

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА

Сборник научных трудов

ВЫПУСК 21

Саратов
ИЗДАТЕЛЬСТВО САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2019

УДК [51+531]

ББК (22.1+22.2)я43

М34

Математика. Механика : сб. науч. тр. – Саратов : Изд-во Са-
М34 рат. ун-та, 2019. – Вып. 21. – 104 с. : ил.

Сборник содержит статьи сотрудников и аспирантов механико-математического факультета Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского. В сборнике представлены исследования по алгебре, геометрии, дискретной математике, математическому анализу, спектральной теории операторов, теории приближений, математической экономике, биомеханике, механике деформируемого твёрдого тела, оптимальному управлению движением космического аппарата, механике жидкости и газа и их приложениям.

Для научных работников, аспирантов и специалистов в области математики и механики.

Р е д а к ц и о н н а я к о л л е г и я :

Г. В. Хромова, доктор физ.-мат. наук (главный редактор),

Ю. А. Блинков, доктор физ.-мат. наук (зам. главного редактора),

Д. В. Прохоров, доктор физ.-мат. наук,

А. П. Хромов, доктор физ.-мат. наук,

Г. Н. Белосточный, доктор техн. наук,

Ю. В. Матвеева, канд. физ.-мат. наук (отв. секретарь)

УДК [51+531]

ББК (22.1+22.2)я43

УДК 519.853

В. В. Абрамова, С. И. Дудов

О СВОЙСТВАХ ФУНКЦИИ РАССТОЯНИЯ ДО СЛАБО ВЫПУКЛОГО МНОЖЕСТВА

Поступила 27.05.2019 г.

1. Функция вида

$$\rho(x, \Omega) = \min_{y \in \Omega} n(x - y), \quad (1)$$

где Ω – некоторое замкнутое множество из \mathbb{R}^p , а $n(x)$ удовлетворяет аксиомам нормы, выражает расстояние от точки $x \in \mathbb{R}^p$ до множества Ω в норме $n(\cdot)$. Функция расстояния (1) (далее ФР) – не только важный инструмент широкого круга задач, но и сама часто является объектом исследования.

Цель данной заметки – исследование свойств ФР в случае, когда множество Ω является слабо выпуклым ([1]).

Введем используемые далее обозначения и базовые понятия параметрически выпуклого анализа ([1–3]):

$\|\cdot\|$ – евклидова норма,

$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^p : \|x - y\| \leq r\}$ – евклидов шар с центром в точке x и радиусом r ,

$Bn(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^p : n(x - y) \leq r\}$ – шар в норме $n(\cdot)$ с центром в точке x и радиусом r ,

$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$, $A - B = \{c \in \mathbb{R}^p : c + B \subset A\}$ – алгебраическая сумма и геометрическая разность множеств A и B ,

$Q^\rho(x) = \{z \in \Omega : n(x - z) = \rho(x, \Omega)\}$ – проекция точки x на множество Ω в норме $n(\cdot)$.

Определение 1. Множество $A \subset \mathbb{R}^p$ называется r -сильно выпуклым, если оно представимо в виде пересечения евклидовых шаров радиуса r .

Определение 2. Пусть дано ограниченное множество A из \mathbb{R}^p , числа $\rho > 0$ и $r > 0$ такие, что $B(0, \rho) \overset{*}{-} A \neq \emptyset$ и $r \geq \rho$. Сильно выпуклой оболочкой радиуса r множества A называется множество, получаемое при пересечении всех замкнутых евклидовых шаров радиуса r , которые содержат данное множество. Её обозначают через $strco_r A$.

Определение 3. Множество $A \subset \mathbb{R}^p$ называется слабо выпуклым по Виалю с константой $r > 0$ (r -слабо выпуклым), если для любых точек $x_0, x_1 \in A$ таких, что $0 < \|x_1 - x_0\| < 2r$, существует точка $x \in A \cap strco_r \{x_0, x_1\}$, не совпадающая с точками x_0 и x_1 .

2. Приведем несколько вспомогательных фактов.

Нетрудно доказать, что справедлива

Лемма 1. Для любого $\lambda \geq 0$ множество $G(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^p : \rho(x, \Omega) \leq \lambda\}$ представимо в виде $G(\lambda) = \Omega + Bn(0_p, \lambda)$.

Лемма 2. ([3, § 1.12]). Если множество A — r_1 -слабо выпукло по Виалю, а множество B — r_2 -слабо выпукло по Виалю и $r_1 > r_2$, то множество $A + B$ -слабо выпукло по Виалю с константой $r_1 - r_2$.

Лемма 3. ([3, § 1.14]). Пусть A — замкнутое множество из \mathbb{R}^p , $r > 0$, $\alpha \in (0, 1)$. Следующие условия эквивалентны:

- (1) множество A — r -слабо выпукло по Виалю,
- (2) для любых точек $x_0, x_1 \in A$ таких, что $\|x_0 - x_1\| < 2r$, существует точка $x \in A$ такая, что

$$\|(1 - \alpha)x_0 + \alpha x_1 - x\| \leq r - \sqrt{r^2 - \alpha(1 - \alpha)\|x_0 - x_1\|^2}. \quad (2)$$

3. Из лемм 1 и 2 следует справедливость следующего факта

Теорема 1. Пусть множество Ω является r_1 -слабо выпуклым, а единичный шар $Bn(0_p, 1)$ нормы $n(\cdot)$ является r_2 -сильно выпуклым. Тогда при любом $\lambda \in [0, \lambda_1/\lambda_2]$ множество $G(\lambda)$ будет $r_1 - \lambda r_2$ -слабо выпуклым по Виалю.

Далее считаем, что

$$B(0_p, r^*) \subset Bn(0_p, 1) \subset B(0_p, R^*). \quad (3)$$

Теорема 2. Пусть множество Ω является r -слабо выпуклым по Виалю и точки $x_0, x_1 \in \Omega$ таковы, что $\|x_0 - x_1\| < 2r$. Тогда для всех $\alpha \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$\rho((1 - \alpha)x_0 + \alpha x_1, \Omega) \leq \alpha(1 - \alpha) \frac{\|x_0 - x_1\|^2}{r^* r}.$$

Доказательство:

Пусть $x \in \Omega$ – та точка, для которой выполняется (2). Тогда, используя (3), при $\alpha \in (0, 1)$ для $x_\alpha = (1 - \alpha)x_0 + \alpha x_1$ получаем:

$$\begin{aligned} \rho(x_\alpha, \Omega) &\leq n(x_\alpha - x) \leq \frac{\|x_\alpha - x\|}{r^*} \leq \\ &\leq \frac{\alpha(1 - \alpha)\|x_0 - x_1\|^2}{r^*(r + \sqrt{r^2 - \alpha(1 - \alpha)\|x_0 - x_1\|^2})} \leq \alpha(1 - \alpha) \frac{\|x_0 - x_1\|^2}{r^*r}. \end{aligned}$$

Теорема 3. Пусть множество Ω является r_1 -слабо выпуклым, а единичный шар $Bn(0_p, 1)$ – r_2 -сильно выпуклым и точки x_0 и x_1 таковы, что $\rho(x_0, \Omega) = \rho(x_1, \Omega) = \lambda \geq 0$, причем $r_1 - \lambda r_2 > 0$. Тогда для всех $\alpha \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$\rho((1 - \alpha)x_0 + \alpha x_1, \Omega) \leq \lambda + \alpha(1 - \alpha) \frac{\|x_0 - x_1\|^2}{r^*(r_1 - \lambda r_2)}.$$

Доказательство:

Поскольку точки $x_0, x_1 \in G(\lambda)$, а множество $G(\lambda)$, по теореме 1, является $r_1 - \lambda r_2$ -слабо выпуклым, то, по теореме 2, имеем

$$\rho(x_\alpha, G(\lambda)) \leq \alpha(1 - \alpha) \frac{\|x_0 - x_1\|^2}{r^*(r_1 - \lambda r_2)}.$$

Теперь, используя лемму 1, остается заметить, что

$$\begin{aligned} \rho(x_\alpha, \Omega) &\equiv \min_{y \in \Omega} n(x_\alpha - y) = \min_{y \in \Omega, z \in Bn(0_p, 1)} (x_\alpha - y - \lambda z + \lambda z) \leq \\ &\leq \min_{y \in \Omega, z \in Bn(0_p, 1)} (n(x_\alpha - y - \lambda z) + \lambda n(z)) \leq \\ &\leq \min_{y \in \Omega + \lambda Bn(0_p, 1)} n(x_\alpha - y) + \lambda \max_{z \in Bn(0_p, 1)} n(z) = \rho(x_\alpha, G(\lambda)) + \lambda. \end{aligned}$$

Теорема 4. Пусть множество Ω является r -слабо выпуклым по Виалю, а точки x_0 и $x_1 \notin \Omega$ и таковы, что

$$\|x_0 - x_1\| < 2r - R^*(\rho(x_0, \Omega) + \rho(x_1, \Omega)). \quad (4)$$

Тогда для любого $\alpha \in [0, 1]$ и любых точек $y_0 \in Q^\rho(x_0), y_1 \in Q^\rho(x_1)$ выполняется неравенство

$$\rho((1 - \alpha)x_0 + \alpha x_1, \Omega) \leq (1 - \alpha)\rho(x_0, \Omega) + \alpha\rho(x_1, \Omega) + \frac{\alpha(1 - \alpha)}{r^*r} \|y_0 - y_1\|^2.$$

Доказательство:

Учитывая (3), из условия (4) вытекает $\|y_0 - y_1\| < 2r$. Тогда, по лемме 3, для точки $y_\alpha = (1 - \alpha)y_0 + \alpha y_1$ найдется точка $z \in \Omega$ такая, что $\|y_\alpha - z\| \leq (r - \sqrt{r^2 - \alpha(1 - \alpha)\|y_0 - y_1\|^2})$. Отсюда, ввиду (3), получаем

$$n(y_\alpha - z) \leq \frac{1}{r^*}(r - \sqrt{r^2 - \alpha(1 - \alpha)\|y_0 - y_1\|^2}). \quad (5)$$

И кроме того, имеем

$$\begin{aligned} n(x_\alpha - y_\alpha) &\leq (1 - \alpha)n(x_0 - y_0) + \alpha n(x_1 - y_1) = \\ &= (1 - \alpha)\rho(x_0, \Omega) + \alpha\rho(x_1, \Omega). \end{aligned} \quad (6)$$

Теперь из (5) и (6) следует

$$\begin{aligned} \rho(x_\alpha, \Omega) &\leq n(x_\alpha - z) \leq n(x_\alpha - y_\alpha) + n(y_\alpha - z) \leq \\ &\leq (1 - \alpha)\rho(x_0, \Omega) + \alpha\rho(x_1, \Omega) + \alpha(1 - \alpha) \frac{\|y_0 - y_1\|^2}{r^*(r + \sqrt{r^2 - \alpha(1 - \alpha)\|y_0 - y_1\|^2})}. \end{aligned}$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Vial J.-P.* Strong and weak convexity of sets and functions // *Math. Ops. Res.* 1983. Vol. 8, № 2. P. 231–259.
2. *Половинкин Е. С., Балашов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. 440 с.
3. *Иванов Г. Е.* Слабо выпуклые множества и функции: теория и приложения. М. : ФИЗМАЛТИТ, 2006. 352 с.

УДК 517.984

Н. П. Бондаренко

О БАЗИСНОСТИ РИССА СИСТЕМЫ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ, СВЯЗАННОЙ СО СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕЙ

Поступила 22.05.2019 г.

Данная работа посвящена базисности Рисса системы вектор-функций \mathcal{S} , связанной со спектральной задачей для матричного уравнения Штурма – Лиувилля с самосопряженным краевым условием общего вида:

$$-Y'' + Q(x)Y = \lambda Y, \quad x \in (0, \pi), \quad (1)$$

$$Y(0) = 0, \quad T(Y'(\pi) - hY(\pi)) - T^\perp Y(\pi) = 0. \quad (2)$$

Здесь $Y = [y_k(x)]_{k=1}^m$ – вектор-функция, $Q(x) = Q^*(x)$ – эрмитова матричная функция размера $m \times m$, λ – спектральный параметр, T и T^\perp – ортогональные проекторы в \mathbb{C}^m , такие что $\text{rank}(T) = p$, $\text{rank}(T^\perp) = m - p$, p – фиксированное целое число: $1 \leq p \leq m - 1$, $T + T^\perp = I$ (I – единичная матрица), $TT^\perp = T^\perp T = 0$, $h = h^* \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $ThT = h$.

Частным случаем задачи (1)–(2) является задача Штурма – Лиувилля на графе-звезде, изучавшаяся в работах [1, 2]. Рассматриваемая в данной работе система вектор-функций \mathcal{S} аналогична системам, участвующим в необходимых и достаточных условиях разрешимости обратных задач для матричных операторов Штурма – Лиувилля (см. [3, 4]). Результат настоящей работы является важным шагом к получению характеристики спектральных данных дифференциальных операторов на графах.

Для определения системы вектор-функций \mathcal{S} нам потребуются следующие обозначения.

1. Пусть имеются положительные числа $\{\lambda_{nk}\}_{n \in \mathbb{N}, k = \overline{1, m}}$, $\lambda_{n_1, k_1} \leq \lambda_{n_2, k_2}$ при $(n_1, k_1) < (n_2, k_2)$. Мы считаем, что $(n_1, k_1) < (n_2, k_2)$, если $n_1 < n_2$ или $n_1 = n_2$, $k_1 < k_2$.

Предположим, что для чисел $\{\lambda_{nk}\}_{n \in \mathbb{N}, k = \overline{1, m}}$ верны следующие асимптотические формулы:

$$\lambda_{nk} = n - \frac{1}{2} + \varkappa_{nk}, \quad k = \overline{1, p}, \quad \lambda_{nk} = n + \varkappa_{nk}, \quad k = \overline{p+1, m},$$

где $\{\varkappa_{nk}\} \in l_2$.

2. Пусть $\{\alpha_{nk}\}_{n \in \mathbb{N}, k = \overline{1, m}}$ – последовательность эрмитовых неотрицательно определенных матриц из $\mathbb{C}^{m \times m}$: $\alpha_{nk} = \alpha_{nk}^* \geq 0$. Матрицы $\{\alpha_{nk}\}_{n \in \mathbb{N}, k = \overline{1, m}}$ таковы, что для каждой максимальной по включению группы совпадающих значений среди $\{\lambda_{nk}\}_{n \in \mathbb{N}, k = \overline{1, m}}$: $\lambda_{n_1, k_1} = \lambda_{n_2, k_2} = \dots = \lambda_{n_r, k_r}$, $(n_1, k_1) < (n_2, k_2) < \dots < (n_r, k_r)$, выполнены равенства $\alpha_{n_1, k_1} = \alpha_{n_2, k_2} = \dots = \alpha_{n_r, k_r}$ и $\text{rank}(\alpha_{n_1, k_1}) = r$. Введем обозначения $\alpha'_{n_1, k_1} = \alpha_{n_1, k_1}$, $\alpha'_{n_j, k_j} = 0$, $j = \overline{2, r}$. Предположим, что выполнены асимптотические формулы:

$$\sum_{k=1}^p \alpha'_{nk} = T + K_{n1}, \quad \sum_{k=p+1}^m \alpha'_{nk} = T^\perp + K_{n2},$$

где $\{\|K_{nj}\|\} \in l_2$, $j = 1, 2$.

3. Для каждой максимальной по включению группы значений $\lambda_{n_1, k_1} = \lambda_{n_2, k_2} = \dots = \lambda_{n_r, k_r}$ обозначим через $\{\varepsilon_{n_j, k_j}\}_{j=1}^r$ ортонормированный базис в $\text{Ran}(\alpha_{n_1, k_1})$ (напомним, что $\text{rank}(\alpha_{n_1, k_1}) = r$).

Базисы выбраны произвольным образом и фиксированы. Результат работы справедлив при любом выборе базисов. Рассмотрим последовательность вектор-функций

$$\mathcal{S} := \{\varepsilon_{nk} \sin(\lambda_{nk}x)\}_{n \in \mathbb{N}, k = \overline{1, m}}.$$

Обозначим через $L_2((0, \pi); \mathbb{C}^m)$ гильбертово пространство вектор-функций размера m с компонентами из $L_2(0, \pi)$ и скалярным произведением

$$(f, g) = \sum_{j=1}^m \int_0^\pi f_j(x) \overline{g_j(x)} dx, \quad f = [f_j]_{j=1}^m, \quad g = [g_j]_{j=1}^m,$$

$$f_j, g_j \in L_2(0, \pi), \quad j = \overline{1, m}.$$

Доказана следующая

Теорема. *Если определенная выше система \mathcal{S} полна в $L_2((0, \pi); \mathbb{C}^m)$, то она является базисом Рисса в $L_2((0, \pi); \mathbb{C}^m)$.*

Используя теорему, в частности, можно доказать базисность Рисса системы собственных вектор-функций задачи (1)–(2) с потенциалом $Q(x)$ из $L_2((0, \pi); \mathbb{C}^{m \times m})$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01193).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Yang C.-F. Inverse spectral problems for the Sturm-Liouville operator on a d -star graph // J. Math. Anal. Appl. 2010. Vol. 365. P. 742–749.
2. Bondarenko N. P. A partial inverse problem for the Sturm-Liouville operator on a star-shaped graph // Anal. Math. Phys. 2018. Vol. 8, iss. 1. P. 155–168.
3. Mykytyuk Ya. V., Trush N. S. Inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators with matrix-valued potentials // Inverse Probl. 2010. Vol. 26. P. 015009.
4. Bondarenko N. P. An inverse problem for the non-self-adjoint matrix Sturm-Liouville operator // Tamkang J. Math. 2019. Vol. 50, № 1. P. 71–102.

D. A. Bredikhin

ON SEMIGROUPS OF RELATIONS
WITH PRIMITIVE-POSITIVE OPERATIONS OF RANK TWO

Received 10 May 2019

Let $Rel(U)$ be the set of all binary relations on a base set U . A set of relations $\Phi \subseteq Rel(U)$ closed with respect to some collection Ω of operations on relations forms an algebra (Φ, Ω) called an *algebra of relations*. Theory of algebras of relations is an essential part of modern algebraic logic and has important applications in theory of semigroups [1].

Operations on relations are usually determined using first-order predicate calculus formulas. Such operations are called *logical*. For any formula $\varphi(z_0, z_1, r_1, r_2)$ of the first-order predicate calculus (without equality) with the set of free variables included in $\{z_0, z_1\}$ and having two binary predicate symbols r_1, r_2 , we can associate the binary operation F on $Rel(U)$ defined in the following way: $F(\rho_1, \rho_2) = \{(u, v) \in U \times U : \varphi(u, v, \rho_1, \rho_2)\}$, where $\varphi(u, v, \rho_1, \rho_2)$ means that the formula φ holds whenever z_0, z_1 are interpreted as u, v , and r_1, r_2 are interpreted as relations $\rho_1, \rho_2 \in Rel(U)$.

An operation on relations is called *primitive-positive* [2] (in other terminology – *Diophantine* [3]) if it can be defined by a formula of the first-order predicate calculus containing in its prenex normal form only existential quantifiers and conjunctions. We say the operation has *rank* k if it can be defined by a formula containing k conjunctive members and cannot be determined by formulas with a smaller number of them. Note that the set-theoretical inclusion \subseteq is compatible with all primitive-positive operations. Thus, any algebra of relations (Φ, Ω) with primitive-positive operations can be considered as partially ordered $(\Phi, \Omega, \subseteq)$.

The operation $F^*(\rho_1, \rho_2) = F(\rho_2, \rho_1) = \{(u, v) \in U \times U : \varphi(u, v, \rho_2, \rho_1)\}$ is called *dual* to the operation F . The abstract properties of these operations are dual to each other. For this reason, we will consider only one of these operations. Let $\tilde{\varphi}$ be the formula obtained from the formula φ by replacing in it atomic formulas $r_k(z_i, z_j)$ by formulas $r_k(z_j, z_i)$. The operation $\tilde{F}(\rho_1, \rho_2) = \{(v, u) \in U \times U : \tilde{\varphi}(u, v, \rho_2, \rho_1)\}$ is called *conjugate* to the operation F . The operation is called *self-conjugate* if $\tilde{F} = F^*$. Note that the mapping $f(\rho) = \rho^{-1}$ is an antiisomorphism of partially ordered algebras $(Rel(X), F, \subseteq)$ and $(Rel(X), \tilde{F}, \subseteq)$, hence it will be enough to limit consideration to only one of these operations.

Denote by $R\{\Omega\}$ (respectively, $R\{\Omega, \subseteq\}$) the class of all algebras (partially ordered algebras) isomorphic to the ones whose elements are binary relations and whose operations are members of Ω . Let $V\{\Omega\}$ ($V\{\Omega, \subseteq\}$) be the variety and let $Q\{\Omega\}$ ($Q\{\Omega, \subseteq\}$) be the quasi-variety generated by $R\{\Omega\}$ (generated by $R\{\Omega, \subseteq\}$ in the class of all partially ordered algebras of the corresponding type). The following problems naturally arise when the class $R\{\Omega\}$ ($R\{\Omega, \subseteq\}$) is considered.

1. Find a system of axioms for the class $R\{\Omega\}$ ($R\{\Omega, \subseteq\}$).
2. Find a basis of quasi-identities for the quasi-variety $Q\{\Omega\}$ ($Q\{\Omega, \subseteq\}$).
3. Find a basis of identities for the variety $V\{\Omega\}$ ($V\{\Omega, \subseteq\}$).
- 4.0 Does the class $R\{\Omega\}$ ($R\{\Omega, \subseteq\}$) form a quasi-variety?
5. Does the quasi-variety $Q\{\Omega\}$ ($Q\{\Omega, \subseteq\}$) form a variety?

This paper presents the results of solving problems 1–5 for all classes of algebras and partially ordered algebras of relations with one binary associative primitive-positive operation of rank 2, i.e, for classes of semigroups of relations. Their proofs are based on the description of quasi-equational theories of algebras of relations with primitive-positive operations [3].

The operations of intersection \cap and relational product \circ are primitive-positive operations of rank 2. It is well known that the class $R\{\cap\}$ coincides with the class of all semilattices and the class $R\{\circ\}$ coincides with the class of all semigroup. We exclude these operations from our further consideration.

Now, we give a list of all binary primitive-positive operations of rank 2 (except for \cap , \circ , and operations dual and conjugate to the ones listed below). This list can be obtained by means of a rune check for the associativity of all binary primitive-positive operations of rank 2.

$$\begin{aligned}
F_1(\rho_1, \rho_2) &= \{(u, v) \in U \times U : (\exists s)(u, s) \in \rho_1 \wedge (u, v) \in \rho_2\}, \\
F_2(\rho_1, \rho_2) &= \{(u, v) : (u, u) \in \rho_1 \wedge (u, v) \in \rho_2\}, \\
F_3(\rho_1, \rho_2) &= \{(u, v) \in U \times U : (\exists s, t)(u, s) \in \rho_1 \wedge (u, t) \in \rho_2\}, \\
F_4(\rho_1, \rho_2) &= \{(u, v) \in U \times U : (u, u) \in \rho_1 \wedge (u, u) \in \rho_2\}, \\
F_5(\rho_1, \rho_2) &= \{(u, v) \in U \times U : (\exists s, t)(s, t) \in \rho_1 \wedge (u, v) \in \rho_2\}, \\
F_6(\rho_1, \rho_2) &= \{(u, v) : (\exists s, t, w)(s, t) \in \rho_1 \wedge (w, v) \in \rho_2\}, \\
F_7(\rho_1, \rho_2) &= \{(u, v) \in U \times U : (\exists l, s, t, w)(l, s) \in \rho_1 \wedge (t, w) \in \rho_2\}, \\
F_8(\rho_1, \rho_2) &= \{(u, v) \in U \times U : (\exists s)(s, s) \in \rho_1 \wedge (v, v) \in \rho_2\}, \\
F_9(\rho_1, \rho_2) &= \{(u, v) \in U \times U : (\exists s, t)(s, s) \in \rho_1 \wedge (t, t) \in \rho_2\}, \\
F_{10}(\rho_1, \rho_2) &= \{(u, v) \in U \times U : (\exists s, t)(u, s) \in \rho_1 \wedge (t, v) \in \rho_2\}.
\end{aligned}$$

Note that operations F_5, F_7, F_{10} are self-conjugate. Put $R_k = R\{F_k\}$, $R_k^{\leq} = R\{F_k, \subseteq\}$, $Q_k = Q\{F_k\}$, $Q_k^{\leq} = Q\{F_k, \subseteq\}$, $V_k = V\{F_k\}$, $V_k^{\leq} = V\{F_k, \subseteq\}$

for $1 \leq k \leq 10$. Let us consider the following identities and axioms:

$$\begin{aligned}
&x^2 = x \quad (1), \quad x^2y = xy \quad (2), \quad xy^2 = xy \quad (3), \quad xy = yx \quad (4), \quad xyz = yxz \quad (5), \\
&xyz = xyxz \quad (6), \quad xyzx = xzyx \quad (7), \quad xy \leq y \quad (8), \quad xy \leq y^2 \quad (9), \quad x \leq x^2 \quad (10), \\
&xyz \leq xz \quad (11), \quad xy = y \vee xz = zx = x \quad (12), \quad xy = y^2 \vee xz = zx = x \quad (13), \\
&xy = y^2 \vee xz = zx = x^2 \quad (14), \quad xyz = xz \vee yt = ty = y \quad (15), \\
&xy = yx = x \Rightarrow x \leq z \quad (16), \quad xy = yx = x \Rightarrow x^2 \leq z \quad (17).
\end{aligned}$$

Denote by $Mod\{\Sigma\}$ the class of semigroups (respectively, partially ordered semigroups) satisfying the system of axioms Σ . The following results solve problems 1–5 for classes R_k and R_k^{\leq} .

1. $Q_k = V_k$ and $Q_k^{\leq} = V_k^{\leq}$ for all k ; $R_k = Q_k$ and $R_k^{\leq} = Q_k^{\leq}$ for $k = 1, \dots, 4$.
2. $V_1 = V_5 = Mod\{(1), (5)\}$ and $V_1^{\leq} = V_5^{\leq} = Mod\{(1), (5), (8)\}$.
3. $V_2 = Mod\{(2), (5)\}$ and $V_2^{\leq} = Mod\{(2), (5), (8)\}$.
4. $V_3 = V_4 = V_7 = V_9 = Mod\{(2), (4)\}$ and $V_6 = V_8 = Mod\{(2), (3), (5)\}$.
5. $V_3^{\leq} = V_7^{\leq} = Mod\{(2), (4), (9), (10)\}$ and $V_4^{\leq} = V_9^{\leq} = Mod\{(2), (4), (9)\}$.
6. $V_6^{\leq} = Mod\{(2), (3), (5), (9), (10)\}$ and $V_8^{\leq} = Mod\{(2), (3), (5), (9)\}$.
7. $V_{10} = Mod\{(2), (3), (6), (7)\}$ and $V_{10}^{\leq} = Mod\{(10), (11)\}$.
8. $R_5 = Mod\{(12)\}$ and $R_5^{\leq} = Mod\{(12), (15)\}$.
9. $R_6 = Mod\{(13)\}$ and $R_6^{\leq} = Mod\{(10), (13), (16)\}$.
10. $R_7 = Mod\{(4), (13)\}$ and $R_7^{\leq} = Mod\{(4), (10), (13), (16)\}$.
11. $R_8 = Mod\{(13)\}$ and $R_8^{\leq} = Mod\{(13), (17)\}$.
12. $R_9 = Mod\{(4), (13)\}$ and $R_9^{\leq} = Mod\{(4), (13), (17)\}$.
13. $R_{10} = Mod\{(15)\}$ and $R_{10}^{\leq} = Mod\{(10), (15), (16)\}$.

The class R_1 has been reviewed and characterized in [4]. Characteristics of the classes R_2, R_3, R_4, R_{10} was announced in [5].

REFERENCES

1. Schein B. M. Relation algebras and function semigroups. *Semigroup Forum*, 1970, vol. 1, pp. 1–62.
2. Böner F., Pöschel F. R. Clones of operations on binary relations. *Contributions to General Algebras*, 1991, vol. 7, pp. 50–70.
3. Bredikhin D. A. On quasi-identities of algebras of relations with Diophantine operations. *Sib. Math. J.*, 1997, vol. 38, pp. 23–33.
4. Wagner V. V. Restrictiv semigroups. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1962, no. 6, pp. 19–27 (in Russian).
5. Bredikhin D. A. On relation algebras with general superpositions. *Colloq. Math. Soc. Janos Bolya*, 1994, vol. 54, pp. 11–124.

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ СОЛИТОНОВ РИЧЧИ НА СУБРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Поступила 31.05.2019 г.

1. Необходимое условие существования солитона Риччи $(g, \vec{\xi}, \lambda)$ на субримановом многообразии контактного типа. Солитоном Риччи называется система (g, \vec{u}, λ) , где g – метрический тензор риманова многообразия M , \vec{u} – векторное поле на многообразии M , $\lambda \in \mathbb{R}$. При этом должно выполняться равенство

$$L_{\vec{u}}g + 2S - 2\lambda g = 0,$$

где S – тензор Риччи. Известно, что солитоны Риччи находят важные применения в теоретической физике [1].

Рассмотрим гладкое субриманово многообразие M размерности n с заданной на нем структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, g, D)$, где η и $\vec{\xi}$ – форма и единичное векторное поле, порождающие ортогональные между собой распределения D и D^\perp соответственно. Пусть $\nabla : \Gamma(D) \times \Gamma(D) \rightarrow \Gamma(D)$ – внутренняя линейная связность [2] на субримановом многообразии. Здесь $\Gamma(D)$ – модуль сечений распределения D .

Известно [2], что на субримановом многообразии существует единственная внутренняя связность ∇ с нулевым кручением, такая, что

$$\nabla_{\vec{x}}g(\vec{x}, \vec{y}) = 0.$$

Кручение внутренней линейной связности T по определению полагается равным

$$T(\vec{x}, \vec{y}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} - \nabla_{\vec{y}}\vec{x} - P[\vec{x}, \vec{y}],$$

где $P : TM \rightarrow D$ – проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^\perp$.

Будем использовать координаты, адаптированные к структуре субриманова многообразия. А именно карту $K(x^\alpha)$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$, $a, b, c = 1, \dots, n-1$) многообразия M будем называть адаптированной к структуре субриманова многообразия, если $\partial_n = \vec{\xi}$ [3]. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ порождают систему D : $D = \text{Span}(\vec{e}_a)$. Таким образом, мы получаем на многообразии M неголономное поле базисов $(\vec{e}_\alpha) = (\vec{e}_a, \partial_n)$ и поле кобазисов $(dx^\alpha, \eta = dx^n + \Gamma_a^n dx^a)$. Непосредственно

проверяется, что $[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n$. Условие $\vec{\xi} \in \ker \omega$ влечет справедливость равенства $\partial_n \Gamma_a^n = 0$. Пусть $K(x^\alpha)$ и $K'(x^{\alpha'})$ – адаптированные карты, тогда получаем следующие формулы преобразования координат: $x^a = x^a(x^{\alpha'})$, $x^n = x^{n'} + x^n(x^{\alpha'})$.

Пусть $\tilde{\nabla}$ – связность Леви – Чивита и $\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$ – ее коэффициенты. Известно [4, 5], что справедливо следующее предложение.

Предложение 1. Коэффициенты связности Леви – Чивита субриманова многообразия в адаптированных координатах имеют вид:

$$\tilde{\Gamma}_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c, \tilde{\Gamma}_{ab}^n = \omega_{ba} - C_{ab}, \tilde{\Gamma}_{an}^b = \Gamma_{na}^b = C_a^b + \psi_a^b, \tilde{\Gamma}_{na}^n = \Gamma_{nn}^a = 0,$$

где $\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$, $\psi_a^b = g^{bc}\omega_{ac}$, $C_{ab} = \frac{1}{2}\partial_n g_{ab}$, $C_a^b = g^{bc}C_{ac}$.

Основным результатом предлагаемой статьи является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть M – субриманово многообразие контактного типа, для которого структурное векторное поле $\vec{\xi}$ – киллингово. Тогда необходимым условием существования на нем солитона Риччи $(g, \vec{\xi}, \lambda)$ является выполнение равенства $\nabla_a \psi_b^a = 0$.

Доказательство. Пусть $\tilde{R}(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}$ – тензор кривизны Римана. Проводя необходимые вычисления в адаптированных координатах, получаем следующие выражения для его компонент:

$$\tilde{R}_{abc}^d = R_{abc}^d + \psi_a^d \omega_{cb} + \psi_a^d \omega_{ac}, \tilde{R}_{anc}^n = \partial_n \omega_{ac} + \psi_c^e \omega_{ea}, \tilde{R}_{abn}^d = 2\nabla_{[a} \psi_{b]}^d,$$

$$\tilde{R}_{ncb}^a = K_{ncb}^a = -\nabla_c \psi_b^a.$$

Здесь $\tilde{R}_{abc}^d = 2\vec{e}_{[a} \Gamma_{b]}^d c + 2\Gamma_{[a|e]}^d \Gamma_{b]c}^e$ – компоненты тензора кривизны Схоутена [6], определяемого равенством

$$R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = \nabla_{\vec{x}} \nabla_{\vec{y}} \vec{z} - \nabla_{\vec{y}} \nabla_{\vec{x}} \vec{z} - \nabla_{P[\vec{x}, \vec{y}]} \vec{z} - P[Q[\vec{x}, \vec{y}], \vec{z}], \quad Q = 1 - P.$$

Из условия $d\omega = 0$ следует, что $\partial_n \omega_{ac} = 0$.

Предположим, что солитон Риччи $(g, \vec{\xi}, \lambda)$ существует, т. е. имеет место равенство $L_{\vec{\xi}} g + 2S - 2\lambda g = 0$.

Так как $\vec{\xi}$ – киллингово, то условие $L_{\vec{\xi}} g + 2S - 2\lambda g = 0$ сводится к равенству $S - \lambda g = 0$. Отсюда следует, что в адаптированных координатах $S_{nb} = -\nabla_a \psi_b^a = 0$. Что и доказывает теорему.

2. О существовании солитона Риччи $g, \vec{\xi}, \lambda$ на многообразии Кенмоцу. Почти контактным метрическим многообразием называется гладкое многообразие M нечетной размерности $n = 2m + 1$, $m \geq 1$ с заданной на нем почти контактной метрической структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g)$ [6].

Таким образом, почти контактное метрическое многообразие является специальным классом субримановых многообразий контактного типа. Почти контактное метрическое многообразие называется нормальным, если выполняется условие $N_\varphi + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$, где $N_\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = [\varphi\vec{x}, \varphi\vec{y}] + \varphi^2[\vec{x}, \vec{y}] - \varphi[\varphi\vec{x}, \vec{y}] - \varphi[\vec{x}, \varphi\vec{y}]$. Почти контактное метрическое многообразие называется почти многообразием Кенмоцу, если $d\eta = 0$, $d\Omega = 2\eta \wedge \Omega$ [7]. Нормальное почти многообразие Кенмоцу называется многообразием Кенмоцу. Как было показано в работе [7], почти контактное метрическое многообразие нормально тогда и только тогда, когда $\nabla\varphi = 0$, $\partial_n\varphi = 0$.

Структурное векторное поле $\vec{\xi}$ для многообразия Кенмоцу не является киллинговым. Более того, выполняется равенство $L_{\vec{\xi}}g = 2(g - \eta \otimes \eta)$, или, в адаптированных координатах, $\partial_n g_{ab} = 2g_{ab}$. Таким образом, для случая многообразия Кенмоцу равенство $L_{\vec{\xi}}g + 2S - 2\lambda g = 0$ принимает вид $S - (\lambda - 1)g - \eta \otimes \eta = 0$. Как следует из предыдущих рассуждений, необходимые условия, содержащиеся в формулировке теоремы 1, выполняются для многообразия Кенмоцу.

Теорема 2. *На многообразии Кенмоцу определен поток Риччи $(g, \vec{\xi}, 2)$.*

Доказательство. Компоненты тензора Риччи многообразия Кенмоцу S_{nb}, S_{bn}, S_{nn} равны нулю. Отсюда следует, что $S_{nn} = 0 = (\lambda - 1) - 1$. Что и доказывает теорему.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Calin C., Crasmareanu M.* From the Eisenhart problem to Ricci solitons in f-Kenmotsu manifolds // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 2010. № 33. P. 361–368.
2. *Галаев С. В.* Гладкие распределения с допустимой гиперкомплексной псевдоэрмитовой структурой // Вестн. Башк. ун-та. 2016. Т. 21, № 3. С. 551–555.
3. *Галаев С. В.* N -продолженные симплектические связности в почти контактных метрических пространствах // Известия высших учебных заведений. Математика. 2017. № 3. С. 15–23.
4. *Букушева А. В., Галаев С. В.* Связности над распределением и геодезические пульверизации // Известия высших учебных заведений. Математика. 2013. № 4. С. 10–18.
5. *Букушева А. В., Галаев С. В.* О допустимой келеровой структуре на касательном расслоении к неголономному многообразию // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 12–14.
6. *Букушева А. В., Галаев С. В.* Почти контактные метрические структуры, определяемые связностью над распределением с допустимой финслеровой метрикой // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 8. С. 17–22.
7. *Pitis G.* Geometry of Kenmotsu manifolds. Brasov : Publishing House of Transilvania University of Brasov, 2007. 160 p.

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ДИРАКА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Поступила 15.07.2019 г.

1. Пусть $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ – спектр краевой задачи $D = D(m_1, m_2)$ вида

$$By' + \int_0^x M(x-t)y(t) dt = \lambda y, \quad 0 < x < \pi, \quad y_1(0) = y_1(\pi) = 0, \quad (1)$$

где λ – спектральный параметр,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(x) = \begin{pmatrix} m_1(x) & m_2(x) \\ -m_2(x) & m_1(x) \end{pmatrix}, \quad y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},$$

а функции $m_j(x)$ комплекснозначны, и $(\pi - x)m_j(x) \in L_2(0, \pi)$, $j = 1, 2$.

В работе исследуется следующая обратная задача.

Задача. По спектру $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ найти функции $m_j(x)$, $j = 0, 1$.

В [1] установлена единственность решения этой обратной задачи, и доказано, что произвольная последовательность комплексных чисел $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ является спектром задачи D вида (1) тогда и только тогда, когда имеет место асимптотика

$$\lambda_n = n + \varkappa_n, \quad \{\varkappa_n\} \in l_2. \quad (2)$$

Доказательство конструктивно и основано на развитии подхода, предложенного в [2] для скалярного оператора. Отметим, что восстановление четырех независимых элементов матрицы-функции $M(x)$ по спектрам двух краевых задач с одним общим краевым условием было изучено в [3].

В настоящей работе получена устойчивость решения задачи.

Теорема. *Существует число $\delta > 0$, зависящее от задачи D , такое что если спектр $\{\tilde{\lambda}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ задачи $D(\tilde{m}_1, \tilde{m}_2)$ удовлетворяет условию*

$$\Lambda := \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\lambda_n - \tilde{\lambda}_n|^2} < \delta, \quad (3)$$

то имеют место оценки $\|(\pi - x)(m_j - \tilde{m}_j)(x)\|_{L_2(0, \pi)} \leq C\Lambda$, $j = 1, 2$, с некоторой константой $C > 0$, зависящей только от задачи D .

2. Пусть вектор-функция $S(x, \lambda) = (S_1(x, \lambda), S_2(x, \lambda))^T$ является решением уравнения в (1), удовлетворяющим начальному условию $S(0, \lambda) = (0, -1)^T$, где T – знак транспонирования. Тогда собственные значения задачи D совпадают с нулями ее характеристической функции $\Delta(\lambda) := S_1(\pi, \lambda)$. В [1] получено представление

$$\Delta(\lambda) = \sin \lambda \pi + \int_0^\pi (w_1(x) \sin \lambda x + w_2(x) \cos \lambda x) dx, \quad w_1, w_2 \in L_2(0, \pi),$$

из которого следует асимптотика (2), а также представление

$$\Delta(\lambda) = \pi(\lambda - \lambda_0) \prod_{k \neq 0} \frac{\lambda_k - \lambda}{k} \exp\left(\frac{\lambda}{k}\right).$$

В [1] также установлено, что функции w_1 и w_2 определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} w_1(x) &= -xm_2(\pi - x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{j=0}^n a_{nj} (m_1^{*j} * m_2^{*(n-j)})(\pi - x), \\ w_2(x) &= -xm_1(\pi - x) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{j=0}^n b_{nj} (m_1^{*j} * m_2^{*(n-j)})(\pi - x), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где $(f^{*0} * g)(x) = (g * f^{*0})(x) = g^{*1}(x) = g(x)$ для любых f, g , а также

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t) dt, \quad f^{*(\nu+1)}(x) = (f^{*\nu} * f)(x), \quad \nu \geq 1,$$

$$\begin{aligned} a_{nj} &= -a_{n-1,j} - b_{n-1,j-1}, \quad b_{nj} = a_{n-1,j-1} - b_{n-1,j}, \quad n-1 \in \mathbb{N}, \quad j = \overline{0, n}, \\ a_{11} &= b_{10} = 0, \quad a_{10} = -b_{11} = -1, \quad a_{nj} = b_{nj} = 0 \quad \text{при } j \notin [0, n]. \end{aligned}$$

На (4) можно смотреть, как на систему нелинейных уравнений относительно функций $m_1(x)$ и $m_2(x)$. В [1] установлено, что для любой пары функций $w_1(x), w_2(x) \in L_2(0, \pi)$ система (4) имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $(\pi - x)m_j(x) \in L_2(0, \pi)$, $j = 1, 2$. Данное утверждение следует также из общей теоремы 1 в [4]. Кроме того, из теоремы 2 в [4] следует равномерная устойчивость решения системы (4), а именно справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Для каждого $R > 0$ существует $C = C(R)$, такое что если $\|w_j\|_{L_2(0, \pi)}, \|\tilde{w}_j\|_{L_2(0, \pi)} \leq R$ при $j = 1, 2$, то имеет место оценка*

$$\max_{j=1,2} \|(\pi - x)(m_j - \tilde{m}_j)(x)\|_{L_2(0, \pi)} \leq C \max_{j=1,2} \|w_j - \tilde{w}_j\|_{L_2(0, \pi)},$$

где пара функций $\tilde{m}_1(x), \tilde{m}_2(x)$ является решением системы (4) со свободными членами $\tilde{w}_1(x), \tilde{w}_2(x)$ вместо $w_1(x), w_2(x)$ соответственно.

Легко видеть, что теорема 1 является непосредственным следствием леммы 1 и следующего утверждения.

Лемма 2. *Существуют $\delta > 0$ и $C > 0$, зависящие от спектра $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, такие что если последовательность $\{\tilde{\lambda}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ удовлетворяет условию (3), то имеет место оценка*

$$\max_{j=1,2} \|w_j - \tilde{w}_j\|_{L_2(0,\pi)} \leq C\Lambda,$$

где функции $\tilde{w}_1(x)$, $\tilde{w}_2(x)$ определяются соотношением

$$\pi(\lambda - \tilde{\lambda}_0) \prod_{k \neq 0} \frac{\tilde{\lambda}_k - \lambda}{k} \exp\left(\frac{\lambda}{k}\right) = \sin \lambda\pi + \int_0^\pi (\tilde{w}_1(x) \sin \lambda x + \tilde{w}_2(x) \cos \lambda x) dx.$$

Работа выполнена в Саратовском университете при поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01193).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Bondarenko N. P., Buterin S. A.* On recovering the Dirac operator with an integral delay from the spectrum // *Results Math.* 2017. Vol. 71, iss. 3–4. P. 1521–1529.
2. *Buterin S. A.* On an inverse spectral problem for a convolution integro-differential operator // *Results Math.* 2007. Vol. 50, № 3–4. P. 173–181.
3. *Bondarenko N., Buterin S.* An inverse spectral problem for integro-differential Dirac operators with general convolution kernels // *Applicable Analysis.* 2020. Vol. 99, № 4. P. 700–716.
4. *Buterin S., Malyugina M.* On global solvability and uniform stability of one nonlinear integral equation // *Results Math.* 2018. Vol. 73. Article number 117. P. 1–19.

УДК 517.984

С. В. Васильев, В. А. Юрко

ОБ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Поступила 21.05.2019 г.

Рассмотрим краевую задачу $L = L(q, M, R, V)$ для интегро-дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \ell y(x) &:= -y''(x) + q(x)y(x) + \int_0^x M(x,t)y(t) dt + R(x) \int_0^\pi V(t)y(t) dt = \\ &= \lambda y(x), \quad 0 < x < T, \end{aligned} \tag{1}$$

с условиями

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

Здесь q, M, R, V – комплекснозначные непрерывные функции. В статье исследуются обратные спектральные задачи для краевой задачи L . Обратные спектральные задачи заключаются в восстановлении операторов по заданным спектральным характеристикам. Для дифференциальных операторов обратные задачи достаточно подробно изучены (см. монографии [1–2] и библиографию в них). Основными методами исследования обратных задач для дифференциальных операторов являются метод оператора преобразования, связанный с волновыми процессами, и метод спектральных отображений, использующий идеи контурного интегрирования и аппарат теории аналитических функций. Однако эти методы не являются эффективными при исследовании обратных задач для интегро-дифференциальных операторов. Поэтому в настоящее время для этого класса операторов теория решения обратных задач еще не разработана, а есть только отдельные фрагменты теории. В частности, некоторые аспекты теории обратных задач для интегро-дифференциальных операторов изучались в [3–7] и других работах. В данной статье исследуются обратные задачи восстановления коэффициентов R или V по заданному спектру при условии, что остальные коэффициенты известны априори. Обратная задача для L в другой постановке и при более жестких ограничениях рассматривалась в [7].

Пусть $u(x, \lambda)$ – решение следующей задачи Коши:

$$-u''(x, \lambda) + q(x)u(x, \lambda) + \int_0^x M(x, t)u(t, \lambda) dt + R(x) = \lambda u(x, \lambda),$$
$$u(0, \lambda) = u'(0, \lambda) = 0.$$

Обозначим

$$\Delta(\lambda) := 1 - \int_0^\pi V(x)u(x, \lambda) dx.$$

Функция $\Delta(\lambda)$ является целой по λ порядка $1/2$, и множество ее нулей $\Lambda := \{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ (с учетом кратностей) совпадает с множеством собственных значений краевой задачи L . Функция $\Delta(\lambda)$ называется характеристической функцией краевой задачи L . Отметим, что если $V(x) \equiv 0$ и/или $R(x) \equiv 0$, то $\Delta(\lambda) \equiv 1$ и L не имеет собственных значений, т. е. $\Lambda = \emptyset$.

Обратные задачи ставятся следующим образом.

Обратная задача 1. Даны Λ, q, M, R , построить V .

Обратная задача 2. Даны Λ, q, M, V , построить R .

Так как $\Delta(0) = 1$, то, используя факторизационную теорему Адамара, нетрудно увидеть, что задание спектра Λ однозначно определяет характеристическую функцию по формуле

$$\Delta(\lambda) = \prod_{\lambda_n \in \Lambda} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right).$$

Сформулируем теоремы единственности для рассматриваемых обратных задач. Для этого наряду с L мы рассмотрим краевую задачу $\tilde{L} := L(\tilde{q}, \tilde{M}, \tilde{R}, \tilde{V})$ того же вида, но с другими коэффициентами. Условимся, что если некоторый символ обозначает объект, относящийся к L , то соответствующий символ с волной наверху будет обозначать объект, относящийся к \tilde{L} .

Теорема 1. Пусть $R(x) \sim C_a x^a$, $x \rightarrow 0$, $a > 0$, $C_a \neq 0$. Если $\Lambda = \tilde{\Lambda}$, $q = \tilde{q}$, $M = \tilde{M}$, $R = \tilde{R}$, то $V(x) \equiv \tilde{V}(x)$. Таким образом, задание Λ, q, M, R однозначно определяет функцию $V(x)$. В частности, $\Lambda = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $V(x) \equiv 0$.

Теорема 2. Пусть $V(\pi - x) \sim D_b x^b$, $x \rightarrow 0$, $b > 0$, $D_b \neq 0$. Если $\Lambda = \tilde{\Lambda}$, $q = \tilde{q}$, $M = \tilde{M}$, $V = \tilde{V}$, то $R(x) \equiv \tilde{R}(x)$. Таким образом, задание Λ, q, M, V однозначно определяет функцию $R(x)$. В частности, $\Lambda = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $R(x) \equiv 0$.

Замечание. Доказательства теорем конструктивно и дают решения рассмотренных нелинейных обратных задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01193).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Freiling G., Yurko V. A. Inverse Sturm–Liouville Problems and their Applications. New York : NOVA Science Publ., 2001. 305 p.
2. Yurko V. A. Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-Posed Problems. Series 31. Utrecht, VSP, 2002. 306 p. DOI: <https://doi.org/10.1515.9783110940961>
3. Юрко В. А. Обратная задача для интегро-дифференциальных операторов // Математические заметки. 1991. Т. 50, вып. 5. С. 134–146.
4. Kuryshova Yu. An inverse spectral problem for differential operators with integral delay // Tamkang J. Math. 2011. Vol. 42, № 3. P. 295–303.
5. Бутерин С. А. О восстановлении сверточного возмущения оператора Штурма-Лиувилля по спектру // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, вып. 1. С. 146–149.
6. Юрко В. А. Обратные задачи для интегро-дифференциальных операторов первого порядка // Математические заметки. 2016. Т. 100, вып. 6. С. 939–946.
7. Yurko V. A. An inverse spectral problems for integro-differential operators // Far East Journal of Mathematical Sciences. 2014. Vol. 92, № 2. P. 247–261.

ПОЛУМЕТРИЧЕСКИЕ КОСОСИММЕТРИЧЕСКИЕ СВЯЗНОСТИ НА СУБРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Поступила 12.06.2019 г.

Введение. Субримановым многообразием контактного типа называется гладкое многообразие M , оснащенное субримановой структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, g)$, где η и $\vec{\xi}$ – форма и единичное векторное поле, порождающие ортогональные между собой распределения D и D^\perp соответственно. В настоящей работе на субримановом многообразии контактного типа M рассматривается N -связность ∇^N с ненулевым кососимметрическим кручением S , совместимая со структурой субриманова многообразия M : $\nabla^N g = 0$, $\nabla^N \vec{\xi} = 0$, $\nabla^N \eta = 0$. Субриманово многообразие с N -связностью ∇^N представляет собой частный случай многообразия Римана – Картана – (псевдо) риманова многообразия с линейной связностью ∇ , обладающей ненулевым кручением S и такой, что $\nabla g = 0$ [1]. Э. Картан первым рассмотрел метрическую связность с кручением вместо связности Леви – Чивита в 20-х годах прошлого века.

Особый интерес в теоретической физике представляют связности с кососимметрическим кручением. Известно, что метрическая связность с кососимметрическим кручением имеет те же геодезические, что и связность Леви – Чивита. В настоящей работе доказывается, что на субримановом многообразии существует метрическая N -связность ∇^N с ненулевым кососимметрическим кручением S тогда и только тогда, когда выполняется равенство $L_{\vec{\xi}} g = 0$. Доказывается, что эта связность единственна.

1. Определение и основные свойства N -связности. Пусть M – гладкое многообразие размерности n с заданной на нем субримановой структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, g, D)$, где η и $\vec{\xi}$ – форма и единичное векторное поле, порождающие ортогональные между собой распределения D и D^\perp соответственно.

Внутренней линейной связностью ∇ [2–5] на субримановом многообразии называется отображение $\nabla : \Gamma(D) \times \Gamma(D) \rightarrow \Gamma(D)$, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $\nabla_{f_1 \vec{x} + f_2 \vec{y}} = f_1 \nabla_{\vec{x}} + f_2 \nabla_{\vec{y}}$;
- 2) $\nabla_{\vec{x}} f \vec{y} = (\vec{x} f) \vec{y} + f \nabla_{\vec{x}} \vec{y}$,
- 3) $\nabla_{\vec{x}} (\vec{y} + \vec{z}) = \nabla_{\vec{x}} \vec{y} + \nabla_{\vec{x}} \vec{z}$,

где $\Gamma(D)$ – модуль допустимых векторных полей (векторных полей, в каждой точке принадлежащих распределению D). Известно [6, 7], что на субримановом многообразии существует единственная внутренняя связность ∇ с нулевым кручением такая, что $\nabla_{\vec{x}}g(\vec{y}, \vec{z}) = 0$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(D)$. Кручение внутренней линейной связности S по определению полагается равным

$$S(\vec{x}, \vec{y}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} - \nabla_{\vec{y}}\vec{x} - P[\vec{x}, \vec{y}],$$

где $P : TM \rightarrow D$ – проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^\perp$.

Карту $K(x^\alpha)$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$; $a, b, c = 1, \dots, n-1$) многообразия M будем называть адаптированной к распределению D , если $\partial_n = \vec{\xi}$ [6, 7]. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ порождают систему $D : D = \text{Span}(\vec{e}_a)$. Таким образом, мы имеем на многообразии M неголономное поле базисов $(\vec{e}_\alpha) = (\vec{e}_a, \partial_n)$ и соответствующее ему поле кобазисов $(dx^\alpha, \eta = \Theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a)$. Непосредственно проверяется, что $[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n$. Условие $\vec{\xi} \in \ker \omega$ влечет справедливость равенства $\partial_n \Gamma_a^n = 0$. Пусть $K(x^\alpha)$ и $K'(x^{\alpha'})$ – адаптированные карты, тогда получаем следующие формулы преобразования координат: $x^a = x^a(x^{\alpha'})$, $x^n = x^n + x^n(x^{\alpha'})$.

Предложение. Пусть $N : TM \rightarrow TM$ – эндоморфизм касательного расслоения субриманова многообразия M такой, что $N\vec{\xi} = \vec{0}$, $N(D) \subset D$. Тогда на многообразии M существует единственная линейная связность ∇^N с кручением $S(\vec{x}, \vec{y})$, однозначно определяемая следующими условиями:

- 1) $S(\vec{x}, \vec{y}) = 2\omega(\vec{x}, \vec{y})\vec{\xi} + \eta(\vec{x})N\vec{y} - \eta(\vec{y})N\vec{x}$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(TM)$;
- 2) $\nabla_{\vec{x}}^N \vec{y} = \nabla_{\vec{x}} \vec{y}$, $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D)$;
- 3) $\nabla_{\vec{x}}^N \vec{\xi} = 0$, $\vec{x} \in \Gamma(TM)$.

Нетрудно убедиться, что эквивалентным образом N -связность ∇^N может быть определена как единственная связность на многообразии M , удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) $\nabla_{\vec{u}}^N \in \Gamma(D)$,
- 2) $\nabla_{\vec{u}}^N \vec{\xi} = \vec{0}$,
- 3) $\nabla_{\vec{\xi}}^N \vec{x} = [\vec{\xi}, \vec{x}] + N\vec{x}$,
- 4) $\nabla_{\vec{x}}^N \vec{y} = \nabla_{\vec{x}} \vec{y}$, $\vec{u} \in \Gamma(TM)$, $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D)$.

Из предложения следует, что $\nabla_{\vec{x}}^N g(\vec{y}, \vec{z}) = 0$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(D)$. Последнее замечание подтверждает целесообразность назвать связность ∇^N полуметрической.

2. N-связности с кососимметрическим кручением. Положим $\tilde{S}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = g(S(\vec{x}, \vec{y}), \vec{z})$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in TM$, где $S(\vec{x}, \vec{y})$ – тензор кручения

полуметрической связности ∇^N . В адаптированных координатах ненулевые компоненты тензора $\tilde{S}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ будут иметь следующий вид:

$$\tilde{S}(\vec{e}_a, \vec{e}_b, \partial_n) = 2\omega_{ab}, \quad \tilde{S}(\vec{e}_a, \partial_n, \vec{e}_b) = -g(N\vec{e}_a, \vec{e}_b).$$

Определим, какое строение должен иметь эндоморфизм $N : D \rightarrow D$ в случае кососимметрического тензора $S(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Из необходимого для этого равенства $\tilde{S}(\vec{e}_a, \vec{e}_b, \partial_n) = -\tilde{S}(\vec{e}_a, \partial_n, \vec{e}_b)$ следует, что $2\omega_{ab} = g(N\vec{e}_a, \vec{e}_b)$ или $2\omega_{ab} = g_{bc}N_a^c$. Отсюда получаем $N_a^c = 2g^{cb}\omega_{ab}$. Таким образом, в силу равенства $\psi_a^b = g^{bc}\omega_{ac}$ окончательно получаем: $N_a^c = 2\psi_a^c$. Покажем, что при этом условии выполняется равенство $\tilde{S}(\vec{e}_a, \partial_n, \vec{e}_b) = -\tilde{S}(\vec{e}_b, \partial_n, \vec{e}_a)$. Имеем: $\tilde{S}(\vec{e}_a, \partial_n, \vec{e}_b) = -g(N\vec{e}_a, \vec{e}_b) = -2\omega_{ab} = 2\omega_{ba} = g(N\vec{e}_b, \vec{e}_a) = -\tilde{S}(\vec{e}_b, \partial_n, \vec{e}_a)$. Фактически нами доказана следующая

Теорема 1. *Полуметрическая линейная связность ∇^N , заданная на субримановом многообразии, кососимметрична тогда и только тогда, когда $N = 2\psi$.*

В дальнейшем будем полагать, что для связности ∇^N выполняется условие $N = 2\psi$.

Теорема 2. *Линейная связность ∇^N , заданная на субримановом многообразии, метрическая тогда и только тогда, когда $L_{\vec{z}}g = 0$.*

Доказательство. Из предложения 2 следует, что $\nabla_c^N g_{ab} = 0$. Вычислим $\nabla_n^N g_{ab}$. Имеем:

$$\begin{aligned} \nabla_n^N g_{ab} &= \partial_n g_{ab} - 2\psi_a^c g_{cb} + 2\psi_b^c g_{ac} = \partial_n g_{ab} + 2g^{cd}\omega_{da}g_{cb} + 2g^{cd}\omega_{db}g_{ac} = \\ &= \partial_n g_{ab} + 2\omega_{ab} + 2\omega_{ba} = \partial_n g_{ab}. \end{aligned}$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гордеева И. А., Панъженский В. И., Степанов С. Е. Многообразия Римана – Картана // Итоги науки и техники (совр. математика и ее приложения). 2009. Т. 123. С. 110–141.
2. Букушева А. В., Галаев С. В. О допустимой келеровой структуре на касательном расслоении к неголономному многообразию // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 12–14.
3. Букушева А. В., Галаев С. В. Почти контактные метрические структуры, определяемые связностью над распределением с допустимой финслеровой метрикой // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 8. С. 17–22.
4. Букушева А. В., Галаев С. В. Геометрия почти контактных гиперкелеровых многообразий // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. 2017. № 48. С. 32–41.
5. Bukusheva A. V., Galaev S. V. Almost contact metric structures defined by connection over distribution // Bulletin of the Transilvania University of Brasov. Series III: Mathematics, Informatics, Physics. 2011. Vol. 4, № 2. P. 13–22.

6. Галаев С. В. Продолженные структуры на кораспределениях контактных метрических многообразий // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 2. С. 138–147.

7. Букушева А. В., Галаев С. В. Связности над распределением и геодезические пульверизации // Известия высших учебных заведений. Математика. 2013. № 4. С. 10–18.

УДК 517.51

Е. В. Гудошникова

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ОПЕРАТОРОВ САСА – МИРАКЬЯНА

Поступила 24.05.2019 г.

В теории линейных положительных хорошо известны операторы Саса – Миракьяна ([1, 2]):

$$M_n(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} e^{-nx}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \geq 0, \quad (1)$$

для которых (см., например, [3])

$$\text{для } f \in C \quad |M_n(f; x) - f(x)| \leq O\left(\omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right); \quad (2)$$

$$\text{для } f \in C^1 \quad |M_n(f; x) - f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} O\left(\omega\left(f'; \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right); \quad (3)$$

$$\text{для } f \in C^2 \quad |M_n(f; x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} O\left(\omega\left(f'; \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) + \frac{\|f''\|x}{2n} \quad (4)$$

$$\text{и} \quad \left|M_n(f; x) - f(x) - \frac{f''(x)x}{2n}\right| \leq \frac{1}{n} O\left(\omega\left(f'; \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right); \quad (5)$$

где $\omega(f; h)$ – модуль непрерывности функции f . То есть порядок приближения оператором (1) дважды дифференцируемых функций не лучше n^{-1} (аналог теоремы Вороновской [4]).

Ранее в работах [5] и [6] рассматривались последовательности производных операторов (1):

$$M_n^{(p)}(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n^k}{k!} (x^k e^{-nx})^{(p)}, \quad p \in \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \geq 0, \quad (6)$$

для которых были доказаны аналоги неравенств (2)–(5):

$$\text{для } f \in C^p \quad \left|M_n^{(p)}(f; x) - f^{(p)}(x)\right| \leq 2 \omega\left(f^{(p)}; \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \omega\left(f^{(p)}; \frac{p}{n}\right); \quad (7)$$

для $f \in C^{p+1}$ $|M_n^{(p)}(f; x) - f^{(p)}(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} O\left(\omega(f^{(p+1)}; \frac{1}{\sqrt{n}})\right) + \frac{p}{n} \|f^{(p+1)}\|$; (8)

для $f \in C^{p+2}$

$$|M_n^{(p)}(f; x) - f^{(p)}(x)| \leq \frac{1}{n} O\left(\omega(f^{(p+2)}; \frac{1}{\sqrt{n}})\right) + \frac{x}{2n} \|f^{(p+2)}\| + \frac{p}{n} \|f^{(p+1)}\| \quad (9)$$

и для некоторого $\theta \in (0; 1)$

$$|M_n^{(p)}(f; x) - f^{(p)}(x) - \frac{x}{2n} f^{(p+2)}(x) - \frac{p\theta}{n} f^{(p+1)}(x)| \leq o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (10)$$

Наряду с натуральными в работах [5] и [7] для абсолютно непрерывных функций (AC) рассматривались дробные производные операторов:

$$D^\alpha M_n(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n^k}{k!} D^\alpha(x^k e^{-nx}; x), \quad x \geq 0, \alpha > 0, \alpha \notin \mathbb{N}, \quad (11)$$

где $D^\alpha(y; x)$ – левосторонняя дробная производная Римана – Лиувилля (см., например, [8]),

$$D^\alpha(y; x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x y(t) (x - t)^{n - \alpha - 1} dt, \quad n = [\alpha] + 1.$$

Было доказано, что для $f \in AC^p$, $p = [\alpha] + 1$ ($\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$)

$$\left| D^\alpha M_n(f; x) - D^\alpha(f; x) \right| \leq O\left(\omega(f^{(p)}; \frac{1}{\sqrt{n}})\right), \quad (12)$$

(аналог неравенств (2) и (7)).

Докажем для операторов $D^\alpha M_n(f; x)$ утверждения, аналогичные оценкам (3)–(5) и (8)–(10).

Теорема. Пусть $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, $p = [\alpha] + 1$

$$\text{для } f \in AC^{p+1} \quad \left| D^\alpha M_n(f; x) - D^\alpha(f; x) \right| \leq O\left(\omega(f; \frac{1}{\sqrt{n}})\right), \quad (13)$$

$$\text{для } f \in AC^{p+2} \quad \left| D^\alpha M_n(f; x) - D^\alpha(f; x) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} O\left(\omega(f'; \frac{1}{\sqrt{n}})\right), \quad (14)$$

но для $f \in AC^3$, $\alpha \in (0, 1)$

$$\left| D^\alpha M_n(f; x) - D^\alpha(f(x)) - \frac{1}{2n} D^\alpha(tf''(t); x) \right| \leq o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (15^1)$$

для $f \in AC^{p+2}$, $\alpha > 1$, некоторых $\theta_k \in (0; 1)$, $k = 1, \dots, p$

$$\left| D^\alpha M_n(f; x) - D^\alpha(f; x) - \frac{1}{n} F(x) \right| \leq o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (15^2)$$

где $F(x) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{f^{(k+1)}(0) p \theta_k}{\Gamma(1+k-\alpha)} x^{k-\alpha} + \frac{p \theta_p}{\Gamma(p-\alpha)} \int_0^x \frac{f^{(p+1)}(t)}{(x-t)^{\alpha-p+1}} dt + \frac{1}{2\Gamma(p-\alpha)} \int_0^x \frac{t f^{(p+2)}(t)}{(x-t)^{\alpha-p+1}} dt$.

Доказательство. Так как (см., например, [8]) для $p = [\alpha] + 1$, $y \in AC^p$

$$(D^\alpha y)(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{y^{(k)}(0) x^{k-\alpha}}{\Gamma(1+k-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(p-\alpha)} \int_0^x \frac{y^{(p)}(t)}{(x-t)^{\alpha-p+1}} dt,$$

учитывая, что $M_n(f; 0) = f(0)$, находим, что
для $\alpha \in (0; 1)$

$$D^\alpha M_n(f; x) - D^\alpha(f(x)) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{M'_n(f; t) - f'(t)}{(x-t)^\alpha} dt$$

и $D^\alpha M_n(f; x) - D^\alpha(f(x)) - \frac{1}{2n} D^\alpha(x f''(x)) =$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{M'_n(f; t) - f'(t) - \frac{1}{2n} f''(t) - \frac{t}{2n} f'''(t)}{(x-t)^\alpha} dt,$$

для $\alpha > 1$

$$D^\alpha M_n(f; x) - D^\alpha(f(x)) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{M_n^k(f; 0) - f^{(k)}(0)}{\Gamma(1+k-\alpha)} x^{k-\alpha} +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(p-\alpha)} \int_0^x \frac{M_n^{(p)}(f; t) - f^{(p)}(t)}{(x-t)^{\alpha-p+1}} dt$$

и $D^\alpha M_n(f; x) - D^\alpha(f(x)) - \frac{1}{n} F(x) =$

$$= \sum_{k=1}^{p-1} \frac{M_n^k(f; 0) - f^{(k)}(0) - f^{(k+1)}(0) \frac{p \theta_k}{n}}{\Gamma(1+k-\alpha)} x^{k-\alpha} +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(p-\alpha)} \int_0^x \frac{M_n^{(p)}(f; t) - f^{(p)}(t) - f^{(p+1)}(t) \frac{p \theta_p}{n} - f^{(p+2)}(t) \frac{t}{2n}}{(x-t)^{\alpha-p+1}} dt.$$

Откуда, применяя неравенства (7)–(10), получаем утверждения теоремы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Миракьян Г. М.* Аппроксимирование непрерывных функций с помощью полиномов $e^{-nx} \sum_{k=0}^n c_{k,n} x^k$ // Докл. АН СССР. 1941. Т. 31, № 3. С. 201–205.
2. *Szasz O.* Generalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval // J. Res. Nat. Bur. Standards, Sect. B. 1950. Vol. 45. P. 239–245.

3. Гудошникова Е. В. Оценки порядка приближения и теоремы насыщения для класса операторов // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2015. Вып. 17. С. 21–25.

4. Вороновская Е. В. Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна // Докл. АН СССР. 1932. № 4. С. 79–85.

5. Гудошникова Е. В. Сходимость последовательности натуральных и дробных производных операторов Саса – Миракьяна // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2016. Вып. 18. С. 21–25.

6. Гудошникова Е. В. Аппроксимативные свойства производных операторов Саса – Миракьяна // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2018. Вып. 20. С. 20–23.

7. Гудошникова Е. В. Приближение дробных производных операторами Саса – Миракьяна // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика : сб. науч. тр. Воронеж : Изд-во Воронеж. гос. лесотехн. ун-та, 2017. № 8, ч. 1. С. 138–140.

8. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск : Наука и техника, 1987. 688 с.

УДК 519.853

С. И. Дудов, М. А. Осипцев

О ФУНКЦИИ МИНКОВСКОГО, ЗАДАННОЙ СИЛЬНО ВЫПУКЛЫМ МНОЖЕСТВОМ

Поступила 04.06.2019 г.

1. В последние десятилетия внимание математиков все больше привлекают задачи, возникающие в несимметрично нормированных пространствах, где роль нормы играет функция Минковского некоторого выпуклого тела (напр., [1, 2]). Напомним ее определение [3].

Пусть M – замкнутое ограниченное множество с непустой внутренностью (выпуклое тело) из конечномерного пространства \mathbb{R}^p , причем $0_p \in \text{int } M$. Функция вида

$$k(x, M) = \inf\{\alpha \geq 0 : x \in \alpha M\}$$

называется функцией Минковского (калибром) множества M .

Цель заметки – особенности свойств функции Минковского в случае, когда множество M является сильно выпуклым [4]. Далее используются обозначения:

$\|x\|$ – евклидова норма элемента $x \in \mathbb{R}^p$,

$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^p : \|x - y\| \leq r\}$ – шар радиуса r с центром в точке x

$\langle x, y \rangle$ – скалярное произведение элементов x и y из \mathbb{R}^p ,

$s(\cdot, A) = \sup_{a \in A} \langle \cdot, a \rangle$ – опорная функция множества A ,

$0_p = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^p$.

2. Приведем определение используемых далее базовых понятий параметрически выпуклого анализа ([4, 5]) и вспомогательные факты.

Напомним основные свойства функции Минковского:

а) если $\lambda \geq 0$, то $k(\lambda x) = \lambda k(x)$;

б) если $x \in M$, то $k(x) \leq 1$, а если $x \notin M$, то $k(x) > 1$;

в) $k(x + y) \leq k(x) + k(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^p$.

Определение 1. Множество A из \mathbb{R}^p называется r -сильно выпуклым, если оно представимо в виде пересечения замкнутых евклидовых шаров радиуса $r > 0$, то есть имеет вид $A = \bigcap_{x \in C} B(x, r)$.

Определение 2. Пусть дано ограниченное множество A из \mathbb{R}^p , числа $\rho > 0$ и $r > 0$ такие, что $B(0_p, \rho) \overset{*}{-} A \neq \emptyset$ и $r \geq \rho$. Сильно выпуклой оболочкой радиуса r множества A называется множество, получаемое при пересечении всех замкнутых евклидовых шаров радиуса r , которые содержат данное множество. Ее обозначают через $strco_r A$.

Определение 3. Пусть задано выпуклое множество X из \mathbb{R}^p и функция $f(\cdot) : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

Функция $f(\cdot)$ называется сильно (слабо) выпуклой с константой $C > 0$ на множестве X , если функция $f(x) - \frac{C}{2}\|x\|^2$ ($f(x) + \frac{C}{2}\|x\|^2$) выпукла на X .

Функция $f(\cdot)$ называется сильно (слабо) вогнутой с константой $C > 0$ на X , если функция $-f(\cdot)$ сильно (слабо) выпукла с константой C на X .

Лемма 1([4, § 3.3]). Замкнутое ограниченное множество A из \mathbb{R}^p является r -сильно выпуклым тогда и только тогда, когда r -сильно выпуклая оболочка двух произвольных его точек непуста и содержится в A .

Лемма 2([4, § 3.3]). Пусть точки x_0 и x_1 из \mathbb{R}^p таковы, что $0 < \|x_0 - x_1\| \leq 2r$. Тогда r -сильно выпуклую оболочку множества, состоящего из точек x_0 и x_1 , можно выразить в виде

$$strco_r\{x_0, x_1\} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} B(x_\alpha, r_\alpha),$$

где $x_\alpha = (1 - \alpha)x_0 + \alpha x_1$, $r_\alpha = r - \sqrt{r^2 - \alpha(1 - \alpha)\|x_0 - x_1\|^2}$.

Лемма 3([5, § 2.8]). Если функция $f(\cdot) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ слабо вогнута с константой $C > 0$, то её сопряженная функция

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^p} \{\langle x, y \rangle - f(x)\}$$

сильно выпукла с константой $\frac{1}{C}$.

Лемма 4 ([5, § 3.7]). Пусть M является r -сильно выпуклым множеством и задана дифференцируемая функция $F(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ слабо вогнутая с константой C такая, что $|F'(t)| \leq L|t|$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Тогда функция $\varphi(x) = F(s(x, M))$ слабо вогнута с константой $C_M^2 C + LC_M r$, где $C_M = \sup_{x \in M} \|x\|$.

3. Приведем основные результаты.

Теорема 1. Пусть множество $M \subset \mathbb{R}^p$ является r -сильно выпуклым. Тогда для любых точек x_0, x_1 из $\mathbb{R}^p \setminus \{0_p\}$ и $\alpha \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$k((1 - \alpha)x_0 + \alpha x_1) \leq \max\{k(x_0), k(x_1)\} - \frac{\alpha(1 - \alpha)\|x_0 - x_1\|^2}{2rC_M \max\{k(x_0), k(x_1)\}},$$

где $C_M = \sup_{x \in M} \|x\|$.

Доказательство. Пусть $\lambda := \max\{k(x_0), k(x_1)\}$. Тогда точки x_0, x_1 принадлежат множеству $B_M(0, \lambda) = \lambda M$, которое является сильно выпуклым с радиусом λr . Согласно лемме 2, справедливы включения $strco_{\lambda r}\{x_0, x_1\} \subset B_M(0, \lambda)$ и

$$B(x_\alpha, r_\alpha) \subset B_M(0, \lambda), \quad (1)$$

где

$$x_\alpha := (1 - \alpha)x_0 + \alpha x_1, \quad r_\alpha := \lambda r - \sqrt{\lambda^2 r^2 - \alpha(1 - \alpha)\|x_1 - x_0\|^2}. \quad (2)$$

Из включения (1) при $x_\alpha \neq 0_p$ следует $x_\alpha + \|x_\alpha\|^{-1} r_\alpha x_\alpha \in B_M(0, \lambda)$, откуда, учитывая положительную однородность калибра, получаем неравенство $(1 + r_\alpha \|x_\alpha\|^{-1})k(x_\alpha) \leq \lambda$.

Отсюда следует, что

$$k(x_\alpha) \leq \lambda - \frac{\lambda r_\alpha}{r_\alpha + \|x_\alpha\|}. \quad (3)$$

При $x_\alpha = 0_p$ это неравенство также верно.

Нетрудно видеть, что из определения константы C_M следует оценка

$$\|x_\alpha\|^2 \leq \lambda^2 C_M^2 - \alpha(1 - \alpha)\|x_1 - x_0\|^2. \quad (4)$$

Введем обозначение $u_\alpha := \alpha(1 - \alpha)\|x_1 - x_0\|^2$. Учитывая это обозначение, неравенство (4) и представление (2) для r_α , получаем:

$$\begin{aligned} \frac{r_\alpha}{r_\alpha + \|x_\alpha\|} &= \frac{u_\alpha}{(\lambda r + \sqrt{\lambda^2 r^2 - u_\alpha})(\lambda r - \sqrt{\lambda^2 r^2 - u_\alpha} + \|x_\alpha\|)} \geq \\ &\geq \frac{u_\alpha}{u_\alpha + (\lambda r + \sqrt{\lambda^2 r^2 - u_\alpha})\sqrt{\lambda^2 C_M^2 - u_\alpha}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Используя очевидное неравенство

$$\sqrt{\lambda^2 r^2 - u_\alpha} \sqrt{\lambda^2 C_M^2 - u_\alpha} \leq \lambda^2 r R_M - u_\alpha,$$

из оценки (5) получаем:

$$\frac{r_\alpha}{r_\alpha + \|x_\alpha\|} \geq \frac{u_\alpha}{2\lambda^2 C_M r} = \frac{\alpha(1 - \alpha)\|x_1 - x_0\|^2}{2\lambda^2 C_M r}. \quad (6)$$

В итоге из неравенств (3) и (6) следует утверждение теоремы. \square

Теорема 2. Пусть M является r -сильно выпуклым множеством и $C_M = \sup_{x \in M}$. Тогда функция $\Psi(\cdot) = k^2(\cdot)$ является сильно выпуклой на \mathbb{R}^p с константой сильной выпуклости, равной $\frac{2}{C_M(C_M+r)}$.

Доказательство. Для сопряжённой к $\Psi(\cdot)$ функции получаем

$$\begin{aligned} \Psi^*(y) &= \sup_{x \in \mathbb{R}^p} \{\langle y, x \rangle - k^2(x, M)\} = \sup_{\lambda \geq 0} \sup_{x: k(x, M)=1} \{\langle y, \lambda x \rangle - \lambda^2 k^2(x, M)\} = \\ &= \sup_{\lambda \geq 0} \{\lambda \sup_{x: k(x, M)=1} \langle y, x \rangle - \lambda^2\} = \sup_{\lambda \geq 0} \{\lambda s(y, M) - \lambda^2\} = \frac{s^2(y, M)}{4}. \end{aligned}$$

Таким образом, сопряжённая функция имеет вид

$$\Psi^*(y) = F(s(y, M)), \quad F(t) = \frac{t^2}{4}.$$

Функция $F(\cdot)$ является дифференцируемой, $|F'(t)| \leq L|t|$ для $L = 1/2$ и, в соответствии с определением 3, слабо вогнута с константой $1/2$. Поэтому, по лемме 4, функция $\Psi^*(y)$ слабо вогнута с константой $\frac{1}{2}C_M(C_M+r)$. Тогда по лемме 3 функция $\Psi^{**}(\cdot) = (k^2)^{**}(\cdot, M)$ будет сильно выпуклой с константой $2(C_M(C_M+r))^{-1}$. Остаётся заметить, что функция $k^2(\cdot, M)$ является выпуклой, как квадрат выпуклой функции с неотрицательными значениями, и непрерывной на \mathbb{R}^p . Поэтому по теореме Фенхеля – Моро [3] выполняется $(k^2)^{**}(\cdot, M) = k^2(\cdot, M)$. \blacksquare

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Cobzas S.* Functional Analysis in Asymmetric Normed Spaces. Basel : Birkhauser-Springer, 2013. 50 p.
2. *Ivanov G. E., Lopushanski M. S.* Separation Theorem for Nonconvex Sets in Space with Nonsymmetric Seminorm // J. Mathematical Inequalities and Applications. 2017. Vol. 20, № 3. P. 737–754.
3. *Рокафеллар Р. Т.* Выпуклый анализ. М. : Мир, 1973. 472 с.
4. *Половинкин Е. С., Балашиов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М. : Физматлит, 2004. 440 с.
5. *Иванов Г. Е.* Слабо выпуклые множества и функции. М : Физматлит, 2006. 352 с.

УДК 517.96:517.984

В. В. Корнев, А. П. Хромов

О РЕШЕНИЯХ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ПОТЕНЦИАЛОМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ ВСЕХ ПЕРЕМЕННЫХ

Поступила 11.05.2019 г.

Рассмотрим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - q(x, t)u(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, \infty), \quad (1)$$

при условиях

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u'_t(x, 0) = 0, \quad (3)$$

где все функции, входящие в (1)–(3), комплекснозначные.

Предположим, что

$$\varphi(x), \varphi'(x) \text{ — абсолютно непрерывны, } \varphi(0) = \varphi(1) = 0, \quad (4)$$

$$q(x, t) = q_1(x)q_2(x, t), \text{ где } q_1(x) \in L[0, 1], \quad q_2(x, t), \quad q'_{2t}(x, t) \in C(Q_T), \quad (5)$$

$Q_T = [0, 1] \times [0, T]$ при любом $T > 0$.

В дальнейшем считаем, что функция $\varphi(x)$ продолжена на все $x \in \mathbb{R}$ нечетным образом с периодом 2, а функция $q(x, t)$ продолжена на $x \in \mathbb{R}$ четно и 2-периодически.

Под классическим решением задачи (1)–(3) понимаем функцию $u(x, t)$, непрерывную в Q_T вместе с $u'_x(x, t)$ и $u'_t(x, t)$, причем $u'_x(x, t)$

и $u'_t(x, t)$ абсолютно непрерывны по x и t соответственно, удовлетворяющую условиям (2), (3) и почти всюду в Q_T уравнению. Поэтому условие (4) является необходимым для существования решения.

При $q_2(x, t) = 1$ задача (1)–(3) была подробно изучена в [1] с помощью метода Фурье на основе резольвентного подхода.

Обозначим через Π множество суммируемых в Q_T функций $f(x, t)$, нечетных и 2-периодических по $x \in R$. Легко видеть, что если $f(x, t) \in \Pi$ и $q(x, t)f(x, t) \in L(Q_T)$, то и $q(x, t)f(x, t) \in \Pi$.

После многократного применения метода А. Н. Крылова по ускорению сходимости рядов Фурье к формальному ряду метода Фурье для задачи (1)–(3) была получена следующая теорема.

Теорема 1. *Если $u(x, t)$ – классическое решение задачи (1)–(3) при $q_2(x, t) = 1$, то*

$$u(x, t) = A(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x, t), \quad (6)$$

где ряд $A(x, t)$ сходится абсолютно и равномерно по $x, t \in Q_T$ при любом $T > 0$,

$$a_0(x, t) = \frac{1}{2}\varphi(x+t) + \frac{1}{2}\varphi(x-t), \quad f_0(x, t) = -q(x, t)a_0(x, t), \quad (7)$$

$$a_n(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f_{n-1}(\eta, \tau) d\eta, \quad (8)$$

$$f_n(x, t) = -q(x, t)a_n(x, t), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

все $a_n(x, t), f_n(x, t) \in \Pi$.

Покажем, что ряд (6) дает решение задачи (1)–(3) и в случае, когда $q(x, t)$ удовлетворяет (5).

Лемма 1. *Пусть $t \in [0, T]$, T – произвольное положительное число, m – наименьшее натуральное число такое, что $T \leq m$. Тогда при любом $x \in [0, 1]$ справедливы неравенства*

$$|a_n(x, t)| \leq M_1 \left(\frac{M_2}{2} \right)^{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (10)$$

где $M_1 = \|a_1(x, t)\|_{C(Q_T)}$, $M_2 = (2m+1) \|q_1(x)\|_1 \|q_2(x, t)\|_{C(Q_T)}$ ($\|\cdot\|_1$ – норма в $L[0, 1]$).

Доказательство. Как видно из формул (8), $a_n(x, t) \in C(Q_T)$, $f_n(x, t) \in L(Q_T)$, $n = 1, 2, \dots$. Предположим, что (10) выполняется для некоторого n . Докажем, что это неравенство выполняется для $n + 1$. Рассмотрим

$$\begin{aligned}
|a_{n+1}(x, t)| &\leq \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{-m}^{m+1} |f_n(\eta, \tau)| d\eta \leq \\
&\leq \frac{2m+1}{2} \int_0^t d\tau \int_0^1 |q_1(\eta)| \|q_2\|_{C[Q_T]} |a_n(\eta, \tau)| d\eta \leq \\
&\leq \frac{2m+1}{2} \int_0^t d\tau \int_0^1 |q_1(\eta)| \|q_2\|_{C[Q_T]} M_1 \left(\frac{M_2}{2}\right)^{n-1} \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} d\eta = \\
&= \frac{2m+1}{2} M_1 \left(\frac{M_2}{2}\right)^{n-1} \|q_2\|_{C[Q_T]} \int_0^1 |q_1(\eta)| d\eta \int_0^t \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} d\tau = \\
&= M_1 \left(\frac{M_2}{2}\right)^n \frac{t^n}{(n)!}.
\end{aligned}$$

Следовательно, формула (10) справедлива для любого n .

Теорема 2. Ряд (6) сходится абсолютно и равномерно по $x, t \in Q_T$ при любом $T > 0$.

Доказательство. Утверждение теоремы следует из оценок (10), в силу которых

$$\|a_n(x, t)\|_{C[Q_T]} \leq M_1 \left(\frac{M_2}{2}\right)^{n-1} \frac{T^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Рассмотрим неоднородную смешанную задачу

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, \infty), \quad (11)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = u(x, 0) = u'_t(x, 0) = 0, \quad (12)$$

где $f(x, t) \in L(Q_T)$ при любом $T > 0$.

Классическое решение задачи (11)–(12) определим так же, как и классическое решение задачи (1)–(3).

Теорема 3. Предположим, что $f(x, t) \in \Pi$, $f(x, t) = f_1(x)f_2(x, t)$, где $f_1(x)$ – нечетная, 2-периодическая, $f_2(x, t)$ – четная,

2-периодическая по $x \in R$, причем $f_1(x) \in L[0, 1]$, а $f_2(x, t), f'_{2t}(x, t) \in C(Q_T)$. Тогда формула

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\eta, \tau) d\eta \quad (13)$$

определяет классическое решение задачи (11)–(12) при любом $T > 0$.

Замечание. Теорема 3 является частным случаем теоремы 3 из [1], взятой в нужной нам форме. Из доказательства этой теоремы следует, что если $f_2(x, t)$ только непрерывна в Q_T , то формула (13) определяет функцию $u(x, t) \in C^1(Q_T)$, т.е. $u(x, t)$ имеет внутри Q_T непрерывные частные производные, непрерывные вплоть до границы Q_T .

Введем в рассмотрение оператор $B : C(Q_T) \rightarrow C(Q_T)$, действующий по формуле

$$Bv = -\frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} q(\eta, \tau)v(\eta, \tau) d\eta, \quad x, t \in Q_T, \quad (14)$$

где непрерывная в Q_T функция $v(x, t)$ продолжена соответствующим образом и в интеграле рассматривается как $v(x, t) \in \Pi$.

Лемма 2. Оператор B является линейным и ограниченным.

Доказательство. Линейность B очевидна, а из оценок (10) при $n = 2$ получаем, что

$$\| Bv \|_{C(Q_T)} \leq \frac{M_2 T}{2} \| v \|_{C(Q_T)},$$

т. е. B – ограниченный.

Лемма 3. Имеет место тождество

$$A(x, t) = a_0(x, t) + w(x, t), \quad x, t \in Q_T,$$

где $w(x, t) = B(A(x, t))$.

Доказательство. Согласно (8) и (14) $a_n(x, t) = B(a_{n-1}(x, t))$. Тогда в силу теоремы 1 и леммы 2

$$\begin{aligned} A(x, t) &= a_0(x, t) + \sum_{n=0}^{\infty} B(a_n(x, t)) = a_0(x, t) + B\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x, t)\right) = \\ &= a_0(x, t) + w(x, t). \end{aligned}$$

Лемма 4. Функция $a_0(x, t)$ является классическим решением задачи (1)–(3) при $q(x, t) = 0$.

Справедливость этой леммы устанавливается непосредственно с помощью формулы (7).

Лемма 5. Функция $w(x, t)$ является классическим решением задачи (11)–(12) при $f(x, t) = -q(x, t)A(x, t)$.

Доказательство. Функция $w(x, t)$ является непрерывно дифференцируемой в Q_T в силу замечания к теореме 3. На основании лемм 3 и 5 функция $A(x, t)$ является непрерывно дифференцируемой. Поэтому утверждение леммы следует из определения функции $w(x, t)$ и теоремы 3.

Теорема 4. Функция $u(x, t) = A(x, t)$ является классическим решением задачи (1)–(3).

Доказательство. В силу лемм 3, 4, 6 почти всюду

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(x, t) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) a_0(x, t) + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) w(x, t) = \\ &= -q(x, t)A(x, t) = -q(x, t)u(x, t). \end{aligned}$$

Кроме того,

$$u(0, t) = a_0(0, t) + w(0, t) = 0, \quad u(1, t) = a_0(1, t) + w(1, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = a_0(x, 0) + w(x, 0) = \varphi(x), \quad u'_t(x, 0) = a'_{0t}(x, 0) + w'_t(x, 0) = 0.$$

Теорема доказана.

Эта теорема обобщает результат, полученный в [2] методом Римана в случае, когда $\varphi \in C^2[0, 1]$, $q(x, t) \in C(Q_T)$, а под классическим решением понимается дважды непрерывно дифференцируемая функция $u(x, t)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Корнев В. В., Хромов А. П. Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2019. Т. 59, № 2. С. 286–300.

2. Гаршин С. В., Пряднев В. Л. Неулучшаемые условия существования и непрерывности производных второго порядка у решения характеристической задачи для гиперболического уравнения с двумя независимыми переменными // Черноземный альманах научных исследований. Сер. Фундаментальная математика. Спец. вып. Воронеж : Изд-во ООО «Альбион», 2005. № 1(1). С. 83–98.

**ИЕРАРХИЧЕСКИЕ ИГРЫ С КОНЕЧНООПРЕДЕЛЕННЫМ
ПРАВИЛОМ ВЫБОРА И ПОСТЕПЕННЫМ
МНОГОШАГОВЫМ УТОЧНЕНИЕМ ИНФОРМАЦИИ
ПЕРВОГО ИГРОКА О ВЫБОРЕ ВТОРОГО**

Поступила 31.05.2019 г.

Иерархические игры – это модели конфликтных ситуаций с неравноправными участниками, в которых первый игрок может организовывать обмен информацией между игроками с целью максимизации своего наибольшего гарантированного результата [1–3]. Выражения для наибольшего гарантированного результата управляющего игрока при различных способах организации обмена информацией и информированности первого игрока об интересах второго выведены в [4–6], там же приведены определения иерархической игры, ее квазиинформационного расширения и наибольшего гарантированного результата. В настоящей работе вычисляется наибольший гарантированный результат управляющего игрока в иерархической игре с постепенным многошаговым уточнением информации первого игрока о выборе второго [7] и конечноопределенным правилом выбора [8, 9].

Пусть $\Gamma = (X, Y, F, \mu)$ – иерархическая игра. Рассмотрим систему

$$\mathfrak{A} = \left(\{X_{\alpha_1}\}_{\alpha_1 \in A_1}, \dots, \{X_{\alpha_1 \dots \alpha_i}\}_{(\alpha_1 \dots \alpha_i) \in A_1 \times \dots \times A_i}, \dots, \{X_{\alpha_1 \dots \alpha_n}\}_{(\alpha_1 \dots \alpha_n) \in A_1 \times \dots \times A_n}, \right. \\ \left. \{Y_{\beta_1}\}_{\beta_1 \in B_1}, \dots, \{Y_{\beta_1 \dots \beta_j}\}_{(\beta_1 \dots \beta_j) \in B_1 \times \dots \times B_j}, \dots, \{Y_{\beta_1 \dots \beta_n}\}_{(\beta_1 \dots \beta_n) \in B_1 \times \dots \times B_n} \right),$$

где $X_{\alpha_1 \dots \alpha_i} \subset X$, $i = 1, \dots, n$, $Y_{\beta_1 \dots \beta_j} \subset Y$, $j = 1, \dots, n$, и верны равенства $X = \bigcup_{\alpha_1 \in A_1} X_{\alpha_1}$, $X_{\alpha_1 \dots \alpha_{i-1}} = \bigcup_{\alpha_i \in A_i} X_{\alpha_1 \dots \alpha_i}$, $i = 2, \dots, n$, $Y = \bigcup_{\beta_1 \in B_1} Y_{\beta_1}$, $Y_{\beta_1 \dots \beta_{j-1}} = \bigcup_{\beta_j \in B_j} Y_{\beta_1 \dots \beta_j}$, $j = 2, \dots, n$.

Эта система определяет игру $\bar{\Gamma}_{\mathfrak{A}}$, определение которой приведено в [7].

В игре $\bar{\Gamma}_{\mathfrak{A}}$ обмен информацией о выборах между игроками происходит следующим образом. Сначала второй игрок ограничивает свой выбор подмножеством Y_{β_1} . Затем первый игрок, узнав ограничение, ограничивает свой выбор подмножеством X_{α_1} . Второй игрок, узнав это, еще больше ограничивает свой выбор (до $Y_{\beta_1 \beta_2}$), после чего первый игрок, узнав $Y_{\beta_1 \beta_2}$, в свою очередь уточняет свое ограничение (до $X_{\alpha_1 \alpha_2}$) и т. д.

Наконец, первый игрок, узнав, что второй игрок ограничился подмножеством $Y_{\beta_1 \dots \beta_n}$, ограничивает свой выбор подмножеством $X_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$, после чего второй игрок, зная $X_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$, выбирает $y \in Y_{\beta_1 \dots \beta_n}$, а первый игрок, узнав y , выбирает $x \in X_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$.

Определение 1. Будем говорить, что в квазиинформационном расширении $\Gamma = (X, Y, F, \mu)$ игры Γ первый игрок имеет самостоятельную информацию о выборе y не больше, чем в $\bar{\Gamma}_n$, если справедливо условие $\forall \bar{x} \in \bar{X} \forall \beta_1 \in B_1 \exists \alpha_1 \in A_1 \dots \forall \beta_n \in B_n \exists \alpha_n \in A_n \forall y \in Y_{\beta_1 \dots \beta_n} \exists x \in X_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \exists \bar{y} \in \bar{Y} \pi(\bar{x}, \bar{y}) = (x, y)$.

Определение 2. Положим $\bar{\Gamma}_\tau = (\tau, \Phi, \bar{F}, \bar{\mu})$, где τ – семейство подмножеств $T \subset X \times Y$, удовлетворяющих условию $\forall \beta_1 \in B_1 \exists \alpha_1 \in A_1 \dots \forall \beta_n \in B_n \exists \alpha_n \in A_n \forall y \in Y_{\beta_1 \dots \beta_n} \exists x \in X_{\alpha_1 \dots \alpha_n} (x, y) \in T$, Φ – семейство отображений $\varphi : 2^{X \times Y} \rightarrow X \times Y$, обладающих свойством $\forall T \subset X \times Y, \varphi(T) \in T$, отображение $\pi : \tau \times \Phi \rightarrow X \times Y$ задается равенством $\pi(T, \varphi) = \varphi(T)$, а для \bar{F} и $\bar{\mu}$ справедливы соотношения $\bar{F}(T, \varphi) = F(\varphi(T))$, при всех $\bar{T} \subset \tau \times \Phi \pi(\bar{\mu}(\bar{T})) = \mu(\pi(\bar{T}))$.

Теорема 1 [7]. *Расширение $\bar{\Gamma}_\tau$ является для первого игрока оптимальным в классе всех квазиинформационных расширений, в которых он имеет самостоятельную информацию о выборе не больше, чем в $\bar{\Gamma}_n$.*

Наибольший гарантированный результат первого игрока в расширении $\bar{\Gamma}_\tau$ вычисляется по формуле

$$\gamma(\bar{\Gamma}_\tau) = \max_{T \subset \tau} \min_{(x, y) \in \mu(T)} F(x, y).$$

Его вычисление – это экстремальная задача на системе подмножеств с ограничениями. Рассмотрим класс правил выбора, для которых данная задача сводится к экстремальной задаче на исходных множествах.

Определение 3. Правило выбора μ называется конечноопределенным, если его можно задать в виде

$$\mu(T) = \{(x, y) \in T : S(\varphi(T), x, y)\},$$

где $\varphi : 2^{X \times Y} \Rightarrow \rightarrow R^m$, S – предикат, определенный на $R^m \times X \times Y$, причем отображение φ обладает свойствами

$$\forall T_1, T_2 (\varphi(T_1) = \varphi(T_2) \& T_1 \subset T_2 \Rightarrow \forall T_1 \subset T \subset T_2 \varphi(T) = \varphi(T_1) = \varphi(T_2)),$$

$$\forall \{T_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} ((\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda \varphi(T_{\lambda_1}) = \varphi(T_{\lambda_2})) \Rightarrow (\forall \lambda \in \Lambda \varphi(T_\lambda) = \varphi(\cup_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda))).$$

Замечание. Множества T_1 и T_2 будем называть эквивалентными, если выполняется равенство $\varphi(T_1) = \varphi(T_2)$.

Теорема 2. Если правило выбора μ является конечноопределенным и каждое множество включает в себя эквивалентное конечное подмножество, содержащее не более k элементов, то справедливо равенство

$$\gamma(\bar{\Gamma}_\tau) = \max_{l \in L_\tau} l,$$

где $L_\tau = \{l : \exists \bar{r}, (\bar{x}, \bar{y}) (\forall j = 1, \dots, k P(\bar{r}, (\bar{x}, \bar{y}), x_j, y_j, l)) \& \forall \beta_1 \in B_1 \exists \alpha_1 \in A_1 \dots \forall \beta_n \in B_n \exists \alpha_n \in A_n \forall y \in Y_{\beta_1 \dots \beta_n} P(\bar{r}, (\bar{x}, \bar{y}), x, y, l)\}$,
 $P(\bar{r}, (\bar{x}, \bar{y}), x, y, l) \Leftrightarrow ((\varphi(\{(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k), (x, y)\})) = \bar{r} \& (F(x, y) \geq l) \text{ или } \neg S(\bar{r}, x, y)), (\bar{x}, \bar{y}) = ((x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)).$

Доказательство. Докажем, что любой результат $l \in L_\tau$ гарантирован первому игроку. Пусть $l \in L_\tau$. Определим множество T равенством

$$T = \{(x, y) : \varphi(\{(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k), (x, y)\}) = \bar{r} \& (F(x, y) \geq l \text{ или } \neg S(\bar{r}, x, y))\},$$

где \bar{r} и (\bar{x}, \bar{y}) – те вектора, существование которых вытекает из принадлежности l к L_τ . Вследствие определений L_τ и T множество T содержит все точки $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$ и принадлежит τ . Следовательно, для любой точки $(x, y) \in T$ условия $\neg S(\bar{r}, x, y)$ и $(x, y) \notin \mu(T)$ равносильны и справедливо соотношение

$$\forall (x, y) \in T (F(x, y) \geq l \text{ или } (x, y) \notin \mu(T)),$$

то есть выполняется неравенство $\inf_{(x, y) \in \mu(T)} F(x, y) \geq l$.

Таким образом, результат l гарантирован первому игроку. Можно показать, что большего результата первый игрок гарантировать не может. Доказательство теоремы завершено.

Замечание. При большом классе возможных ограничений на информированность первого игрока о выборе и интересах второго его наибольший гарантированный результат можно представить в виде $\gamma(\bar{\Gamma}_{\tau'}) = \max_{l \in L_{\tau'}} l$, где τ' – система подмножеств $X \times Y$, зависящая от информированности о выборе, а условие P , входящее в определение $L_{\tau'}$, зависит от правила выбора μ , то есть от информированности об интересах.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гермейер Ю. Б. Игры с непротивоположными интересами. М. : Наука, 1976. 326 с.
2. Кукушкин Н. С., Морозов В. В. Теория неантагонистических игр. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1977. 325 с.
3. Шолто И. А. Исследование операций. Теория игр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1983. 42 с.

4. Кузнецова И. А. Иерархические игры с неопределенными факторами // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов. : Изд-во Саратов. ун-та, 2013. Вып. 15. С. 21–24.

5. Кузнецова И. А. Иерархические игры с неполной информацией первого игрока о выборе второго // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2015. Вып. 17. С. 29–32.

6. Горелов М. А. Иерархические игры с неопределенными факторами // Управление большими системами. М. : ИПУ РАН, 2016. Вып. 59. С. 6–22.

7. Кузнецова И. А. Иерархические игры с постепенным многошаговым уточнением информации первого игрока о выборе второго // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов. : Изд-во Саратов. ун-та, 2016. Вып. 18. С. 8–40.

8. Кузнецова И. А. Иерархические игры с конечноопределенным правилом выбора // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов. : Изд-во Саратов. ун-та, 2017. Вып. 19. С. 46–49.

9. Кузнецова И. А. Иерархические игры с конечно-определенным правилом выбора и неполной информацией первого игрока о выборе второго // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов. : Изд-во Саратов. ун-та, 2018. Вып. 20. С. 43–46.

УДК 519.179:519.14

М. С. Курбатов, В. А. Молчанов, Е. В. Хворостухина

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА ПОСТРОЕНИЯ P -ГИПЕРГРАФОВ

Поступила 15.05.2019 г.

Согласно [1] гиперграфом называется система вида $H = (X, L)$, где X – это непустое множество и L – семейство произвольных подмножеств X . Элементы множества X называются вершинами, а элементы множества L называются ребрами или гиперребрами гиперграфа. Вершины гиперграфа, принадлежащие некоторому его ребру, называются смежными. Если ребро l состоит из n вершин, то число n называют длиной ребра l . Множество вершин называется ограниченным, если оно содержится в некотором ребре гиперграфа, и неограниченным в противном случае. В работе [2] рассматриваются гиперграфы особого вида – p -гиперграфы. Пусть p – произвольное натуральное число. Гиперграф H будем называть p -гиперграфом, если он удовлетворяет аксиомам: (A1) в каждом ребре этого гиперграфа найдется по крайней мере $p+1$ вершина; (A2) любые p вершин этого гиперграфа содержатся точно в одном ребре; (A3) имеется неограниченное $(p+1)$ -элементное множество вершин.

Например, проективная и аффинная плоскости (с числом точек более четырех) являются 2-гиперграфами, вершинами которых являются

точки этих плоскостей, а ребрами – соответствующие прямые (см., например [3]). Таким образом, p -гиперграф является обобщением понятия плоскости.

Задача построения плоскости не является тривиальной (см., например, [4]). Отдельными авторами были предприняты попытки решения данной задачи (например, [5, 6]). В настоящей статье продолжается работа в этом направлении: решаются задачи разработки алгоритма построения p -гиперграфов (и плоскостей) и его программной реализации. Рассмотрим конечный гиперграф $H = (X, L)$. Здесь и далее X – конечное множество вершин гиперграфа. Обозначим $|X| = dig$. L – конечное множество ребер длины num , представляющее собой множество num -элементных неупорядоченных наборов из элементов множества X . Требуется построить конечный гиперграф, удовлетворяющий аксиомам (A1)–(A3), и вывести его матрицу инцидентности.

Приведем алгоритм построения гиперграфа для фиксированного порядка p , фиксированной длины ребер num и мощности множества вершин dig .

Входные параметры – p ($p > 1$), длина ребер — num ($num \geq p + 1$), мощность множества вершин dig ($dig > num$). Выход — матрица инцидентности (список ребер) в формате txt, xlsx.

- 1) Положим $X = \{0, 1, 2, \dots, dig - 1\}$, $L = \emptyset$.
- 2) Составляем все сочетания из X по p . Сочетания записываются в порядке возрастания в список (массив) G . Каждый элемент из G представляет собой набор чисел (вершин), записанных в порядке возрастания.
- 3) $u(l) = 0, \forall l \in G$.
- 4) Формируем список (массив) V сочетаний из X по num в порядке возрастания, то есть формируем список кандидатов в гиперребра. Каждый кандидат в гиперребра из V представляет собой набор чисел (вершин), записанных также в порядке возрастания.
- 5) var – первый (наименьший) элемент списка (массива) V , $var = v[0]$.
- 6) Для var из V проверяем условие: если $(\exists l \in G)(u(l) = 1 \wedge l \subset var)$, то взять следующий $var \in V$, иначе $u(l) = 1$ для $\forall l \in G$, для которого $l \subset var$, и $L = L \cup var$.
- 7) Если $u(l) = 1$ для $\forall l \in G$, то гиперграф построен, переходим к шагу 10.
- 8) Выбираем следующий по порядку $var = v[i]$ из V .
- 9) Если $v[i][0] \neq v[i - 1][0]$, то запускаем проверку, все ли наборы l из G с элементом $v[i - 1][0]$ в начальной позиции (на первом месте) удовле-

творяют условию: $u[l] = 1$. Если условие выполняется, то возвращаемся на шаг 6. Иначе переходим к шагу 10.

10) Если матрица была построена, то выводим на экран матрицу инцидентности полученного гиперграфа $H = (X, L)$. Иначе выводим сообщение, что для данных параметров гиперграф не найден.

Здесь $u(l)$ содержит информацию о уже «задействованных» p -элементных множествах вершин:

$$u(l) = \begin{cases} 1, & \text{если } l \subset e, \text{ для некоторого } e \in L; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Отметим, что условие 9) не является обязательным. Его внесение в алгоритм обусловлено желанием уменьшить время исполнения программы в случаях, когда для заданных параметров не получается построить p -гиперграф. Поскольку все наборы записаны в порядке возрастания, условие 9) проверяет выполнение аксиомы (A2) для наборов, содержащих вершину x , которая уже не встретится в следующих наборах. Данный алгоритм был реализован на универсальном языке программирования Python. Заметим, что в случае, если не известны точные параметры p, num, dig , в программе предусмотрена возможность задания диапазона значений данных параметров. Результатом работы программы является матрица инцидентности гиперграфа в формате $xlsx$.

Результат работы программы для $p = 2, num = 3, dig = 15$ представлен на рисунке. Время выполнения программы 0.083 секунды.

AA	Ввод:	Вывод:
0	1	2
0	3	4
0	5	6
0	7	8
0	9	10
0	11	12
0	13	14
1	3	5
1	4	6
1	7	9
1	8	10
1	11	13
1	12	14
2	3	6
2	4	5
2	7	10
2	8	9
2	11	14
2	12	13
3	7	11
3	8	12
3	9	13
3	10	14
4	7	12
4	8	11
4	9	14
4	10	13
5	7	13
5	8	14
5	9	11
5	10	12
6	7	14
6	8	13
6	9	12
6	10	11

2-гиперграф из 15 вершин

Данный тестовый пример был получен на компьютере со следующими характеристиками: CPU Ryzen 5 1600 3.6GHz, RAM DDR4 16GB 3200GHz, ОС Windows 10, Python 3.7.

В дальнейшем планируется усовершенствование разработанного алгоритма путем добавления возможности построения гиперграфов с ребрами разной мощности, а также использование интеллектуальных методов при построении ребер с целью повышения эффективности алгоритма.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Bretto A.* Hypergraph theory. An Introduction. Cham : Springer, 2013. 133 p. DOI: 10.1007/978-3-319-00080-0
2. *Молчанов В. А.* Строение изоморфизмов универсальных гиперграфических автоматов // *Фунд. и прикл. матем.* 2016. Т. 21, № 3. С. 141–159.
3. *Хартсхорн Р.* Основы проективной геометрии. М. : Мир, 1970. 161 с.
4. *Картези Ф.* Введение в конечные геометрии / пер. с англ. М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. 320 с.
5. *Хворостухина Е. В.* Построение плоскости. М. : ВНИИЦ, 2008. № 50200802489.
6. Учебное приложение «Построение гиперграфов» : св-во о гос. регистрации программы для ЭВМ 2017615128 Рос. Федерация / Е. В. Хворостухина, А. А. Белоусов ; правообладатель Саратов. гос. техн. ун-т. № 2017611943 ; заявл. 10.03.17 ; зарегистр. 03.05.17. Бюл. № 5. 1 с.

УДК 519.713:512.53

В. А. Молчанов

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ АВТОМАТЫ

Поступила 08.05.2019 г.

В работе на основе методов нестандартного анализа исследуются полугрупповые автоматы, у которых множество состояний и полугруппа входных сигналов наделены топологическими структурами. Описано строение универсальных притягивающих объектов в категории таких автоматов, которые называются универсальными топологическими автоматами. Основной результат показывает, что полугрупповые автоматы определяются с точностью до изоморфизма своими полугруппами входных сигналов.

Как известно [1], в алгебраической теории автоматов особое внимание уделяется изучению таких автоматов, у которых множество входных сигналов и множество состояний наделены дополнительными математическими структурами. В настоящей работе рассматриваются автоматы с

дополнительными топологическими структурами. В работе широко применяются методы нестандартного анализа [2], общепринятая топологическая терминология [3], основные понятия алгебраической теории автоматов [1] и алгебры отношений [4].

Для простоты рассуждений все основные множества X рассматриваемых алгебраических систем и пространств сходимости считаются подмножествами множества атомов \mathbf{S} , над которым строится стандартный теоретико-множественный универсум $\mathbf{U} = \mathbf{V}(\mathbf{S})$ и нестандартное расширение ${}^*\mathbf{U}$ по описанному в [2] принципу. Тогда для множества X определено нестандартное расширение *X и любой фильтр F над X характеризуется своей монадой $\mu F = \cap \{ {}^*A : A \in F \}$. Монады ультрафильтров над множеством X разбивают расширение *X на классы эквивалентности ε_X . Подмножество $M \subset {}^*X$ называется насыщенным, если $\varepsilon_X(M) \subset M$.

При нестандартном подходе к топологии [4] сходимость на множестве X определяется как соответствие $\rho \subset X \times {}^*X$, для которого при любом $a \in X$ множество $\rho(a) = \{ x \in {}^*X : (a, x) \in \rho \}$ содержит элемент a и является насыщенным подмножеством расширения *X . Такие соответствия называются (нестандартными) сходимостями, и на них распространяется общепринятая топологическая терминология.

В работе [5] показано, что при нестандартном подходе важные свойства отображений топологических пространств выражаются простыми теоретико-множественными условиями для нестандартных топологий и что нестандартная классификация отображений непосредственно приводит к каноническому описанию ряда важных сходимостей в пространствах отображений, которые канонически выражаются простыми теоретико-множественными формулами через нестандартные сходимости исходных пространств. Например, из результатов [5] следует, что отображение f пространства сходимости (X, ρ_X) в пространство сходимости (Y, ρ_Y) непрерывно, если ${}^*f \circ \rho_X \subset \rho_Y \circ f$. Кроме того, в силу [5] для любого пространства сходимости (X, ρ) на множестве $F_c = F_c(X)$ всех непрерывных преобразований пространства X по формуле

$$(f, h) \in \gamma_c \iff h \circ \rho \subset \rho \circ f \quad (f \in F_c, h \in {}^*F_c)$$

определяется непрерывная сходимость [3] $\gamma_c \subset F_c \times {}^*F_c$, которая является самой слабой сходимостью на множестве F_c , относительно которой непрерывно отображение вычисления $\Lambda(f, x) = f(x)$ (где $f \in F_c, x \in X$). Кроме того, композиция преобразований непрерывна относительно сходимости γ_c и сходимость γ_c является компактно-открытой топологией, если (X, ρ) – локально компактное топологическое пространство.

В настоящей работе под автоматом понимается полугрупповой автомат без выходных сигналов [1], т. е. система вида $A = (X, S, \delta)$, где X – непустое множество состояний, S – полугруппа входных символов и $\delta : X \times S \rightarrow X$ – функция переходов автомата, удовлетворяющая условию $\delta(x, s \cdot t) = \delta(\delta(x, s), t)$ для любых $x \in X, s, t \in S$.

Следуя [1], автомат $A = (X, S, \delta)$ называется топологическим, если его множество состояний X и полугруппа входных символов S наделены такими сходимостями ρ_X и ρ_S , относительно которых непрерывны умножение полугруппы S и функция переходов δ , т. е. для любых $s, t \in S, u, v \in {}^*S$ и $a \in X, x \in {}^*X$ выполняются условия: $(s, u), (t, v) \in \rho_S \implies (s \cdot t, u \cdot v) \in \rho_S$ и $(a, x) \in \rho_X \wedge (s, u) \in \rho_S \implies (\delta(a, s), {}^*\delta(x, u)) \in \rho_X$.

Гомоморфизмом топологического автомата $A = (X, S, \delta)$ в топологический автомат $A_1 = (X_1, S_1, \delta_1)$ называется упорядоченная пара $\pi = (f_1, f_2)$, состоящая из непрерывных отображений $f_1 : X \rightarrow X_1, f_2 : S \rightarrow S_1$, для которых при любых значениях $s, t \in S, x \in X$ выполняются равенства: $f_2(s \cdot t) = f_2(s) \cdot f_2(t), f_1(\delta(x, s)) = \delta_1(f_1(x), f_2(s))$. Гомоморфизм $\pi = (f_1, f_2)$ называется изоморфизмом автомата A на автомат A_1 , если $f_1 : X \rightarrow X_1, f_2 : S \rightarrow S_1$ – гомеоморфизмы. В случае $X = X_1$ гомоморфизм $\pi = (f_1, f_2)$ называется гомоморфизмом по входным сигналам автомата A в автомат A_1 , если $f_1 = \Delta_X$ – тождественное преобразование множества X .

Для пространства сходимости (X, ρ_X) обозначим $\mathbf{K}(X, \rho_X)$ категорию, объектами которой являются топологические автоматы $A = (X, S, \delta)$ с пространством состояний $X = (X, \rho_X)$ и морфизмами которой являются гомоморфизмы по входным сигналам топологических автоматов.

Теорема 1. Пусть (X, ρ_X) – пространство сходимости и алгебраическая система $\text{Atm}(X, \rho_X) = ((X, \rho_X), (F_c(X), \gamma_X), \bar{\delta})$ состоит из пространства сходимости (X, ρ_X) , полугруппы $(F_c(X), \gamma_X)$ всех непрерывных преобразований пространства (X, ρ_X) с операцией композиции и непрерывной сходимостью γ_X и отображения $\bar{\delta} : X \times F_c(X) \rightarrow X$, которое для $x \in X, \varphi \in F_c(X)$ определяется по формуле $\bar{\delta}(x, \varphi) = \varphi(x)$. Тогда $\text{Atm}(X, \rho_X)$ является универсально притягивающим объектом категории $\mathbf{K}(X, \rho_X)$, т. е. для любого объекта $A = (X, S, \delta)$ категории $\mathbf{K}(X, \rho_X)$ найдется единственный гомоморфизм по входным сигналам топологического автомата A в топологический автомат $\text{Atm}(X, \rho_X)$.

Автомат $\text{Atm}(X, \rho_X)$ называется универсальным топологическим автоматом над пространством сходимости (X, ρ_X) .

Доказательство. Для топологического автомата $A = (X, S, \delta)$ любой входной сигнал $s \in S$ определяет непрерывное преобразование δ_s пространства сходимости X по формуле: $\delta_s(x) = \delta(x, s)$ ($x \in X$). Тогда отображение $f : S \rightarrow F_c(X)$, определяемое по формуле $f(s) = \delta_s$ ($s \in S$), для любых $s, t \in S, u \in {}^*S$ удовлетворяет условиям: $f(s) \cdot f(t) = f_1(s \cdot t)$ и $(s, u) \in \rho_S \implies (f(s), {}^*f(u)) \in \gamma_c$. Значит, f – непрерывный гомоморфизм полугруппы (S, ρ_S) в полугруппу $(F_c(X), \gamma_X)$. Нетрудно убедиться, что упорядоченная пара $\pi = (\Delta_X, f)$ является гомоморфизмом топологического автомата A в топологический автомат $\text{Atm}(X, \rho_X)$.

Исследован вопрос об определяемости таких универсальных топологических автоматов их полугруппами входных сигналов.

Теорема 2. Для любых пространств сходимости $(X, \rho_X), (Y, \rho_Y)$ следующие условия равносильны:

- 1) пространства сходимости $(X, \rho_X), (Y, \rho_Y)$ гомеоморфны;
- 2) универсальные топологические автоматы $\text{Atm}(X, \rho_X), \text{Atm}(Y, \rho_Y)$ изоморфны;
- 3) полугруппа входных сигналов $(F_c(X), \gamma_X)$ автомата $\text{Atm}(X, \rho_X)$ изоморфна полугруппе входных сигналов $(F_c(Y), \gamma_Y)$ автомата $\text{Atm}(Y, \rho_Y)$.

Доказательство. Если $f : X \rightarrow Y$ – гомеоморфизм, то упорядоченная пара $\pi = (f, f \times f)$ является изоморфизмом топологического автомата $\text{Atm}(X, \rho_X)$ на топологический автомат $\text{Atm}(Y, \rho_Y)$. Очевидно, что из 2) следует 3). Пусть f – изоморфизм топологической полугруппы $S_X = (F_c(X), \gamma_X)$ на топологическую полугруппу $S_Y = (F_c(Y), \gamma_Y)$. Легко видеть, что правыми нулями полугруппы S_X являются постоянные отображения $c_a : X \rightarrow \{a\}$ множества X в некоторый элемент $a \in X$. Аналогично, правыми нулями полугруппы S_Y являются постоянные отображения множества Y в элементы этого множества Y . Так как при изоморфизме правые нули полугрупп переходят в правые нули, то изоморфизм f определяет биекцию f_1 множества X на множество Y по правилу: для $a \in X, b \in Y$ положим $f_1(a) = b$ в том и только том случае, если $f(c_a) = c_b$. Тогда $f(c_a) = c_{f_1(a)}$ и для элементов $a \in X, x \in {}^*X$ следующие условия равносильны: $(a, x) \in \rho_X, (c_a, c_x) \in \gamma_X, (f(c_a), f(c_x)) \in \gamma_Y, (c_{f_1(a)}, c_{{}^*f_1(x)}) \in \gamma_Y, (f_1(a), {}^*f_1(x)) \in \rho_Y$. Следовательно, f_1 – гомеоморфизм пространства сходимости (X, ρ_X) на пространство сходимости (Y, ρ_Y) .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А. Элементы алгебраической теории автоматов М. : Высш. шк., 1994. 192 с.

2. Альбеверио С., Фенстад Й., Хезг-Крон Р., Линдстрем Т. Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике. М. : Мир, 1990. 616 с.
3. Келли Дж. Общая топология М. : Наука, 1981. 432 с.
4. Вагнер В. В. Теория отношений и алгебра частичных отображений // Теория полугрупп и ее приложения : сб. ст. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1965. Вып. 1. С. 3–178.
5. Молчанов В. А. Нестандартные сходимости в пространствах отображений // Сиб. матем. журн. 1992. Т. 33, № 6. С. 141–153.

УДК 519.688

В. А. Молчанов, Р. А. Фарахутдинов

ЛИНЕЙНОЕ УПОРЯДОЧИВАНИЕ ПОЛУАВТОМАТОВ

Поступила 16.05.2019 г.

Введение. В теории автоматов особый интерес представляет проблема линейной упорядочиваемости автоматов, поскольку решение этой задачи позволяет значительно повысить эффективность алгоритмов исследования многих теоретических и прикладных проблем. В данной работе предложен алгоритм поиска с возвратами, который позволяет эффективно решать вопрос о возможности построения на множестве состояний конечного полуавтомата линейного порядка, устойчивого относительно действия входных сигналов полуавтомата.

Задача линейного упорядочивания. Пусть X – непустое множество. Бинарное отношение $\omega \in X \times X$ называется *порядком* на множестве X , если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Порядок ω называется *линейным*, если для любых $x, y \in X$ либо $(x, y) \in \omega$, либо $(y, x) \in \omega$ [1].

Упорядоченным множеством называется алгебраическая система (X, \leq) , где X – некоторое непустое множество, \leq – отношение порядка на нём. Упорядоченное множество с линейным порядком называется *линейно упорядоченным множеством*.

Полуавтоматом называется алгебраическая система $A = (X, S, \delta)$, где X – конечное непустое множество состояний, S – конечное непустое множество входных сигналов, $\delta : X \times S \rightarrow X$ – функция переходов.

Задача линейного упорядочивания конечного полуавтомата $A = (X, S, \delta)$ состоит в следующем: построить на множестве состояний X линейный порядок \leq_X , для которого при любом $s \in S$ из условия $x_1 \leq_X x_2$ следует $\delta(x_1, s) \leq_X \delta(x_2, s)$ ($x_1, x_2 \in X$).

Основные результаты. Введём дополнительные понятия для полуавтомата $A = (X, S, \delta)$. Будем считать, что множество состояний полуавтомата $X = \{1, 2, \dots, n\}$ линейно упорядочено отношением $<$ сравнения чисел по величине. Как известно, функция переходов естественно продолжается на множество S^* всех конечных последовательностей входных сигналов, которые называются *входными последовательностями* полуавтомата. *Орбитой* $O(x, y)$ пары различных состояний $x, y \in X$ называется множество всех пар различных состояний, в которые переходит эта пара под действием всевозможных входных последовательностей, т. е.

$$O(x, y) = \{(x, y) \cup S_\delta(x, y)\} \setminus \{(z, z) \mid z \in X\},$$

где $S_\delta(x, y) = \{(u, v) \mid (\exists w \in S^*)(u = \delta(x, w) \wedge v = \delta(y, w))\}$.

Наш алгоритм состоит в следующем: в начальный момент строится множество T всех пар состояний полуавтомата A вида (x, y) , для которых $x < y$ (это необходимо для того, чтобы не рассматривать симметричную для (x, y) пару (y, x)). Для каждой такой пары вычисляется её орбита, которая проверяется на антисимметричность. Если какая-либо орбита не удовлетворяет условию антисимметричности, то полуавтомат не допускает линейного упорядочивания.

На следующем шаге отношение ω инициализируется тождественным отношением Δ_X . Этот шаг дает гарантию того, что отношение ω будет рефлексивным.

Затем в ω последовательно добавляются ещё не рассмотренные пары $(x, y) \in T$ вместе с их орбитами. После этого осуществляется построение транзитивного замыкания отношения $\omega \cup O(x, y)$. Если на этом шаге в отношении ω появляется хотя бы одна симметричная пара, то необходимо вернуться на шаг назад и рассмотреть обратную для пары (x, y) пару (y, x) , если она еще не была рассмотрена, в противном случае необходимо вернуться на предыдущий шаг перед выбором рассматриваемой пары (x, y) . Если алгоритм возвращается в начальное состояние (т. е. полностью исчерпана возможность выбора пар состояний из множества T), то это значит, что невозможно построить антисимметричное отношение полного квазиупорядка на множестве состояний полуавтомата, следовательно, данный полуавтомат не допускает линейного упорядочивания.

Очевидно, что эффективнее на каждой итерации алгоритма выбирать в множестве T очередную пару с наибольшей мощностью орбиты среди еще нерассмотренных пар.

Когда объединение отношения ω с его обращением ω^{-1} совпадёт с декартовым произведением $X \times X$, значит построено рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение ω , для которого при всех

$x, y \in \omega$, $x \neq y$, выполняется либо $(x, y) \in \omega$, либо $(y, x) \in \omega$, т. е. построен линейный порядок на множестве X .

Таким образом, будет построен линейный порядок ω на множестве состояний X полуавтомата A . По построению этот порядок устойчив относительно действия всех входных последовательностей полуавтомата и, следовательно, стабилен относительно действия входных сигналов полуавтомата.

На основании рассмотренного алгоритма написана реализующая его программа на языке программирования $C\#$. Для тестирования программы были выбраны полуавтоматы $A = (X, S, \delta)$ с множеством состояний $X = \{1, 2, \dots, n\}$ и функциями переходов U_i , $1 \leq i \leq n-1$, V_k , $2 \leq k \leq n$, которые определяются следующими формулами:

$$U_i(j) = \begin{cases} i + 1 & \text{для } j = i, \\ j & \text{иначе,} \end{cases}$$
$$V_k(j) = \begin{cases} k - 1 & \text{для } j = k, \\ j & \text{иначе.} \end{cases}$$

Известно [2], что преобразования U_i , V_k порождают всю полугруппу эндоморфизмов линейно упорядоченного множества. Следовательно, такие полуавтоматы являются полуавтоматами с наиболее сложной полугруппой входных сигналов, при этом у них точно существует линейный порядок на множестве состояний (например, естественный порядок на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$). Для сравнения была проведена оценка полного перебора состояний полуавтомата, которую удалось сделать только для полуавтомата максимум с 14 состояниями, тогда как предложенный алгоритм успешно решал задачу линейного упорядочивания полуавтомата максимум до 100 состояний (программа отработала за 25 часов). Тестирование проводилось на персональном компьютере на базе процессора Intel Core i7-6500U 2,50 ГГц.

Заключение. Для решения задачи линейного упорядочивания полуавтомата предложен эффективный алгоритм перебора с возвратами, который для произвольного конечного полуавтомата строит отношение линейного порядка на множестве состояний полуавтомата или сообщает о том, что такого порядка не существует.

Программа линейного упорядочивания множества состояний конечного полуавтомата зарегистрирована в Реестре программ для ЭВМ [3].

Программа может применяться в учебных целях, а также в прикладных задачах, связанных с разработкой эффективных алгоритмов, методов анализа структурированных и неструктурированных данных больших объемов и многообразия.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Богомолов А. М., Салий В. Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. М. : Наука. Физматлит, 1997. 368 с.
2. Айзенштат А. Я. Определяющие соотношения полугруппы эндоморфизмов конечного линейно упорядоченного множества // Сиб. матем. журн. 1962. Т. 3, № 2. С. 161–169.
3. Программа линейного упорядочивания множества состояний конечного автомата : св-во о гос. регистрации программы для ЭВМ 2019610057 Рос. Федерация / В. А. Молчанов, Р. А. Фарахутдинов ; правообладатель Саратовский гос. ун-т. № 2018664580 ; заявл. 20.12.18 ; зарегистр. 09.01.19, Бюл. № 1. 1 с.

УДК 519.7

В. Е. Новиков

К ЗАДАЧЕ МИНИМИЗАЦИИ ОДНОЗНАЧНОГО КОНТЕКСТА

Поступила 28.05.2019 г.

Статья представляет способ сохранения вероятностного пространства однозначного контекста при его минимизации.

Пусть задан *формальный однозначный контекст* $\mathbb{K} = (G, \{M_i\}, \rho)$, где G – непустое конечное множество объектов, $|G| \geq 2$, $\{M_i\}$ – семейство непустых конечных множеств атрибутов, $1 \leq i \leq n$, $|M_i| \geq 2$, $\rho \subset G \times M_1 \times \dots \times M_n$ – некоторое $(n + 1)$ -арное отношение.

Если $(g, m_1, \dots, m_n) \in \rho$, то говорим, что объект g по атрибуту 1 имеет значение m_1 , по атрибуту 2 – значение m_2 , по системе атрибутов $(1, 2)$ – значение (m_1, m_2) и т. д. Если любой объект по каждому атрибуту имеет точно одно значение, то такой контекст является однозначным. Таким образом, в однозначном контексте отношение ρ проектирует семейство отображений $\rho_i : G \rightarrow M_i$. Ядро отображения ρ_i образует разбиение множества G , блоки которого являются концептами по атрибуту i . Пересечение ядер отображений ρ_i и ρ_j даст новое разбиение, блоки которого будут являться концептами по атрибуту (i, j) , и т. д. Таким образом, всевозможные пересечения этих разбиений будут порождать всё множество концептов однозначного контекста \mathbb{K} , которое образует полную решётку $L(\mathbb{K})$ относительно отношения включения с наибольшим элементом G и наименьшим элементом \emptyset . Некоторые из основных характеристик решётки концептов однозначного контекста представлены в [1] и [2]. В [3] построен алгоритм минимизации однозначного контекста по числу объектов и числу атрибутов при сохранении его решётки концептов.

Пусть $A, B \subset G$ – концепты контекста \mathbb{K} , т. е. элементы решётки $L(\mathbb{K})$. Будем говорить, что наступило событие A , если при случайном выборе объекта из множества G получен представитель концепта A . Если не наступило событие A , то говорим, что наступило событие \bar{A} . Так же говорим, что наступило событие $A+B$, если наступило событие A или B .

Теорема 1. *Множество концептов однозначного контекста \mathbb{K} с операцией $+$ порождает σ -алгебру $\sigma(\mathbb{K})$, в которой множество атомов решётки концептов $L(\mathbb{K})$ образует пространство элементарных событий.*

В работах [2, 3] раскрыт алгоритм минимизации однозначного контекста по числу атрибутов и числу объектов с сохранением его решётки концептов. Пусть $\mathbb{K}^* = (G^*, \{M_i^*\}, \rho^*)$ – минимальный контекст для контекста \mathbb{K} , где $\rho^* \subset G^* \times M_1^* \times \dots \times M_m^*$, $m \leq n$, $|G^*| \leq |G|$, $L(\mathbb{K}^*) \cong L(\mathbb{K})$. На контексте \mathbb{K}^* аналогично определяется σ -алгебра, при этом справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *σ -алгебра $\sigma(\mathbb{K})$ однозначного контекста \mathbb{K} изоморфна σ -алгебре его минимального контекста $\sigma(\mathbb{K}^*)$, причём изоморфизм устанавливается продолжением того же отображения, что определяет изоморфизм между концептуальными решётками $L(\mathbb{K})$ и $L(\mathbb{K}^*)$.*

Два вероятностных пространства (Ω, \mathcal{A}, P) и $(\Omega', \mathcal{A}', P')$ будем называть *изоморфными*, если существует изоморфизм σ -алгебр $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ с условием, что для любого $A \in \mathcal{A}$ выполняется равенство $P(A) = P'(\varphi(A))$.

На σ -алгебре контекста $\mathbb{K} = (G, \{M_i\}, \rho)$ зададим функцию вероятности P по классическому определению, полагая для любого события A значение $P(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } G}$. Тогда тройка $(G, \sigma(\mathbb{K}), P)$ определит *вероятностное пространство контекста \mathbb{K}* . Можно было бы аналогично построить вероятностное пространство минимального контекста \mathbb{K}^* , но оно не будет изоморфным вероятностному пространству контекста \mathbb{K} . А это значит, что при минимизации теряется часть информации о распределении вероятности, которую желательно было бы сохранить.

Пусть концепты $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ образуют всё множество атомов решётки $L(\mathbb{K})$, $k \leq |G|$. Им соответствует множество объектов $G^* = \{g_1^*, g_2^*, \dots, g_k^*\}$ минимального контекста \mathbb{K}^* , g_j^* являются атомами решётки $L(\mathbb{K}^*)$ и образуют пространство элементарных событий в $\sigma(\mathbb{K}^*)$. Определим функцию вероятности P^* на этом пространстве следующим равенством $P^*(g_j^*) = \frac{\text{card } A_j}{\text{card } G}$. Тогда тройка $(G^*, \sigma(\mathbb{K}^*), P^*)$ определит *вероятностное пространство контекста \mathbb{K}^** , и справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. Вероятностное пространство $(G^*, \sigma(\mathbb{K}^*), P^*)$ контекста \mathbb{K}^* изоморфно вероятностному пространству $(G, \sigma(\mathbb{K}), P)$ контекста \mathbb{K} , причём изоморфизм устанавливается продолжением того же отображения, что определяет изоморфизм между концептуальными решётками $L(\mathbb{K}^*)$ и $L(\mathbb{K})$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Новиков В. Е. Решётка концептов в однозначном контексте // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2010. Вып. 12. С. 53–56.
2. Новиков В. Е. Линейно упорядоченные атрибуты в однозначном контексте // Компьютерные науки и информационные технологии : материалы Междунар. науч. конф. Саратов : Издат. центр «Наука», 2016. С. 297–299.
3. Новиков В. Е. Минимизация однозначного контекста // Компьютерные науки и информационные технологии : Материалы Междунар. науч. конф. Саратов : Издат. центр «Наука», 2012. С. 233–236.

УДК 512.554+512.643

В. Б. Поплавский, Д. Г. Явкаев

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНВЕРСНЫХ D-КЛАССОВ БУЛЕВЫХ МАТРИЦ

Поступила 04.06.2019 г.

В статье регулярный D -класс Грина полугруппы называется *инверсным*, если каждый его R - и L -подкласс порождается ровно одним идемпотентом. Введённое понятие является новым, так как сама полугруппа инверсной может не являться. Мы указываем способ нахождения таких D -классов для частичной полугруппы булевых $(0,1)$ -матриц конечных размеров с операцией конъюнктивного умножения, который связан с понятием вторичного идемпотента. Приводится пример вычисления таких классов для частичной полугруппы булевых матриц всевозможных размеров, начиная с 1×1 до 4×4 .

Обозначим множество булевых матриц с элементами из $B_2 = \{0; 1\}$ всевозможных размеров $k \times l$, где $k = 1 \dots n$ и $l = 1 \dots n$ через $M_{n \times n}(B_2)$. Вместе с частичной операцией конъюнктивного умножения \sqcap множество $M_{n \times n}(B_2)$ образует частичную полугруппу, изучению свойств идемпотентов которой посвящены работы [1, 2].

Далее мы будем использовать такие известные полугрупповые понятия как D -, R - и L -отношения эквивалентности Грина на $M_{n \times n}(B_2)$,

разбивающее полугруппу на классы [3]. Если D -класс содержит идемпотент, то его называют регулярным. Известно, что для каждого элемента некоторых полугрупп, названных В. В. Вагнером *обобщенными группами* (другое название – инверсные полугруппы), существует единственный обобщенно обратный элемент. Каждый D -класс таких инверсных полугрупп регулярен, и каждый R - и L -класс порождается ровно одним идемпотентом. В случае произвольной полугруппы можно дать следующее определение.

Определение. *Регулярный D -класс Грина полугруппы назовем инверсным, если каждый его R - и L -подкласс порождается ровно одним идемпотентом.*

Ясно, что все D -классы любой инверсной полугруппы являются по определению инверсными. Однако D -классы произвольной полугруппы могут быть и регулярными, и нерегулярными, а среди регулярных могут быть как инверсные, так и неинверсные.

Введенное понятие мы применим к регулярному D -классу частичной полугруппы $M_{n \times n}(B_2)$ и назовём его также *инверсным*, если каждый его R - и L -подкласс порождается ровно одной идемпотентной матрицей. Далее мы покажем, что инверсные D -классы частичной полугруппы $M_{n \times n}(B_2)$ всегда существуют и укажем, как их искать.

Рассмотрим отображение $i : M_{n \times n}(B_2) \rightarrow M_{n \times n}(B_2)$, ставящее каждой матрице A вторичный идемпотент $i(A) = ((A \sqcap A^{T'}))^{T'}$, где T' обозначает одновременное транспонирование и взятие дополнения булевой матрицы (см. [1, 2]).

Заметим, что отображение i постоянно на R -классах [1, 2]. Поэтому отображение i порождает бинарное отношение на фактор-множестве $M_{n \times n}(B)/_D$, которое в силу конечности полугруппы $M_{n \times n}(B)$ представимо в виде конечного ориентированного графа, вершинами которого служат D -классы частичной полугруппы $M_{n \times n}(B)$. Стрелки, исходящие из некоторого D -класса, т. е. точки этого графа, указывают куда отображение i отправляет вторичные идемпотенты, порожденные R -подклассами этого D -класса. Этот граф разбивается на компоненты, которые мы назовем *орбитами* отображения i на фактор-множестве $M_{n \times n}(B)/_D$.

Теорема. *Пусть $M_{n \times n}(B)$ -частичная полугруппа матриц всевозможных размеров, начиная с 1×1 до $n \times n$ с элементами из булевой алгебры $B_2 = \{0; 1\}$. Тогда орбиты отображения i на фактор-множестве $M_{n \times n}(B)/_D$ заканчиваются инверсными D -классами, причем все идемпотенты этих инверсных D -классов являются вторичными.*

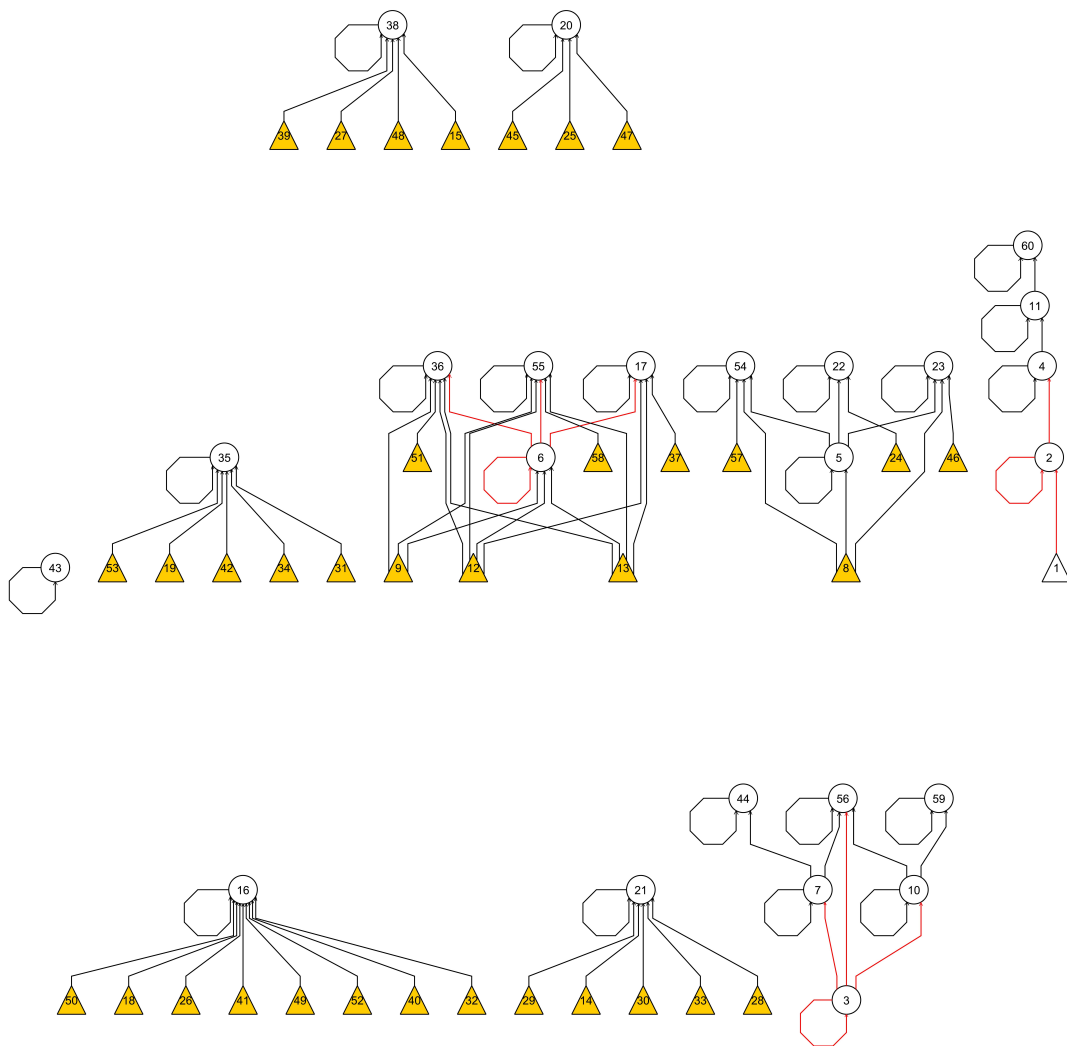
Доказательство. Так как все идемпотенты D -класса, являющегося концом орбиты отображения i , вторичны, то утверждение теоремы сразу

следует из того, что в каждом R - или L - подклассе не может быть более одного вторичного идемпотента [1, теорема 3.3]. ■

Авторами были найдены инверсные D -классы для частичных полугрупп $M_{3 \times 3}$ и $M_{4 \times 4}$.

На рисунке показаны орбиты отображения i на $M_{4 \times 4}/D$, содержащие 60 D -классов, которые пронумерованы с 1 по 60. Кругжками обозначены регулярные классы, а треугольниками – нерегулярные D -классы. Концы стрелок каждой компоненты заканчиваются в 15 классах $D_{16}, D_{17}, D_{21}, D_{22}, D_{23}, D_{28}, D_{30}, D_{35}, D_{36}, D_{43}, D_{44}, D_{54}, D_{56}, D_{59}, D_{60}$. Так класс D_{22}

порожден матрицей
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



Орбиты отображения $i: M_{4 \times 4}/D \rightarrow M_{4 \times 4}/D$

Рамки этой заметки не позволяют описать остальные 14 инверсных D -классов.

Все указанные на рисунке классы $D_{16}, D_{17}, D_{21}, D_{22}, D_{23}, D_{28}, D_{30}, D_{35}, D_{36}, D_{43}, D_{44}, D_{54}, D_{56}, D_{59}, D_{60}$ являются инверсными. Более того, остальные D -классы полугруппы $M(B)_{4 \times 4}$ инверсными не являются.

Орбиты, а также инверсные D -классы для случая частичной полугруппы $M_{3 \times 3}$ указаны в работе [4].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Поплавский В. Б. Об идемпотентах алгебры булевых матриц // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 2. С. 26–33.
2. Поплавский В. Б. О приложениях ассоциативности дуальных произведений алгебры булевых матриц // Фундаментальная и прикладная математика. 2012. Т. 17, вып. 4. С. 181–192.
3. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп : в 2 т. М. : Мир, 1972. Т. 1. 287 с.
4. Поплавский В. Б., Явкаяев Д. Г. Об инверсных D -классах полугруппы булевых матриц // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия : современные проблемы, приложения и проблемы истории : материалы XVI Междунар. конф. Тула : Тульск. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2019. С. 112–114.

УДК 519.8

В. В. Розен

ОБОБЩЕНИЕ КОНЦЕПЦИИ РАВНОВЕСИЯ ПО НЭШУ В ТЕОРИИ ИГР

Поступила 10.06.2019 г.

1. Формально игра n лиц с отношениями предпочтения в нормальной форме может быть задана в виде набора

$$G = \langle N, (X_i)_{i \in N}, A, (\rho_i)_{i \in N}, F \rangle, \quad (1)$$

где $N = 1, \dots, n$ – множество игроков, $n \geq 2$; X_i – множество стратегий игрока $i \in N$; A – множество исходов игры; ρ_i – рефлексивное бинарное отношение на множестве исходов игры A ; F – функция реализации, то есть отображение множества ситуаций игры $X = \prod_{i \in N} X_i$ в множество исходов A .

Предполагается, что $|X_i| \geq 2$ для всех $i \in N$ и $|A| \geq 2$. Игра (1) называется конечной, если все множества $X_i (i \in N)$ являются конечными; при этом множество исходов игры A может быть бесконечным. Игра (1)

называется игрой с упорядоченными (или квазиупорядоченными) исходами, если все $\rho_i (i \in N)$ являются отношениями порядка (квазипорядка).

Определение 1. Ситуация $x^0 = (x_i^0)_{i \in N}$ в игре G с отношениями предпочтения вида (1) называется ситуацией равновесия по Нэшу, если для всех $i \in N$ и $x_i \in X_i$ выполняется соотношение

$$F(x^0 || x_i) \leq^{\rho_i} F(x^0). \quad (2)$$

Определение 2. Ситуация $x^0 = (x_i^0)_{i \in N}$ в игре G с отношениями предпочтения вида (1) называется ситуацией общего равновесия, если не существует таких $i \in N$ и $x_i \in X_i$ для которых

$$F(x^0 || x_i) >^{\rho_i} F(x^0). \quad (3)$$

Из определений легко следует

Утверждение 1. а) В игре с отношениями предпочтения вида (1) ситуация равновесия по Нэшу является также ситуацией общего равновесия. б) Если все отношения предпочтения линейны, то понятия ситуации равновесия по Нэшу и ситуации общего равновесия равнозначны.

2. Для игр с упорядоченными исходами, как и для игр с функциями выигрыша, универсальная реализуемость принципов равновесия требует перехода к смешанным стратегиям, что является подчас обременительным в практических приложениях. Это обстоятельство стимулирует выработку других типов оптимальности, важнейшим из которых является принцип допустимости исхода или ситуации игры (см. [1]).

Для игры G с отношениями предпочтения вида (1) понятие допустимости исхода может быть введено следующим образом. Зафиксируем $i \in N$ и положим $X_{N \setminus i} = \prod_{\substack{j \in N \\ j \neq i}} X_j$. Можно рассматривать $X_{N \setminus i}$ как множество стратегий дополнительной коалиции $N \setminus i$. Пара $(x_i, x_{N \setminus i})$, где $x_i \in X_i$ и $x_{N \setminus i} \in X_{N \setminus i}$ однозначно определяет некоторый исход игры G , который обозначается $F(x_i, x_{N \setminus i})$.

Определение 3. Будем говорить, что стратегия $x_i^0 \in X_i$ является возражением игрока i на исход $a \in A$, если для любой стратегии $x_{N \setminus i} \in X_{N \setminus i}$ дополнительной коалиции $N \setminus i$ выполнено $F(x_i^0, x_{N \setminus i}) >^{\rho_i} a$.

Исход $a \in A$ называется недопустимым для игрока i , если игрок i имеет возражение на этот исход.

Понятие допустимости исхода является логически противоположным понятию его недопустимости. А именно, исход $a \in A$ называется *допустимым для игрока i* , если он не имеет возражений на этот исход. Исход a называется *допустимым исходом в игре G* , если этот исход является допустимым для всех игроков $i \in N$. Ситуациях $x^0 \in X$ называется *допустимой в игре G* , если исход $F(x^0)$ является допустимым.

Замечание. Если рассматривать ситуации игры как результат договора между игроками, то такой договор обладает определенной устойчивостью (стабильностью) тогда и только тогда, когда соответствующая ситуация является допустимой: в допустимой ситуации разумный игрок не имеет достаточных оснований для отклонения от выбранной им стратегии, опасаясь наказания, которое может последовать за счет возможных действий дополнительной коалиции. Такой тип устойчивости Э. Мулен называет «стабильностью на основе простых угроз» [2, с. 152]. Отметим, что здесь устойчивость базируется на предположении «разумности» (точнее говоря, «рациональности» игроков), которая проявляется в способности анализировать возможности других игроков и в отказе от «действий во вред себе». Разумеется, в реальности это предположение оправдывается далеко не всегда. Однако именно концепция рациональности лежит в основе современной теории игр, являясь теоретической основой анализа решений, принимаемых в политике, экономике и социальной сфере.

3. Перейдем к рассмотрению условий существования допустимых ситуаций и допустимых исходов в играх с отношениями предпочтения. Эти условия накладываются на множества стратегий и на структуру отношений предпочтения игроков.

Теорема 1. Пусть $G = \langle N, (X_i)_{i \in N}, A, (\rho_i)_{i \in N}, F \rangle$ – игра с отношениями предпочтения вида (1), в которой множество исходов A является конечным и для каждого $i \in N$ отношение предпочтения ρ_i ациклично. Тогда в игре G существуют допустимые ситуации и допустимые исходы.

Следствие. Пусть G – игра с отношениями предпочтения вида (1), в которой множества стратегий игроков являются конечными и для каждого $i \in N$ отношение предпочтения ρ_i ациклично. Тогда в игре G существуют допустимые ситуации и допустимые исходы.

Важной особенностью принципа допустимости исхода игры является тот факт, что для игр некоторых классов существуют стратегии, которые гарантируют игрокам – независимо от действий других игроков – получение допустимого для них исхода. Для более точной формулировки этого утверждения введем отношение β -доминирования стратегий любого

игрока в игре $G = \langle N, (X_i)_{i \in N}, A, (\rho_i)_{i \in N}, F \rangle$ n лиц с квазиупорядоченными исходами. Зафиксируем $i \in N$. Пусть G_i – антагонистическая игра игрока i против коалиции остальных игроков $N \setminus i$. Формально игра G_i может быть представлена в виде

$$G = \langle X_i, Y, A, \rho_i, F \rangle \quad (4)$$

где $Y = \prod_{j \neq i} X_j$, и значение функции реализации в ситуации $(x_i, y) \in X_i \times Y$ в игре G_i совпадает со значением функции реализации в соответствующей ситуации в игре G . Полагаем

$$x_i^1 \leq^{\beta_i} x_i^2 \iff (F(x_i^2, Y))^\uparrow \subseteq (F(x_i^1, Y))^\uparrow, \quad (5)$$

где $(F(x_i, Y))^\uparrow = \{F(x_i, y) : y \in Y\}^\uparrow$ для произвольного $x_i \in X_i$ и $(F(x_i, Y))^\uparrow$ есть дуальный идеал в квазиупорядоченном множестве $\langle A, \rho_i \rangle$, порожденный x_i -строкой таблицы функции реализации F .

Теорема 2. Пусть $G = \langle N, (X_i)_{i \in N}, A, (\rho_i)_{i \in N}, F \rangle$ – игра n лиц с квазиупорядоченными исходами. Исход в ситуации, в которой каждый игрок $i \in N$ использует β -максимальную стратегию, является допустимым исходом в игре G .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Розен В. Принятие решений по качественным критериям. Математические модели. Saarbrücken, Deutschland, Verlag : Palmarium Academic Publ., 2013. 284 p.
2. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики : пер. с франц. М. : Мир, 1985. 200 с.

УДК 517.927.25

В. С. Рыхлов

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Поступила 25.06.2019 г.

Рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + p_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, +\infty), \quad (1)$$

$$\left(\alpha_{i1} \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \alpha_{i2} \frac{\partial u(0,t)}{\partial t}\right) + \left(\beta_{i1} \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} + \beta_{i2} \frac{\partial u(1,t)}{\partial t}\right) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = f_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = f_1(x), \quad (3)$$

где $p_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_{ik}, \beta_{ik} \in \mathbb{C}$.

Предположим, что уравнение (1) гиперболического типа, то есть $p_1^2 - 4p_2 > 0$, и корни характеристического уравнения удовлетворяют неравенствам

$$0 < \omega_1 < \omega_2. \quad (4)$$

Требуется найти классическое решение задачи (1)–(3), то есть такую функцию $u(x, t)$, которая имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно, удовлетворяет краевым условиям (2) и начальным условиям (3).

К задаче (1)–(3) не применим обычный метод разделения переменных, так как в (1) присутствует смешанная производная. Поэтому используется метод контурного интеграла или вычетный метод (см. [1]). В последнее время большой вклад в обоснование этого метода при весьма широких предположениях внесли А. П. Хромов и его ученики (см. [2]).

Задаче (1)–(3) сопоставим спектральную задачу $L(\lambda)y = 0$ для пучка $L(\lambda)$ вида:

$$\ell(y, \lambda) := y'' + p_1 \lambda y' + p_2 \lambda^2 y, \quad (5)$$

$$U_i(y, \lambda) := (\alpha_{i1} y'(0) + \lambda \alpha_{i2} y(0)) + (\beta_{i1} y'(1) + \lambda \beta_{i2} y(1)) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

Пусть $y_1(x, \lambda) = \exp(\lambda \omega_1 x)$, $y_2(x, \lambda) = \exp(\lambda \omega_2 x)$. Функции y_1, y_2 образуют фундаментальную систему решений уравнения $\ell(x, \lambda) = 0$. Далее для определенности считаем, что $\alpha_{i1} \neq 0$ или $\beta_{i1} \neq 0$ при каждом $i = 1, 2$. В остальных случаях рассуждения принципиально не отличаются, только изменятся обозначения.

Обозначим $v_{ij} = \alpha_{i1} \omega_j + \alpha_{i2}$, $w_{ij} = \beta_{i1} \omega_j + \beta_{i2}$, $V_j = (v_{1j}, v_{2j})^T$, $W_j = (w_{1j}, w_{2j})^T$ при $i, j = 1, 2$; $a_{sk} = \det(W_s, W_k)$, $a_{\bar{s}k} = \det(V_s, W_k)$, $a_{s\bar{k}} = \det(W_s, V_k)$, $a_{\bar{s}\bar{k}} = \det(V_s, V_k)$ при $s, k = 1, 2$.

Пусть всюду далее выполняются условия

$$a_{\bar{1}\bar{2}} \neq 0, \quad a_{12} = a_{\bar{1}\bar{2}} = 0, \quad (7)$$

то есть справедливо представление

$$\Delta(\lambda) = \det(U_i(y_j, \lambda))_{i,j=1}^2 = \lambda^2 (a_{\bar{1}\bar{2}} + e^{\lambda \omega_2} a_{\bar{1}2}) =: \lambda^2 \Delta_0(\lambda), \quad (8)$$

и, следовательно, пучок (5)–(6) является сильно нерегулярным (см. [3,4]).

Из (7)–(8) следует, что краевые условия (6) (и, естественно, (2)) эквивалентны полураспадающимся краевым условиям, а система корневых функций пучка (5)–(6) двукратно не полна в $L_2[0, 1]$ и имеет бесконечный дефект. Условия существования и единственности решения смешанной задачи (1)–(3) при таких предположениях ранее не были получены.

Далее для краткости будем использовать обозначения: $\tau = \omega_2/\omega_1$, $\alpha_x = x/\tau$, $\beta_x = \tau x + \tau + 1$, $c_0 = -a_{\bar{1}2}/a_{1\bar{2}}$, $e_1 = a_{\bar{1}1}/a_{\bar{1}2}$, $e_2 = a_{2\bar{2}}/a_{\bar{1}2}$, $\gamma = 1/(\omega_2 - \omega_1)$, $d_x = d/dx$.

Из (8) видно, что корни уравнения $\Delta_0(\lambda) = 0$ имеют вид $\lambda_k = (2k\pi i + d_0)/\omega_2$, $k \in \mathbb{Z}$, где $d_0 := \ln_0 c_0$ (\ln_0 фиксированная ветвь натурального логарифма такая, что $\ln_0 1 = 0$). Пусть $\Lambda := \{\lambda_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Очевидно, $\Lambda \setminus \{0\}$ есть множество ненулевых собственных значений (с.з.) пучка $L(\lambda)$. Точка $\lambda = 0$ может быть с.з., а может и не быть, даже если $0 \in \Lambda$.

Из формул для с.з. следует, что в плоскости \mathbb{C} существуют такие контуры Γ_ν , которые отстоят от λ_k на расстояние не меньшее некоторого фиксированного числа $\delta > 0$, а между соседними контурами лежит ровно одно λ_k . В качестве таких контуров можно взять, например, контуры $A_\nu B_\nu C_\nu D_\nu$, где $B_\nu C_\nu$ и $D_\nu A_\nu$ есть отрезки прямых $\operatorname{Re} \lambda = \pm H$ ($H > 0$ достаточно большое число), а дуги $\widehat{A_\nu B_\nu}$ и $\widehat{C_\nu D_\nu}$ лежат вне δ -окрестностей с.з., являются дугами окружностей радиусов r'_ν, r''_ν соответственно, с центрами в начале координат ($C'_1 \nu < r'_\nu < C'_2 \nu$, $C''_1 \nu < r''_\nu < C''_2 \nu$, где $C'_1, C''_1, C'_2, C''_2 > 0$ – фиксированные константы) и скользят по прямым $\operatorname{Re} \lambda = \pm H$.

Линеаризуем пучок (5)–(6), положив $z_0 = y$, $z_1 = \lambda z_0$. Тогда получим задачу уже для линейного оператора \hat{L} , но в пространстве вектор-функций (в.-ф.): $\hat{L}z = \lambda z$, где $z = (z_0, z_1)^T$,

$$\hat{L}z := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{p_2}d_x^2 & -\frac{p_1}{p_2}d_x \end{pmatrix} z,$$

$$D_{\hat{L}} = \{z = (z_0, z_1)^T \mid z'_0, z_1 \in L_1[0, 1], U_i(z) = 0, i = 1, 2\}$$

и $U_i(z) = \alpha_{i1}z'_0(0) + \alpha_{i0}z_1(0) + \beta_{i1}z'_0(1) + \beta_{i0}z_1(1)$.

С.з. пучка $L(\lambda)$ и оператора \hat{L} совпадают, а система производных цепочек $L(\lambda)$ (см. [3, с. 102]) совпадает с системой корневых в.-ф. \hat{L} .

Известно, что $-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu} \hat{R}_\lambda f d\lambda$, где $\hat{R}_\lambda = (\hat{L} - \lambda \hat{E})^{-1}$, $f = (f_0, f_1)^T$, есть частичная сумма разложений в.-ф. f в биортогональный ряд Фурье по корневым в.-ф. оператора \hat{L} (производным цепочкам пучка $L(\lambda)$), соответствующим тем с.з., которые попали внутрь контура $\hat{\Gamma}_\nu$. Обозначим $(\hat{L} - \lambda \hat{E})^{-1} f = (z_0(x, \lambda; f), z_1(x, \lambda; f))^T$.

В [5] были получены необходимые и достаточные, а также простые достаточные условия разложения в.-ф. $f = (f_0, f_1)^T$ по корневым функциям пучка $L(\lambda)$.

Рассмотрим функцию

$$u(x, t) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu} e^{\lambda t} z_0(x, \lambda; f) d\lambda \right), \quad (9)$$

которая является формальным решением задачи (1)–(3).

Теорема 1. Пусть выполняются условия (4), (7),

$$f_0^{(4)}, f_1^{(3)} \in L_1[0, 1], f_j^{(s)}(0) = f_j^{(s)}(1) = 0, j = 0, 1, s = \overline{0, 3-j}, \quad (10)$$

и функции f_0, f_1 удовлетворяют соотношениям

$$(e_2 \omega_2 f_0(\alpha_x) - e_1 \omega_1 f_0(\beta_x) + \omega_1 f_0(x)) - p_2 (e_2 F_1(\alpha_x) - e_1 F_1(\beta_x) + F_1(x)) = 0,$$

$$(e_2 \omega_1 f_1(\alpha_x) - e_1 \omega_2 f_1(\beta_x) + \omega_2 f_1(x)) - (e_2 f_0'(\alpha_x) - e_1 f_0'(\beta_x) + f_0'(x)) = 0,$$

где $F_1(x) = \int_0^x f_1(\xi) dx$ (здесь функции f_0 и f_1 считаются продолженными нулем, если аргументы выходят за отрезок $[0, 1]$). Тогда существует классическое решение $u(x, t)$ задачи (1)–(3), определяемое формулой (9).

Из этой теоремы на основании [5, теорема 2] получается следующий гораздо более компактный результат.

Теорема 2. Пусть выполняются условия (4), (7), (10), $e_2 = 0$ и функции f_0, f_1 удовлетворяют соотношению $f_0'(x) = \omega_2 f_1(x)$ для всех $x \in [0, 1]$. Тогда существует классическое решение $u(x, t)$ задачи (1)–(3), определяемое формулой (9).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Расулов М. Л. Вычетный метод решения смешанных задач для дифференциальных уравнений и формула разложения произвольной вектор-функции по фундаментальным функциям граничной задачи с параметром // Матем. сб. 1959. Т. 48(90), № 3. С. 277–310.
2. Хромов А. П., Корнев В. В. Классическое и обобщенное решение смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения // Докл. АН. 2019. Т. 484, № 1. С. 18–20.
3. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. 528 с.
4. Рыжлов В. С. О полноте корневых функций полиномиальных пучков обыкновенных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // ТВИМ. 2015. № 1(26). С. 69–86.

5. Рыжков В. С. Разложение по собственным функциям квадратичных сильно нерегулярных пучков дифференциальных операторов второго порядка // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 1. С. 21–26.

УДК 519.642.5

С. Ю. Советникова, Г. В. Хромова

О ВЫБОРЕ ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ И ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ КЛАССИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ

Поступила 10.05.2019 г.

Рассмотрим уравнение

$$Au \equiv \pi^{-1/2} \int_0^x (x-t)^{-1/2} u(t) dt = f(x). \quad (1)$$

Считаем, что правая часть уравнения задана ее приближениями $f_\delta(x)$: $\|f_\delta - f\|_{L_2} \leq 1$, а $u(x) \in Lip_\mu \gamma$, $\gamma < 0 \leq 1$. Для нахождения приближенного решения уравнения (1) используем метод регуляризации, предложенный в [1], с регуляризирующими операторами [2] R_α вида $R_\alpha = S_\alpha^{(2)} A^{-1}$, где

$$A^{-1} f = \pi^{-1/2} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{-1/2} f(t) dt,$$

$$S_\alpha^{(2)} u = \begin{cases} S_{\alpha 2}^{(2)} u, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ S_{\alpha 1}^{(2)} u, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Здесь $S_{\alpha j}^{(2)}$ – квадрат левостороннего оператора Стеклова при $j = 1$ и правостороннего при $j = 2$.

Интегральный вид операторов $S_{\alpha j}^{(2)}$, $j = 1, 2$ и операторов R_α приведен в [1].

Функции, разрывные в точке $x = \frac{1}{2}$, считаем элементами пространства $L_\infty[0, 1]$ с нормой

$$\|\cdot\|_{L_\infty} = \max \left\{ \|\cdot\|_{C[0, 1/2]}, \|\cdot\|_{C[1/2, 1]} \right\}.$$

Рассмотрим величины

$$\Delta_1(R_\alpha A, Lip_\mu \gamma) = \sup \left\{ \|R_\alpha A u - u\|_{L_\infty} : u \in Lip_\mu \gamma \right\},$$

$$\Delta(\delta, R_\alpha, Lip_\mu\gamma) = \sup \{ \|R_\alpha f_\delta - u\|_{L_\infty} : u \in Lip_\mu\gamma, \|f_\delta - f\|_{L_2} \leq \delta \}.$$

Теорема. *Справедлива двусторонняя оценка:*

$$C_2(\gamma)\delta^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} \leq \Delta(\delta, R_{\alpha(\delta)}, Lip_\mu\gamma) \leq C_1(\gamma)\delta^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}, \quad (2)$$

где

$$\alpha(\delta) = C(\gamma)\delta^{(\gamma+1)^{-1}}, \quad (3)$$

$$C(\gamma) = \left[2(\pi^{-1} \ln 6)^{1/2} \gamma^{-\gamma} \left(\tilde{C}(\gamma) \right)^{-1} \right]^{(\gamma+1)^{-1}},$$

$$C_1(\gamma) = \left[2^\gamma (\pi^{-1} \ln 6)^{\gamma/2} \gamma^{-\gamma} \tilde{C}(\gamma) \right]^{(\gamma+1)^{-1}} (\gamma + 1),$$

$$C_2(\gamma) = \left[C_1(\gamma) (2 \ln 6)^{-1/2} 2^{\frac{-\gamma+2}{2}} \gamma^{-\gamma} \pi^{-\gamma/2} \right]^{(\gamma+1)^{-1}} \left[(2 \ln 6)^{1/2} + \gamma \right].$$

$$\tilde{C}(\gamma) = 2M(2^{\gamma+1} - 1)(\gamma + 2)^{-1}(\gamma + 1)^{-1}.$$

Доказательство. Пользуемся двусторонней оценкой, известной из теории некорректно поставленных задач

$$\frac{1}{2} \varphi(\alpha, \delta) \leq \Delta(\delta, R_\alpha, Lip_\mu\gamma) \leq \varphi(\alpha, \delta), \quad (4)$$

где

$$\varphi(\alpha, \delta) = \Delta_1(R_\alpha A, Lip_\mu\gamma) + \delta \|R_\alpha\|_{L_2 \rightarrow L_\infty}.$$

В [1] получена оценка

$$C_2 \alpha^{-1} \leq \|R_\alpha\|_{L_2 \rightarrow L_\infty} \leq C_1 \alpha^{-1} + O(\alpha^2), \quad (5)$$

где

$$C_2 = (2\pi^{-1})^{1/2}, \quad C_1 = C_2(2 \ln 6)^{1/2}.$$

Поскольку $\Delta_1(R_\alpha A, Lip_\mu\gamma) \equiv \Delta_1(S_\alpha^{(2)}, Lip_\mu\gamma)$,

то

$$\Delta_1(R_\alpha A, Lip_\mu\gamma) = \tilde{C}(\gamma) \alpha^\gamma. \quad (6)$$

Подставим (5) и (6) в (4) и найдем согласование $\alpha = \alpha(\delta)$ из условия минимума по α правой части полученной оценки, т. е. из уравнения:

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\tilde{C}(\gamma)\alpha^\gamma + 2(\pi^{-1} \ln 6)^{-1/2} \right) \frac{\delta}{\alpha} = 0$$

– получим формулу (3).

Далее, подставив (3) в оценку (4), придем к оценке (2).

Аналог теоремы для уравнения (1) с заменой $\pi^{-1/2}$ на $\Gamma(\beta)$ (гамма-функция), $(x-t)^{-1/2}$ на $(x-t)^{\beta-1}$, где $0 < \beta < 1/2$ (для иного метода регуляризации, который невозможно использовать при $\beta = 1/2$), $u \in Lip_\mu 1$, приведен в [3].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромова Г. В. О равномерных приближениях к решению интегрального уравнения Абеля // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2015. Т. 55, № 10. С. 1703–1712.
2. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и её приложения. М. : Наука, 1978. 206 с.
3. Хромова Г. В. Регуляризация уравнения Абеля с помощью разрывного оператора Стеклова // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 4, ч. 2. С. 599–603.

УДК 517.96:517.984

А. П. Хромов

РАСХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ И СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Поступила 10.05.2019 г.

В статье с использованием метода Фурье и расходящихся рядов в понимании Эйлера (см. [1–3]) исследуются классическое и обобщенное решения смешанной задачи для волнового уравнения. Существенно усиливаются результаты из [4], где используются лишь сходящиеся ряды и, в отличие от [4], теперь не используется ни пример А. Н. Колмогорова, ни теоремы Карлесона–Ханта, ни теорема Хаусдорфа–Юнга. Доказательства обладают большой экономичностью в использовании и других математических фактов.

1. Сначала рассмотрим смешанную задачу:

$$u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, \infty), \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), u'_t(x, 0) = 0. \quad (3)$$

Формальное решение по методу Фурье есть

$$u(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \sin n\pi\xi) \sin n\pi x \cos n\pi t, \quad (4)$$

где $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x) dx$. Зона действия формального решения: $\varphi(x) \in L[0, 1]$ и комплекснозначна. Очевидно (4) можно представить в виде:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\Sigma_+ + \Sigma_-), \quad (5)$$

где $\Sigma_{\pm} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \sin n\pi\xi) \sin n\pi(x \pm t)$. Рассмотрим ряд $2 \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \sin n\pi\xi) \sin n\pi x$. Это ряд Фурье функции $\varphi(x)$ по системе $\{\sin n\pi x\}_1^{\infty}$. В случае его сходимости он имеет сумму $\tilde{\varphi}(x)$, где $\tilde{\varphi}(x)$ нечетна, $\tilde{\varphi}(2+x) = \tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ при $x \in [0, 1]$. В случае его расходимости мы ему приписываем сумму $\tilde{\varphi}(x)$ в понимании Эйлера (см. [1–3]). Таким образом, для любой $\varphi(x) \in L[0, 1]$ имеет место формула

$$\tilde{\varphi}(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \sin n\pi\xi) \sin n\pi x.$$

Отсюда в силу (5) получаем

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)], \quad \varphi(x) \in L[0, 1]. \quad (6)$$

Из (6) легко получаются следующие факты:

Теорема 1. Если $\varphi(x) \in C^2[0, 1]$, $\varphi^j(0) = \varphi^j(1) = 0$ ($j = 0, 2$), то $u(x, t)$ есть классическое решение задачи (1)–(3) (уравнение (1) выполняется при всех x и t).

Теорема 2. Если $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны и $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ ($j = 0, 2$), то $u(x, t)$ из (6) также есть классическое решение задачи (1)–(3), но теперь уравнение (1) выполняется почти всюду.

Теорема 3. Если $\varphi_h(x)$ и $u_h(x)$ из теоремы 2, и $u(x, t)$ есть (6) при $\varphi(x) \in L[0, 1]$, $\lim_{h \rightarrow \infty} \|\varphi_h - \varphi\|_1 = 0$, ($\|\cdot\|_1$ – норма в $L[0, 1]$), то $\lim_{h \rightarrow \infty} \|u_h(x, t) - u(x, t)\|_{L[Q_T]} = 0$ при любом $T > 0$, где $Q_T = [0, 1] \times [0, T]$.

Таким образом, $u(x, t)$ из теоремы 3 есть обобщенное решение задачи (1)–(3), понимаемое как предел классических решений в смысле теоремы 2.

2. Рассмотрим теперь следующую смешанную задачу для уравнения

$$u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) - q(x)u(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, \infty), \quad (7)$$

с условиями (2), (3).

Считаем, что $q(x)$ и $\varphi(x)$ комплекснозначны, причем $q(x) \in L[0, 1]$.

Формальное решение по методу Фурье есть ([4, 5]):

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_\lambda \varphi) \cos \rho t \, d\lambda, \quad (8)$$

где $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ – резольвента оператора L : $Ly = -y''(x) + q(x)y(x)$, $y(0) = y(1) = 0$, λ – спектральный параметр, E – единичный оператор, $\lambda = \rho^2$, $Re \rho \geq 0$, γ_n – образ в λ -плоскости окружности $\tilde{\gamma}_n = \{\rho \mid |\rho - n\pi| = \delta\}$, $\delta > 0$ и достаточно мало, $r > 0$ достаточно велико и фиксировано, n_0 такой номер, что при $n \geq n_0$ внутри γ_n находится по одному собственному значению оператора L и все γ_n при $n \geq n_0$ находятся вне $|\lambda| = r$.

Сначала проведем нестрогие преобразования (8), используя рекомендации А. Н. Крылова [4] по ускорению сходимости рядов и расходящиеся ряды в понимании Эйлера (см. [1–3]), причем при назначении сумм расходящихся рядов ориентируемся и на задачу, получаемую из (2), (3), (7) при замене уравнения (7) на неоднородное уравнение

$$u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) - q(x)u(x, t) + f(x, t).$$

В этом случае формальное решение задачи (2), (3), (7) приобретает вид [5, 6]:

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) [(R_\lambda \varphi) \cos \rho t +$$

$$+ \int_0^t R_\lambda(f(\cdot, \tau)) \frac{\sin \rho(t - \tau)}{\rho} d\tau] d\lambda, \quad (9)$$

где $R_\lambda(f(\cdot, \tau))$ означает, что R_λ применяется к $f(x, \tau)$ по переменной x . В этих нестрогих рассуждениях считаем, что $\varphi(x)$ не выходит за рамки $L[0, 1]$, $f(x, t)$ из $L[Q_T]$ при любом $T > 0$, где $Q_T = [0, 1] \times [0, T]$. Итак, берем ряд (8). Представим его в виде

$$u(x, t) = u_{01}(x, t) + u_1(x, t), \quad (10)$$

где $u_{01}(x, t)$ есть (8) и R_λ заменено на $R_\lambda^0 = (L_0 - \lambda E)^{-1}$, L_0 есть оператор L при $q(x) = 0$. По теореме вычетов

$$u_{01}(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \sin n\pi\xi) \sin n\pi x \cos n\pi t,$$

и поэтому по формуле (6)

$$u_{01}(x, t) = \frac{1}{2} [\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)]. \quad (11)$$

Так как правая часть (11) имеет смысл для любых $x, t \in (-\infty, \infty) \times [0, \infty)$, поэтому в этом случае $u_{01}(x, t)$ будем обозначать $a_0(x, t)$. Так как $a_0(x, t)$ похожа на решение задачи (1)–(3), то $u_1(x, t)$ похожа на решение задачи

$$u_{1,tt}(x, t) = u_{1,xx}(x, t) - q(x)u(x, t) + f_0(x, t), \quad (12)$$

$$u_1(0, t) = u_1(1, t) = 0, \quad (13)$$

$$u_1(x, 0) = u_{1t}(x, 0) = 0, \quad (14)$$

где $f_0(x, t) = -q(x)a_0(x, t)$. Поэтому от ряда для $u_1(x, t)$ из (10) перейдем к формальному ряду для задачи (12)–(14), т. е., в силу (9) к ряду

$$u_1(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \int_0^t R_\lambda(f(\cdot, \tau)) \frac{\sin \rho(t - \tau)}{\rho} d\tau d\lambda. \quad (15)$$

Представим теперь (15) в виде

$$u_1(x, t) = u_{02}(x, t) + u_2(x, t),$$

где $u_{02}(x, t)$ есть (15) и R_λ заменено на R_λ^0 . По теореме вычетов имеем

$$u_{02}(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t (f_0(\xi, \tau), \sin n\pi\xi) \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x \sin n\pi(t - \tau) d\tau. \quad (16)$$

Используя формулу

$$\int_0^x \sin n\pi\eta d\eta = \frac{1}{n\pi} [1 - \cos n\pi x],$$

получим, что $u_{02}(x, t)$ из (16) есть

$$\begin{aligned} u_{02}(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t (f_0(\xi, \tau), \sin n\pi\xi) \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \sin n\pi\eta d\eta d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \sum_1^{\infty} (f_0(\xi, \tau), \sin n\pi\xi) \sin n\pi\eta d\eta = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}_0(\eta, \tau) d\eta, \end{aligned}$$

где $\tilde{f}_0(\eta, \tau)$ нечетна и 2-периодична по η и $\tilde{f}_0(\eta, \tau) = f_0(\eta, \tau)$, $\eta \in [0, 1]$.

Рассуждаем опять как и выше. Функция $u_{02}(x, t)$ в силу (15) похожа на решение задачи (12)–(14), где вместо $f_0(x, t)$ теперь берется $f_1(x, t) = -q(x)a_1(x, t)$ и

$$a_1(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}_0(\eta, \tau) d\eta$$

и продолжаем этот процесс до бесконечности.

В итоге от ряда (8) приходим к ряду: $A(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x, t)$, где

$$a_n(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}_{n-1}(\eta, \tau) d\eta \text{ и } f_n(x, t) = -q(x)a_n(x, t).$$

Отсюда, теперь уже строго, как и в [5, 6], получаем

Лемма. Все $a_n(x, t)$ при $n \geq 1$ непрерывны по x и t и ряд $A_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x, t)$ сходится абсолютно и равномерно в Q_T с экспоненциальной скоростью.

Теорема 4. Если $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, то $u(x, t) = A(x, t)$ есть классическое решение задачи (2), (3), (7) с условием единственности $u_{tt}(x, t) \in L[Q_T]$ при любом $T > 0$ (уравнение (7) удовлетворяется почти всюду).

Теорема 5. Если $\varphi_h(x)$, $u_h(x)$ из теоремы 4, и $u(x, t) = A(x, t)$ при $\varphi(x) \in L[0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_h - \varphi\|_1 = 0$, то $\lim_{h \rightarrow \infty} \|u_h(x, t) - u(x, t)\|_{L[Q_T]} = 0$ при любом $T > 0$.

Т.о. $u(x, t) = A(x, t)$ из теоремы 5 есть обобщенное решение задачи (2), (3), (7), понимаемое как предел классических.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление. М. ; Л. : ГИИТТЛ, 1949. 280 с.
2. Харди Г. Расходящиеся ряды. М : Изд-во иностр. лит., 1951. 504 с.
3. Хромов А. П. Расходящиеся ряды и функциональные уравнения, связанные с аналогами геометрической прогрессии // Современные методы теории краевых задач : материалы междунар. конф. Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения – ХХХ». Воронеж : Издат. дом ВГУ, 2019. С. 291–300.
4. Хромов А. П. О сходимости формального решения по методу Фурье волнового уравнения с суммируемым потенциалом // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2016. Т. 56, № 10. С. 1795–1805. DOI: 10.7868/S0044466916100112
5. Корнев В. В., Хромов А. П. Классическое и обобщенные решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2019. Т. 59, № 2. С. 107–121.
6. Хромов А. П. Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55, № 5. С. 717–731. DOI: 10.1134/S0374064119050121

УДК 517.51

Г. В. Хромова

ОПЕРАТОРЫ БЕРНШТЕЙНА – РОГОЗИНСКОГО В ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ

Поступила 10.05.2019 г.

Пусть $f(x) \in C[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$, задана её приближением $f_\delta(x) : \|f_\delta(x) - f(x)\|_{L_2[-\pi, \pi]} \leq \delta$.

Требуется по $f_\delta(x)$ и δ построить равномерные приближения к $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$. Это – известная некорректно поставленная задача [1]. Обозначим через $\bar{f}(x)$ периодическое продолжение $f(x)$ на всю вещественную ось и используем для решения поставленной задачи операторы Бернштейна – Рогозинского [2]:

$$\sigma_n \bar{f} = \frac{1}{2} \left[S_n \left(x + \frac{\pi}{2n} \right) + S_n \left(x - \frac{\pi}{2n} \right) \right], \quad (1)$$

где $S_n(x)$ – частная сумма тригонометрического ряда Фурье функции $\bar{f}(x)$.

Поскольку $\bar{f}(x)$ непрерывна, то из [2]

$$\|\sigma_n f - f\|_{C[-\pi, \pi]} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \quad (2)$$

В данной работе указано, как нужно выбрать n в зависимости от δ , чтобы сходимость (2) выполнялась при замене $\sigma_n f$ на $\sigma_n f_\delta$.

Подобные результаты при использовании других линейных методов суммирования тригонометрических рядов Фурье приведены в [3, 4].

Рассмотрим величину:

$$\Delta(\delta, \sigma_n, f) = \sup \{ \|\sigma_n f_\delta - f\|_{C[-\pi, \pi]} : \|f_\delta - f\|_{L_2} \leq \delta \}$$

Теорема. Для того чтобы $\Delta(\delta, \sigma_n, f) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, необходимо и достаточно выполнение согласования $n = n(\delta)$ такого, что $n(\delta) \rightarrow \infty$ и $\delta(n(\delta))^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Доказательство. В нашей задаче операторы σ_n выступают в роли регуляризующих операторов, а n – в роли параметра регуляризации [5]. Поскольку задача восстановления является частным случаем задачи решения уравнения первого ряда [6], то справедлива теорема 1.6 из [7], согласно которой сходимость $\Delta(\delta, \sigma_n, f) \rightarrow 0$ (при выполнении условия (2)) обеспечивается согласованием $n = n(\delta)$, при котором $n(\delta) \rightarrow \infty$, а $\delta \|\sigma_{n(\delta)}\|_{L_2 \rightarrow C} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Подсчитаем указанную выше норму. Для этого представим операторы σ_n в интегральном виде.

Поскольку для $S_n(x)$ справедливо представление

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t) \cos ktdt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t) \sin ktdt,$$

то отсюда и из (1) получаем

$$\sigma_n \bar{f} = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x, t) \bar{f}(t) dt,$$

где $\bar{f}(x)$ – 2π -периодическое продолжение $f(x)$ на вещественную ось

$$K_n(x, t) = \frac{1}{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{n} \cos k(t - x) \right]. \quad (3)$$

Далее,

$$\|\sigma_n\|_{L_2 \rightarrow C} = \max_{x \in [-\pi, \pi]} \left(\int_{-\pi}^{\pi} K_n^2(x, t) dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4)$$

Подставив (3) в (4) и произведя вычисления, придём к выражению:

$$\|\sigma_n\|_{L_2 \rightarrow C} = \left(\frac{1}{2\pi} \left[1 + \sum_{k=1}^n \left(1 + \cos \frac{k\pi}{n} \right) \right] \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5)$$

Покажем, что

$$S \equiv \sum_{k=1}^n \left(1 + \cos \frac{k\pi}{n} \right) = n - 1. \quad (6)$$

Очевидно, что последняя скобка, стоящая под знаком суммы, всегда равна нулю. Кроме того, при n чётном такая скобка при $k = \frac{n}{2}$ равна единице.

$$S = n - 1 + \sum_l \left(\cos \frac{l\pi}{n} + \cos \frac{(n-l)\pi}{n} \right),$$

где $l = 1, \dots, \frac{n-1}{2}$ при n нечетном, $l = 1, \dots, \frac{n}{2} - 1$ при n четном.

Отсюда вытекает формула (6), из неё и формулы (5) – формула

$$\|\sigma_n\|_{L_2 \rightarrow C} = \left(\frac{n}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}},$$

а из этой последней – утверждение теоремы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Морозов В. А. О восстановлении функций методом регуляризации // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1967. Т. 7, № 4. С. 874–879.
2. Барн М. К. Тригонометрические ряды. М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. 936 с.
3. Хромова Г. В. О задаче восстановления функций, заданных с погрешностью // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1977. Т. 17, № 5. С. 1161–1171.
4. Хромов А. А., Хромова Г. В. Восстановление функций, заданных с погрешностью : учеб. пособие. Саратов : Саратов. источник, 2011. 29 с.
5. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и её приложения. М. : Наука, 1978. 206 с.
6. Хромова Г. В. Задача восстановления и уравнения первого рода // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика : межвуз. науч. сб. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1976. Вып. 6, ч. 1. С. 83–87.
7. Хромова Г. В. Операторы с разрывной областью значений в задачах приближения функций и некорректных задачах // Новые методы аппроксимации и оптимизации в задачах действительного и комплексного анализа. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2016. Разд. 4. С. 237–294.

**ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
ОПЕРАТОРОВ НА ПОЛУОСИ С КОМПЛЕКСНЫМИ
ВЕСАМИ**

Поступила 10.05.2019 г.

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение:

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda r(x)y(x), \quad x \geq 0, \quad (1)$$

с комплекснозначным весом $r(x)$ и с комплекснозначным потенциалом $q(x) \in L(0, \infty)$. Зафиксируем $N \geq 2$. Пусть заданы числа b_k , $k = \overline{1, N-1}$ такие, что $0 = b_0 < b_1 < \dots < b_{N-1} < b_N := \infty$. Через L обозначим краевую задачу для уравнения (1) с условиями

$$U(y) := y'(0) - hy(0) = 0, \quad (2)$$

$$y(b_k+0) = d_{k1}y(b_k-0), \quad y'(b_k+0) = d_{k2}y'(b_k-0) + d_{k3}y(b_k-0), \quad k = \overline{1, N-1}. \quad (3)$$

Будем рассматривать случай, когда $r(x) = a_k^2$ при $x \in [b_{k-1}, b_k)$, $k = \overline{1, N}$, где h, a_k, d_{kj} – комплексные числа, $a_k \neq 0$, $d_k := d_{k1}d_{k2} \neq 0$.

Пусть $\varphi(x, \lambda)$ и $S(x, \lambda)$ – решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям склейки (3) и начальным условиям $\varphi(0, \lambda) = 1$, $\varphi'(0, \lambda) = h$, $S(0, \lambda) = 0$, $S'(0, \lambda) = 1$. Пусть $\lambda = \rho^2$, $\Pi_k^\pm := \{\rho : \pm \operatorname{Im}(\rho a_k) > 0\}$, $\mathcal{E}_k(\rho x) := \exp(\mp i \rho a_k x)$ при $\rho \in \Pi_k^\pm$, $\omega_k^\pm := d_{k1}a_{k+1} \pm d_{k2}a_k$. Известно, что существуют фундаментальные системы решений Биркхофа $\{e_k(x, \rho), E_k(x, \rho)\}$, $k = \overline{1, N}$, $x \in [b_{k-1}, b_k)$, такие, что функции $e_k^{(\nu)}(x, \rho), E_k^{(\nu)}(x, \rho)$, $\nu = 0, 1$, являются аналитическими при $\rho \in \Pi_k^\pm$, $|\rho| > \rho^*$, непрерывными при $x \in [b_{k-1}, b_k)$, $\rho \in \overline{\Pi_k^\pm}$, $|\rho| > \rho^*$, и при $|\rho| \rightarrow \infty$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} e_k^{(\nu)}(x, \rho) &= (i \rho a_k)^\nu \exp(i \rho a_k (x - b_{k-1}))[1], \quad E_k^{(\nu)}(x, \rho) = \\ &= (-i \rho a_k)^\nu \exp(-i \rho a_k (x - b_{k-1}))[1], \end{aligned} \quad (4)$$

где $[1] = 1 + O(\rho^{-1})$. Кроме того, при $x \geq b_{N-1}$ существует решение Йоста $e(x, \rho)$, $\rho \in \Pi_N^\pm$ такое, что при $x \rightarrow \infty$:

$$e(x, \rho) = \exp(\pm i \rho a_N (x - b_{N-1}))[1], \quad \rho \in \Pi_N^\pm. \quad (5)$$

Пусть функция $\Phi(x, \lambda)$ является решением уравнения (1), удовлетворяющая условиям (3) и краевым условиям

$$U(\Phi) = 1, \quad \Phi(x, \lambda) = O(\exp(\pm i\rho a_N(x - b_{N-1}))), \quad x \rightarrow \infty, \quad \rho \in \Pi_N^\pm, \quad (6)$$

где U определено в (2). Обозначим $M(\lambda) := \Phi(0, \lambda)$. Функция $M(\lambda)$ является аналогом функции Вейля для классического оператора Штурма – Лиувилля. Будем называть $M(\lambda)$ функцией типа Вейля для L . Ясно, что

$$\Phi(x, \lambda) = S(x, \lambda) + M(\lambda)\varphi(x, \lambda), \quad (7)$$

Положим

$$\begin{aligned} \Psi(x, \lambda) &:= \begin{bmatrix} \varphi(x, \lambda) & \Phi(x, \lambda) \\ \varphi'(x, \lambda) & \Phi'(x, \lambda) \end{bmatrix}, \quad \det \Psi(x, \lambda) = \\ &= \begin{cases} 1, & x \in (b_0, b_1), \\ d_1 \dots d_{k-1}, & x \in (b_{k-1}, b_k). \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть a_k и d_{kj} , $j = 1, 2$ известны априори.

Обратная задача. Дана функция типа Вейля $M(\lambda)$, построить $q(x)$, h , d_{k3} .

Для исследования этой обратной задачи используются идеи метода спектральных отображений [1]. Этот метод позволяет также получить конструктивную процедуру решения обратной задачи и необходимые и достаточные условия ее глобальной разрешимости.

Сформулируем теорему единственности для этой обратной задачи. Для этого наряду с L рассмотрим краевую задачу \tilde{L} того же вида, но с другими коэффициентами. Условимся, что если некоторый символ α обозначает объект, относящийся к L , то $\tilde{\alpha}$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к \tilde{L} . Пусть $a_k = \tilde{a}_k$, $d_{kj} = \tilde{d}_{kj}$, $j = 1, 2$.

Теорема. Если $M(\lambda) = \tilde{M}(\lambda)$, то $q(x) = \tilde{q}(x)$ п.в. на $(0, T)$, и $h = \tilde{h}$, $d_{k3} = \tilde{d}_{k3}$. Таким образом, задание функции типа Вейля однозначно определяет $q(x)$, h и d_{k3} .

Доказательство. Очевидно, что ρ -плоскость разбита на сектора $S_j := \{\rho : \arg \rho \in (\theta_j, \theta_{j+1})\}$, $j = \overline{1, 2r}$, $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{2r} < 2\pi$, $\theta_{2r+1} := \theta_1$, где $\operatorname{Re}(i\rho a_k)$, $k = \overline{1, N}$ сохраняют знак. Пусть $\Gamma_j := \{\rho : \arg \rho = \theta_j\}$ – границы секторов. Обозначим

$$S_{j,\delta} := \{\rho : \arg \rho \in (\theta_j + \delta, \theta_{j+1} - \delta)\}, \quad \Gamma_{j,\delta} := \{\rho : \operatorname{dist}(\rho, \Gamma_j) \leq \delta\},$$

$$S_\delta := \bigcup_{j=1}^{2r} S_{j,\delta}, \quad \Gamma_\delta := \bigcup_{j=1}^{2r} \Gamma_{j,\delta}.$$

Используя фундаментальные системы решений Биркхофа, получаем:

$$\varphi(x, \lambda) = \alpha_k(\rho)e_k(x, \rho) + \beta_k(\rho)E_k(x, \rho), \quad k = \overline{1, N}, \quad x \in [b_{k-1}, b_k], \quad (9)$$

где коэффициенты $\alpha_k(\rho)$ и $\beta_k(\rho)$ не зависят от x . Так как $\varphi(0, \lambda) = 1$, $\varphi'(0, \lambda) = h$, то из (4) и (9) вытекает, что

$$\alpha_1(\rho) = [1]/2, \quad \beta_1(\rho) = [1]/2. \quad (10)$$

Используя (4), (9), (10) и условия (3), вычисляем:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{k+1}(\rho) &= \frac{\alpha_k(\rho)\omega_k^+}{2a_{k+1}} \exp(i\rho a_k(b_k - b_{k+1}))[1] + \frac{\beta_k(\rho)\omega_k^-}{2a_{k+1}} \exp(-i\rho a_k(b_k - b_{k+1}))[1], \\ \beta_{k+1}(\rho) &= \frac{\alpha_k(\rho)\omega_k^-}{2a_{k+1}} \exp(i\rho a_k(b_k - b_{k+1}))[1] + \frac{\beta_k(\rho)\omega_k^+}{2a_{k+1}} \exp(-i\rho a_k(b_k - b_{k+1}))[1]. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

В частности, это дает при $\nu = 0, 1$ $x \geq b_{N-1}$, $|\rho| \rightarrow \infty$ равномерно в $S_{j,\delta}$:

$$\begin{aligned} \varphi^{(\nu)}(x, \lambda) &= \frac{(\mp i\rho a_N)^\nu \gamma_j}{2^N a_2 \dots a_N} \mathcal{E}_1(\rho(b_1 - b_0)) \mathcal{E}_{N-1}(\rho(b_{N-1} - b_{N-2})) \dots \\ &\dots \mathcal{E}_N(\rho(x - b_{N-1}))[1], \quad \rho \in \Pi_N^\pm, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\gamma_j = \omega_1 \dots \omega_{N-1}$ и $\omega_k = \omega_k^+ \vee \omega_k^-$ в зависимости от j . Кроме того,

$$\left. \begin{aligned} |\varphi^{(\nu)}(x, \lambda)| &\leq C|\rho^\nu \mathcal{E}_1(\rho(x - b_0))|, \quad x \in [b_0, b_1], \\ |\varphi^{(\nu)}(x, \lambda)| &\leq C|\rho^\nu \mathcal{E}_1(\rho(b_1 - b_0)) \dots \mathcal{E}_{k-1}(\rho(b_{k-1} - b_{k-2})) \mathcal{E}_k(\rho(x - b_{k-1}))|, \\ &x \in [b_{k-1}, b_k], \quad k = \overline{2, N}, \quad \nu = 0, 1. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Предположим, что $\gamma_j \neq 0$ при $j = \overline{1, r}$. Это условие называется *условием регулярности*. Отметим, что для классических краевых задач Штурма – Лиувилля (когда $a_k = d_{k1} = d_{k2} = 1$ и $d_{k3} = 0$) условие регулярности выполняется.

Так как главные члены в формулах (4), (10) и (11) не зависят от q, h и d_{k3} , то

$$\left. \begin{aligned} |\varphi^{(\nu)}(x, \lambda) - \tilde{\varphi}^{(\nu)}(x, \lambda)| &\leq C|\rho^{\nu-1} \mathcal{E}_1(\rho(x - b_0))|, \quad x \in [b_0, b_1], \\ |\varphi^{(\nu)}(x, \lambda) - \tilde{\varphi}^{(\nu)}(x, \lambda)| &\leq C|\rho^{\nu-1} \mathcal{E}_1(\rho(b_1 - b_0)) \dots \\ &\dots \mathcal{E}_{k-1}(\rho(b_{k-1} - b_{k-2})) \mathcal{E}_k(\rho(x - b_{k-1}))|, \\ &x \in [b_{k-1}, b_k], \quad k = \overline{2, N}, \quad \nu = 0, 1. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Используя (6), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x, \lambda) &= A_k(\rho)e_k(x, \rho) + B_k(\rho)E_k(x, \rho), \quad k = \overline{1, N-1}, \quad x \in [b_{k-1}, b_k], \\ \Phi(x, \lambda) &= A(\rho)e(x, \rho), \quad x \geq b_{N-1}, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где коэффициенты $A_k(\rho)$, $B_k(\rho)$ и $A(\rho)$ не зависят от x . Функция $\Phi(x, \lambda)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$U(\Phi) = 1, \quad d_{k1}\Phi(b_k - 0, \lambda) - \Phi(b_k + 0, \lambda) = 0,$$

$$d_{k2}\Phi'(b_k - 0, \lambda) + d_{k3}\Phi(b_k - 0, \lambda) - \Phi'(b_k + 0, \lambda) = 0, \quad k = \overline{1, N-1}.$$

Вместе с (15) это дает

$$A_1(\rho)U(e_1(x, \rho)) + B_1(\rho)U(E_1(x, \rho)) = 1,$$

$$\begin{aligned} d_{k1} \left(A_k(\rho)e_k(b_k, \rho) + B_k(\rho)E_k(b_k, \rho) \right) - \left(A_{k+1}(\rho)e_{k+1}(b_k, \rho) + \right. \\ \left. + B_{k+1}(\rho)E_{k+1}(b_k, \rho) \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{k2} \left(A_k(\rho)e'_k(b_k, \rho) + B_k(\rho)E'_k(b_k, \rho) \right) + d_{k3} \left(A_k(\rho)e_k(b_k, \rho) + B_k(\rho)E_k(b_k, \rho) \right) - \\ - \left(A_{k+1}(\rho)e'_{k+1}(b_k, \rho) + B_{k+1}(\rho)E'_{k+1}(b_k, \rho) \right) = 0, \quad k = \overline{1, N-2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{N-1,1} \left(A_{N-1}(\rho)e_{N-1}(b_{N-1}, \rho) + B_{N-1}(\rho)E_{N-1}(b_{N-1}, \rho) \right) - \\ - A(\rho)e(b_{N-1}, \rho) = 0, \end{aligned}$$

$$d_{N-1,2} \left(A_{N-1}(\rho)e'_{N-1}(b_{N-1}, \rho) + B_{N-1}(\rho)E'_{N-1}(b_{N-1}, \rho) \right) +$$

$$\begin{aligned} + d_{N-1,3} \left(A_{N-1}(\rho)e_{N-1}(b_{N-1}, \rho) + B_{N-1}(\rho)E_{N-1}(b_{N-1}, \rho) \right) - \\ - A(\rho)e'(b_{N-1}, \rho) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, получили линейную алгебраическую систему (16) относительно $A_k(\rho)$, $B_k(\rho)$ и $A(\rho)$. Определитель этой системы обозначим $\delta(\rho)$. Используя (4) и (5), получаем при $|\rho| \rightarrow \infty$ равномерно в $S_{j,\delta}$:

$$\begin{aligned} \delta(\rho) &= (i\rho)^N a_1 \gamma_j \mathcal{E}_1(\rho(b_1 - b_0)) \mathcal{E}_2(\rho(b_2 - b_1)) \dots \\ &\dots \mathcal{E}_{N-1}(\rho(b_{N-1} - b_{N-2})) [1], \end{aligned} \quad (17)$$

где γ_j определены в (12). Решая систему (16) по правилу Крамера и используя (4), (5), (15) и (17), вычисляем при $\rho \in S_\delta$:

$$\left. \begin{aligned} |\Phi^{(\nu)}(x, \lambda)| &\leq C|\rho^{\nu-1}\mathcal{E}_1^{-1}(\rho(x-b_0))|, & x \in [b_0, b_1], \\ |\Phi^{(\nu)}(x, \lambda)| &\leq C|\rho^{\nu-1}\mathcal{E}_1^{-1}(\rho(b_1)-b_0)\mathcal{E}_{k-1}^{-1}(\rho(b_{k-1})- \\ &\quad -b_{k-2})\mathcal{E}_k^{-1}(\rho(x-b_{k-1}))| \\ x &\in [b_{k-1}, b_k), & k = \overline{2, N}, \quad \nu = 0, 1. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Так как главные части в формулах (4) и (5) не зависят от q, h и d_{k3} , то

$$\left. \begin{aligned} |\Phi^{(\nu)}(x, \lambda) - \tilde{\Phi}^{(\nu)}(x, \lambda)| &\leq C|\rho^{\nu-2}\mathcal{E}_1^{-1}(\rho(x-b_0))|, & x \in [b_0, b_1], \\ |\Phi^{(\nu)}(x, \lambda) - \tilde{\Phi}^{(\nu)}(x, \lambda)| &\leq C|\rho^{\nu-2}\mathcal{E}_1^{-1}(\rho(b_1)-b_0)\mathcal{E}_{k-1}^{-1}(\rho(b_{k-1})- \\ &\quad -b_{k-2})\mathcal{E}_k^{-1}(\rho(x-b_{k-1}))| \\ x &\in [b_{k-1}, b_k), & k = \overline{2, N}, \quad \nu = 0, 1. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Введем матрицу $P(x, \lambda) = [P_{jk}(x, \lambda)]_{j,k=1,2}$ по формуле $P(x, \lambda)\tilde{\Psi}(x, \lambda) = \Psi(x, \lambda)$. Тогда

$$P_{12}(x, \lambda) = (\det \tilde{\Psi}(x, \lambda))^{-1} \left(\tilde{\varphi}(x, \lambda)\Phi(x, \lambda) - \varphi(x, \lambda)\tilde{\Phi}(x, \lambda) \right), \quad (20)$$

$$P_{11}(x, \lambda) = (\det \tilde{\Psi}(x, \lambda))^{-1} \left(\varphi(x, \lambda)\tilde{\Phi}'(x, \lambda) - \tilde{\varphi}'(x, \lambda)\Phi(x, \lambda) \right), \quad (21)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} P_{11}(x, \lambda) - 1 &= (\det \tilde{\Psi}(x, \lambda))^{-1} \left(\left(\varphi(x, \lambda) - \tilde{\varphi}(x, \lambda) \right) \tilde{\Phi}'(x, \lambda) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\Phi(x, \lambda) - \tilde{\Phi}(x, \lambda) \right) \tilde{\varphi}'(x, \lambda) \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Так как $M(\lambda) = \tilde{M}(\lambda)$, то из (7) вытекает, что

$$\Phi(x, \lambda) = S(x, \lambda) + M(\lambda)\varphi(x, \lambda), \quad \tilde{\Phi}(x, \lambda) = \tilde{S}(x, \lambda) + M(\lambda)\tilde{\varphi}(x, \lambda).$$

Вместе с (20) и (21) это дает, что при каждом фиксированном $x \in [0, T]$ функции $P_{1k}(x, \lambda)$ являются целыми по λ порядка $1/2$. С другой стороны, учитывая (8), (13)–(14), (18)–(19), (20) и (22), получаем при $\rho \in S_\delta$: $|P_{12}(x, \lambda)| \leq C|\rho|^{-1}$, $|P_{11}(x, \lambda) - 1| \leq C|\rho|^{-1}$. Используя теоремы Фрагмена – Линделефа и Лиувилля, заключаем, что $P_{12}(x, \lambda) \equiv 0$, $P_{11}(x, \lambda) \equiv 1$. Тогда $\varphi(x, \lambda) \equiv \tilde{\varphi}(x, \lambda)$, $\Phi(x, \lambda) \equiv \tilde{\Phi}(x, \lambda)$, следовательно, $q(x) = \tilde{q}(x)$ п. в. на $(0, T)$ и $h = \tilde{h}$, $d_{k3} = \tilde{d}_{k3}$. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 1.1660.2017/4.6) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00102).

БИБЛИОГРАФИЯ

1. *Yurko V. A.* Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-Posed Problems. Series 31. Utrecht, VSP, 2002. 306 p. DOI: <https://doi.org/10.1515.9783110940961>

УДК 519.6:532

Е. А. Желтов, В. С. Кожанов

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ
С ПРИМЕНЕНИЕМ АЛГОРИТМА
ШАРНИРНО-СОЧЛЕНЕННОГО ТЕЛА**

Поступила 02.06.2019 г.

Рассматривается система тел, состоящая в общем случае из n последовательно соединенных *хорд*, где в качестве соединений выступают так называемые *связки*. Под хордой в данном случае понимается какое-либо твердое тело. Под связкой понимается соединение между двумя хордами (например, пружина, демпфер и т.п.). Для моделирования динамики данной системы тел применяется алгоритм шарнирно-сочлененного тела (articulated body algorithm, АВА).

Алгоритм шарнирно-сочлененного тела позволяет решать задачу динамики для манипулятора, представленного кинематической цепью без ответвлений, или кинематическим деревом, и не поддерживает замкнутых контуров.

Для моделирования процесса использовалось программное обеспечение OpenFOAM с применением решателей rigidbodyDynamics и interFoam. Решатель InterFoam предназначен для расчета течения двух несжимаемых изотермических несмешивающихся жидкостей, движение которых подчинено уравнениям Навье – Стокса. Решатель rigidbodyDynamics применяется для моделирования движения твердых тел, соединенных друг с другом связками [1].

Рассмотрено три случая плавания в ячейке с жидкостью сочлененных тел, которые приводятся в движение синусоидальной волной, идущей из одного угла ячейки в противоположный. Ячейка имеет кубическую форму и содержит внутри сочлененное тело. Картина изменения положения тел внутри ячейки представлена на рис. 1–3 в последовательные моменты времени (3, 6, 9 и 12 секунд после начала движения).

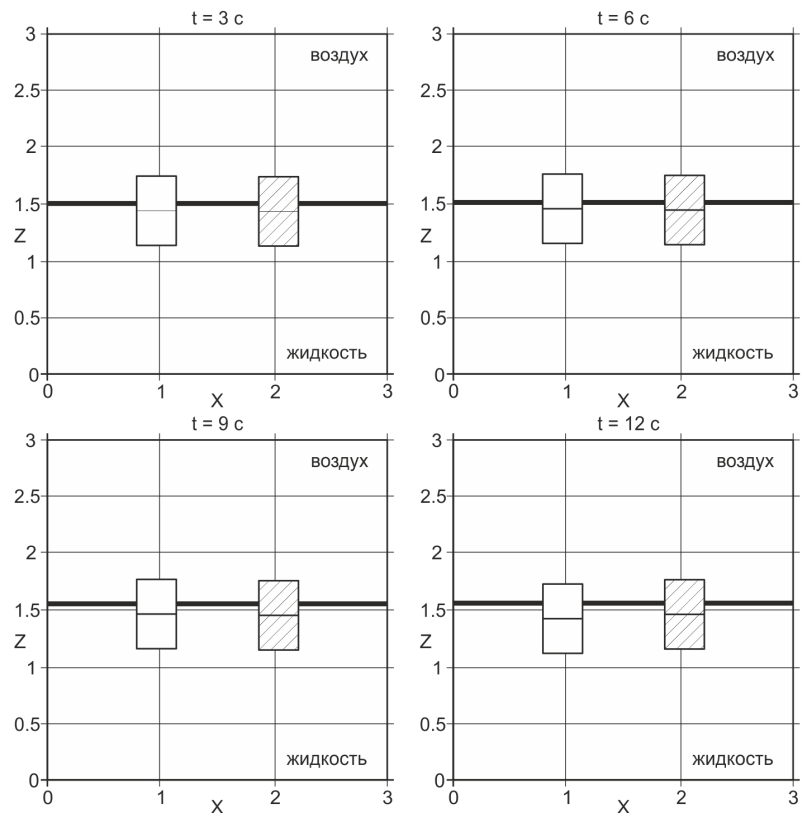


Рис. 1

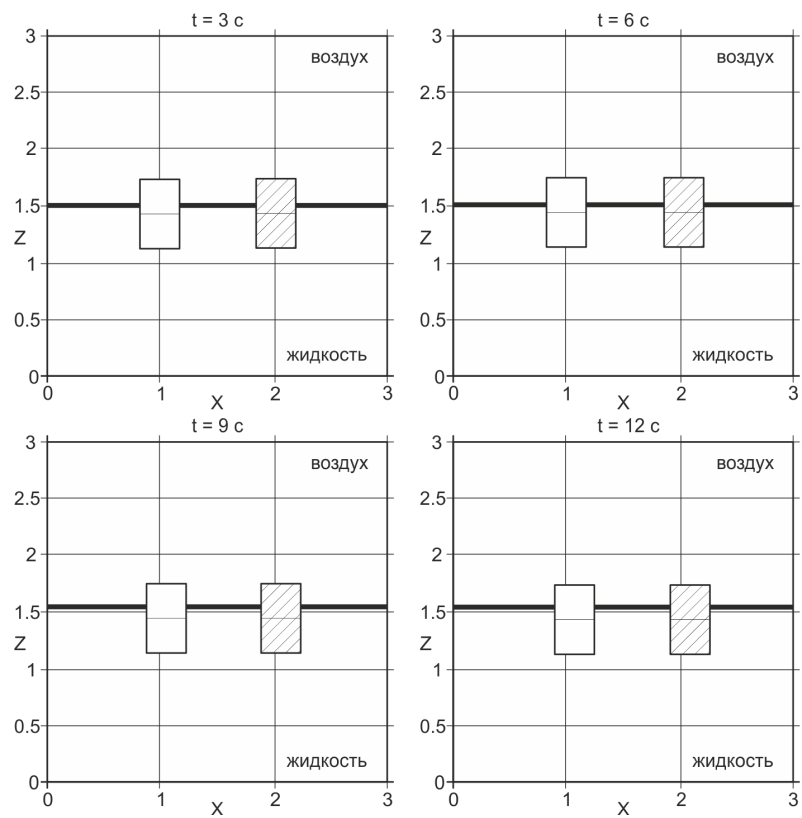


Рис. 2

Рисунки представляют собой срез ячейки плоскостью, перпендикулярной оси OY и проходящей через ее центр. Плавающие тела изображены прямоугольниками: 1-е – чистым, 2-е – заштрихованным. Граница раздела воздух – жидкость изображена толстой горизонтальной линией. Ее положение меняется с течением времени вследствие изменения уровня жидкости, вызванного волной. Связки (пружины) не изображены.

В первом случае (рис. 1) имеются два тела, плавающих в жидкости. Тела соединены с дном ячейки (плоскость $Z = 0$) при помощи ограничителя `linearSpring` (пружина). Между собой тела не соединены.

Во втором случае (рис. 2) рассматриваются те же тела, но между ними имеется соединение в виде ограничителя `linearSpring`. Можно отметить, что тела за счет дополнительной связи практически не перемещаются в вертикальной плоскости, но увлекаются волной вправо.

В третьем случае (рис. 3) 1-е тело с помощью ограничителя `linearSpring` прикреплено к боковой грани ячейки (плоскость $X = 0$), а 2-е, как и в первом случае, прикреплено ко дну. Отсутствие закрепления ко дну для 1-го тела приводит к его существенной подвижности в вертикальном направлении.

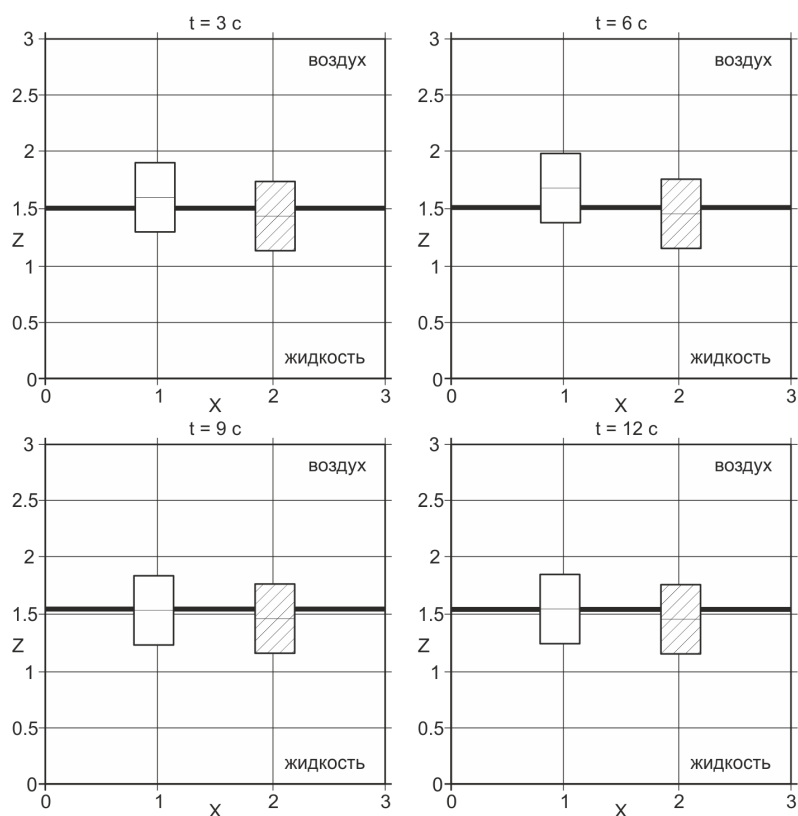


Рис. 3

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Navdeep K. A rigidBodyDynamics tutorial with demonstrations // Proceedings of CFD with OpenSource Software / ed. by H. Nilsson. Gothenburg : Chalmers University of Technology, 2016. P. 297–326.

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ ВБЛИЗИ УСКОРЯЮЩЕЙСЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛОСКОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

Поступила 02.06.2019 г.

В работе в автомодельной постановке рассмотрена задача о течении в пограничном слое (ПС), возникающем вблизи поверхности нагретой бесконечной плоской горизонтальной пластины, которая из состояния покоя начинает ускоренное движение в степенной неньютоновской жидкости с нелинейной теплопроводностью. Конвективный перенос массы и тепла не учитывается. Исследовано влияние параметра, характеризующего интенсивность разгона пластины.

Наиболее существенным отличием данной работы от подобных (например, [1]) является то, что в них жидкость полагается ньютоновской, а теплопередача в среде подчиняется закону Фурье.

1. Рассмотрим пространство, заполненное вязкой несжимаемой степенной неньютоновской жидкостью с нелинейной теплопроводностью. В жидкость горизонтально помещена бесконечная плоская пластина. До некоторого момента времени $t_0 = 0$, принимаемого за начальный, пластина и жидкость покоятся и имеют одинаковую температуру $T_\infty = \text{const}$. В момент времени, следующий за начальным, пластина мгновенно приобретает температуру $T_w = \text{const} > T_\infty$ и начинает ускоренное движение параллельно своей плоскости со скоростью $U_w(t) = At^\alpha$ ($A = \text{const}$, $\alpha = \text{const} > 0$). Вследствие действия сил вязкости вблизи поверхности пластины образуется пограничный слой.

2. Чтобы описать начальную стадию неустановившегося автомодельного течения жидкости в пограничном слое вблизи ускоряющейся нагретой бесконечной плоской пластины без учета тепла, которое выделяется вследствие работы сил вязкости, необходимо решить краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$|\varphi'|^{n-1} \varphi'' + a\eta\varphi' - \alpha\varphi = 0, \quad (1)$$

$$|\vartheta'|^{m-1} \vartheta'' + k\text{Pr}^* a\eta\vartheta' = 0, \quad (2)$$

$$a = \frac{\alpha(n-1)+1}{n+1}, \quad m = \frac{n-\alpha(n-1)}{\alpha(n-1)+1}, \quad k = m^{-1}n^{1/[\alpha(n-1)+1]},$$

с граничными условиями на поверхности пластины при $\eta = 0$

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = a_1, \quad \vartheta(0) = 1, \quad \vartheta'(0) = a_2 \quad (3)$$

и вдали от пластины при $\eta \rightarrow +\infty$

$$\varphi|_{\eta \rightarrow +\infty} \rightarrow 0, \quad \vartheta|_{\eta \rightarrow +\infty} \rightarrow 0. \quad (4)$$

Здесь $\varphi = \varphi(\eta)$, $\vartheta = \vartheta(\eta)$ – автомодельные представители продольной составляющей скорости u и температуры T соответственно, η – независимая автомодельная переменная, $n > 0$ – показатель степени в реологической модели степенной неньютоновской жидкости Оствальда-де Ваале, \mathbf{Pr}^* – обобщенное число Прандтля. Через a_1 , a_2 обозначены неизвестные начальные условия. Штрихами обозначены производные соответствующего порядка по независимой переменной. Так как пластина расположена в жидкости горизонтально, то конвективный член в (1) отсутствует.

Размерные и безразмерные автомодельные величины связаны соотношениями

$$u = At^\alpha \varphi, \quad T = T_\infty + (T_w - T_\infty) \vartheta, \\ \eta = y \left(\frac{\mu^*}{\rho} n A^{n-1} t^{\alpha(n-1)+1} \right)^{-\frac{1}{n+1}},$$

где t – время, y – координата, ρ – плотность, μ^* – реологический параметр, характеризующий степенную неньютоновскую жидкость. Поскольку пластина рассматривается бесконечной в направлении x , то искомые параметры не зависят от x .

3. Как и в [2,3], для численного решения краевой задачи (1)–(4) был применён метод пристрелки, представляющий собой комбинацию метода Ньютона и метода Рунге – Кутты 4-го порядка.

На рис. 1 показано распределение безразмерного представителя продольной составляющей скорости при следующих значениях параметров: $\alpha = 0, 1, 2$ и $n = 0.8, 1.2$. На рис. 2–4 представлены изменения безразмерного представителя температуры для трех значений числа \mathbf{Pr}^* при тех же значениях параметров α и n .

Параметры α и n оказывают одинаковое влияние на толщину динамического ПС: толщина уменьшается как при увеличении α , так и при увеличении n . На изменение толщины температурного ПС параметры α и n влияют так: при $n = 1$ толщина не изменяется с изменением α , при $n > 1$ толщина увеличивается при увеличении α , при $n < 1$ толщина уменьшается при увеличении α . При увеличении числа \mathbf{Pr}^* толщина температурного ПС также уменьшается.

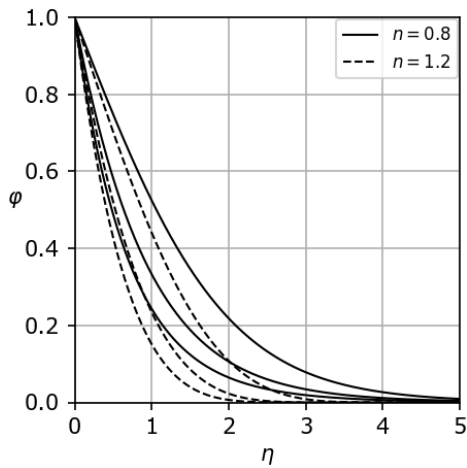


Рис. 1

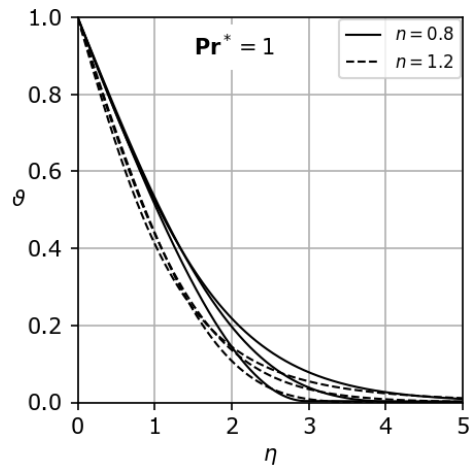


Рис. 2

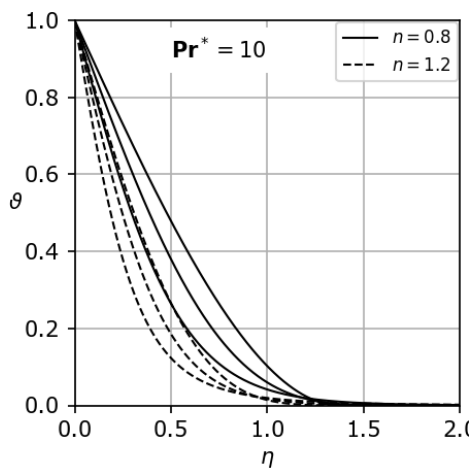


Рис. 3

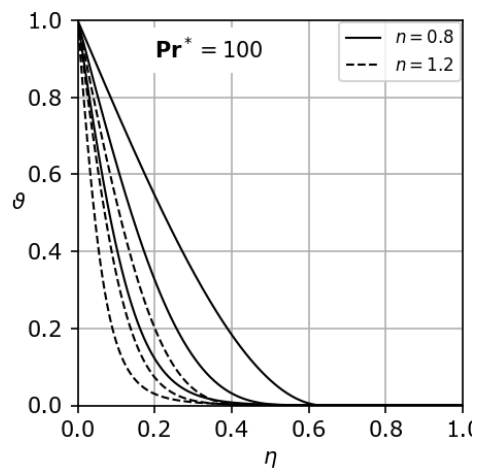


Рис. 4

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Vemula R., Debnath L., Chakrala S.* Unsteady MHD free convection flow of nanofluid past an accelerated vertical plate with variable temperature and thermal radiation // *Int. J. Appl. Comput. Math.* 2016. Vol. 3, № 2. P. 1271–1287.
2. *Кожанов В. С., Устужкин Е. С.* Применение метода преобразования к решению автомодельной задачи о слое смешения // *Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2016. Вып. 18. С. 107–110.*
3. *Кожанов В. С., Мыльцина А. С.* Температурный пограничный слой вблизи передней критической точки затупленного тела с пористой поверхностью // *Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2018. Вып. 20. С. 97–99.*

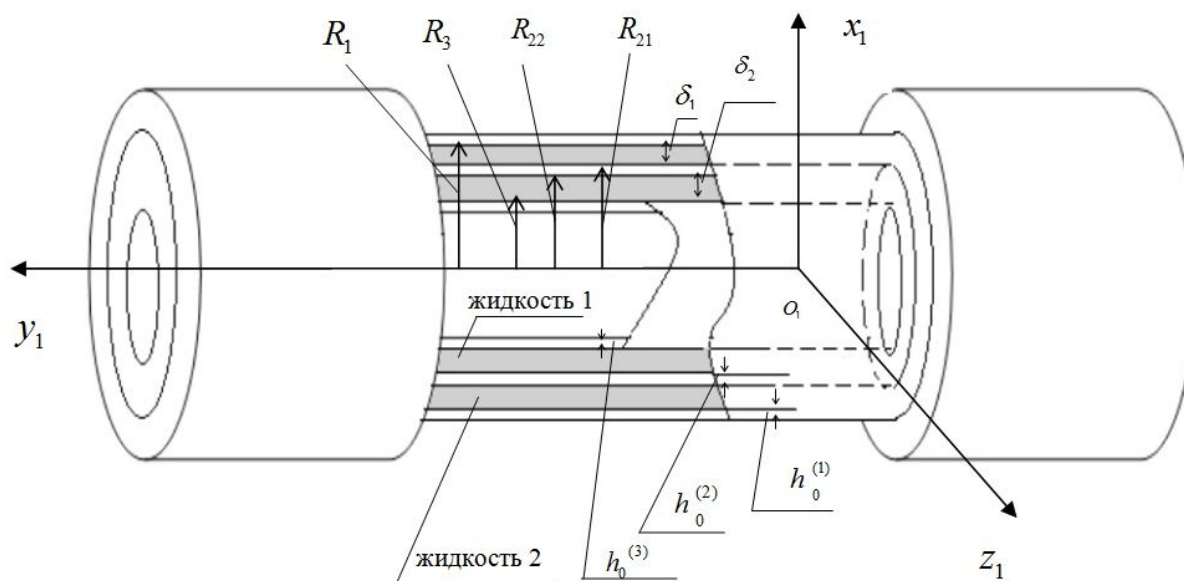
Д. В. Кондратов, А. Ю. Ребрина,
О. В. Елистратова, Е. В. Попова

ИССЛЕДОВАНИЕ АЧХ ТРЕХ СООСНЫХ ОБОЛОЧЕК, СВОБОДНО ОПЕРТЫХ НА КОНЦАХ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С ДВУМЯ СЛОЯМИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В УСЛОВИЯХ ВИБРАЦИИ

Поступила 10.07.2019 г.

Одна из основных задач современного машино- и агрегатостроения состоит в уменьшении общего веса конструкции при сохранении износоустойчивости при различных внешних воздействиях, вызванных различным факторами, в частности вибрационными перегрузками. Уменьшение веса конструкции достигается за счет применения тонкостенных конструкций, а поддержание устойчивости к внешним воздействиям – использованием жидкости для демпфирования колебаний [1–3]. Такие конструкции, состоящие из соосных тонкостенных конструкций и вязкой жидкости между ними, широко применяются в современном железнодорожном, автомобильном и авиационном транспорте, а также ракетно-космических системах [4–6].

Данная статья является продолжением исследования, представленного в [1]. Механическая модель исследуемой системы представлена на рисунке.



Механическая система

Как и ранее, механическая система состоит из трех соосных упругих цилиндрических оболочек конечной длины, свободно опертых на концах. Между оболочками находятся вязкие несжимаемые жидкости. Радиус внутренней оболочки значительно больше ширины каждого цилиндрического зазора между оболочками. Система является термостабилизированной. На систему действует переносная сила виброускорения.

Математическая модель указанной механической системы представляет собой связанную систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных Навье – Стокса и уравнение неразрывности для описания движения каждой вязкой несжимаемой жидкости, уравнений в частных производных для описания динамики каждой из трех упругих соосных цилиндрических оболочек, основанных на гипотезах Кирхгофа – Лява, и соответствующих граничных условий для жидкостей и оболочек.

Процесс получения амплитудно-частотных характеристик прогибов оболочек представлен в [1]. Рассмотрены частные случаи математической модели, когда одна из оболочек является абсолютно жесткой. Создана программа для расчетов амплитудно-частотных и фазочастотных характеристик. Проведено численное исследование влияния на АЧХ и давления в жидкости параметров механической системы. Было произведено численное моделирование поведения АЧХ. В широком диапазоне параметров найдены резонансные частоты и значения амплитудных характеристик, оказывающие негативное влияние на конструкцию, и определено влияние типоразмеров и параметров жидкости на амплитудно-частотные характеристики оболочек механической системы.

Численное моделирование показало, что изменением размеров механической системы или параметров жидкости можно не только сдвигать резонансные частоты в необходимый безопасный диапазон частот, но и уменьшить их величину и количество.

Таким, образом, проведено исследование поведения АЧХ прогибов трех соосных цилиндрических оболочек со свободным опиранием на концах трубы при наличии внешнего источника вибрации. Результаты данного исследования могут быть использованы при моделировании процессов в сложных системах, представленных тремя упругими цилиндрическими соосными тонкостенными оболочками с жидкостью между ними, к которым относятся оболочки защиты атомных реакторов, детали двигателей и корпусов ракет, телескопические шасси самолетов, двигатели внутреннего сгорания, гидropневматические подвески, элементы насосных двигателей [2–6]. Так, разработчики уже на этапе проектирования при использовании предложенных математических моделей смогут про-

известить расчеты и выбрать оптимальные параметры системы для устойчивости системы к перепадам давления в реальных условиях.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 18-01-00127а, № 19-01-00014-а) и гранта Президента РФ (МД-756.2018.8).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кондратов Д. В., Ребрина А. Ю., Елистратова О. В., Попова Е. В. Динамика взаимодействия трех соосных оболочек, свободно опертых на концах, взаимодействующих с двумя слоями вязкой жидкости в условиях вибрации // Математика. Механика. Саратов : Из-во Саратов. ун-та, 2018. Вып. 20. С. 103–105.

2. Баица Т. М. Машиностроительная гидравлика. М. : Машгиз, 1963. 696 с.

3. Елистратова О. В., Кондратов Д. В. Моделирование динамики трех упругих соосных оболочек свободно опертых на концах, взаимодействующих с двумя пульсирующими слоями жидкости, находящихся между ними при пульсации давления // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2016. № 1. С. 11–15.

4. Кондратов Д. В., Могилевич Л. И. Возмущающие моменты в поплавковых гироскопах и акселерометрах с упругим корпусом // Авиакосмическое приборостроение. 2003. № 11. С. 3–19.

5. Кондратова Ю. Н., Кондратов Д. В., Могилевич Л. И. Гидроупругость трубопровода кольцевого профиля со свободным опиранием при воздействии вибрации // Вестн. Саратов. гос. техн. ун-та. 2011. Т. 4, № 4 (62). С. 9–14.

6. Кондратов Д. В., Кондратова Ю. Н., Могилевич Л. И., Плаксина И. В. Гидроупругость трубы кольцевого профиля при воздействии вибрации при различных ее закреплениях // Вестн. Саратов. гос. техн. ун-та. 2011. Т. 4, № 1 (59). С. 29–37.

УДК 539.3

Е. Ю. Крылова, И. В. Папкина

ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИИ СЕТКИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ МИКРОПОЛЯРНОЙ СЕТЧАТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ МОДЕЛИ ТИМОШЕНКО

Поступила 24.06.2019 г.

В работе рассматривается сетчатая цилиндрическая микрополярная панель, занимающая в пространстве \mathbf{R}^3 область $\Omega = \{0 \leq x \leq c; 0 \leq y \leq b; -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}\}$. Панель состоит из n семейств густо расположенных ребер одного материала, что позволяет использовать континуальную модель, подразумевающую осреднение ребер по поверхности панели. Математическая модель колебаний рассматриваемой панели строится на гипотезах С. П. Тимошенко, при этом наряду с обычным полем напряжений учитываются также и моментные напряжения. То есть материал

панели рассматривается как псевдоконтинуум Коссера со стесненным вращением частиц, что приводит к появлению в модели дополнительного параметра длины l , связанного с симметричным тензором изгиба-кручения. Приведём определяющие соотношения для материала панели:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1 - \nu^2} [e_{xx} + \nu e_{yy}], \quad x \leftrightarrow y, \quad \sigma_{xy} = \frac{E}{1 + \nu} e_{xy},$$

$$m_{ij} = \frac{El^2}{1 + \nu} \chi_{ij}, \quad i, j = x, y, z.,$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, m_{ij} – компоненты симметричного тензора момента высшего порядка, χ_{ij} – компоненты симметричного тензора изгиба-кручения, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона. Уравнения движения в смешанной форме элемента гладкой пластины, эквивалентной сетчатой, граничные и начальные условия получены из энергетического принципа Гамильтона – Остроградского. Напряжения, возникающие в эквивалентной гладкой панели, связанные с напряжениями в ребрах, составляющих углы ϕ_j с осью абсцисс, будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_x^j \delta_j \cos^2 \phi_j}{a_j}, \quad \sigma_{yy} = \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_x^j \delta_j \sin^2 \phi_j}{a_j}, \\ \sigma_{xy} &= \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_x^j \delta_j \cos \phi_j \sin \phi_j}{a_j}, \quad \sigma_{zx} = \sum_{j=1}^n \frac{\tau^j \delta_j \cos \phi_j}{a_j}, \\ \sigma_{zy} &= \sum_{j=1}^n \frac{\tau^j \delta_j \sin \phi_j}{a_j}, \quad m_{xx} = \sum_{j=1}^n \frac{m_x^j \delta_j \cos^2 \phi_j}{a_j}, \\ m_{yy} &= \sum_{j=1}^n \frac{m_x^j \delta_j \sin^2 \phi_j}{a_j}, \quad m_{xy} = \sum_{j=1}^n \frac{m_x^j \delta_j \cos \phi_j \sin \phi_j}{a_j}, \\ m_{xz} &= \sum_{j=1}^n \frac{m_x^j \delta_j \cos \phi_j}{a_j}, \quad m_{yz} = \sum_{j=1}^n \frac{m_x^j \delta_j \sin^2 \phi_j}{a_j}, \quad m_{zz} = \sum_{j=1}^n \frac{m_x^j \delta_j}{a_j}, \end{aligned} \quad (1)$$

где n – количество семейств ребер, δ_j , a_j , ϕ_j – расстояние между ребрами, ширина ребер, угол между осью x и осью ребер j -го семейства соответственно. Напряжения с индексом j относятся к стержням.

Физические соотношения для сетчатой пластины определяются на основании метода множителей Лагранжа:

$$\begin{aligned} \{\sigma^j, m^j\} &= \{\sigma_{xx}, m_{xx}\} \cos^2 \phi_j + \{\sigma_{yy}, m_{yy}\} \sin^2 \phi_j + \{\sigma_{xy}, m_{xy}\} \cos \phi_j \sin \phi_j, \\ \{\sigma_z^j, m_z^j\} &= \{\sigma_{zx}, m_{zx}\} \cos \phi_j + \{\sigma_{zy}, m_{zy}\} \sin \phi_j, \end{aligned} \quad (2)$$

Положим, что деформация оси какого-либо стержня равна деформации линии, совпадающей с осью этого стержня в расчетной модели. Будем считать, что одна из главных центральных осей поперечных сечений стержней оболочки совпадает с направлением нормали к срединной поверхности панели. Подставляя (1) и (2) в выражения для моментов и усилий в уравнениях движения гладкой пластины, полученных из вариационного принципа, запишем уравнения движения микрополярной пластины сетчатой структуры в смешанной форме [1].

В дальнейшем будем рассматривать панель с двумя семействами ребер $\phi_1 = 45^\circ$, $\phi_2 = 135^\circ$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, $a_1 = a_2 = a$, с учетом безразмерных параметров: $u = \frac{h^2}{c}\bar{u}$, $v = \frac{h^2}{b}\bar{v}$, $x = c\bar{x}$, $y = b\bar{y}$, $w = h\bar{w}$, $\gamma_x = \frac{h^2}{c^2}\bar{\gamma}_x$, $\gamma_y = \frac{h^2}{b^2}\bar{\gamma}_y$, $\delta = h\bar{\delta}$, $a = h\bar{a}$, $l = h\bar{l}$, $k_y = \frac{h}{b^2}\bar{k}_y$, $q = \frac{Eh^4}{b^4}\bar{q}$, $t = b\sqrt{\frac{\rho}{E}}\bar{t}$, $\epsilon = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{\rho}{E}}\bar{\epsilon}$, где ϵ – коэффициент диссипации среды, ρ – плотность материала панели, $q = q_0 \text{Sin}(\omega_p)t$ – внешняя нормальная нагрузка, q_0 и ω_p – ее интенсивность и частота, t – время. Уравнения движения элемента рассматриваемой панели примут вид (черта над безразмерными переменными опущена):

$$\begin{aligned}
& l^2(\nu-1) \left[-\frac{h^2}{b^2} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{h^2}{b^2} \frac{\partial^4 v}{\partial x \partial y^3} - \frac{h^2}{c^2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{h^2}{c^2} \frac{\partial^4 v}{\partial x^3 \partial y} - 2\sqrt{2} \frac{h^2}{cb} \frac{\partial^3 \gamma_x}{\partial y^3} + 2\sqrt{2} \frac{h^2}{cd} \frac{\partial^3 \gamma_y}{\partial x \partial y^2} \right] + \\
& + 2(\nu-1) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4k_y(\nu+1) \frac{\partial w}{\partial x} - 2(3+\nu) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 4(\nu+1) \frac{b^2}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{8a(\nu^2-1)}{\delta} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\
& l^2(\nu-1) \left[\frac{h^2}{c^2} \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} - \frac{h^2 b^2}{c^4} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \frac{h^2}{c^2} \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{h^2 b^2}{c^4} \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} + 2\sqrt{2} \frac{h^2 b}{c^3} \frac{\partial^3 \gamma_x}{\partial x \partial y^2} - 2\sqrt{2} \frac{h^2}{c^2} \frac{\partial^3 \gamma_y}{\partial x^2 \partial y} \right] - \\
& - 4(\nu+1) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 4k_y(\nu+1) \frac{\partial w}{\partial y} - 2(3+\nu) \frac{b^2}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2(\nu-1) \frac{b^2}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{8a(\nu^2-1)}{\delta} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \\
& l^2(\nu-1) \left[\frac{h}{b} \frac{\partial^3 \gamma_y}{\partial y^3} - \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{hb^2}{c^3} \frac{\partial^3 \gamma_x}{\partial x \partial y^2} - \frac{hb}{c^2} \frac{\partial^3 \gamma_y}{\partial x^2 \partial y} + 2 \frac{b^2}{c^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{hb^2}{c^3} \frac{\partial^3 \gamma_y}{\partial x^3} - \frac{b^4}{c^4} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right] + \\
& + 8k_y^2(1+\nu)w + 8k_s(\nu-1) \frac{\partial \gamma_y}{\partial x} - 8k_y(1+\nu) \frac{b^2}{h^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 8k_s(\nu-1) \frac{b^4}{c^3 h} \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} - 8k_y(1+\nu) \frac{b^2}{c^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \\
& + 8k_s(\nu-1) \frac{b^4}{c^2 h^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{16a(\nu^2-1)}{\delta} \left(\frac{b^2}{h^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \epsilon \frac{b^2}{h^2} \frac{\partial w}{\partial t} + q \right); \\
& 48k_s \frac{b^2}{h^2} \gamma_x - 2(1-30l^2) \frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial y^2} + l^2 \frac{h^2}{b^2} \frac{\partial^4 \gamma_x}{\partial y^4} + 48k_s \frac{cb^2}{h^3} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{2[3-33l^2+33l^2\nu+\nu]}{\nu-1} \frac{c}{b} \frac{\partial^2 \gamma_y}{\partial x \partial y} - \\
& - 6l^2 \frac{c}{h} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - l^2 \frac{h^2 c}{b^3} \frac{\partial^4 \gamma_y}{\partial x \partial y^3} + \frac{2[2+3l^2+2\nu-3l^2\nu]}{\nu-1} \frac{b^2}{c^2} \frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial x^2} + l^2 \frac{h^2}{c^2} \frac{\partial^4 \gamma_x}{\partial x^2 \partial y^2} + l^2 \frac{b^2}{ch} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \\
& - l^2 \frac{h^2}{cb} \frac{\partial^4 \gamma_y}{\partial x^3 \partial y} - 12\sqrt{2} l^2 \frac{c}{b} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 12\sqrt{2} l^2 \frac{c}{b} \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^3} = -\frac{8a(\nu+1)}{\delta} \frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial t^2}; \\
& 48k_s \frac{b^2}{h^2} \gamma_y + 48k_s \frac{b^3}{h^3} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{2[2+3l^2+2\nu-3l^2\nu]}{\nu-1} \frac{\partial^2 \gamma_y}{\partial y^2} - l^2 \frac{bh^2}{c^3} \frac{\partial^4 \gamma_x}{\partial x \partial y^3} + 6l^2 \frac{b}{h} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \\
& + \frac{2[3+33l^2+33l^2\nu+\nu]}{\nu-1} \frac{b^3}{c^3} \frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial x \partial y} - 2(1+30l^2) \frac{b^2}{c^2} \frac{\partial^2 \gamma_y}{\partial x^2} - 6l^2 \frac{b^3}{c^2 h} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + l^2 \frac{h^2}{c^2} \frac{\partial^4 \gamma_y}{\partial x^2 \partial y^2} -
\end{aligned}$$

$$-l^2 \frac{h^2 b^3}{c^5} \frac{\partial^4 \gamma_x}{\partial x^3 \partial y} + l^2 \frac{h^2 b^2}{c^4} \frac{\partial^4 \gamma_y}{\partial x^4} + 12\sqrt{2} l^2 \frac{b^2}{c^2} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} - 12\sqrt{2} l^2 \frac{b^2}{c^2} \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = -\frac{\partial}{\partial} \frac{8a(v+1)}{\delta} \frac{\partial^2 \gamma_y}{\partial t^2}.$$

Граничные условия – жесткая заделка, начальные условия нулевые. Влияние учета моментных напряжений на поведение пластины Кирхгофа исследовалось в статье [2]. Анализ собственных частот цилиндрической панели Кирхгофа – Лява с учетом микрополярной теории и сетчатой структуры проводился в работе [3]. В настоящей работе получены собственные частоты ω_0 колебаний сетчатой цилиндрической микрополярной панели Тимошенко в зависимости от толщины ребра δ , расстояния между ребрами сетки a и значения дополнительного параметра l . Параметры эксперимента: $c = 1$, $b = 1$, $h = 0.2$, $k_y = 12$. Изменение параметра l несущественно влияет на изменение частоты собственных колебаний. При увеличении толщины ребра δ частота собственных колебаний цилиндрической панели увеличивается, при увеличении расстояния между ребрами a частота собственных колебаний цилиндрической панели уменьшается (таблица). Результаты, полученные для цилиндрической панели модели Тимошенко, согласуются с результатами, полученными для цилиндрических панелей модели Кирхгофа – Лява.

Зависимость частоты собственных колебаний ω_0
от геометрии сетки

	$\delta = 0.5$	$\delta = 1$	$\delta = 2$	$\delta = 3$	$\delta = 4$	$\delta = 5$
ω_0	36	50	71	101	114	114.2
	$a = 0.5$	$a = 1$	$a = 2$	$a = 3$	$a = 4$	$a = 5$
ω_0	49	35.5	25	20	17.6	15.9

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00351 А).

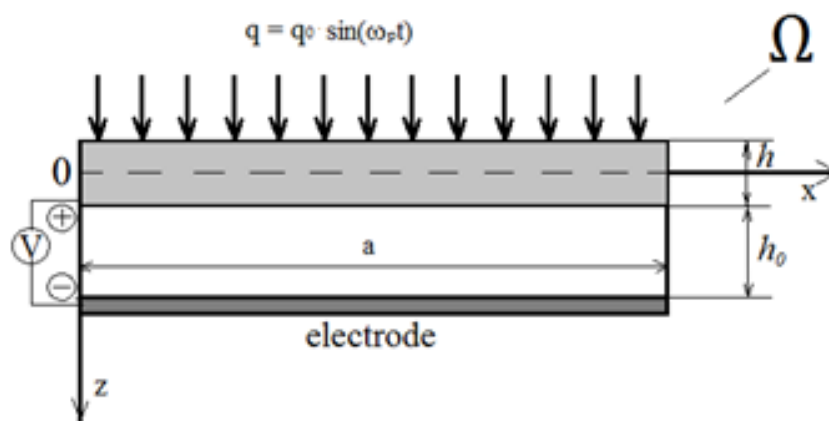
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Крылова Е. Ю., Папкова И. В., Салтыкова О. А., Синичкина А. О., Крысько-мл. В. А. Математическая модель колебаний размерно-зависимых цилиндрических оболочек сетчатой структуры с учетом гипотез Кирхгофа – Лява // Нелинейный мир. 2018. Т. 16, № 4. С. 17–28.
2. Krylova E. Yu., Papkova I. V., Sinichkina A. O., Yakovleva T. V., Kryskoyang V. A. Mathematical model of flexible dimension-dependent mesh plates // IOP Conf. Series : Journal of Physics : Conf. Series. 2019. Vol. 1210, iss. 1. 012073. DOI: 10.1088/1742-6596/1210/1/012073
3. Крылова Е. Ю., Папкова И. В., Салтыкова О. А., Яковлева Т. В., Крысько-мл. В. А. Анализ собственных частот микрополярной сетчатой цилиндрической панели Кирхгофа – Лява // Проблемы машиноведения : материалы III Международ. науч.-техн. конф. : в 2 ч. ; науч. рук. П. Д. Балакин. Омск : Омск. гос. техн. ун-т, 2019. С. 278–282.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОЛЕБАНИЙ НАНОБАЛКИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В СТАЦИОНАРНОМ ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ И ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛЫ ВАН-ДЕР-ВААЛЬСА

Поступила 24.06.2019 г.

Влияние температурных полей на колебания балок без учета их размерно-зависимого поведения исследовано в работах [1, 2]. В настоящей работе построена математическая модель колебаний нанобалки, соединенной с электродом на расстоянии h_0 , находящейся в стационарном температурном поле, под действием силы Ван-дер-Ваальса и поперечной знакопеременной нагрузки. В частном случае исследована зависимость частоты колебаний от размерно-зависимого параметра материала. Рассматриваемая структура из балки и электрода представляет собой двумерную область пространства \mathbf{R}^2 , которая в декартовой системе координат определяется следующим образом: $\Omega = \{0 \leq x \leq a; -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}; \}$, $0 \leq t \leq \infty$ (рисунок). Используется модифицированная моментная теория упругости с учетом модели Эйлера – Бернулли, тело балки упругое и изотропное.



Расчетная схема

Общая теория получена на базе принципа Гамильтона:

$$\int_{t_0}^t (\delta K - \delta \Pi + \delta W) dt = 0,$$

где K , Π – кинетическая и потенциальная энергия соответственно, W – работа внешних сил. В классической теории упругости работа и энергия деформации зависят от тензора напряжений и не зависят от вектора вращения. Однако градиент вектора вращения может представлять собой существенный фактор в уравнениях состояния. Основываясь на модифицированной теории моментных напряжений, представленной Yang с соавт. [3], плотность энергии деформации является функцией как тензора напряжений (сопряжённого с тензором деформации), так и тензора кривизны (сопряжённого с тензором моментных напряжений). Запишем энергию деформации Π :

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \epsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) dt, \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Здесь σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, ϵ_{ij} – компоненты тензора деформаций, m_{ij} – компоненты девиаторной составляющей тензора моментных напряжений, χ_{ij} – симметричный тензор кривизны:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\nabla u + (\nabla u)^T \right), \quad \chi_{ij} = \frac{1}{2} \left(\nabla \theta + (\nabla \theta)^T \right), \quad \theta_i = \frac{1}{2} (\text{rot}(u))_i,$$

где u представляет вектор смещения, θ является бесконечно малым вектором вращения с компонентами θ_i . Для линейного изотропного упругого материала напряжения, вызванные кинематическими параметрами, входящими в выражение для плотности энергии деформация, определяются следующими уравнениями состояния:

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{mm} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}, \quad m_{ij} = 2\mu l^2 \chi_{ij},$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – константы Ламе, l – параметр шкалы длины материала, понимаемый как свойство материала, характеризующее эффект моментного напряжения. Этот параметр математически представляет собой квадрат отношения модуля искривления к модулю сдвига и может быть определён экспериментами для тонких цилиндров на кручение [4] или для тонких стержней на изгиб [5, 6] в микронном масштабе. Далее, используя методы вариационного исчисления, получены системы дифференциальных уравнений теории гибких нанобалок с учетом стационарного температурного поля, сил Ван-дер-Ваальса и поперечной знакопеременной нагрузки:

$$-(1 + \bar{D}_1) \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} - \kappa \frac{\partial^2 \bar{M}_t}{\partial \bar{x}^2} + \bar{q} + \frac{\bar{q}_k}{(1 - \bar{w})^3} = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} + \epsilon \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}}. \quad (1)$$

Запишем граничные условия для жестко заземленной с обоих концов балки:

$$\bar{w}(0, t) = \bar{w}(1, t) = \frac{\partial \bar{w}(0, t)}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \bar{w}(1, t)}{\partial \bar{x}} = 0. \quad (2)$$

Начальные условия:

$$\bar{w}(x, 0) = \frac{\partial \bar{w}(x, 0)}{\partial \bar{x}} = 0. \quad (3)$$

Температурное поле не задается, а определяется из решения уравнений теплопроводности (4):

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{z}^2} = 0 \quad (4)$$

с краевыми условиями для уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned} \bar{T}(x, z) = \text{const}, \quad \bar{z} = -\frac{1}{2}, \quad 0 \leq \bar{x} \leq 1; \quad \bar{T}(x, z) = 0, \quad \bar{z} = -\frac{1}{2}, \quad 0 \leq \bar{x} \leq 1; \\ \bar{T}(x, z) = 0, \quad -\frac{1}{2} \leq \bar{z} \leq \frac{1}{2}, \quad \bar{x} = 0; \quad \bar{T}(x, z) = 0, \quad -\frac{1}{2} \leq \bar{z} \leq \frac{1}{2}, \quad \bar{x} = 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнения (1), (4), граничные (2), (5) и начальные (3) условия приведены к безразмерному виду с учетом: $\bar{x} = \frac{x}{a}$, $\bar{w} = \frac{w}{h_0}$, $\bar{D}_1 = \frac{6l^2(1-2\nu)}{h^2(1-\nu)}$, $\bar{q}_k = \frac{Aa^4}{6\pi D_0 h_0^5}$, $\kappa = \frac{h_0}{h}$, $\alpha = \frac{a}{h}$, $\bar{T} = \alpha T$, $\bar{l} = \frac{l^2}{h^2}$, $\bar{t} = \sqrt{\frac{D_0 h_0}{\rho a^4 h}} t$, $\bar{M}_t = \frac{ah^3}{D_0 h_0^2} M_t$, $\bar{\epsilon} = \sqrt{\frac{\rho a^4 h}{D_0 h_0}} \epsilon$, $\bar{q} = \frac{a^4}{E h_0 h^3} q$, где t – время; w – прогиб; h – толщина пластинки; h_0 – расстояние между электродом и нанобалкой; q – параметр внешней равномерно распределенной нагрузки; ρ – плотность материала; a – длина балки; A – постоянная Хамакера; которая лежит в диапазоне $[0.4; 4] \times 10^{-19}$ Дж в вакууме; T – температура; M_t – температурный момент; $D_0 = \frac{Eh^3(1-\nu)}{12(1+\nu)(1-2\nu)}$ – цилиндрическая жесткость.

Для сведения распределенной системы (1) к задаче Коши воспользуемся методом конечных разностей с аппроксимацией второго порядка точности. Задача Коши решается несколькими методами типа Рунге – Кутты.

В частном случае исследованы колебания стальной нанобалки, находящейся под действием силы Ван-дер-Ваальса, при коэффициенте диссипации среды $\epsilon = 0$. В случае размерно-зависимого параметра $l = 0$ колебания нанобалки происходят на частоте 22.325, при $l = 0.1$ – на частоте 22.384, при $l = 0.3$ – на частоте 22.789, при $l = 0.5$ – на частоте 23.587. Таким образом, при увеличении размерно-зависимого параметра увеличивается частота колебаний нанобалки. Учет температурного поля, расстояние между электродом и балкой не оказывают влияния на частоту колебаний.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-19-00215).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Крылова Е. Ю., Кутепов И. Е., Папкова И. В., Крысько В. А. Математическое моделирование контактного взаимодействия пологих геометрически нелинейных балок Бернулли-Эйлера в рамках связанной задачи термодинамики // Нелинейный мир. 2016. Т. 14, № 7. С. 36–46.
2. Крылова Е. Ю., Папкова И. В., Салтыкова О. А., Крысько В. А. Кинематические гипотезы различных приближений в связанных задачах термодинамики с учетом контактного взаимодействия // Динамика сложных систем – XXI век. 2018. Т. 12, № 1. С. 28–37.
3. Yang F., Chong A. C. M., Lam D. C. C., Tong P. Couple stress based strain gradient theory for elasticity // Int. J. Solids Struct. 2002. Vol. 39. P. 2731–2743.
4. Chong A. C. M., Yang F., Lam D. C. C., Tong P. Torsion and bending of micron-scaled structures // J. Mater. Res. 2001. Vol. 16, № 4. P. 1052–1058.
5. Krysko A. V., Awrejcewicz J., Zhigalov M. V., Pavlov S. P., Krysko V. A. Nonlinear behaviour of different flexible size-dependent beams models based on the modified couple stress theory. Part 2. Chaotic dynamics of flexible beams // Int. J. Non-Linear Mechanics. 2017. Vol. 93. P. 106–121.
6. Awrejcewicz J., Krysko A. V., Pavlov S. P., Zhigalov M. V., Krysko V. A. Chaotic dynamics of size dependent Timoshenko beams with functionally graded properties along their thickness // Mechanical Systems and Signal Processing. 2017. Vol. 93. P. 415–430.

УДК 519.6:629.78

И. А. Панкратов

ГЕНЕТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОЙ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ ПЛОСКОСТИ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Поступила 20.06.2019 г.

В работе предложен генетический алгоритм минимизации затрат энергии на переориентацию плоскости орбиты космического аппарата (КА). В отличие от [1, 2] при применении данного метода не требуется численно решать краевую задачу с подвижным правым концом траектории.

1. Постановка задачи

Предположим, что вектор ускорения \mathbf{u} от тяги реактивного двигателя во все время управляемого движения КА направлен ортогонально плоскости его орбиты. Рассмотрим следующую задачу: пусть необходимо

перевести круговую орбиту КА, движение центра масс которого описывается безразмерными уравнениями [3]

$$2\frac{d\lambda}{dt} = \lambda \circ \omega^b, \quad \omega^b = Nu^b \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 1,$$

из заданного начального состояния

$$t = t_0 = 0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \lambda(0) = \lambda^{(0)} = \Lambda^0 \circ \left(\cos \frac{\varphi_0}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi_0}{2} \right) \quad (1)$$

в конечное состояние, принадлежащее многообразию

$$\begin{aligned} t = t^*, \quad \varphi(t^*) = \varphi^*, \\ \operatorname{tg} \Omega^* = \frac{\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_0 \lambda_2}{\lambda_0 \lambda_1 - \lambda_2 \lambda_3}, \quad \cos I^* = \lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \end{aligned} \quad (2)$$

с помощью кусочно-постоянного управления

$$u(t) = u_k, \quad \text{если } (k-1)h \leq t \leq kh \quad (k = \overline{1, M}), \quad h = t^*/M.$$

При этом количество участков активного движения КА M и время движения t^* полагаются заданными, а конечное положение орбиты в её плоскости не фиксируется. Требуется минимизировать затраты энергии на разворот плоскости орбиты КА.

Здесь λ – нормированный кватернион ориентации орбитальной системы координат (СК) в инерциальной СК X ; \circ – символ кватернионного умножения, N – характерный безразмерный параметр задачи; u^b – проекция вектора ускорения \mathbf{u} на направление вектора момента скорости центра масс КА; $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ – векторные мнимые единицы Гамильтона; φ – истинная аномалия; Λ – кватернион ориентации орбиты КА; Ω – долгота восходящего узла, I – наклонение орбиты КА; u_k – искомое значение управления на k -м участке активного движения КА.

2. Алгоритм решения задачи

Опишем основные этапы генетического алгоритма решения поставленной задачи, следуя [4].

Вначале нужно случайным образом сгенерировать популяцию из N_{\max} пробных решений (особей). Особь – это набор из M вещественных чисел. При этом вместо вещественного числа u_k в памяти хранится целое число (ген).

На втором шаге алгоритма для каждой особи находится по известной формуле (4) [5, с. 85] значение кватерниона ориентации орбитальной СК при $t = t^*$ с начальными условиями (1) (управление задаётся выбранной хромосомой). В качестве значения функции приспособленности (целевой

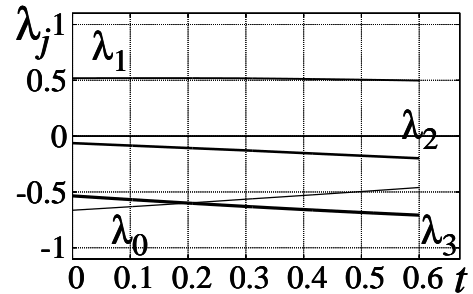
функции) берётся квадратный корень из суммы квадратов погрешностей выполнения двух последних соотношений (2). Если на этом шаге для некоторой особи значение целевой функции меньше наперёд заданного малого числа ε , то выполнение алгоритма заканчивается, а управление, соответствующее данной особи, – это решение задачи.

На третьем шаге алгоритма отбрасывается половина особей, имеющих наибольшие (худшие) значения целевой функции (N_{\max} – чётное число). Затем методом промежуточной рекомбинации [4] производится скрещивание особи с наименьшим значением целевой функции со всеми остальными, в том числе и с самой собой.

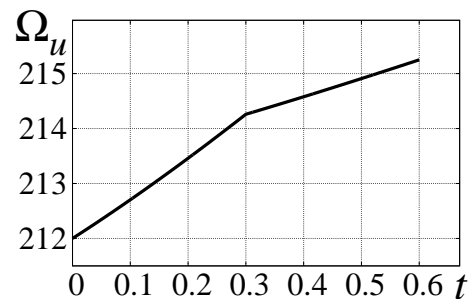
На четвёртом шаге алгоритма вычисляется среднее значение целевой функции для популяции, полученной на третьем шаге. Если оно больше, чем среднее значение целевой функции, вычисленное на втором шаге, то производится мутация особей в популяции. Для этого гены всех особей записываются в двоичном виде (на каждый ген отводится ровно L бит) и с вероятностью $p_{mut} \in (0; 1]$ производится инвертирование случайным образом выбранного бита каждого гена. Затем осуществляется возврат ко второму шагу алгоритма.

Отметим, что описанный алгоритм нужно применять неоднократно для разных начальных популяций. При этом будет получено несколько решений, из которых выбирается то, которое соответствует переориентации плоскости орбиты КА с меньшими затратами энергии.

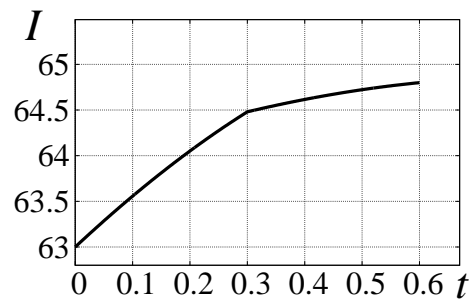
На рисунке приведены результаты решения задачи оптимальной переориентации круговой орбиты КА для



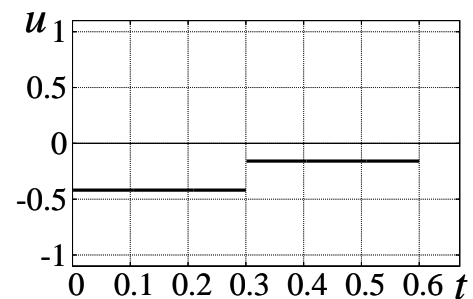
а



б



в



г

Круговая орбита, ГЛОНАСС, $t^* = 0.6$:
 а – компоненты кватерниона ориентации орбитальной СК; б – долгота восходящего узла; в – наклонение орбиты КА; г – оптимальное управление

случая, когда кватернион конечной ориентации орбиты КА соответствует ориентации плоскости орбиты спутников отечественной орбитальной группировки ГЛОНАСС (отличие ориентаций орбит по угловым переменным составляет десятки градусов). Параметры генетического алгоритма полагались равными: $L = 100$, $N_{\max} = 10000$, $p_{mut} = 0.9$.

В дальнейшем предполагается оптимальное количество участков активного движения КА определять в ходе решения задачи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Решение задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата с использованием кватернионных уравнений ориентации орбитальной системы координат // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 1. С. 84–92.
2. Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Численное исследование задачи переориентации орбиты космического аппарата с использованием орбитальной системы координат // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2012. Вып. 14. С. 132–136.
3. Челноков Ю. Н., Панкратов И. А. Переориентация круговой орбиты космического аппарата с тремя точками переключения управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 1. С. 70–73.
4. Панченко Т. В. Генетические алгоритмы. Астрахань : Издат. дом «Астраханский университет», 2007. 87 с.
5. Панкратов И. А., Челноков Ю. Н. Аналитическое решение дифференциальных уравнений ориентации круговой орбиты космического аппарата // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, вып. 1. С. 84–89.

УДК 539.3

О. А. Салтыкова, Е. Ю. Крылова

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ МИКРО- И НАНОЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

Поступила 24.06.2019 г.

В работе приняты следующие обозначения: E , G , ν – модуль Юнга; модуль сдвига и коэффициент Пуассона соответственно; T – приращение температуры; γ – температурный коэффициент линейного расширения; l – масштабный параметр длины материала, учитывающий эффект моментов высшего порядка; w , u , ϕ – прогиб, перемещения и угол поворота соответственно; L – длина балки; h – толщина балки; ρ – плотность материала; A – коэффициент Ламе; q – внешняя нагрузка; $\alpha = \frac{4}{3h^2}$, при $\alpha = 0$

получаем уравнения для кинематической модели Тимошенко; M^T , N^T , P^T – температурные момент, напряжения и результат более высокого порядка соответственно,

$$(C_0, C_2) = \int_A c(1, z^2) dA,$$

результатирующие от действия объемного момента высшего порядка по сечению балки.

Микро- и наноэлектромеханические системы находят широкое применение в различных отраслях промышленности, таких как приборостроение, медицина, робототехника [1, 2], что приводит к необходимости исследований механических объектов с позиции теорий, учитывающих размерно зависимое поведение [3–5]. Точность и срок службы микро- и нанодатчиков, используемых в условиях различных внешних воздействий, напрямую зависит от чувствительного элемента.

В работе построена математическая модель гибкой нанопанели на базе кинематической гипотезы Пелеха – Шереметьева, находящейся в стационарном температурном поле. Геометрическая нелинейность учитывается по модели Теодора фон Кармана. Для учета размерно-зависимого параметра используется модифицированная моментная теория. Балка изотропная, упругая и подчиняется закону Гука.

Запишем полученную систему дифференциальных уравнений в частных производных в безразмерном виде, описывающую движение элемента балки в перемещениях:

$$\begin{aligned} & \lambda^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[J_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \right] - \frac{\partial N^T}{\partial x} = I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ & \lambda^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[J_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \alpha J_4 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] - \lambda^4 (A_0 - 3\alpha A_2) \left(\Phi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \\ & \quad + 3\alpha \left[\lambda^4 (A_2 - 3\alpha A_4) \left(\Phi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - 3\alpha B_2 \lambda^4 \left(\Phi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \\ & + \frac{\lambda^2}{4} \frac{\partial}{\partial x} \left(B_0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - 3\alpha B_2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) - \alpha \lambda^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[(J_4 - \alpha J_6) \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \right. \\ & \quad \left. - \alpha J_6 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{3}{4} \left[B_2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - 3\alpha B_4 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] \right] + \\ & \quad + \frac{\lambda^2}{2} (C_0 - 3\alpha C_2) - \lambda^2 \frac{\partial M^T}{\partial x} + \alpha \lambda^2 \frac{\partial P^T}{\partial x} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (I_2 - \alpha I_4) \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \alpha (I_4 - \alpha I_6) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \right), \\
&\lambda^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[(A_0 - 3\alpha A_2) \left(\phi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\left(J_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \right] + \\
&+ \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[B_0 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - 3\alpha B_2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] \right) + \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left((J_4 - \alpha J_6) \frac{\partial \phi}{\partial x} - \right. \\
&\quad \left. - \alpha J_6 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - 3\lambda^2 \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left[(A_2 - 3\alpha A_4) \left(\phi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - 3\alpha B_2 \left(\phi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{3}{4} \frac{\partial}{\partial x} \left[B_2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - 3\alpha B_4 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (C_0 + 3\alpha C_2) - \alpha \frac{\partial^2 P^T}{\partial x^2} - \\
&-\frac{\partial}{\partial x} \left(N^T \frac{\partial w}{\partial x} \right) + q = \epsilon \frac{\partial w}{\partial t} + I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \alpha I_4 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial t^2} - \alpha^2 I_6 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial t^2} \right).
\end{aligned}$$

Граничные условия для жесткой заделки имеют вид:

$$w(x, 0) = 0, \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = 0, u(x, 0) = 0, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \phi(x, 0) = 0, \frac{\partial \phi(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

Начальные условия задаются выражениями

$$w(0, t) = w(1, t) = 0, \quad \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial w(1, t)}{\partial x} = 0,$$

$$u(0, t) = u(1, t) = \phi(0, t) = \phi(1, t) = 0.$$

Безразмерные параметры:

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{z} = \frac{z}{h}, \quad \bar{w} = \frac{w}{h}, \quad \bar{\phi} = \frac{\phi L}{h}, \quad \bar{u} = \frac{uL}{h^2}, \quad \bar{E} = \frac{E}{E_0}, \quad \bar{G} = \frac{G}{E_0},$$

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \lambda = \frac{L}{h}, \quad \bar{t} = \frac{\omega_0 t}{t}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{E_0}{\rho_0 \lambda^2 L^2}}, \quad \bar{T} = \gamma T, \quad \bar{N}^T = \frac{N^T \lambda^2}{AE_0},$$

$$\bar{M}^T = \frac{M^T \lambda^2}{AE_0 h}, \quad \bar{P}^T = \frac{P^T \lambda^2}{AE_0 h^3}, \quad \bar{q} = \frac{\lambda^3 L q}{AE_0}, \quad \bar{C}_0 = \frac{\lambda^3 C_0}{AE_0}, \quad \bar{C}_2 = \frac{\lambda^3 C_2}{AE_0 h^2}, \quad \bar{\alpha} = \alpha h^2.$$

Безразмерные значения результатов:

$$\begin{aligned} \bar{M}^T &= \lambda^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \bar{E} \bar{T} \bar{z} d\bar{z}, \quad (\bar{J}_0, \bar{J}_2, \bar{J}_4, \bar{J}_6) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \bar{E} (1, \bar{z}^2, \bar{z}^4, \bar{z}^6) d\bar{z} = \frac{1}{AE_0} \left(\frac{J_0}{1}, \frac{J_2}{h^2}, \frac{J_4}{h^4}, \frac{J_6}{h^6} \right), \\ \bar{N}^T &= \lambda^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \bar{E} \bar{T} d\bar{z}, \quad (\bar{I}_0, \bar{I}_2, \bar{I}_4, \bar{I}_6) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \bar{\rho} (1, \bar{z}^2, \bar{z}^4, \bar{z}^6) d\bar{z} = \frac{1}{A\rho_0} \left(\frac{I_0}{1}, \frac{I_2}{h^2}, \frac{I_4}{h^4}, \frac{I_6}{h^6} \right), \\ \bar{P}^T &= \lambda^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \bar{E} \bar{T} \bar{z}^3 d\bar{z}, \quad (\bar{A}_0, \bar{A}_2, \bar{A}_4) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \bar{G} (1, \bar{z}^2, \bar{z}^4) d\bar{z} = \frac{1}{AE_0} \left(\frac{A_0}{1}, \frac{A_2}{h^2}, \frac{A_4}{h^4} \right), \\ (\bar{B}_0, \bar{B}_2, \bar{B}_4, \bar{B}_6) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \bar{G} \left(\frac{l}{h} \right)^2 (1, \bar{z}^2, \bar{z}^4, \bar{z}^6) d\bar{z} = \frac{1}{AE_0 h^2} \left(\frac{B_0}{1}, \frac{B_2}{h^2}, \frac{B_4}{h^4}, \frac{B_6}{h^6} \right). \end{aligned}$$

Построенная математическая модель позволяет исследовать нелинейную динамику чувствительного элемента микро- и нанoeлектромеханических систем, находящегося под действием различных внешних воздействий, в том числе и в температурном поле. Исходя из приведенных уравнений движения нанобалки, описываемой кинематической гипотезой третьего приближения, могут быть получены уравнения для кинематических гипотез второго (модель Тимошенко) и первого (модель Эйлера – Бернулли) приближения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 18-41-700001 p_a, № 18-01-00351A).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. De Martini B. E., Butterfield H. E., Foster K. L. Chaos for a microelectromechanical oscillator governed by the nonlinear Mathieu equation // J. Microelectromech. Syst. 2007. Vol. 16, № 6. 1314–23.
2. Krysko V. A., Awrejcewicz J., Kutepov I. E., Babenkova T. V., Krysko A. V. Size-dependent non-linear dynamics of curvilinear flexible beams in a temperature field // Applied Mathematical Modelling. 2019. Vol. 67. P. 283–296.
3. Крылова Е. Ю., Папкова И. В., Салтыкова О. А., Крысько-мл. В. А. Математическая модель колебаний размерно-зависимых цилиндрических оболочек сетчатой структуры с учетом гипотез Кирхгофа – Лява // Нелинейный мир. 2018. Т. 16, № 4. С. 17–28.
4. Krylova E. Yu., Papkova I. V., Sinichkina A. O., Yakovleva T. B., Kryskoyang V. A. Mathematical model of flexible dimension-dependent mesh plates // IOP

5. Крылова Е. Ю., Папкова И. В., Салтыкова О. А., Яковлева Т. В., Крысько-мл. В. А. Анализ собственных частот микрополярной сетчатой цилиндрической панели Кирхгофа – Лява // Проблемы машиноведения : материалы III Междунар. науч.-техн. конф. : в 2 ч. ; науч. рук. П. Д. Балакин. Омск : Омск. гос. техн. ун-т, 2019. С. 278–282.

УДК 521.131

Г. Д. Севостьянов

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ В ПЛОСКОЙ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

Поступила 02.06.2019 г.

Получено новое аналитическое периодическое решение в плоской неограниченной (общей) задаче трех тел, когда два расстояния между ними равны («циркуль»).

В дополнение к работе [1] (где исследованы относительные траектории тел) изучены абсолютные траектории трех тел (относительно центра масс).

Пусть три тела M_0, M_1, M_2 (с массами m_0, m_1, m_2) под действием гравитационных сил движутся в неподвижной плоскости около центра масс G , образуя равнобедренную конфигурацию (с постоянными боковыми сторонами $\Delta_{01} = \Delta_{02} = a$ и переменными углами).

Такая конфигурация с постоянными углами сводится к равносторонней конфигурации Лагранжа (1772 г.) [2, гл. XXIX, с. 590]. Обзор и методы решения задач даны в [2–7].

Для вектора $\overrightarrow{GM_0} = \mathbf{r}_0$ имеем уравнение изотропного осциллятора

$$\begin{aligned} m_0 \ddot{\mathbf{r}}_0 &= \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_0} = f \frac{m_0}{a^3} (m_1 \Delta_{01} + m_2 \Delta_{02}) = -m_0 k^2 \mathbf{r}_0, \\ k^2 &= \frac{\mu}{a^3}, \quad \mu = f (m_0 + m_1 + m_2), \end{aligned} \quad (1)$$

т. е. тело M_0 движется под действием упругой силы по эллипсу с центром в G . Центр масс Γ для тел M_1 и M_2 также движется по подобному эллипсу ($\mathbf{r}_\Gamma = \overrightarrow{G\Gamma} = -m_0 \mathbf{r}_0 / (m_1 + m_2)$). Так как

$$M_0 \Gamma = \Delta_\Gamma = \frac{m_0 + m_1 + m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}_0, \quad m_1 l_1 = m_2 l_2,$$

где $l_1 = \Gamma M_1, l_2 = \Gamma M_2, \Delta = l_1 + l_2 = M_1 M_2$, то из теоремы косинуса для $\Delta M_0 \Gamma M_1$ получим ($\Delta = 2a \cos \varphi$) $\Delta_{\Gamma}^2 = a^2 - l_1 l_2$. Тогда

$$l_1 = \sqrt{\frac{m_2}{m_1} (a^2 - \Delta_{\Gamma}^2)}, \quad l_2 = \sqrt{\frac{m_1}{m_2} (a^2 - \Delta_{\Gamma}^2)}, \quad a > \max \Delta_{\Gamma}. \quad (2)$$

Таким образом, задача определения положения тел M_1, M_2 – геометрическая (они – в точках пересечения окружности радиуса a с центром в M_0 и окружности радиуса $l_1(l_2)$ с центром в Γ).

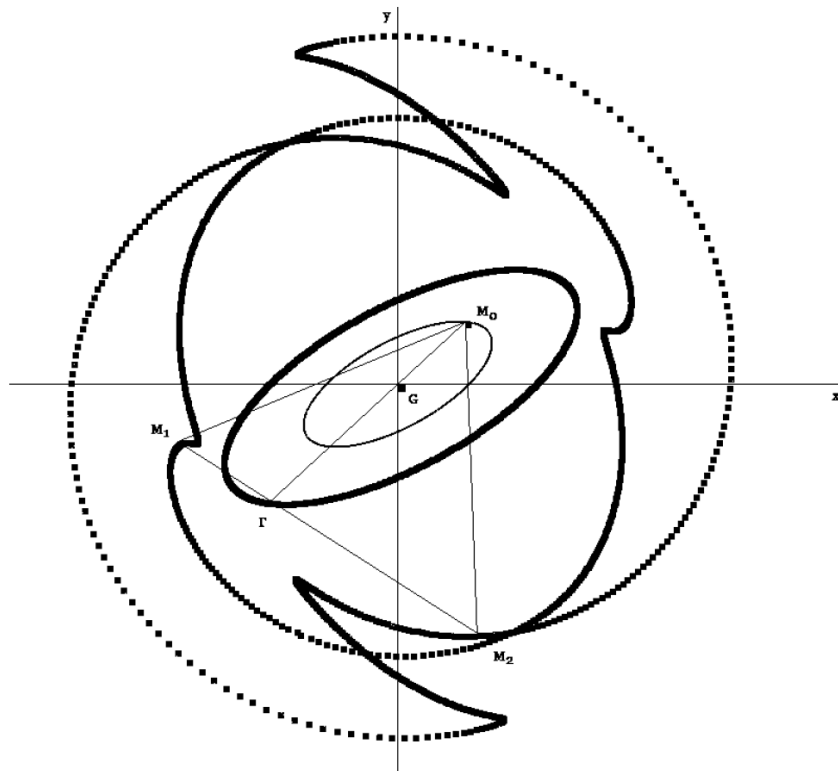
При приближении по эллипсу тела M_0 к G тела M_1 и M_2 удаляются друг от друга; при удалении M_0 от G они сближаются. В барицентрической системе Gxy тело $M_0(x_0, y_0)$ движется согласно уравнению (1) по закону изотропного осциллятора:

$$x_0 = A \sin(kt + \alpha), \quad y_0 = B \sin(kt + \beta), \quad (3)$$

где постоянные $A > 0, B > 0, \alpha, \beta$ задаются.

При $B = 0, m_1 = m_2$ тело M_0 совершает прямолинейное гармоническое колебание, а другие тела колеблются вдоль симметричных дуг (три тела имеют одновременную остановку, при некотором A тела M_1 и M_2 касаются).

Иногда одно из тел основания треугольника в общем случае может иметь точки «остановки» (рисунок).



Центр масс G неподвижен, тогда

$$m_0\mathbf{r}_0 + m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = 0.$$

В формуле (2)

$$\Delta_{01} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \quad \Delta_{02} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0.$$

Записав уравнения окружностей

$$\begin{aligned}(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 &= a^2, \\ (x_1 - x_\Gamma)^2 + (y_1 - y_\Gamma)^2 &= l_1^2\end{aligned}$$

и вычтя их друг из друга, получим, что y_1 линейно зависит от x_1 . Подставив y_1 в любое уравнение, запишем квадратное уравнение для x_1 , т. е. найдем положение тела M_1 . Аналогично делаем для M_2 . Можно считать $a(t) > 0$, $k(t) > 0$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Севостьянов Г. Д. Равнобедренная конфигурация в плоской неограниченной задаче трех тел // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2010. Вып. 12. С. 187–189.
2. Парс Л. Аналитическая динамика : пер. с англ. М. : Наука, 1971. 636 с.
3. Механика в СССР за 50 лет : в 4 т. Т. 1. Общая прикладная механика : сборник / гл. ред. Л. И. Седов. М. : Наука, 1968. 416 с.
4. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / под ред. Г. Н. Дубошина. М. : Наука, 1976. 864 с.
5. Маршал А. Задача трех тел : пер. с англ. М. ; Ижевск : Ин-т комп. исслед., 2004. 640 с.
6. Тхай В. Н. Исследование плоской неограниченной задачи трех тел // Прикладная математика и механика. 1996. Т. 60, вып. 3. С. 355–374.
7. Голубев В. Г., Гребеников Е. А. Проблема трех тел в небесной механике. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1985. 240 с.

СОДЕРЖАНИЕ

СЕКЦИЯ МАТЕМАТИКИ

АБРАМОВА В. В., ДУДОВ С. И. О свойствах функции расстояния до слабо выпуклого множества	3
БОНДАРЕНКО Н. П. О базисности Рисса системы вектор-функций, связанной со спектральной задачей	6
BREDIKHIN D. A. On Semigroups of Relations with Primitive-Positive Operations of Rank Two	9
БУКУШЕВА А. В. Необходимое условие существования солитонов Риччи на субримановых многообразиях	12
БУТЕРИН С. А. Устойчивость решения обратной спектральной задачи для оператора Дирака с интегральным запаздыванием	15
ВАСИЛЬЕВ С. В., ЮРКО В. А. Об обратных задачах для интегродифференциальных операторов	17
ГАЛАЕВ С. В. Полуметрические кососимметрические связности на субримановых многообразиях	20
ГУДОШНИКОВА Е. В. Аппроксимативные свойства дробных производных операторов Саса – Миракьяна	23
ДУДОВ С. И., ОСИПЦЕВ М. А. О функции Минковского, заданной сильно выпуклым множеством	26
КОРНЕВ В. В., ХРОМОВ А. П. О решениях смешанной задачи для волнового уравнения с потенциалом, зависящим от всех переменных	30
КУЗНЕЦОВА И. А. Иерархические игры с конечноопределенным правилом выбора и постепенным многошаговым уточнением информации первого игрока о выборе второго	35
КУРБАТОВ М. С., МОЛЧАНОВ В. А., ХВОРОСТУХИНА Е. В. Разработка алгоритма построения p -гиперграфов	38
МОЛЧАНОВ В. А. Универсальные топологические автоматы	41
МОЛЧАНОВ В. А., ФАРАХУТДИНОВ Р. А. Линейное упорядочивание полуавтоматов	45
НОВИКОВ В. Е. К задаче минимизации однозначного контекста	48
ПОПЛАВСКИЙ В. Б., ЯВКАЕВ Д. Г. Вычисление инверсных D -классов булевых матриц	50
РОЗЕН В. В. Обобщение концепции равновесия по Нэшу в теории игр	53
РЫХЛОВ В. С. О существовании решения некоторых смешанных задач для гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами	56

СОВЕТНИКОВА С. Ю., ХРОМОВА Г. В. О выборе параметра регуляризации и оценке погрешности приближенного решения классического уравнения Абеля	60
ХРОМОВ А. П. Расходящиеся ряды и смешанная задача для волнового уравнения	62
ХРОМОВА Г. В. Операторы Бернштейна – Рогозинского в задаче восстановления функций	67
ЮРКО В. А. Восстановление дифференциальных операторов на полуоси с комплексными весами	70

СЕКЦИЯ МЕХАНИКИ

ЖЕЛТОВ Е. А., КОЖАНОВ В. С. Моделирование динамики твердых тел с применением алгоритма шарнирно-сочлененного тела	76
КОЖАНОВ В. С., ПОПОВА Е. В. Нестационарный ламинарный пограничный слой вблизи ускоряющейся бесконечной плоской горизонтальной пластины	79
КОНДРАТОВ Д. В., РЕБРИНА А. Ю., ЕЛИСТРАТОВА О. В., ПОПОВА Е. В. Исследование АЧХ трех соосных оболочек, свободно открытых на концах, взаимодействующих с двумя слоями вязкой жидкости в условиях вибрации	82
КРЫЛОВА Е. Ю., ПАПКОВА И. В. Влияние геометрии сетки на собственные частоты микрополярной сетчатой цилиндрической панели модели Тимошенко	84
КРЫСЬКО В. А., ПАПКОВА И. В., КРЫЛОВА Е. Ю. Математическая модель колебаний нанобалки, находящейся в стационарном температурном поле и под действием силы Ван-дер-Ваальса	88
ПАНКРАТОВ И. А. Генетический алгоритм оптимальной переориентации плоскости орбиты космического аппарата	91
САЛТЫКОВА О. А., КРЫЛОВА Е. Ю. Математическое моделирование колебаний чувствительных элементов микро- и наноэлектромеханических систем в температурном поле	94
СЕВОСТЬЯНОВ Г. Д. Аналитическое периодическое решение в плоской неограниченной задаче трех тел	98

Научное издание

МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА

Сборник научных трудов

ВЫПУСК 21

Редактор *М. В. Садыкова*
Технический редактор *Т. А. Трубникова*
Корректор *И. А. Кочкаева*
Оригинал-макет подготовил *И. А. Каргин*

Подписано в печать 27.12.2019.

Формат $60 \times 84^{1/16}$.

Усл. печ. л. 6.06 (6.5). Тираж 100 экз. Заказ 47-Т.

Издательство Саратовского университета. 410012, Саратов, Астраханская, 83.
Типография Саратовского университета. 410012, Саратов, Б. Казачья, 112А.