О СОСТОЯТЕЛЬНОСТИ ОДНОЙ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОЦЕНКИ РЕГРЕССИИ

В. В. Новиков

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Россия
E-mail: vvnovikov@yandex.ru

Получено достаточное условие состоятельности непараметрического оценивания функции регрессии, основанного на интерполяционных коэффициентах Фурье-Лагранжа.

ON A CONSISTENCY OF ONE NONPARAMETRIC REGRESSION ESTIMATOR

V. V. Novikov

We give a sufficient condition for the consistency of nonparametric estimator of a regression function based on the Fourier-Lagrange coefficients.

Рассмотрим, регрессионную модель

$$Y_i = m(X_i) + \varepsilon_i \ , i = 1,\dots,n,$$

где $m(x) = E(Y \mid X = x)$ – неизвестная функция регрессии, подлежащая оцениванию на основе эмпирических данных $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^{n}$, а $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{n}$ – случайные ошибки. Одним из распространенных непараметрических методов построения оценки $\hat{m}(x)$ основан на разложении функции $m(x)$ в ряд Фурье

$$m(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \quad _j(x) \tag{1}$$

по некоторой ортонормированной системе $\{\quad _j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ с последующей заменой бесконечного ряда (1) его частичной суммой подходящего порядка $N(n)$, в которой коэффициенты Фурье β_j заменены их оценками $\hat{\beta}_j$. Такого рода оценки называются оценками ортогонального разложения. В силу известной аналогии между рядами Фурье и интерполяционными многочленами, в качестве оценок для β_j можно использовать коэффициенты Фурье-Лагранжа [2], содержащие только значения функций m и φ_j в точках наблюдения. В случае тригонометрической системы и узлов $x_{i,n} = 2\pi i/(2n+1), i = 0,\dots,2n,$ соответствующие оценки будут иметь вид

$$\hat{a}_j = \frac{2}{2n+1} \sum_{i=0}^{2n} Y_i \cos jX_i \ ,$$

$$\hat{b}_j = \frac{2}{2n+1} \sum_{i=0}^{2n} Y_i \sin jX_i \ ,$$

$$\hat{m}_N(x) = \frac{\hat{a}_0}{2} + \sum_{j=0}^{N(n)} \hat{a}_j \cos jx + \hat{b}_j \sin jx. \qquad (2)$$

Следующее утверждение представляет собой условие на порядок роста величин $N(n)$, гарантирующее состоятельность оценки (2).

Теорема. *Пусть выполнены условия:*

1) $E(\varepsilon_i) = 0, E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0, i \neq j,$ и $E(\varepsilon_i^2) < C, \forall i, n,$ *где* C *- некоторая постоянная;*

2) *функция* $m \in C_{2\pi}$ *имеет ограниченную вариацию на* $[0, 2\pi]$;

3) $(N(n))^2 = o(n)$ *при* $n \to \infty$.

Тогда при $N(n) \to \infty$ *для оценки* (2) *имеем*

$$p \lim_{n \to \infty} \hat{m}_N(x) = m(x), x \in [0, 2\pi].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хардле В.* Прикладная непараметрическая регрессия. М. : Мир, 1993. 349 с.
2. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965. 538 с.