Решите следующие задачи электростатики с помощью функции Грина оператора Лапласа:

1. Найдите потенциал поля отрезка заряженной нити длины $2L$ с линейной плотностью e, помещенного над идеально проводящей заземленной плоскостью параллельно ей на расстоянии h от нее.
2. Найдите потенциал поля отрезка заряженной нити длины L с линейной плотностью e, помещенного над идеально проводящей заземленной плоскостью перпендикулярно ей. Ближайшая к плоскости точка отрезка удалена от нее на расстояние h.
3. Найдите потенциал поля точечного заряда, помещенного в точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ внутри «полуслоя» $0 \leq z \leq l,\ x \geq 0$, считая, что стенки идеально проводящие и имеют нулевой потенциал.
4. Найдите потенциал поля точечного заряда, помещенного внутри двугранного угла величины $\alpha = \pi/2$ в точку M_0, если его грани идеально проводящие заземленные плоскости $\psi = \pi/2$ и $\psi = 0$. Угловая координата точки M_0 равна $\pi/4$, радиальная координата равна r_0.
5. Найдите потенциал поля в области $y > 0, z > 0, x \in (-\infty, +\infty)$, создаваемого зарядами, расположенными с линейной плотностью e вдоль отрезка длины L. Концы отрезка имеют координаты (x_0, y_0, z_0), $(x_0, y_0 + L, z_0)$, $x_0, y_0, z_0 > 0$. Границы $z = 0$ и $y = 0$ идеально проводящие и заземленные.
6. Найдите плотность поверхностных зарядов, индуцированных на внешней поверхности проводящей сферы точечным зарядом, помещенным в некоторую точку M_0 вне этой сферы.
7. Найдите распределение потенциала вне непроводящей сферы радиуса a, если на поверхности сферы поддерживается потенциал, равный $f(\theta, \psi)$.
8. Определите распределение потенциала на оси симметрии внутри сферы, если на поверхности сферы распределение потенциала задано следующим образом: при $0 \leq \theta \leq \pi/2$ (верхняя полусфера) $u = u_1$, при $\pi/2 < \theta \leq \pi$ (нижняя полусфера)) $u = u_2$, где u_1 и u_2 константы. Внутри сферы нет объемных зарядов.
9. Найдите функцию Грина оператора Лапласа для задачи Дирихле в четверти шара.
10. Найдите потенциал поля, создаваемого в неограниченном пространстве точечным зарядом, помещенным в точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $z_0 > 0$. Пространство заполнено неоднородным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью: $\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1, & z > 0 \\ \varepsilon_2, & z < 0 \end{cases}$.
11. Найдите потенциал поля бесконечной заряженной пластины ширины L с поверхностной плотностью заряда σ, помещенной внутри двугранного угла величины $\pi/2$. Грани угла - идеально проводящие заземленные плоскости $\psi = 0$ и $\psi = \pi/2$. Края пластины лежат на прямых, параллельных грани угла, проходящих, соответственно, через точки (x_1, y_1, z_1), и $(x_1, y_1 + L, z_1)$.
12. Найдите потенциал поля бесконечной заряженной пластины ширины L с поверхностной плотностью заряда σ, помещенной внутри двугранного угла величины $\pi/2$. Грани угла - идеально проводящие заземленные плоскости $\psi = 0$ и $\psi = \pi/2$. Края пластины лежат на прямых, параллельных грани угла, проходящих, соответственно, через точки (r_1, ψ_0, z_1), и $(r_1 + L, \psi_0, z_1)$, $0 < \psi_0 < \pi/2$.
13. Найдите потенциал поля, создаваемого бесконечной цилиндрической поверхностью кругового сечения радиуса a, которая поддерживается при потенциале $V = \frac{1}{2+\cos\psi+\sin\psi}$, где ψ – полярный угол.
14. Найдите потенциал поля бесконечной заряженной нити, помещенной внутри бесконечной цилиндрической полости кругового сечения параллельно оси цилиндра. Полость ограничена идеально проводящей заземленной поверхностью.

15. Найдите потенциал поля бесконечной заряженной нити, помещенной вне бесконечного цилиндра кругового сечения параллельно его оси. Цилиндр является идеально проводящим и заземленным.
16. Постройте функцию Грина оператора Лапласа внутренней задачи Дирихле для полукруга радиуса a.
17. Найдите потенциал поля бесконечной заряженной нити, помещенной внутри бесконечной цилиндрической полости параллельно оси цилиндра. Поперечное сечение полости представляет собой сектор круга радиуса a, с углом $\pi/4$. Полость ограничена идеально проводящей заземленной поверхностью.
18. Для любой непрерывной функции $f(\varphi)$ получите в интегральной форме решение задачи вне круга радиуса a:
$$\begin{cases} \Delta u = 0, \;\; r > a, \;\; \varphi \in [0,2\pi], \\ u_{|r=a} = f(\varphi), \\ |u| < \infty \text{ при } r \to +\infty. \end{cases}$$
19. Решите с помощью функции Грина первую краевую задачу для уравнения Лапласа в полуплоскости $y > 0$, если:
$$u_{|y=0} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ V_0, & x > 0, \end{cases} \qquad \text{где } V_0 = const.$$
20. Решите с помощью функции Грина первую краевую задачу для уравнения Лапласа в полукруге
$$\begin{cases} \Delta u = 0, \;\; r < a, \;\; \varphi \in (0,\pi), \\ u_{|r=a} = 0, \\ u_{|\varphi=0} = u_{|\varphi=\pi} = V_0, \end{cases}$$
где $V_0 = const$.

Все задачи взяты из книги

Функция Грина оператора Лапласа

А.Н. Боголюбов, Н.Т. Левашова, И.Е. Могилевский, Ю.В. Мухартова, Н.Е. Шапкина