МЕТОДЫ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПОРТФЕЛЬНОГО ИНВЕСТИРОВАНИЯ

Ю. И. Кротова, А. Р. Файзлиев

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Россия
E-mail: julia.krotova.sgu@gmail.com, faizlievar1983@mail.ru

Репликация индекса является одной из пассивных стратегий управления портфелем, которая состоит в имитации (репликации) доходности заданного финансового индекса. Очевидно, что ошибка слежения за индексом может быть сведена к минимуму за счет покупки всех активов индекса в соответствующих пропорциях. Однако, такой портфель будет состоять из неликвидных активов и потребует значительных транзакционных издержек. Поэтому необходимо, чтобы портфель слежения за индексом состоял из небольшого количества активов, то есть был разреженным. В этой статье мы изучаем различные алгоритмы слежения за индексом в l_2-норме, в частности жадный алгоритм, алгоритм типа LASSO и аппроксимацию l_0-нормы. Численное моделирование показывает, что хорошая настройка модели на выборочных данных не всегда гарантирует хороший результат с точки зрения ожидаемой доходности и риска на вне выборочных данных.

REGULARIZATION METHODS FOR SOLVING THE PROBLEM OF PORTFOLIO INVESTMENT

Yu. I. Krotova, A. R. Fayzliev

Index tracking is one of the passive portfolio management strategies that involves imitating (replicating) the profitability of a given financial index. Obviously, the tracking error can be minimized by purchasing all assets in appropriate proportions. However, such a portfolio will consist of illiquid assets and will require significant transaction costs. Therefore, it is necessary for the index tracking portfolio to consist of a small number of assets to be sparse. In this article, we study various algorithms for tracking an index in the l_2-norm, in particular the greedy algorithm, the LASSO-type algorithm, and the l_0-norm approximation. Numerical modeling shows that good model tuning on sample data does not always guarantee a good result in terms of expected return and risk on off-sample data.

1. Введение

Существует две основных финансовых стратегии управления портфелем акций. Первая из них – активная стратегия, предполагающая инвестирование в акции, превосходящие доходности других акций по ожиданиям инвестора [1]. В этой стратегии эффективность зависит, в основном, от опыта инвестора. Другая стратегия носит название пассивной. В ней основное внимание уделяется долгосрочным показателям, а не краткосрочному достижению прибыли [1].

Эмпирический анализ, проведенный в последние годы, показал, что активная стратегия не может превышать рыночный индекс. В связи с этим большее внимание уделяется пассивной стратегии, получающей прибыль, не принимая чрезмерных рисков. Эта стратегия приобрела популярность за рубежом [2, 3]. Одной из разновидностей пассивных стратегий является стратегия репликации индекса. Основная её идея состоит в том, что мы составляем портфель акций, доходность которого максимально приближена к значению рыночного индекса. Таким образом, находится портфель с минимальным значением дисперсии ошибки слежения за индексом, т.е. суммы квадратов отклонений между доходностями портфеля и рыночным индексом. Поставленную задачу можно записать следующим образом:

$$x^* = \arg\min \frac{1}{m} \|I - Rx\|_2^2, \quad x^T 1_n = 1. \tag{1}$$

В задаче (1) использованы следующие обозначения: n – общее число инвестиционных активов, $R = (r_{ti})$ – доходность актива i в момент времени t, $1 \leq i \leq n, 1 \leq t \leq m$. Сам портфель имеет вид $x^T = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, где x_i – вес актива i в рассматриваемом портфеле. За l_2-норму принимается $\|x\|_2 \coloneqq (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{1/2}$.

Заметим, что классическая модель Марковица является частным случаем задачи (1) [4, 5]. В этой модели находится портфель, в котором оптимальные веса каждой акции определяются из решения задачи квадратичной оптимизации [6, 7]. Многие исследователи занимались задачей репликации индекса. Например, Радд создал единую факторную модель для S&P 500 с помощью включения транзакционных издержек в целевую функцию [8]. Корелли и Марчеллино представили многофакторные модели для решения задачи репликации индекса [9]. Коннор и Лиланд включили в модель операционные издержки, как фиксированный процент от вложенных денег [10]. Фрино и Галлахер изучили влияние сезонных факторов на ошибки репликации и обнаружили, что ошибка имеет большее значение в январе из-за колебаний рынка в начале года [11]. Из-за сложности задачи репликации индекса, традиционные методы не могут дать оптимальное решение [12]. В статье [13] показано, что оптимизация на основе схемы Марковица является эмпирически неустойчивой: малые изменения доходностей активов, волатильности доходностей активов или их корреляций может оказывать большое влияние на результат процедуры оптимизации. В этом смысле, классическая задача Марковица оптимизации портфеля может рассматриваться как некорректная обратная задача.

Для получения значимых результатов, устойчивых для такого рода некорректных задач, как правило, используют процедуру регуляризации [14]. Подход состоит в том, чтобы добавить в целевую функцию штрафное слагаемое в различных формах. В целом, добавление штрафа обеспечивает более высокую точность прогнозирования из-за уменьшения количества ненулевых элементов решения и повышает интерпретируемость, поскольку приводит к получению достаточно разреженных портфелей [15]. Однако наиболее важным свойством регуляризации штрафной оценки является то, что она применима даже в тех случаях, когда размерность решения намного больше размера выборки.

Существует несколько способов регуляризации. В работе [16] предлагается добавить так называемый l_1-штраф к исходной целевой функции. Таким образом, необходимо найти вектор портфельных весов x, который является решением следующей задачи:

$$x^* = \arg\min \frac{1}{m} \|I - Rx\|_2^2 + \tau \|x\|_1, \quad x^T 1_n = 1.$$

Ридж-регрессия или l_2-регуляризация была разработана А.Н. Тихоновым в 1965 году [17]. Добавление в целевую функцию штрафа в норме l_2 приводит к гладкости решения, и как следствие к хорошей работе на данных вне выборки.

$$x^* = \arg\min \frac{1}{m} \|I - Rx\|_2^2 + \tau \|x\|_2^2, \quad x^T 1_n = 1.$$

Также, существует подход, состоящий в минимизации ошибки репликации с ограничением на максимальное количество активов, удерживаемых в портфеле [18]. Такая модель реализуется добавлением штрафа в норме l_0:

$$x^* = \arg\min \frac{1}{m} \|I - Rx\|_2^2, \quad x^T 1_n = 1, \|x\|_0 \le K,$$

где K есть ограничение на количество активов в портфеле с ненулевыми весами. Обычно предполагается, что K значительно меньше общего числа активов $K \le n$.

2. Алгоритмы для решения задачи репликации индекса с ограничением на кардинальность

2.1. Жадный алгоритм

В работах [19, 20] показано, что жадные алгоритмы показывают высокую эффективность при решении практических задач. Суть жадного алгоритма (Greedy) заключается в последовательном отборе активов, наиболее коррелирующих с индексом. Включение новых активов продолжается до тех пор, пока в портфеле не окажется K активов.

Обозначим через $M_K \subset N$ подмножество индексного множества $N = \{1, \dots, n\}$, соответствующее к ненулевым элементам x, а через $\tilde{R}_{M_k}$ – подматрицу матрицы доходностей, в которую вошли столбцы подмножества. Тогда задача репликации индекса с $x_i = 0$ для $i \in N \backslash M_k$ будет иметь вид:

$$\tilde{x}^* = \arg\min_{\tilde{x}} \frac{1}{m} \left\| I - \tilde{R}_{M_k} \tilde{x} \right\|_2^2 \text{ при условии } \tilde{x}^T 1_{|M_k|} = 1, \tilde{x} \in \mathbb{R}^{|M_k|}.$$

Обозначим $f(M_k) := \left\| I - \tilde{R}_{M_k} \tilde{x} \right\|_2^2$, тогда оптимальное решение задачи может быть найдено в явном виде методом Лагранжа:

$$\tilde{x}_{M_k} = \left(\tilde{R}_{M_k}^T \tilde{R}_{M_k} \right)^{-1} \left(\tilde{R}_{M_k}^T I - \lambda e_k \right),$$

$$\lambda = \frac{1_k^T \left(\tilde{R}_{M_k}^T \tilde{R}_{M_k} \right)^{-1} \tilde{R}_{M_k}^T I - 1}{1_k^T \left(\tilde{R}_{M_k}^T \tilde{R}_{M_k} \right)^{-1} 1_k}.$$

2.2. LASSO-регрессия

Впервые регрессия LASSO была описана в работе [15]. Минимизация нормы в l_1 в настоящее время широко используется для получения разреженных решений [16]. Статья [16] использует подход на основе регрессии типа LASSO для задачи репликации индекса, переформулированной как регрессия наименьших квадратов с ограничениями:

$$x^{\delta} = \arg\min \frac{1}{m}\|x\|_1 \text{ при условиях } \|I - Rx\|_2 \leq \delta, \qquad x^T 1_n = 1.$$

где δ – скалярная величина, которая подбирается так, чтобы истинное решение попадало в допустимое множество с высокой вероятностью. В целом, регрессия типа LASSO способна достаточно точно оценивать почти разряженные вектора. Эффективные алгоритмы для задач восстановления таких векторов были разработаны в работе [21].

2.3. Аппроксимация l_0 - нормы

Норма l_0 является не дифференцируемой и невыпуклой функцией, по этой причине во многих исследованиях [22, 23] рассматриваются различные аппроксимации этой нормы. В работе [24] предлагается аппроксимировать норму следующей непрерывной дифференцируемой функцией:

$$\rho_p(x) = \frac{\log(1 + \frac{x}{p})}{\log(1 + \frac{1}{p})}$$

где p – некоторый параметр, причем $0 < p \ll 1.$ Тогда задача репликации индекса примет вид:

$$x^* = \arg\min \frac{1}{m}\|I - Rx\|_2^2 + \lambda 1^T \rho_p(x), \quad x^T 1_n = 1, 0 \leq x \leq 1,$$

$$\rho_p(x) = \left[\rho_p(x_1), \dots, \rho_p(x_N)\right]^T.$$

3. Эмпирические результаты

3.1. Описание данных

Для проведения эмпирического исследования были использованы открытые данные из OR-Library [25]. Они содержат временные ряды недельных изменений цен активов за период с марта 1992 г. по сентябрь 1997 г. (всего 290 наблюдений, $m = 290$), входящих в пять крупнейших финансовых индексов, а также сами сводные индексы, вычисляемые на основе цен определенных активов. Это такие финансовые индексы, как Hang Seng (Гонконг), включающий 31 актив (n = 31), DAX 100 (Германия, $n = 85$), FTSE 100 (Великобритания, $n = 89$), S&P 100 (США, $n = 98$) и Nikkei 225 (Япония, $n = 225$). В табл. 1 представлена описательная статистика недельных логарифмических доходностей индексов. Доходности индексов соответствуют типичным финансовым временным рядам: средние значения близки к нулю, присутствует небольшая асимметрия и «толстые хвосты».

Таблица 1

Описательные статистики недельных доходностей индексов

Data	n	m	mean, %	std, %	skewness	kurtosis	min	max
Hang Seng	31	290	0.42	3.32	-0.04	3.85	-0.12	0.11
DAX 100	85	290	0.25	2.03	-0.21	3.72	-0.07	0.07
FTSE 100	89	290	0.25	1.75	0.47	5.29	-0.05	0.08
S&P 500	98	290	0.31	1.53	0.17	3.73	0.04	0.06
Nikkei 225	225	290	-0.01	2.86	0.44	4.85	-0.11	0.12

3.2 Сравнительный анализ предлагаемых алгоритмов

Для сравнения подходов, описанных в разделе 2, при решении задачи репликации индекса будет использована процедура скользящего временного окна. Для настройки моделей используется окно в 100 выборочных недель (in-sample). Далее на следующих 10 вне выборочных торговых недель (out-of-sample) модель тестируется. Затем, выборочное окно сдвигается вперед на 10 недель и оцениваются новые портфели для задачи слежения за индексом, которые также тестируются на последующих 10 вне выборочных недель, и так далее. Таким образом, было получено 19 выборочных и 19 вне выборочных временных периодов для настройки и тестирования портфелей.

В табл. 2 и 3 для краткости представлены только результаты попарного сравнения подхода Approx с подходами LASSO и Greedy. Таблица содержит как выборочные, так и вне выборочные значения средней ошибки слежения за индексом (tracking error), избыточной доходности относительно индекса (excess returns) и корреляции (corr) для множеств данных Hang Seng, DAX 100, FTSE 100, S&P 100 и Nikkei 225 для различных параметров δ и λ. Статистически значимое различие t-статистики (t_{diff}) с уровнем значимости 10% (5%, 1%) между двумя подходами обозначено как $*$ ($**$, $***$).

Мы полагали максимальное число активов K в ограничении на кардинальность для жадного алгоритма (Greedy) равным числу ненулевых весов, найденных на основе подхода типа LASSO в соответствующих окнах. Для метода, аппроксимирующего l_0 – норму (Approx), параметр λ подбирался таким образом, чтобы число активов в портфеле, построенном по данной модели, было близко к числу активов, полученных по модели LASSO.

Отмечаем, что портфели, построенные на основе алгоритма LASSO, значимо отличаются от портфелей Greedy и Approx. С одной стороны, они дают наибольшую избыточную доходность с высоким риском, как на внутри выборочных, так и на вне выборочных данных. С другой стороны, они приводит к портфелям с худшими характеристиками в терминах ошибки слежения. Соответственно коэффициент корреляции между доходностью индекса и доходностью таких портфелей существенного ниже, чем у портфелей Greedy и Approx. Такое поведение портфелей характерно почти для всех случаев. Таким образом, подход на основе LASSO подойдет для инвесторов, склонных к риску. Необходимо отметить, что на вне выборочных данных в 8 из 10 случаев средняя избыточная доходность относительно индекса была положительна.

Портфели, построенные на основе алгоритмов Greedy и Approx, достаточно схожи по своим характеристикам. Как видно из таблицы 3, различия в средней избыточной доходности внутри выборки и вне выборки между двумя подходами, за одним исключением, не являются статистически значимыми, в то время как средняя ошибка слежения за индексом статистически различается в семи случаях. Таким образом, подход Approx обеспечивает более высокую эффективность слежения за индексом. Это также подтверждается более высокой корреляцией с индексом.

Очевидно, что для инвесторов представляет интерес ожидаемые доходность и риск на вне выборочных данных. С этой точки зрения, портфели, построенные на основе алгоритма Greedy стохастически доминируют над портфелями по Approx в 4 случаях. Особенно для наборов FTSE100 и Nikkei 225 портфели на основе Greedy позволили бы избежать существенных убытков по сравнению с портфелями на основе Approx. Обратное же стохастическое доминирование на вне выборочных данных отмечено только в 3 случаях. При это существенное стохастическое доминирование было только для набора DAX100 с относительно небольшим числом активов.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках выполнения государственного задания (проект № FSRR-2020-0006)

Таблица 2. **Сравнение алгоритма типа LASSO и алгоритма Approx для пяти наборов данных**

Statistics	In-sample		Out-of-sample			In-sample		Out-of-sample	
	LASSO	Approx	LASSO	Approx		LASSO	Approx	LASSO	Approx
Hang Seng, 31 stocks									
5 to 10 stocks, δ=0.9, λ=1.5e-5						12 to 18 stocks, δ=0.25, λ=3e-6			
tracking error						tracking error			
mean	1.61%	0.36%	1.66%	0.46%		0.59%	0.20%	0.69%	0.28%
std	0.79%	0.04%	0.81%	0.16%		0.21%	0.03%	0.29%	0.15%
t_{diff}	6.91***		6.34***			8.09***		5.44***	
excess return						excess return			
mean	0.67%	0.04%	0.39%	0.03%		0.33%	0.02%	0.16%	0.02%
std	0.47%	0.02%	0.40%	0.12%		0.19%	0.02%	0.18%	0.09%
t_{diff}	5.88***		3.73***			7.06***		3.11***	
corr	0.853	0.994	0.864	0.989		0.978	0.998	0.973	0.995
DAX100, 85 stocks									
7 to 15 stocks, δ=0.9, λ=5e-6						16 to 33 stocks, δ=0.25, λ=4e-7			
tracking error						tracking error			
mean	1.86%	0.39%	1.92%	0.64%		0.74%	0.26%	0.93%	0.48%
std	0.80%	0.24%	1.02%	0.60%		0.52%	0.30%	0.62%	0.61%
t_{diff}	7.65***		4.74***			3.51***		2.25**	
excess return						excess return			
mean	0.79%	0.00%	0.28%	0.00%		0.41%	0.00%	0.10%	0.00%
std	0.37%	0.03%	0.60%	0.17%		0.17%	0.02%	0.29%	0.10%
t	9.16***		1.98*			10.64***		1.40	
corr	0.672	0.971	0.668	0.934		0.918	0.978	0.870	0.956
FTSE100, 89 stocks									
7 to 19 stocks, δ=0.9, λ=1e-5						19 to 32 stocks, δ=0.25, λ=1e-6			
tracking error						tracking error			
mean	1.08%	0.33%	1.20%	0.59%		0.50%	0.14%	0.64%	0.36%
std	0.28%	0.02%	0.42%	0.20%		0.11%	0.00%	0.18%	0.09%
t_{diff}	11.72***		5.67***			14.09***		5.97***	
excess return						excess return			
mean	0.47%	0.00%	0.07%	-0.06%		0.35%	0.00%	0.06%	-0.04%
std	0.32%	0.03%	0.30%	0.16%		0.18%	0.01%	0.20%	0.10%
t_{diff}	6.41***		1.63			8.32***		2.04**	
corr	0.802	0.978	0.802	0.929		0.947	0.996	0.924	0.969
S&P500, 98 stocks									
8 to 16 stocks, δ=0.9, λ=1e-5						19 to 34 stocks, δ=0.25, λ=1e-6			
tracking error						tracking error			
mean	1.28%	0.35%	1.49%	0.55%		0.56%	0.13%	0.76%	0.33%
std	0.42%	0.04%	0.64%	0.15%		0.13%	0.01%	0.25%	0.11%
t_{diff}	9.66***		6.19***			14.21***		6.91***	
excess return						excess return			
mean	0.59%	0.00%	-0.10%	-0.02%		0.40%	0.00%	-0.01%	0.00%
std	0.38%	0.03%	0.48%	0.17%		0.17%	0.00%	0.24%	0.07%
t_{diff}	6.79***		0.70			10.52***		0.17	
corr	0.753	0.965	0.722	0.929		0.911	0.995	0.864	0.976
Nikkei 225, 225 stocks									
10 to 20 stocks, δ=0.9, λ=7e-6						31 to 40 stocks, δ=0.25, λ=8e-7			
tracking error						tracking error			
mean	1.21%	0.31%	1.24%	0.69%		0.49%	0.12%	0.68%	0.45%
std	0.48%	0.02%	0.55%	0.27%		0.17%	0.01%	0.25%	0.20%
t_{diff}	8.27***		3.90***			9.23***		3.18***	
excess return						excess return			
mean	0.66%	0.00%	0.01%	-0.03%		0.43%	0.00%	0.01%	-0.11%
std	0.48%	0.03%	0.49%	0.28%		0.22%	0.00%	0.27%	0.21%
t_{diff}	6.00***		0.33			8.31***		1.49	
corr	0.884	0.994	0.856	0.953		0.978	0.999	0.949	0.984

Таблица 3. **Сравнение алгоритмов Approx и Greedy для пяти наборов данных**

Statistic	In-sample		Out-of-sample			In-sample		Out-of-sample	
	Approx	Greedy	Approx	Greedy		Approx	Greedy	Approx	Greedy
Hang Seng, 31 stocks									
5 to 10 stocks, λ=0.9, λ=1.5e-5						12 to 18 stocks, λ=0.25, λ=3e-6			
tracking error						tracking error			
mean	0.36%	0.42%	0.46%	0.52%		0.20%	0.18%	0.28%	0.30%
std	0.04%	0.13%	0.16%	0.16%		0.03%	0.07%	0.15%	0.15%
t_{diff}	1.96*		1.07			1.26		0.40	
excess return						excess return			
mean	0.04%	0.06%	0.03%	0.05%		0.02%	0.03%	0.02%	0.06%
std	0.02%	0.13%	0.12%	0.13%		0.02%	0.06%	0.09%	0.10%
t_{diff}	0.71		0.46			0.63		1.14	
corr	0.994	0.988	0.989	0.984		0.998	0.998	0.995	0.995
DAX100, 85 stocks									
7 to 15 stocks, λ=0.9, λ=5e-6						16 to 33 stocks, λ=0.25, λ=4e-7			
tracking error						tracking error			
mean	0.39%	0.41%	0.64%	0.65%		0.26%	0.31%	0.48%	0.64%
std	0.24%	0.41%	0.60%	0.60%		0.30%	0.42%	0.61%	0.67%
t_{diff}	0.15		0.07			0.43		0.79	
excess return						excess return			
mean	0.00%	0.00%	0.00%	-0.06%		0.00%	-0.01%	0.00%	0.00%
std	0.03%	0.10%	0.17%	0.18%		0.02%	0.10%	0.10%	0.16%
t_{diff}	0.13		1.11			0.45		0.06	
corr	0.971	0.976	0.934	0.923		0.978	0.984	0.956	0.932
FTSE100, 89 stocks									
7 to 19 stocks, λ=0.9, λ=1e-5						19 to 32 stocks, λ=0.25, λ=1e-6			
tracking error						tracking error			
mean	0.33%	0.41%	0.59%	0.66%		0.14%	0.19%	0.36%	0.39%
std	0.02%	0.13%	0.20%	0.24%		0.00%	0.06%	0.09%	0.11%
t_{diff}	2.71**		1.04			3.48***		0.91	
excess return						excess return			
mean	0.00%	-0.01%	-0.06%	0.01%		0.00%	-0.01%	-0.04%	0.00%
std	0.03%	0.10%	0.16%	0.16%		0.01%	0.07%	0.10%	0.08%
t_{diff}	0.48		1.40			0.40		1.34	
corr	0.978	0.946	0.929	0.899		0.996	0.989	0.969	0.962
S&P500, 98 stocks									
8 to 16 stocks, λ=0.9, λ=1e-5						19 to 34 stocks, λ=0.25, λ=1e-6			
tracking error						tracking error			
mean	0.35%	0.34%	0.55%	0.68%		0.13%	0.15%	0.33%	0.44%
std	0.04%	0.11%	0.15%	0.19%		0.01%	0.05%	0.11%	0.13%
t_{diff}	0.39		2.35**			1.68		2.82***	
excess return						excess return			
mean	0.00%	-0.02%	-0.02%	-0.01%		0.00%	0.00%	0.00%	-0.01%
std	0.03%	0.12%	0.17%	0.20%		0.00%	0.05%	0.07%	0.12%
t_{diff}	0.74		0.09			0.29		0.34	
corr	0.965	0.964	0.929	0.898		0.995	0.993	0.976	0.949
Nikkei 225, 225 stocks									
10 to 20 stocks, λ=0.9, λ=7e-6						31 to 40 stocks, λ=0.25, λ=8e-7			
tracking error						tracking error			
mean	0.31%	0.24%	0.69%	0.66%		0.12%	0.08%	0.45%	0.50%
std	0.02%	0.07%	0.27%	0.28%		0.01%	0.02%	0.20%	0.24%
t_{diff}	4.49***		0.31			6.52***		0.67	
excess return						excess return			
mean	0.00%	0.01%	-0.03%	-0.01%		0.00%	0.01%	-0.11%	0.00%
std	0.03%	0.07%	0.28%	0.15%		0.00%	0.04%	0.21%	0.11%
t_{diff}	0.56		0.23			1.27		1.92*	
corr	0.994	0.993	0.953	0.956		0.999	0.999	0.984	0.978

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Alexander C., Dimitriu A.* Indexing, cointegration and equity market regimes // International Journal of Finance & Economics. 2005. Vol. 10 (3). P. 213–231.
2. European Asset Management Association. // Indexation and investment, a collection of essays London, UK : Heronsgate Ltd. 2001. Vol. 1.
3. *Maringer D.* Constrained index tracking under loss aversion using differential evolution. In A. Brabazon & M. O'Neill (Eds.) // Natural Computing in Computational Finance UK: Springer-Verlag 2008. Vol. 100. P. 7–24.
4. *Takeda A., Niranjan M., Gotoh J., Kawahara Y.* Simultaneous pursuit of out-of-sample performance and sparsity in index tracking portfolios // Comput. Manag. Sci. 2013. Vol. 10. P. 21–49.
5. *Brodie J., Daubechiesa I., De Molc C., Giannoned D., Lorisc I.* Sparse and stable Markowitz portfolios // PNAS. 2009. Vol. 106. № 30. P. 12267–12272.
6. *Markowitz H. M.* Portfolio Selection // Journal of Finance. 1952. Vol. 7 (1). P. 77–91.
7. *Derigs U., Nickel N.-H.* Meta-heuristic based decision support for portfolio optimization with a case study on tracking error minimization in passive portfolio management // OR Spectrum. 2003. Vol. 25 (3). P. 345–378.
8. *Rudd A.* Optimal selection of passive portfolios // Financial Management. 1980. Vol. 9. P. 57– 66.
9. *Corielli F., Marcellino M.* Factor based index tracking // Journal of Banking & Finance. 2006. Vol. 30 (8). P. 2215-2233.
10. *Connor G., Leland H.* Cash management for index tracking // Financial Analysts Journal. 1995. Vol. 51 (6). P. 75–80.
11. *Frino A., Gallagher D. R.* Tracking S&P 500 index funds // The Journal of Portfolio Management. 2001. Vol. 28 (1). P. 44-55.
12. *Hodges S.* Problems in the application of portfolio selection models // Omega. 1976. Vol. 6. P. 699–709.
13. *DeMiguel V., Garlappi L., Uppal R.* Optimal Versus Naive Diversification: How Inefficient is the 1/N Portfolio Strategy? // Rev. Financ. Stud. 2009. Vol. 22. No. 5. P. 1915–1953.
14. *Faizliev A. R., Khomchenko A. A., Sidorov S. P.* Empirical Analysis of Algorithms for Solving the Index Tracking Problem // Izv. Saratov Univ. (N. S.). Ser. Math. Mech. Inform. 2018. Vol. 18. P. 101–124.
15. *Tibshirani R.* Regression Shrinkage and Selection via the LASSO // J. Royal Statist. Soc. : Ser. B (Statistical Methodology). 1996. Vol. 58. № 1. P. 267–288.
16. *Brodie J., Daubechiesa I., De Molc C., Giannoned D., Lorisc I.* Sparse and stable Markowitz portfolios // PNAS. 2009. Vol. 106. № 30. P. 12267–12272.
17. *Tikhonov A. N.* Incorrect problems of linear algebra and a stable method for their solution // Sov. Math. Dokl. 1965. Vol. 6. P. 988–991.
18. *Van Montfort K., Visser E., Van Draat L. F.* Index tracking by means of optimized sampling // J. Portfol. Mgmt. 2008. Vol. 34. No. 2. P. 143–151.
19. *Takeda A., Niranjan M., Gotoh J., Kawahara Y.* Simultaneous pursuit of out-of-sample performance and sparsity in index tracking portfolios // Comput. Manag. Sci. 2013. Vol. 10. P. 21–49.
20. *Das A., Kempe D.* Submodular meets spectral: Greedy algorithms for subset selection, sparse approximation and dictionary selection // Proc. of the 28th Intern. Conf. on Machine Learning. New York, USA. 2011. P. 1057–1064.
21. *Becker S., Candes E. J., Grant M.* Templates for convex cone problems with applications to sparse signal recovery // Mathematical Programming Computation. 2011. Vol. 3. P. 165–218.
22. *Gorodnitsky I. F., Rao B. D.* Sparse signal reconstruction from limited data using FO-

CUSS: A re-weighted minimum norm algorithm // IEEE Transactions on Signal Processing. 1997. Vol. 45 (3). P. 600– 616.

23. *Candès E. J., Wakin M. B., Boyd S. P.* Enhancing sparsity by reweighted `1 minimization // Journal of Fourier Analysis and Applications. 2008. Vol. 14 (5-6). P. 877–905.

24. *Benidis K., Feng Y., Palomar D. P.* Optimization methods for financial index tracking: From theory to practice / Foundations and Trends in Optimization. Now Publishers, 2018.

25. *Beasley J. E.* OR-Library. [Электронный ресурс]. URL: http://people.brunel.ac.uk/mastjjb/jeb/orlib/indtrack info.html (дата обращения: 14.10.2021).