МОДЕЛИРОВАНИЕ СТОИМОСТИ ТОВАРА НА РЫНКЕ В ВИДЕ ОБЫКНОВЕННОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ И ЕЁ СВЯЗЬ С ПАРАБОЛИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЕМ

Е. С. Магомедова, Р. И. Магомедов

Дагестанский государственный университет, Махачкала, Россия
E-mail: magomedov.ri@minsvyazrd.ru, magomedova.e.s@mail.ru

Составлена математическая модель стоимости единицы розничной продукции в виде стохастического дифференциального уравнения. Сформулировано задача Коши для такого уравнения. Установлена связь между стохастическим дифференциальным уравнением и параболическим уравнением.

MODELING THE VALUE OF A PRODUCT ON THE MARKET IN THE FORM OF AN ORDINARY STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATION AND ITS RELATIONSHIP WITH A PARABOLIC EQUATION

E. S. Magomedova, R. I. Magomedov

A mathematical model of the cost of a unit of retail production in the form of a stochastic differential equation has been compiled. The Cauchy problem for such an equation is formulated. A connection is established between the stochastic differential equation and the parabolic equation

Стоимость единицы товара на рынке в данный момент времени - случайная величина, зависящая от многих факторов, а именно, от количества единиц товара, от спроса, от рекламы, от качества и многих других причин.

Предположим, что в данный момент времени t стоимость единицы товара составляет $x(t)$ рублей. Будем считать $x(t)$ непрерывной функцией от времени t для построения непрерывной модели. Тогда от такой функции можно найти производную

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=x'(t) \quad ,$$

означающую скорость изменения цены единицы продукции. Тогда на оси Ox можно отложить значения $x(t)$, как точку.

Точка x на числовой оси со временем будет перемещаться со скоростью, которую можно подсчитать статистически. Обозначим эту величину через

$$F(x(t),t)=x'(t). \tag{1}$$

Получаем обыкновенное дифференциальное уравнение, которое определяем начальным условием

$$x(t)|_{t=0}=x_0. \tag{2}$$

В результате получаем задачу Коши.

Функцию $F(x)$ можно выразить, как возможность повышения цены единицы продукции П, так и понижения K.

Поэтому можно записать $F(x)=\Pi-K$ $(\Pi\geq 0, \text{К}\geq 0)$.

Если воспользоваться θ – функцией, то величину П можно записать как сумму фиксированной цены на единицу продукции Π_0 и изменения цены Π_1, поэтому $\Pi = \Pi_0 + \theta x \Pi_1 = \Pi_0 + \alpha x(t)\theta(x(t), x_{.0})$.

Аналогично можно рассчитать и величину понижения цены на единицу продукции. Поэтому уравнение (1) можно записать так

$$dx = F(x,t)dt. \qquad (3)$$

Как известно на цену единицы продукции в рыночных отношениях может повлиять случайный фактор. Обозначим этот случайный фактор через $X(t)$ – как случайную величину, изменяющуюся к моменту времени t цены, $X(t+dt)$, цену суммарной случайной величины к моменту времени $t + dt$. Тогда

$$X(t+dt) - X(t) = dX \qquad (4)$$

будем считать стохастическим дифференциалом, выражающим случайное изменение цены единицы продукции за малый промежуток времени dt. Эта величина может быть как положительной, так и отрицательной.

Добавим величину (4) к равенству (3). Получим

$$dx = F(x(t),t)dt + dX. \qquad (5)$$

В результате получается, так называемое стохастическое дифференциальное уравнение, где dX не является обычным дифференциалом, а вероятностным зависящим от функции плотности распределения вероятностей стохастического процесса [1]

$$\rho(x) = \rho(y,s;x,t). \qquad (6)$$

В более общем виде уравнение (5) можно записать как

$$dx = F(x,t)dt + G(x,t)dX, \qquad (7)$$

в котором X – марковский стохастический процесс.

При начальном условии (2) это уравнение можно исследовать, как стохастический интеграл Ито [1].

Так как цена единицы продукции распределена по всей оси Ox, то на этой числовой оси возьмем малый промежуток $[x, x+\Delta x]$ и на этом промежутке будем считать расположенным $\Delta Q(x,t)$ число точек в момент времени t.

Введем функцию

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta Q(x,t)}{\Delta x} = u(x,t),$$

где $u(x,t)$ - функция плотности распределения цены. Тогда

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x,t)dx = Q(t). \qquad (8)$$

Необходимо получить дифференциальные уравнения для функции $u(x,t)$. Поэтому рассмотрим промежуток $[x_1, x_2]$, и промежуток $\Omega_0 = (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$.

С течением времени цена на продукцию меняется, поэтому точки $x(t)$ за промежуток времени $[t_1, t_2]$, перемещаясь по оси Ox, будут частично выходить из промежутка $[x_1, x_2]$, часть оставаться и часть заходить на этот промежуток. Поэтому уравнение баланса запишется в виде суммы

$$\Delta Q_{t_1,t_2} = S_1 + S_2 + S_3, \qquad (9)$$

где ΔQ обозначает число цен за время $[t_1, t_2]$, которые находятся на $[x_1, x_2]$, Π_1 – число цен, находящихся на промежутке $[x_1, x_2]$ за время $[t_1, t_2]$ и часть точек, вышедших через x_1, x_2 из промежутка $[x_1, x_2]$, Π_2 – число случайных цен, попавшихся на промежуток $[x_1, x_2]$ и Π_3 – число цен, находившихся вне промежутка $[x_1, x_2]$ и попавших на этот промежуток за время $[t_1, t_2]$.

Тогда, используя определение и свойства интеграла, получим

$$\Delta Q_{t_1,t_2} = Q(t_2) - Q(t_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} u(x,t)dx - \int\limits_{x_1}^{x_2} u(x,t)dx = = \int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t} dtdx$$

Теперь рассчитаем значения S_1, S_2, S_3. Для этого разобьем отрезки $[x_1, x_2]$ и $[t_1, t_2]$, числовой оси и временной точками $x_i (i = 1,2, \dots, n)$ и $t_j (j = 1,2, \dots, n)$ на малые промежутки Δx_i и Δt_j просуммируем значения выражений, попадающих на эти элементарные отрезки и переходя к пределам при максимальных Δx и $\Delta t \to 0$, получаем значения двойных интегралов для вычисления этих значений S_1, S_2, S_3. А именно для подсчета S_1 рассмотрим движение точки $x(t)$ по оси Ox, которая перемещается со скоростью $F(x,t)$. За промежуток времени Δt эта точка пройдет путь $\Delta S = F(x,t)\Delta t$. Так как плотность точек в окрестностях x_1 и x_2 составляет $u(x,t)$, то за время Δt на отрезок Δx через эти точки попадут $u(x,t)F(x,t)\Delta t$, поэтому, используя интегрирование, получим

$$S_1 = -\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)F(x,t)dxdt.$$

Для подсчета S_2 учтём, что за промежуток времени Δt из дополнительного промежутка Ω_0 (6) попадут за счет случайностей некоторые точки на промежуток $[x_1, x_2]$. Аналогично из этого отрезка могут уйти точки на дополнительный промежуток Ω_0 также случайно. Поэтому, после некоторых преобразований получим значение

$$S_2 = -\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}(cu(x,t) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x}(bu(x,t)dxdx.$$

Для того, чтобы подсчитать S_3, введем дополнительную функцию $f(x,t)$, означающую число точек, попадающих из другого множества точек на единичный отрезок за интервал времени Δt в окрестности x и t. Поэтому

$$S_3 = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_1}^{x_2} f\,(x,t)dxdt.$$

Подставив полученные значения ΔQ, S_1, S_2 и S_3 в уравнение баланса (9), получим:

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial t} dtdx == -\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}(uF)dxdt -$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\left[\left(-\frac{\partial}{\partial x}(cu)\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(bu)\right]dxdt+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} f\,dxdt.$$

Опустим интегралы в силу произвольности интервалов интегрирования. В результате получим параболическое уравнение с частными производными

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}[(cF)u]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(bu)+f,$$

которому удовлетворяет плотность цены на пространстве накопления продукции на рынке, где c и b - величины соответствующие условиям сильной непрерывности Марковского процесса. Для определения значения функции плотности мощности необходимо задать начальное и граничные условия значениям x и t. Аналогичные модели составлены в работах [2], [3], [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Оксендаль Б.* Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. Пер. с англ. М.: Мир. ООО «Изд-во А.С.», 2003. 408 с.
2. *Ерофеенко В. Т., Козловская И. С.* Уравнения с частными производными и математические модели в экономике. Курс лекции. Изд. 2-е перераб. и доп М.: Едиториал УРСС, 2004. 248 с.
3. *Магомедов И. И., Магомедов Р. И.* Математическое моделирование мощности фирмы с помощью стохастических дифференциальных уравнений // Научно-технический вестник Поволжья. 2011. № 2. С. 112-122.
4. *Магомедов Р. И., Магомедов И. И., Назаралиев М.-Ш. А.* Математическая модель денежных вкладов и материальных ценностей банка // Известия Дагестанского государственного педагогического университета. Естественные и точные науки. Махачкала. 2013. № 2. С. 8-12.