. Иллюстрируются сложности, возникающие при решении классической задачи Гаусса. Строится отображение, сопряженное отображению Гаусса, через закон распределения которого может быть выражен одномерный закон распределения коэффициентов разложения. Рассчитываются многомерные плотности вероятности для неполных частных - коэффициентов непрерывной дроби, когда исходное случайное число распределено не по равномерному закону (как в классической задаче Гаусса), а согласно "естественному" распределению, инвариантному относительно преобразования Гаусса. Показывается, что неполные частные являются *одинаково распределенными зависимыми* величинами. Полученные распределения дополняют вероятностное описание релятивистских анизотропных космологических моделей ранних стадий эволюции Вселенной, задавая совместное распределение длин отдельных периодов эволюции (длины выражаются в числах "казнеровских эпох") при хаотической осцилляции пространственно-временной метрики вблизи особой точки решения уравнения Эйнштейна.

Введение

Загадочной особенностью научного творчества великого немецкого математика Карла Фридриха Гаусса является большое количество неопубликованных работ [1]. Как следует из архивных материалов и переписки Гаусса, ему принадлежат, например, важные неопубликованные достижения в открытии эллиптических функций, создании начал неевклидовой геометрии, построении первой динамической системы в теории чисел. При этом Гаусс стал свидетелем переоткрытия эллиптических функций норвежцем Нильсом Генриком Абелем и немцем Карлом Якоби, а также формулировки неевклидовых (сам термин принадлежит Гауссу![1]) геометрий, которые осуществили венгр Янош Больяй (отец его, Фаркаш Больяй был другом Гаусса) и русский математик Николай Иванович Лобачевский[2].

Только благодаря записям в научном дневнике Гаусса от 1800 г. и его письму к Пьеру Симону Лапласу, написанному в 1812 г., мы знаем и об открытии Гауссом первой динамической системы в теории чисел [1-6]. Видимо, к этой задаче в полной мере относятся слова, приписываемые Гауссу: *"Procreare iucundum, sed parturire molestum" - "Творить приятно, но рождать мучительно"*.

Гаусс рассматривал разложение произвольного дробного иррационального числа в непрерывную дробь. Процедура этого разложения была основана на алгоритме Евклида. Задача носила сугубо вероятностный характер, ибо изначально полагалось, что число для разложения выбирается из интервала (0,1) случайным образом. В задаче Гаусса случайность начальных условий означает *равномерную* их распределенность.

Процесс разложения числа в непрерывную дробь [7-9] на каждом шаге соответствующей вычислительной процедуры связан с определением так называемого полного частного, состоящего из суммы двух величин - целого коэффициента (неполного частного) и дробной составляющей. Именно последняя величина представляла предмет интереса Гаусса.

Если начальное число случайно, то случайны и все величины, присутствующие в разложении числа в непрерывную дробь, ибо все они получаются функциональным преобразованием исходного числа. Преобразование для разности между полным частным и коэффициентом непрерывной дроби является хаотическим отображением - точным эндоморфизмом [10-18].

Как правило, нелинейные преобразования случайных величин изменяют их вероятностные распределения. Однако Гаусс увидел, что с ростом "этажности" непрерывной дроби вероятностные законы для составляющих разложения имеют тенденцией стремление к вполне определенному равновесному (инвариантному) распределению, которое уже не зависит от "учиняемого" над случайными величинами функционального преобразования. Зная инвариантное распределение, Гаусс мучительно (судя по дневниковым записям, так можно говорить без всякого преувеличения) пытался найти вероятностные распределения для разностей полных и неполных частных разложения случайного числа в непрерывную дробь, а также и скорость установления равновесного распределения под действием нелинейного преобразования.

Свою задачу Гаусс решить не смог. Об этом он и признавался в своем упоминавшемся выше

[1] К. Ланцош. Альберт Эйнштейн и строение космоса. М.: Наука, 1967. С. 81.

[2] Реакция Гаусса на публикации названных ученых была в достаточной степени обидной для них. Например, Фаркашу он написал, что знает результаты, полученные его сыном, вот уже 30-35 лет. В аналогичном ключе Гаусс выразился о книге Лобачевского в письме к своему постоянному корреспонденту астроному Г. Шумахеру, полагая, тем не менее, что "книга, несомненно, доставит (Шумахеру) изысканное наслаждение" (см. [1], с. 107, 155).

Изв. вузов «ПНД», т. 16, № 6, 2008 УДК 517.9

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНВАРИАНТНОЙ ПЛОТНОСТИ ОТОБРАЖЕНИЯ РЕНЬИ НА ОСНОВЕ ГАУССОВА ПОДХОДА*

В.М. Аникин, С.С. Аркадакский, А.С. Ремизов, С.Н. Купцов, Л.П. Василенко

Построены конечномерные инвариантные функциональные подпространства для оператора Перрона–Фробениуса хаотического отображения Реньи $x_{n+1} = \beta x_n \mod 1$, где $1 < \beta < 2$. Показано, что инвариантная плотность этого отображения в виде конечной линейной комбинации индикаторных функций частичных отрезков, вложенных в единичный сегмент по специальному правилу, может быть определена в результате повторных действий оператора Перрона–Фробениуса данного отображения на плотность равномерного распределения (прием Гаусса). Приведены алгебраические уравнения с целыми коэффициентами, определяющие значения параметра, которым соответствует инвариантная плотность отображения с заданным числом и соответствующими амплитудами ступенек.

Введение

Выявление фундаментальных свойств дискретных динамических систем, демонстрирующих хаотическое поведение, связано с исследованием ассоциированного с отображениями линейного необратимого и несамосопряженного оператора Перрона–Фробениуса (ОПФ). Изучение свойств ОПФ (в частности, знание решения задачи на собственные функции и собственные числа этого оператора), позволяет перейти к рассмотрению *линейной* задачи, установить соответствие между свойствами эргодических динамических систем и марковских стохастических процессов, дать точные оценки для скоростей установления равновесного состояния и расцепления корреляций в динамической системе [1–3]. Проблематику подобного рода относят к актуальным вопросам теории детерминированного и «зашумленного» хаоса [3, 4]. Проявлением хаотических свойств нелинейной дискретной динамической системы является существование инвариантной плотности – одной из собственных функций ОПФ, являющейся для данного оператора «неподвижной точкой» (соответствующее собственное число равно единице).

Для различных отображений аналитическое решение спектральной задачи получено с различной степенью детализации. Вполне изученными в этом плане можно, по-видимому, считать кусочно-линейные отображения типа сдвигов Бернулли

Аникин, В. М. Определение инвариантной плотности отображения Реньи на основе Гауссова подхода / В. М. Аникин, С. С. Аркадакский, А. С. Ремизов [и др.]. – Текст : непосредственный // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2008. – Т. 16, № 6. – С. 46-56 : 3 рис. – Библиогр.: с. 54-55 (22 назв.). – Имеется электронная версия: https://elibrary.ru/item.asp?id=23276825 (дата обращения: 26.04.2022). – Режим доступа : свободный. – ISSN 0869-6632.

61

Аникин, В. М. Спектральные задачи для оператора Перрона-Фробениуса / В. М. Аникин. – DOI 10.18500/0869-6632-2009-17-4-35-48. – Текст : непосредственный // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2009. – Т. 17, № 4. – С. 35-48 : 3 таб., 2 рис. – Библиогр.: с. 47-48 (18 назв.). – Имеется электронная версия: https://elibrary.ru/item.asp?id=12895679 (дата обращения: 26.04.2022). – Режим доступа : свободный. – ISSN 0869-6632.

Изв. вузов «ПНД», т. 17, № 4, 2009 УДК 517.9

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ПЕРРОНА–ФРОБЕНИУСА

В.М. Аникин

В статье отражена проблематика изучения спектральных свойств линейного несамосопряженного оператора Перрона–Фробениуса, вводимого при вероятностном описании дискретных динамических систем с хаотическим поведением. Изложен метод аналитического решения задачи на собственные функции и собственные числа оператора для кусочно-линейных отображений и продемонстрирована определяющая роль собственных чисел и собственных функций оператора в оценке релаксационных и корреляционных свойств хаотических отображений.

Ключевые слова: Линейный несамосопряженный оператор, собственные функции, собственные значения.

> В основе наших современных знаний лежат прежде всего простые модели, именно они, благодаря своей простоте, позволяют понять сложности окружающего нас мира.
>
> *Ю.И. Неймарк*

Введение

Простейшими моделями хаотических процессов, как известно, являются динамические системы с дискретным временем – одномерные отображения, описываемые разностными уравнениями вида

$$x_{n+1} = g(x_n, \lambda), \quad n = 0, 1, 2, ..., \ x_n \in (a, b), \tag{1}$$

где g – нелинейная или кусочно-линейная необратимая итеративная функция, сохраняющая меру в области определения отображения – интервале (a, b); λ – параметр, определяющий особенности динамики отображения. Простейшие модели динамического хаоса и сейчас не утратили своего и научного, и методологического значения для нелинейной науки. Собственно, первые серьезные шаги на пути ее изучения и начинаются со сценария М. Фейгенбаума перехода к хаосу, обнаруженного впервые именно для одномерных отображений и впоследствии нашедшего экспериментальное подтверждение при изучении ряда физических явлений. Второй важный концептуальный пример связан с развивавшейся коллективом авторов во главе с И.Р. Пригожиным фундаментальной концепцией относительно определяющей роли хаоса в

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 47, Вып. 5

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

1970

Дорошкевич, А. Г. Модель перемешанного мира и космологическая проблема / А. Г. Дорошкевич, И. Д. Новиков. – Текст : непосредственный // Астрономический журнал. – 1970. – Т. 47, вып. 56. – С. 948-956 : 1 рис. – Библиогр.: с. 956 (9 назв.). – ISSN 0004-6299.

62

АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 47 1970 Вып. 5

УДК 523.11

А. Г. ДОРОШКЕВИЧ, И. Д. НОВИКОВ

МОДЕЛЬ ПЕРЕМЕШАННОГО МИРА И КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ ПРОБЛЕМА

Дается количественный анализ решения, описывающего модель перемешанного мира, и анализируется распространение света в такой модели. Как было показано ранее [6, 7], решение состоит из периодов монотонного расширения мира в одном направлении и осцилляции в двух других направлениях. В следующем цикле монотонное расширение происходит вдоль другого направления и т. д. В настоящей работе показано, что в ходе расширения за n циклов происходит катастрофически большое изменение масштаба (за исключением вырожденных случаев). Масштаб меняется не менее чем на $(u_{0,1})^2(u_{0,2})^2...(u_{0,n})^2$ порядков, где u_{0i} — число осцилляции в i-м цикле (см. (12)). При изменении масштаба от квантово-гравитационного 10^{-33} *см* до современного 10^{28} *см* возможно не более трех циклов с двумя-тремя осцилляциями в каждом. Если число осцилляций больше 10, то не могло быть больше одного цикла. Свет успевает обойти мир по всем направлениям в лучшем случае не более 2—3 раз. Этого, по-видимому, не достаточно для выравнивания неоднородностей температуры.

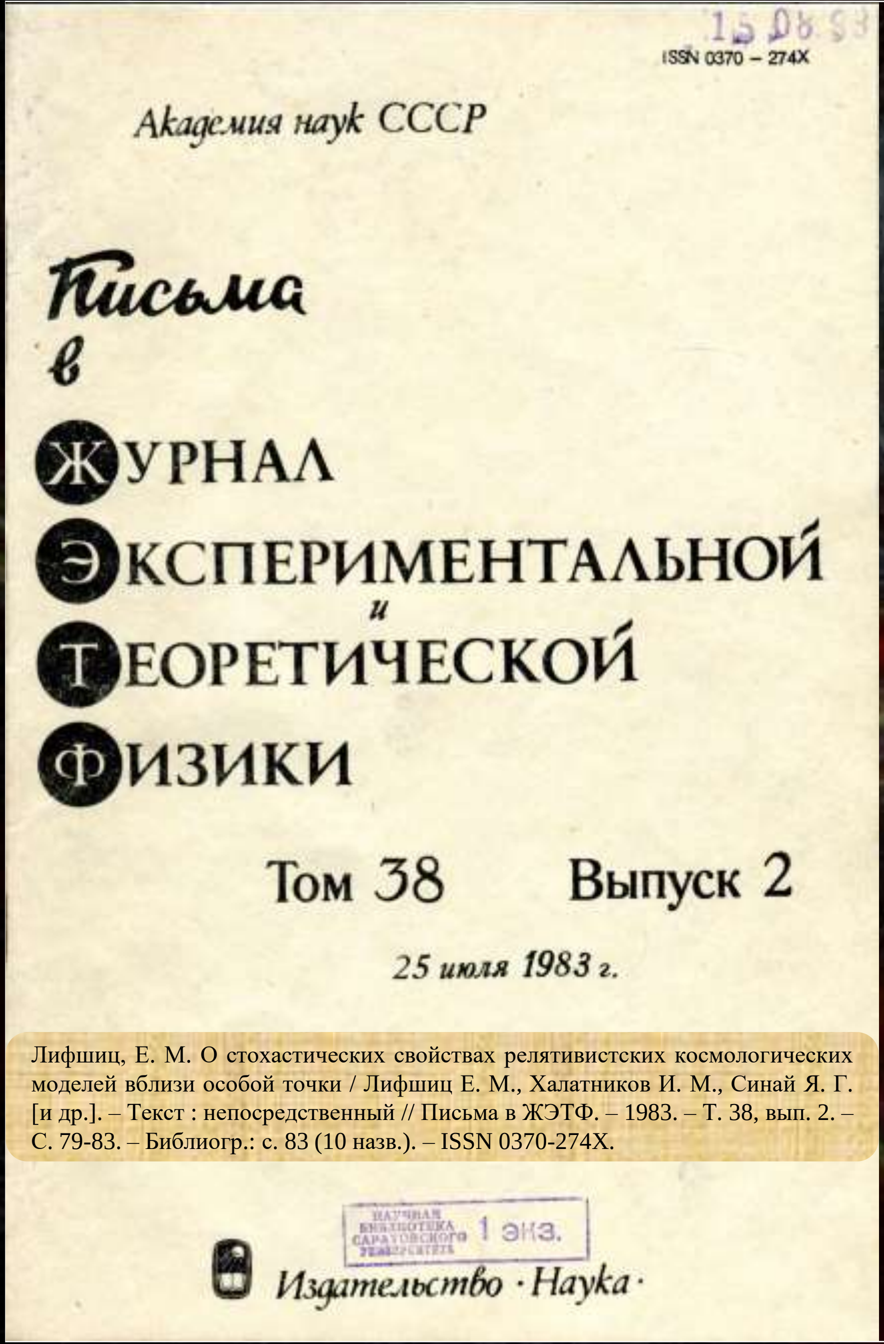
MIXMASTER UNIWERSES AND THE COSMOLOGICAL PROBLEM. by *A. G. Doroshkevich, I. D. Novikov.*— The quantitative analysis of a model of the mixmaster universe and the propagation of light in this model are considered. As it was shown earlier [6, 7], the solution of Einstein's equations consists of timespans of monotonous expansion of the universe along one direction and oscillations along two others directions. In the next timespan the monotonous expansion is going along the other direction and so on. In this paper it is shown that during the expansion for n timespan the scale changes catastrophically, not less than (excluding degenerate cases) $(u_{0,1})^2(u_{0,2})^2\ldots(u_{0,n})^2$ of orders, where u_{0i} is a number of oscillations in the i-th timespan (see formula [12]).

Then the scale changes from quantum — gravitational one $l_g \approx 10^{33}$ *cm* up to the nowday scale $L \approx 10^{23}$ *cm* three (or less) the timespan with two — three oscillations in each timespan are possible only. If the number of oscillations is more than 10 then there is only one timespan.

The light can do 2—3 revolutions only around the universe in all directions. Apparently it is not enough for disappearing of nonuniformities of temperature.

1. Введение. В работах Мизнера [1—3] предпринята попытка построить замкнутую космологическую модель перемешанного мира, в котором на ранней, резко анизотропной стадии расширения свет (и звук в веществе при $p = \varepsilon/3$) успевают много раз обойти мир во всех направлениях. Тем самым в этой модели в отличие от фридмановской, где свет ни разу не успевает обойти мир, имеются на ранней стадии расширения условия для выравнивания неоднородностей и температуры в масштабах всей Вселенной.

Вещество на этой стадии не влияет на эволюцию модели, гравитацией вещества можно пренебречь. На поздней стадии, когда гравитация вещест-



Лифшиц, Е. М. О стохастических свойствах релятивистских космологических моделей вблизи особой точки / Лифшиц Е. М., Халатников И. М., Синай Я. Г. [и др.]. – Текст : непосредственный // Письма в ЖЭТФ. – 1983. – Т. 38, вып. 2. – С. 79-83. – Библиогр.: с. 83 (10 назв.). – ISSN 0370-274X.

22. *Gill J.C.* Solid State Comm., 1982, **44**, 1041.
23. *Fung K.K., Steeds J.W.* Phys. Rev. Lett., 1980, **45**, 1696.
24. *Ong N.P., Verma G.* Phys. Rev., 1983, B27, 4495; *Ong N.P., Verma G., Maki K.* Preprint, 1983.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
9 июня 1983 г.

Письма в ЖЭТФ, том 38, вып. 2, стр. 79 – 82 *25 июля 1983 г.*

О СТОХАСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ВБЛИЗИ ОСОБОЙ ТОЧКИ

Е.М.Лифшиц, И.М.Халатников, Я.Г.Синай, К.М.Ханин, Л.Н.Щур

Показано, что количественные параметры развитой ранее [1] статистической теории колебательной эволюции космологических моделей вблизи особенности могут быть вычислены точным образом.

Колебательный режим приближения к особой точке был впервые открыт для вакуумной однородной космологической модели типа IX по Бианки (см. [2]). Характер эволюции модели может быть описан тремя „масштабными функциями" $a(t), b(t), c(t)$, определяющими изменение со временем t масштабов длин в трех различных направлениях в пространстве. Колебательный режим складывается из бесконечной последовательности сменяющих друг друга (при $t \to 0$) серий колебаний, в каждой из которых колеблются две из функций a, b, c, а третья монотонно убывает (эти серии были названы в [2] эрами); при переходе от одной эры к следующей одна пара колеблющихся функций заменяется другой. Амплитуда колебаний растет в пределах каждой эры и, в особенности, при переходе от одной эры к другой, но произведение abc монотонно убывает — примерно как t. Эры сгущаются при $t \to 0$; более адекватной переменной для описания их смен является неограниченно возрастающее „логарифмическое время" $\Omega = -\ln t$.

Обозначим посредством $k_0, k_1, k_2, \ldots$ „длины" последовательных эр (измеренные числом содержащихся в них колебаний), начиная от некоторой начальной k_0. Оказывается, что эта последовательность определяется числами $x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots$ $(0 < x_s < 1)$, связанными друг с другом преобразованием

$$x_{s+1} = \{ 1 / x_s \}, \qquad (1)$$

где фигурные скобки обозначают дробную часть числа; при этом длины $k_s = [1/x_{s-1}]$, где квадратные скобки обозначают целую часть числа. И.М.Лифшицем и двумя из нас [1] было обращено внимание на то, что закон смены длин эр согласно (1) приводит к самопроизвольной стохастизации поведения модели при ее эволюции к особенности; при этом „забываются" начальные условия, заданные в некоторый момент $t = t_0 > 0$ (ниже эта статья цитируется как I).

Важность колебательного режима в однородной модели связана с тем, что он является прототипом общего неоднородного космологического решения уравнений Эйнштейна (вблизи особенности) — см. [3]. Хотя неоднородность и наличие материи приводят к появлению некото-

Голубенцев, А. Ф. О хаотической модели ранней эволюции Вселенной / А. Ф. Голубенцев, В. М. Аникин. – Текст : непосредственный // Радиотехника. – 2005. – № 4. – С. 50-55. – Библиогр.: с. 54-55 (35 назв.). – ISSN 0485-8972.

УДК 531+531.19

О хаотической модели ранней эволюции Вселенной

$\boxed{\text{А. Ф. Голубенцев,}}$ В.М. Аникин

Рассчитываются многомерные плотности вероятности для неполных частных - коэффициентов непрерывной дроби, когда исходное случайное число распределено не по равномерному закону (как в классической задаче Гаусса), а согласно "естественному" распределению, инвариантному относительно преобразования Гаусса. Показывается, что неполные частные являются *одинаково распределенными зависимыми* величинами. Полученные распределения дополняют вероятностное описание релятивистских однородных анизотропных космологических моделей ранних стадий эволюции Вселенной, задавая совместное распределение длин отдельных периодов эволюции (длины выражаются в числах "казнеровских эпох") при хаотической осцилляции пространственно-временной метрики вблизи особой точки решения уравнения Эйнштейна.

Multidimensional probability distributions for coefficients of continued fractions that approximate a real number having the invariant Gauss distribution are exactly calculated. It is shown that these coefficients are dependent values having common distribution. The results are applicable in homogeneous anisotropic cosmological models (so called mixmaster universe) with an oscillatory character of evolution on approach to a singularity.

Введение

Благодаря записям в научном дневнике Гаусса от 1800 г. и его письму к Пьеру Симону Лапласу, написанному в 1812 г., мы знаем об открытии Гауссом первой динамической системы в теории чисел [1-6].

Гаусс рассматривал разложение произвольного дробного иррационального числа в непрерывную дробь. Процедура этого разложения была основана на алгоритме Евклида. Задача носила сугубо вероятностный характер, ибо изначально полагалось, что число для разложения выбирается из интервала (0,1) случайным образом. В задаче Гаусса случайность начальных условий означает *равномерную* их распределенность.

Процесс разложения числа в непрерывную дробь [7-9] на каждом шаге соответствующей вычислительной процедуры связан с определением так называемого полного частного, состоящего из суммы двух величин - целого коэффициента (неполного частного) и дробной составляющей. Именно последняя величина представляла предмет интереса Гаусса.

Преобразование для разности между полным частным и коэффициентом непрерывной дроби является хаотическим отображением - точным эндоморфизмом [10-18].

С ростом "этажности" непрерывной дроби вероятностные законы для составляющих разложения имеют тенденцией стремление к вполне определенному равновесному (инвариантному) распределению, которое уже не зависит от "учиняемого" над случайными величинами функционального преобразования. Зная инвариантное распределение, Гаусс пытался найти вероятностные распределения для разностей полных и неполных частных разложения случайного числа в непрерывную дробь, а также и скорость установления равновесного распределения под действием нелинейного преобразования.

Свою задачу Гаусс решить не смог. Об этом он и признавался в своем упоминавшемся выше письме к Лапласу. История решения этой задачи достаточно подробно рассмотрена в [4-6]. Современное прочтение задачи Гаусса базируется на решении спектральной задачи для линейного эволюционного оператора, соотносимого с нелинейным преобразованием, определяющим алгоритм вычисления гауссовой переменной [19-25].

Распределения же для целых коэффициентов непрерывной дроби Гаусс не рассматривал, и, таким образом, его задача имеет некоторую незавершенность с вероятностной точки зрения. Поэтому вполне естественна постановка дополнительной задачи, в которой ставится вопрос о распределении коэффициентов непрерывной дроби,

PHYSICAL REVIEW LETTERS

VOLUME 22 NUMBER 20

·91764 ФИЗИЧЕСКОЕ ОБОЗРЕНИЕ
(письма) № Т-20
(физикал ревью летерс)
По подписке 1969 г.

19 MAY 1969

Published by
THE AMERICAN PHYSICAL SOCIETY

Misner, C. W. Mixmaster Universe / C. W. Misner. – DOI 10.1103/PhysRevLett.22.1071. – Текст : непосредственный // Physical Review Letters. – 1969. – Vol. 22, Iss. 20. – P. 1071-1074. – Bibliogr.: P. 1074 (9 Ref.). – Имеется электронная версия: https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.22.1071 (дата обращения: 04.06.2022). – Режим доступа : по подписке. – ISSN 0031-9007.

65

[7] L. Mandel, Proc. Phys. Soc. (London) 72, 1037 (1958).
[8] L. Mandel, E. C. G. Sudarshan, and E. Wolf, Proc. Phys. Soc. (London) 84, 435 (1964).
[9] M. M. Miller and E. A. Mishkin, Phys. Letters 24A, 188 (1967); P. P. Bertrand and E. A. Mishkin, Phys. Letters 25A, 204 (1967).

MIXMASTER UNIVERSE*

Charles W. Misner
Department of Physics and Astronomy, University of Maryland, College Park, Maryland 20742
(Received 14 April 1969)

The generic, nonrotating, homogeneous cosmological model for a closed space (Bianchi type IX) has a very complex singularity which can, however, be described in detail. It appears that only the exceptional (previously studied) cases will have particle horizons. Thus these models may lead to some insight into how the broad-scale homogeneity of the universe may have been produced at very early times.

Particle horizons[1] in cosmological models are limits on the possibilities of causal interactions between different parts of the universe in the time available since the initial singularity. In the standard metric $ds^2=\eta^2\{-d\eta^2+dx^2+dy^2+dz^2\}$ for the radiation-dominated early phase of a Robertson-Walker (RW) cosmological model, it is clear that the coordinate time $\Delta\eta$ required for a light signal ($ds^2=0$) to connect two regions of spatial-coordinate separation Δx is $\Delta\eta=|\Delta x|$. Thus at a fixed epoch $\eta_0>0$, no causal interactions subsequent to the singularity at $\eta=0$ have occurred between regions of coordinate separation $|\Delta x|>\eta_0$. In observational terms this effect says, for example, that if the 3°K background radiation[2] were last scattered at a redshift $z=7$, then the radiation coming to us from two directions in the sky separated by more than about 30° was last scattered by regions of plasma whose prior histories had no causal relationship. These Robertson-Walker models therefore give no insight into why the observed microwave radiation from widely different angles in the sky has[2] very precisely ($\lesssim 0.2\,\%$) the same temperature.

We will describe a model of a closed (type-IX)[2] universe which has a very different singularity behavior than the RW models, but which could evolve into the closed RW model at the present epoch. Several aspects of the description parallel the much simpler behavior of a type-I universe with metric

$$ds_{\mathrm{I}}^2=-dt^2+\sum_k (l_k)^2 dx_k^2 \tag{1}$$

which is closed artificially by assuming that each space coordinate x_k is periodic with, say, period 4π. Near the singularity the matter or radiation density terms in the Einstein equations can be neglected, and one finds the Kasner[3] solutions $l_k=t^{2p_k}$ with $\sum(p_k)^2=1=\sum p_k$. The model with $p_k=\delta_k{}^1$ then has $ds^2=-dt^2+t^2dx^2+dy^2+dz=e^{2\eta}\times(-d\eta^2+dx^2)+dy^2+dz^2$, where $\eta=\ln t$. Evidently light rays ($ds=0$) can completely circle the universe in the x direction ($\Delta x=4\pi$) in a coordinate-time interval $\Delta\eta=4\pi$ for this metric. Since the singularity is at $\eta=-\infty$ here, this much coordinate time has preceded every nonsingular epoch in this model, and there exist no horizons for causal propagation in the x direction.[4] To compare later with the type-IX model, note that this interval $\Delta\eta=4\pi$ corresponds to a volume expansion ratio of $\Delta\ln(l_1l_2l_3)=4\pi$. In the course of our description of the type-IX model, we will see that it closely approximates this model during periods involving large expansion ratios, but does this infinitely many times with different directions having the open channels of communication each time. On this basis we expect that the absence of horizons in one direction only in this particular Kasner metric corresponds to a total absence of horizons in the generic nonrotating, type-IX metric.

The Bianchi type-IX metric is

$$ds_{\mathrm{IX}}^2=-dt^2+\sum_k (l_k)^2\sigma_k^2, \tag{2}$$

where $\sigma_z=-(d\psi+\cos\theta\, d\varphi)$, $\sigma_x=\sin\psi\, d\theta-\cos\psi\sin\theta\times d\varphi$, and $\sigma_y=\cos\psi\, d\theta+\sin\psi\sin\theta\, d\varphi$ satisfy $d\sigma_i=\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\sigma_j\wedge\sigma_k$ and are differential forms on the three-sphere (covering group of the rotation group) parametrized by Euler angles $\psi\theta\varphi$ with $0\leqslant\psi\leqslant 4\pi$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, and $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$. To distinguish between expansion (volume change) and anisotropy (shape change) we write $l_k=R\exp\beta_k$, where

$$R\equiv e^{-\Omega}=(l_1l_2l_3)^{\frac{1}{3}} \tag{3}$$

...Гений Гаусса не имел равных и был вне рамок времени, и его окончательная «Жизнь» вполне может оказаться вне времени...