

# ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ДЛЯ КАЛИБРОВКИ МОДЕЛЕЙ ОЦЕНКИ ВЕРОЯТНОСТИ ДЕФОЛТА

А. С. Подгорный<sup>1</sup>, С. С. Илюшин<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия

<sup>2</sup>НИУ «Высшая школа экономики», Москва, Россия

E-mail: andreypodgorny10@gmail.com

В настоящей статье описаны некоторые аспекты построения и оценки качества математических моделей прогнозирования вероятности дефолта в рамках процесса оценки кредитного риска контрагентов. Отдельное внимание уделяется вопросу калибровки построенных моделей. В качестве метрик калибровки предлагается использовать оценку Брайера, а для проведения самой корректировки - калибровку Платта и изотоническую регрессию.

## PROBABILITY OF DEFAULT MODELS UNDER CREDIT RISK VALUATION

A. S. Podgorny, S. S. Ilushin

This article describes some aspects of building and assessing the quality of mathematical models for predicting the probability of default as part of the process of assessing the credit risk of counterparties. Special attention is paid to the issue of calibration of the constructed models. It is proposed to use Brayer's estimate as the calibration metrics, and Platt's calibration and isotonic regression to carry out the correction itself.

Деятельность компаний нефинансового сектора подвержена кредитным рискам, реализация которых может оказать негативное влияние на финансовые результаты, финансовую устойчивость и инвестиционную привлекательность компании для акционеров и инвесторов. В связи с чем, важно адекватно оценивать уровень кредитного риска как для внутренних целей, так и для целей расчета уровня резервов, создаваемых компаниями в рамках международных стандартов финансовой отчетности (МСФО 9) [1].

Оценка кредитных рисков может осуществляться в разрезе актива, контрагента или портфеля контрагентов с использованием основных метрик кредитного риска – EL, CVAR, ES. Расчет кредитных метрик – с помощью оценки компонент кредитного риска – PD, LGD и EAD.

Метрика EL применяется для оценки кредитного риска на уровне актива, контрагента и портфеля контрагентов. Уровень ожидаемых убытков по активу соответствует произведению всех компонент кредитного риска:

$$EL = PD \times LGD \times EAD,$$

где *EAD* (Exposure at Default) – сумма требований, подверженная риску дефолта;

*LGD* (Loss Given Default) – доля потерь при дефолте (в процентах от *EAD*);

PD (Probability of Default) - вероятность дефолта

Вероятность дефолта отражает оценку вероятности того, что в течение определенного периода времени по активу или контрагенту произойдет событие дефолта. В зависимости от соотношения общей суммы задолженности контрагента и установленного порога материальности для оценки вероятности дефолта применяется индивидуальный или групповой подход. Для оценки вероятности дефолта на индивидуальной основе (решения задачи классификации/оценки дефолта контрагента) можно использовать логистическую регрессионную модель [2], для оценки параметров которой применяется метод максимального правдоподобия. Вероятность дефолта при этом описывается логистической функцией:

$$PD = \frac{1}{1 + e^{-(\alpha + \beta x^T)}}$$

$\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$  – вектор коэффициентов, участвующий в решении оптимизационной задачи.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$  – вектор финансовых показателей или характеристик контрагента.

Оценки вероятности дефолта, получаемые при расчете на основе индивидуального подхода, соответствуют однолетней вероятности дефолта, которая требует корректировки на срок инструмента. Для инструмента с ожидаемым сроком  $T$  (в месяцах), формула корректировки принимает следующий вид:

$$PD_T = 1 - (1 - PD_{1Y})^{\frac{T}{12}}$$

где  $PD_{1Y}$  – однолетняя вероятность дефолта.

Оценки вероятности дефолта, получаемые при расчете на основе группового подхода, учитывают срок задолженности на этапе построения и не нуждаются в корректировке.

При необходимости проводится корректировка вероятности дефолта на макроэкономический прогноз Non-performing Loan (доля просроченной задолженности по кредитам в общем объеме ссуд) или Default Rate (фактический уровень дефолта, то есть отношение количества дефолтных обязательств к общему количеству обязательств в портфеле компании.)

При построении индивидуальной модели PD рекомендуется проводить однофакторный анализ. Целью однофакторного анализа является отбор в перечень для многофакторного анализа только тех факторов, которые обладают достаточной объясняющей силой, с точки зрения дискриминации дефолтных наблюдений, при этом не имея значительного уровня корреляции с другими объясняющими факторами, вошедшими в перечень.

Для целей отбора факторов для используются Information Value и коэффициент Gini. Подбор оптимального сочетания факторов осуществляется в рамках подхода «backward stepwise», основанном на поиске минимального значения AIC и максимального Gini. Для повышения точности отбора факторов используется q-fold кросс-валидация [3].

Модель PD калибруется с целью преобразования рассчитанных вероятностей

стей дефолта в значения, наиболее близко отражающие фактические. Целевой переменной для калибровки могут являться как внутренние (портфельные), так и внешние (рыночные) показатели дефолта [7]. Выборка, на основе которой рассчитываются модельные значения для целей калибровки, зависит от используемой целевой переменной: в случае калибровки на внутреннюю статистику дефолтов - выборка формируется из портфельных наблюдений, в случае калибровки на внешние данные - выборка должна состоять из тех компаний, на чью статистику производится калибровка (исключением является ситуация, когда портфельные данные репрезентативны по отношению ко внешним показателям).

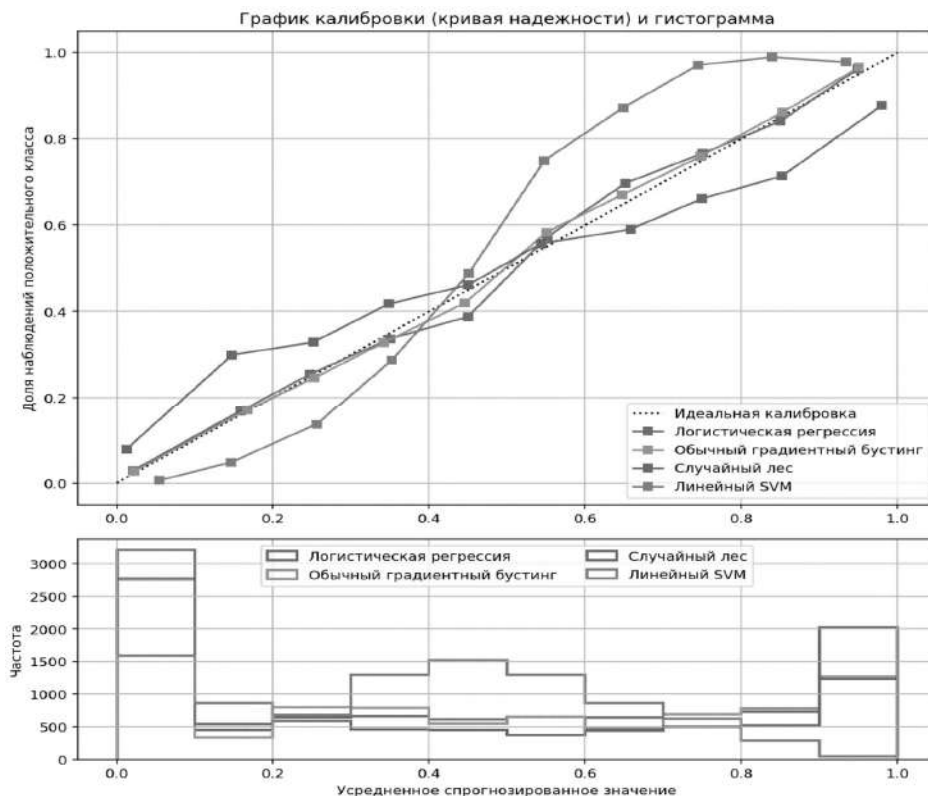
При решении задачи оценки PD (выполнение классификации) часто требуется не только предсказать (дефолтный) класс, но и получить вероятность соответствующего класса. Эта вероятность дает вам некоторую уверенность в прогнозе. Некоторые модели могут давать плохие оценки вероятностей классов, а некоторые даже не позволяют вычислить вероятности (например, линейный классификатор опорных векторов). Хорошо откалиброванные классификаторы - это вероятностные классификаторы, выходные вероятности которых могут напрямую интерпретироваться как некоторый уровень уверенности. Например, хорошо откалиброванный классификатор принадлежности контрагента к дефолтному классу (бинарный) должен классифицировать наблюдения так, чтобы среди наблюдений, которым он присвоил вероятность дефолтного класса близкую к 0,8, приблизительно 80% наблюдений действительно принадлежали дефолтному классу. Некоторые методы машинного обучения, такие как наивный байесовский классификатор и многослойные перцептроны, известны своей высокой точностью. Несмотря на то, что данные модели могут иметь хорошую дискриминирующую способность, полученные вероятности рассеиваются к предельным точкам множества [4]. Например, среди наблюдений, которым присвоена вероятность 90%, только 70% могут действительно принадлежать положительному классу. Для оценки качества калибровки вероятностей используется оценка Брайера - среднеквадратичная разница между спрогнозированной вероятностью и фактическим прогнозом [5].

$$Brier = \frac{\sum_i^N (p_i - a_i)^2}{N}$$

$p_i$  – спрогнозированная вероятность наблюдения  $i$ .

$a_i$  – фактический прогноз класса наблюдения  $i$ .

Следовательно, чем ниже оценка Брайера, тем лучше откалиброваны вероятности.



Пример сравнения качества калибровки вероятности  
положительного класса для трех различных классификаторов:  
логистической регрессии, градиентного бустинга и случайного леса  
(адаптация scikit-learn.org).

На рисунке видно, что хуже всего откалиброваны «вероятности» случайного леса и линейного SVM. Случайный лес и линейный SVM имеют наибольшие оценки в рамках оценки Брайера и логистической функции потерь. Также можно заметить, что кривая калибровки для SVM имеет вид сигмоиды.

Для улучшения оценки Брайера может использоваться калибровка Платта или изотоническая регрессия [6]. Изначально калибровка Платта предназначалась для преобразования результатов применения алгоритма опорных векторов (SVM) в вероятности, применив к первым соответствующее отображение (Функция Сигмоида). Обозначив результаты алгоритма как  $f(x)$  и отобразив их на сигмоиду, получаем:

$$P(y = 1|f) = \frac{1}{1 + e^{Af+d}}$$

$A$  и  $d$  -неизвестные параметры, для оценки которых используется ММП на отложенной выборке. Метод градиентного спуска применяется для поиска таких значений  $A$  и  $d$ , при которых решение удовлетворяет условию:

$$\operatorname{argmin}_{p_i} \left( - \sum_i^N (y_i \log(p_i) + (1 - y_i) \log(1 - p_i)) \right),$$

где  $p_i = \frac{1}{1 + e^{Af_i+d}}$

Альтернативой калибровки Платта является изотоническая регрессия [4]. Изотоническая регрессия - более общий метод, в отличие от калибровки Платта, поскольку лишь предполагает, что  $y_i = m(f_i) + \varepsilon_i$ , где  $m$  - это изотоническая (монотонно возрастающая) функция. На отложенной выборке мы ищем такую кусочно-постоянную функцию  $\vartheta = \operatorname{argmin}(-\sum_i^N (y_i - z(f_i))^2)$ . Речь идет о минимизации среднеквадратичной ошибки между спрогнозированными вероятностями положительного класса и фактическими значениями зависимой переменной). Сигмоидная калибровка Платта предполагает, что калибровочная кривая имеет вид сигмоиды, тогда как изотоническая калибровка может справиться с любым видом калибровочной кривой при условии достаточного объема данных для калибровки.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Международный стандарт финансовой отчетности (IFRS) 9. [Электронный ресурс]. URL: [https://www.minfin.ru/common/upload/library/2013/06/prilozhenie\\_1\\_-\\_RU\\_IFRS\\_09\\_GVT\\_2011.pdf](https://www.minfin.ru/common/upload/library/2013/06/prilozhenie_1_-_RU_IFRS_09_GVT_2011.pdf) (дата обращения: 01.10.2021).
2. *Chen N., Ribeiro B., Chen A.* Financial credit risk assessment: a recent review // *Artificial Intelligence Review*. 2016. № 45 (1). P. 1-23.
3. Predicting good probabilities with supervised learning // *Proceedings of the 22nd international conference on Machine learning*. dl.acm.org. Retrieved 2020.
4. *Brier G. W.* Verification of Forecasts Expressed in Terms of Probability // *Monthly Weather Review*. 1950. Vol. 78. P. 1-3.
5. *Platt J et al.*, Probabilistic outputs for support vector machines and comparisons to regularized likelihood methods // *Advances in large margin classifiers*. 1999. Vol. 10. No. 3. Pp. 61–74.
6. *Zadrozny B., Elkan C.* Transforming classifier scores into accurate multiclass probability estimates // in *Proceedings of the eighth ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining*. 2002. P. 694–699.
7. *Kumar A., Liang P., Ma T.* Verified uncertainty calibration // arXiv preprint arXiv. 2019.