

**МАТЕМАТИКА.
МЕХАНИКА**

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА

Сборник научных трудов

ВЫПУСК 20

Саратов
ИЗДАТЕЛЬСТВО САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2018

УДК [51+531]
ББК (22.1+22.2)я43
М34

Математика. Механика : сб. науч. тр. – Саратов : Изд-во Са-
М34 рат. ун-та, 2018. – Вып. 20. – 130 с. : ил.

Сборник содержит статьи сотрудников и аспирантов механико-математического факультета Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского. Представлены исследования по алгебре, геометрии, дискретной математике, математическому анализу, спектральной теории операторов, теории приближений, математической экономике, биомеханике, механике деформируемого твёрдого тела, оптимальному управлению движением космического аппарата, механике жидкости и газа и их приложениям.

Для научных работников, аспирантов и специалистов в области математики и механики.

Р е д а к ц и о н н а я к о л л е г и я :

Г. В. Хромова, доктор физ.-мат. наук (главный редактор),
Ю. А. Блинков, доктор физ.-мат. наук (зам. главного редактора),
Д. В. Прохоров, доктор физ.-мат. наук,
А. П. Хромов, доктор физ.-мат. наук,
Г. Н. Белосточный, доктор техн. наук,
Ю. В. Матвеева, канд. физ.-мат. наук (отв. секретарь)

УДК [51+531]
ББК (22.1+22.2)я43

Работа издана в авторской редакции

УДК 519.853

В. В. Абрамова, С. И. Дудов

О КАЛИБРЕ СИЛЬНО ВЫПУКЛОГО МНОЖЕСТВА

Поступила в редакцию 29.05.2018 г.

1. Пусть M – компактное выпуклое множество из \mathbb{R}^p и $0_p \in \text{int}M$. Функция, определенная как

$$k(x) = \inf_{\alpha \geq 0} \{\alpha : x \in \alpha M\},$$

называется калибром (калибровочной функцией Минковского) множества M (см., напр., [1]). Напомним основные свойства калибра:

- а) если $\lambda \geq 0$, то $k(\lambda x) = \lambda k(x)$;
- б) если $x \in M$, то $k(x) \leq 1$, а если $x \notin M$, то $k(x) > 1$;
- в) $k(x + y) \leq k(x) + k(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^p$.

Из свойств а) – в) следует выпуклость этой функции на \mathbb{R}^p . Далее нас интересует сравнительная характеристика калибра по отношению к обычной выпуклости функции в случае, когда множество M является сильно выпуклым.

2. Далее используем обозначения:

$\|x\|$ – евклидова норма элемента $x \in \mathbb{R}^p$,
 $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^p : \|x - y\| \leq r\}$ – евклидов шар радиуса r с центром в точке x ;
 $A \overset{*}{-} B = \{c \in \mathbb{R}^p : c + B \subset A\}$ – геометрическая разность множеств A и B из \mathbb{R}^p .

Приведем некоторые вспомогательные понятия и сведения из [2].

Определение 1. Множество $A \subset \mathbb{R}^p$ называется r – сильно выпуклым, если оно представимо в виде пересечения евклидовых шаров радиуса r .

Определение 2. Пусть A – ограниченное множество из \mathbb{R}^p , числа $\rho > 0$ и $r > 0$ такие, что $B(0_p, \rho) \overset{*}{-} A \neq \emptyset$ и $r \geq \rho$. Сильно выпуклой оболочкой радиуса r множества A называется множество, получаемое

при пересечении всех замкнутых евклидовых шаров радиуса r , которые содержат данное множество. Ее обозначают через $str_r A$.

Лемма 1. Пусть точки a_0 и a_1 из \mathbb{R}^p таковы, что $0 < \|a_0 - a_1\| \leq 2r$. Тогда справедливо представление

$$str_r(\{a_0\} \cup \{a_1\}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} B(a_\alpha, r_\alpha),$$

где $a_\alpha = (1 - \alpha)a_0 + \alpha a_1$, $r_\alpha = r - (r^2 - \alpha(1 - \alpha)\|a_0 - a_1\|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Лемма 2. Компактное множество A является r -сильно выпуклым тогда и только тогда, когда r -сильно выпуклая оболочка произвольного конечного подмножества его точек, непуста и содержится в A .

3. Наша цель – доказать справедливость следующего факта.

Теорема. Пусть M является r -сильно выпуклым множеством, $0_p \in \text{int}M$ и $R_M = \max_{x \in M} \|x\|$. Тогда для любых точек $x_0 \neq 0_p$, $x_1 \neq 0_p$ и $\alpha \in [0, 1]$ выполняется

$$k((1 - \alpha)x_0 + \alpha x_1) \leq (1 - \alpha)k(x_0) + \alpha k(x_1) - \frac{\alpha(1 - \alpha)k(x_0)k(x_1)}{2R_M r((1 - \alpha)k(x_0) + \alpha k(x_1))} \left\| \frac{x_0}{k(x_0)} - \frac{x_1}{k(x_1)} \right\|^2. \quad (1)$$

Доказательство: 1) Рассмотрим случай, когда $k(x_0) = k(x_1) = 1$. Тогда, очевидно (см. свойство б), $\{x_0\} \cup \{x_1\} \subset M$, а следовательно, по лемме 2

$$str_r(\{x_0\} \cup \{x_1\}) \subset M. \quad (2)$$

По лемме 1 выполняется включение

$$B(x_\alpha, r_\alpha) \subset str_r(\{x_0\} \cup \{x_1\}), \quad (3)$$

где

$$x_\alpha = (1 - \alpha)x_0 + \alpha x_1, \quad r_\alpha = r - (r^2 - \alpha(1 - \alpha)\|x_0 - x_1\|^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (4)$$

Из (2) и (3) получаем

$$B(x_\alpha, r_\alpha) \subset M. \quad (5)$$

С другой стороны, если точка x удовлетворяет неравенству $k(x - x_\alpha) \leq \frac{r_\alpha}{R_M}$, то есть $x \in x_\alpha + \frac{r_\alpha}{R_M}M$, то выполняется $\|x - x_\alpha\| \leq r_\alpha$. Это означает

$$x_\alpha + \frac{r_\alpha}{R_M}M \subset B(x_\alpha, r_\alpha). \quad (6)$$

Из (5) и (6) имеем

$$x_\alpha + \frac{r_\alpha}{R_M} M \subset M. \quad (7)$$

Пусть $x_\alpha \neq 0_p$. Возьмем точку $y = (1 + \frac{r_\alpha}{R_M k(x_\alpha)})x_\alpha \in x_\alpha + \frac{r_\alpha}{R_M} M$. Тогда в силу (7) $k(y) \leq 1$. Отсюда получаем

$$k(x_\alpha) \leq 1 - \frac{r_\alpha}{R_M}. \quad (8)$$

Постановка в (8) выражений (4) дает

$$\begin{aligned} k(x_\alpha) &\leq 1 - \frac{\alpha(1-\alpha)\|x_0 - x_1\|^2}{R_M (r + (r^2 - \alpha(1-\alpha)\|x_0 - x_1\|^2))^{\frac{1}{2}}} \leq \\ &\leq 1 - \frac{\alpha(1-\alpha)\|x_0 - x_1\|^2}{2R_M r}. \end{aligned} \quad (9)$$

В случае $x_\alpha = 0$ получаем $k(x_\alpha) = 0$, а из неравенств $\|x_0 - x_1\| \leq 2R_M$, $\|x_0 - x_1\| \leq 2r$ вытекает неотрицательность правой части неравенства (9). То есть оно верно и в этом случае.

2) Теперь рассмотрим общий случай $x_0 \neq 0_p$, $x_1 \neq 0_p$. Обозначим через $y_0 = \frac{x_0}{k(x_0)}$, $y_1 = \frac{x_1}{k(x_1)}$. Таким образом, $k(y_0) = k(y_1) = 1$. Тогда, используя (9), можем записать

$$k((1-\lambda)y_0 + \lambda y_1) \leq 1 - \frac{\lambda(1-\lambda)}{2R_M r} \|y_0 - y_1\|^2, \quad \lambda \in [0, 1]. \quad (10)$$

Подстановка сюда значения $\lambda = \frac{\alpha k(x_1)}{((1-\alpha)k(x_0) + \alpha k(x_1))}$ и несложные преобразования в итоге дают неравенство (1). Теорема доказана.

Следствие. Если $M - r$ -сильно выпуклое множество, а точки x_0 и x_1 таковы, что $k(x_0) = k(x_1) = \rho > 0$, то

$$k((1-\alpha)x_0 + \alpha x_1) \leq \rho - \frac{\alpha(1-\alpha)}{2R_M r \rho} \|x_0 - x_1\|^2, \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Таким образом, на отрезках, соединяющих «равноудаленные» точки, калибр сильно выпуклого множества ведет себя как сильно выпуклая функция.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М. : Мир, 1973.
2. *Половинкин Е. С., Балашов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004.

ЗАДАЧА ХОХШТАДТА – ЛИБЕРМАНА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ДИРАКА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Поступила в редакцию 04.05.2018 г.

Рассмотрим краевую задачу $D = D(p, q)$ для системы Дирака с интегральным запаздыванием:

$$By' + \int_0^x M(x-t)y(t) dt = \lambda y, \quad x \in (0, \pi),$$

с краевыми условиями

$$y_1(0) = y_1(\pi) = 0.$$

Здесь λ – спектральный параметр,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ -q(x) & p(x) \end{pmatrix}, \quad y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},$$

функции p и q – комплекснозначные и

$$(\pi - x)p(x) \in L_2(0, \pi), \quad (\pi - x)q(x) \in L_2(0, \pi). \quad (1)$$

Известно (см. [1]), что задача D имеет счётное множество собственных значений, которые можно пронумеровать $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ с учётом кратностей так, что справедлива асимптотическая формула

$$\lambda_k = k + \varkappa_k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \{\varkappa_k\} \in l_2.$$

Обратная задача 1. Пусть функции p и q известны априори на интервале $(0, \frac{\pi}{2})$. Построить p и q на $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ по части спектра $\{\lambda_{2k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

Следующая теорема даёт достаточные (и необходимые) условия разрешимости обратной задачи 1.

Теорема 1. Пусть p и q – произвольные функции из $L_2(0, \frac{\pi}{2})$ и $\{\lambda_{2k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ – произвольные комплексные числа, имеющие асимптотику

$$\lambda_{2k} = 2k + \varkappa_k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \{\varkappa_k\} \in l_2. \quad (2)$$

Тогда функции p и q могут быть однозначно продолжены на интервал $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, чтобы выполнялось (1) и числа $\{\lambda_{2k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ были собственными

значениями краевой задачи $D = D(p, q)$ с соответствующими кратностями.

Доказательство теоремы 1 основано на конструктивном решении обратной задачи 1. Введём обозначение $(f * g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t) dt$. Представим функции p и q в виде: $p(x) = p_1(x) + p_2(x)$, $q(x) = q_1(x) + q_2(x)$, $p_1(x) \equiv q_1(x) \equiv 0$ на $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ и $p_2(x) \equiv q_2(x) \equiv 0$ на $(0, \frac{\pi}{2})$. Справедливы соотношения

$$\left\{ \begin{array}{l} -w_1(\pi - t) = (\pi - t)q_1(t) + (\pi - t)q_2(t) + A_1(t) + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\pi-t)^n}{n!} (A_{n1} * p_2 + A_{n2} * q_2)(t), \\ -w_2(\pi - t) = (\pi - t)p_1(t) + (\pi - t)p_2(t) + B_1(t) + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\pi-t)^n}{n!} (B_{n1} * p_2 + B_{n2} * q_2)(t), \end{array} \right. \quad (3)$$

Здесь a_{nj} и b_{nj} — конкретные числовые коэффициенты, удовлетворяющие оценкам

$$\sum_{j=0}^n |a_{nj}| \leq 2^{n-1}, \quad \sum_{j=0}^n |b_{nj}| \leq 2^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N};$$

функции w_1 , w_2 могут быть найдены из следующего представления характеристической функции $\Delta(\lambda)$ задачи D :

$$\Delta(\lambda) = \sin \lambda\pi + \int_0^{\pi} \left(w_1(t) \sin \lambda t + w_2(t) \cos \lambda t \right) dt, \quad w_1, w_2 \in L_2(0, \pi);$$

функции A_1 , B_1 , A_{nk} , B_{nk} , $n \geq 2$, $k = 1, 2$, принадлежат $L_2(0, \pi)$ и могут быть вычислены по функциям p_1 и q_1 (см. подробности в [4]). При $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ система (3) принимает вид

$$\left\{ \begin{array}{l} -w_1(\pi - t) = (\pi - t)q_1(t) + A_1(t), \\ -w_2(\pi - t) = (\pi - t)p_1(t) + B_1(t), \end{array} \right. \quad (4)$$

Обозначим

$$E(\lambda) := \Delta(\lambda) - \sin \lambda\pi - \int_{\pi/2}^{\pi} (w_1(t) \sin \lambda t + w_2(t) \cos \lambda t) dt.$$

Для простоты предположим, что все значения $\{\lambda_{2k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ различны. Случай кратных собственных значений требует небольших технических

изменений. Ясно, что

$$E(\lambda_{2k}) = -\sin \lambda_{2k}\pi - \int_{\pi/2}^{\pi} (w_1(t) \sin \lambda_{2k}t + w_2(t) \cos \lambda_{2k}t) dt, \quad (5)$$

$$E(\lambda_{2k}) = \int_0^{\pi/2} (w_1(t) \sin \lambda_{2k}t + w_2(t) \cos \lambda_{2k}t) dt. \quad (6)$$

Лемма 1. Для любых различных чисел $\{\lambda_{2k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$, удовлетворяющих (2), система вектор-функций

$$\left\{ \begin{pmatrix} \sin \lambda_{2k}t \\ \cos \lambda_{2k}t \end{pmatrix} \right\}_{k \in \mathbb{Z}} \quad (7)$$

является базисом Рисса в пространстве $L_2(0, \frac{\pi}{2}) \oplus L_2(0, \frac{\pi}{2})$.

Опираясь на лемму 1 и предыдущие рассуждения, получаем следующий алгоритм решения обратной задачи 1.

Алгоритм 1. Даны функции $p(x)$ и $q(x)$ для $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ и числа $\{\lambda_{2k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

1. Найти функции A_1, B_1, A_{nk}, B_{nk} , $n \geq 2$, $k = 1, 2$, по функциям $p_1(x) := p(x)$, $q_1(x) := q(x)$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.
2. Вычислить $w_1(t)$ и $w_2(t)$ для $t \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ по формулам (4).
3. Найти значения $\{E(\lambda_{2k})\}_{k \in \mathbb{Z}}$, используя (5).
4. Построить систему вектор-функций (7) и найти функции $w_1(t)$, $w_2(t)$, используя коэффициенты $E(\lambda_{2k})$ по базису Рисса (см. (6)).
5. Найти функции p_2 и q_2 путем решения системы интегральных уравнений Вольтерра второго рода (3) и положить $p(x) := p_2(x)$, $q(x) := q_2(x)$, $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Работа выполнена в Саратовском государственном университете при финансовой поддержке РФФ (проект № 17-11-01193).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Bondarenko N., Buterin S. On recovering the Dirac operator with an integral delay from the spectrum // Results Math. 2017. Vol. 71, iss. 3–4. P. 1521–1529.
2. Hochstadt H., Lieberman B. An inverse Sturm-Liouville problem with mixed given data // SIAM J. Appl. Math. 1978. Vol. 34. P. 676–680.
3. Buterin S., Sat M. On the half inverse spectral problem for an integro-differential operator // Inverse Problems in Science and Engineering. 2017. Vol. 25, iss. 10. P. 1508–1518.

4. Bondarenko N. P. An inverse problem for the integro-differential Dirac system with partial information given on the convolution kernel. Cornell University Library, 2018. URL: <https://arxiv.org/abs/1802.04761> (дата обращения: 28.05.2018).

УДК 501.1

Д. А. Бредихин

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ГРУППОИДОВ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Поступила в редакцию 30.05.2018 г.

Множество бинарных отношений, замкнутое относительно некоторой совокупности операций над ними, образует алгебру, называемую *алгеброй отношений*. Класс алгебр, изоморфных алгебрам отношений с операциями из Ω , обозначим $R\{\Omega\}$. Основы алгебраического подхода к изучению алгебр отношений были заложены Тарским [1]. При изучении различных классов алгебр отношений одной из естественным образом возникающей проблем является следующая: *найти базис тождеств для многообразия $Var\{\Omega\}$, порождённого классом $R\{\Omega\}$, и выяснить вопрос о конечной базисуемости этого многообразия.*

Операции над отношениями, как правило, задаются с помощью формул исчисления предикатов первого порядка. Такие операции называются *логическими* [2]. Операция над отношениями называется *диофантовой* [3, 4] (в другой терминологии *примитивно-позитивной* [5]), если она может быть задана с помощью формулы, которая в своей префиксной нормальной форме содержит лишь операции конъюнкции и кванторы существования. Предметом нашего рассмотрения будут классы алгебр отношений с одной бинарной диофантовой операцией, то есть *группоиды отношений*. К указанным классам, в частности, относятся полугруппы и рестриктивные полугруппы отношений (см. [6]). Однако далеко не всякая бинарная диофантовая операция над отношениями является ассоциативной. Это приводит к необходимости рассмотрения неассоциативных группоидов. Интерес к неассоциативным группоидам стимулируется также возможностью применения их в криптографии [7]. Более подробную мотивацию подобного рода исследований, а также ряд полученных результатов в этом направлении можно найти в работах [8–12].

Сосредоточим внимание на следующей бинарной диофантовой операции $*$ над отношениями $\rho, \sigma \subseteq U \times U$, определяемой формулой

$$\rho * \sigma = \{(u, v) \in U \times U : (\exists w)(u, w) \in \rho \wedge (w, v) \in \sigma\}.$$

Рассмотрим счетное множество символов переменных Λ , в качестве которых будем использовать малые буквы латинского алфавита (возможно с индексами). Множество Σ термов группоида может быть определено как наименьшее подмножество слов алфавита $\Lambda \cup \{(\,)\}$, удовлетворяющее следующим условиям: $\Lambda \subseteq \Sigma$ и $p, q \in \Sigma \Rightarrow (pq) \in \Sigma$. Определим подмножество Θ множества термов Σ как наименьшее подмножество, удовлетворяющее условиям: $\Lambda \subseteq \Sigma$ и $x \in \Lambda, p \in \Sigma \Rightarrow (xp), (px) \in \Sigma$. Вхождение символа $x \in \Lambda$ в запись терма $p \in \Theta$ назовем регулярным справа, если слева и справа от этого символа стоит закрывающая скобка. Терм q , полученный из терма p посредством удаления из его записи регулярного справа вхождения некоторого символа $x \in \Lambda$ и стоящей справа от него закрывающей скобки, назовем правым редуктом терма p . В дальнейшем внешние скобки в записи термов, как правило, будут опускаться.

Теорема. *Многообразие $Var\{*\}$ не является конечно базлируемым. Группоид (A, \cdot) принадлежит многообразию $Var\{*\}$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождествам:*

$$(xy)y = xy, \quad (1)$$

$$(xy)^2 = xy, \quad (2)$$

$$x(y^2x) = xy^2, \quad (3)$$

$$(x^2y)z = (x^2z)y, \quad (4)$$

$$x^2(yz) = x^2(zy), \quad (5)$$

$$(xy^2)z^2 = x(y^2z^2). \quad (6)$$

и для каждого терма $p \in \Theta$ и его правого редукта q тождеству

$$pq = p. \quad (7)$$

Доказательство необходимости тождеств (1) – (7) осуществляется непосредственной проверкой. Доказательство достаточности основывается на описании эквациональных теорий алгебр отношений с диофантовыми операциями с помощью аппарата помеченных графов [13]. Предварительно устанавливается структура термов группоидов, входящих в многообразие, задаваемое указанными в теореме тождествами.

Согласно описанию эквациональных теорий алгебр отношений с диофантовыми операциями (см. [13]) всякому терму p может быть сопоставлен некоторый граф специального вида $G(p)$. Находится описание

строения графов, соответствующих термам группоидов отношений с рассматриваемой операцией $*$. На основании этого описания доказывается следующая лемма.

Лемма. *Предположим, что существует гомоморфизм графа $G(q)$ в граф $G(p)$, где термы p и q не являются индивидуальными переменными. Тогда тождество $p = pq$ принадлежит эквациональной теории класса $R\{*\}$. Далее с использованием этой леммы и основного результата из [13] показывается, что всякое тождество, принадлежащее эквациональной теории класса $R\{*\}$, является следствием тождеств (1) – (7), что означает, что указанная система тождеств образует базис многообразия $Var\{*\}$. Доказательство бесконечной базисуемости рассматриваемого многообразия сводится к построению счетной последовательности группоидов, не принадлежащих $Var\{*\}$, ультрапроизведение которых по ультрафильтру Фреше принадлежит этому многообразию.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Tarski A.* On the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1941. Vol. 3. P. 73–89.
2. *Jónsson B.* The theory of binary relations // Algebraic Logic. 1991. Vol. 54. P. 245–292.
3. *Бредихин Д. А.* О квазитождествах алгебр отношений с диофантовыми операциями // Сибирский матем. журн. 1997. № 1. С. 29–41.
4. *Бредихин Д. А.* Об алгебрах отношений с диофантовыми операциями // Докл. РАН. 1998. Т. 360. С. 594 – 595.
5. *Böner F., Pöschel F. R.* Clones of operations on binary relations // Contributions to general algebras. 1991. Vol. 7. P. 50–70.
6. *Schein B. M.* Relation algebras and function semigroups // Semigroup Forum. 1970. Vol. 1. P. 1–62.
7. *Катышев С. Ю., Марков В. Т., Нечаев А. А.* Использование неассоциативных группоидов для реализации процедуры открытого распределения ключей // Дискрет. матем. 1914. Т. 26, № 3. С. 45–64.
8. *Bredikhin D. A.* On relation algebras with general superpositions // Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. 1994. Vol. 54. P. 11–124.
9. *Bredikhin D. A.* On Varieties of Groupoids associated with involuted restrictive bisemigroups of binary relations // Semigroup Forum. 1992. Vol. 44. P. 87–92.
10. *Бредихин Д. А.* О многообразиях группоидов отношений // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 1. С. 93–98.
11. *Бредихин Д. А.* О многообразиях группоидов отношений диофантовыми операциями // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 4, ч. 2. С. 28–34.
12. *Bredikhin D. A.* On Varieties of Groupoids of Relations with Operation of Binary Cylindrification // Algebra Univers. 2015. Vol. 73. P. 73 –89.
13. *Бредихин Д. А.* The equational theory of algebras of relations with positive operations // Rus. Math. 1993. № 3. С. 23–30.

О ПРОЕКТИВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ПРОДОЛЖЕННЫХ СУБРИМАНОВЫХ СТРУКТУР

Поступила в редакцию 30.05.2018 г.

Под субримановым многообразием контактного типа [1] понимается гладкое многообразие M размерности n с заданной на нем субримановой структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, g, D)$, где η — 1-форма, порождающая распределение $D = \ker \eta$, $\vec{\xi}$ — векторное поле, порождающее оснащение D^\perp распределения $D^\perp = \text{Span}(\vec{\xi})$; g — риманова метрика на многообразии M , относительно которой распределения D и D^\perp взаимно ортогональны. Мы также полагаем, что $\eta(\vec{\xi}) = 1$ и $g(\vec{\xi}, \vec{\xi}) = 1$.

Рассмотрим новое субриманово многообразие контактного типа $(M, \vec{\xi}, \eta, \tilde{g}, D)$, находящееся с первым субримановым многообразием в проективном соответствии. Это означает, что коэффициенты внутренней связности [2–5] связаны между собой следующими преобразованиями [6–7]: $\tilde{\Gamma}_{bc}^a = \Gamma_{bc}^a + \mu_b^a q_c + \delta_c^a \mu_b$, где μ_c — компоненты допустимого [8] ковектора μ .

Карта $K(x^\alpha)$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n, a, b, c = 1, \dots, n-1$) многообразия M называется адаптированной к распределению D , если $\partial_n = \vec{\xi}$ [5]. Пусть $P : TM \rightarrow D$ — проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^\perp$, $D^\perp = \text{Span}(\vec{\xi})$, и $K(x^\alpha)$ — адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ линейно независимые в каждой точке своей области определения, порождают распределение D : $D = \text{Span}(\vec{e}_a)$. Неголономному полю базисов $\vec{e}\alpha = (\vec{e}_a, \partial_n)$ соответствует поле кобазисов $(dx^a, \eta = dx^n + \Gamma_a^n dx^a)$.

Координатное представление допустимого тензорного поля в адаптированной карте имеет вид: $t = t_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} \vec{e}_{a_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{a_p} \otimes dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b_q}$.

Кручением и кривизной внутренней связности называются тензорные поля

$$S(\vec{x}, \vec{y}) = \nabla_{\vec{x}} \vec{y} - \nabla_{\vec{y}} \vec{x} - P[\vec{x}, \vec{y}], \vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D),$$

$$R(\vec{x}, \vec{y}) \vec{z} = \nabla_{\vec{x}} \nabla_{\vec{y}} \vec{z} - \nabla_{\vec{y}} \nabla_{\vec{x}} \vec{z} - \nabla_{P[\vec{x}, \vec{y}]} \vec{z} - P[Q[\vec{x}, \vec{y}], \vec{z}]$$

соответственно. Структура продолженной субримановой структуры на распределении D многообразия M определяется следующим образом. Поставим в соответствие каждой адаптированной карте $K(x^\alpha)$ многообразия M сверхкарту $\tilde{K}(x^\alpha, x^{n+a})$ на распределении D , полагая, что

$\tilde{K}(\vec{x}) = (x^\alpha, x^{n+a})$, где x^{n+a} — координаты допустимого вектора \vec{x} в базисе $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n : \vec{x} = x^{n+a} \vec{e}_a$. Задание внутренней метрической связности ∇ влечет разложение распределения $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, где $\pi : D \rightarrow M$ — естественная проекция, в прямую сумму вида $\tilde{D} = HD \oplus VD$, где VD — вертикальное распределение на тотальном пространстве D , HD — горизонтальное распределение, порождаемое векторными полями $\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - G_b^a \partial_{n+b}$, где $G_b^a(x^a, x^{n+a}) = \Gamma_{bc}^a(x^a) x^{n+c}$, Γ_{bc}^a — коэффициенты внутренней связности.

Формы $(dx^a, \theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a, \theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma_{bc}^a x^{n+c} dx^b)$ определяют поле кобазисов, сопряженное к полю базисов $(\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - \Gamma_b^{ac} x^{n+c} \partial_{n+b}, \vec{u} = \partial_n, \partial_{n+a})$. На распределении D естественным образом возникает разложение $TD = \widetilde{HD} \oplus VD$, где $\widetilde{HD} = HD \oplus \text{Span}(\vec{u})$.

Аналогичные построения проведем для второго субриманова многообразия. В результате чего мы получаем две почти контактные структуры s , вообще говоря, разными распределениями.

Полученные контактные структуры превратим в субримановы структуры, полагая

$$G(\vec{x}^h, \vec{y}^h) = G(\vec{x}^v, \vec{y}^v) = g(\vec{x}, \vec{y}),$$

$$G(\vec{x}^h, \vec{y}^v) = G(\vec{x}^v, \vec{y}^h) = G(\vec{x}^h, \vec{u}) = G(\vec{x}^v, \vec{u}) = 0, \vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D)$$

для первого субриманова многообразия и проводя аналогичные построения для второго субриманова многообразия.

Предложение. *Гладкие распределения продолженных субримановых структур совпадают тогда и только тогда, исходные субримановы многообразия находятся в аффинном соответствии.*

В случае собственно проективного соответствия между исходными субримановыми многообразиями мы уже не можем говорить о проективном соответствии между продолженными субримановыми структурами. Рассмотрим возможность проективного соответствия между соответствующими псевдоримановыми многообразиями.

Тензоры кривизны Схоутена связностей $\nabla, \tilde{\nabla}$ удовлетворяют следующему равенству [6]:

$$\tilde{R}_{abc}^d = R_{abc}^d - 2\delta_{[a}^d S_{b]c} + 2S_{[ab]} \delta_c^d,$$

где $S_{ab} = \nabla_a \mu_b - \mu_a \mu_b$. Аналогично для тензора $P(\vec{x}, \vec{y})$ получаем равенство вида: $\tilde{P}_{bc}^d = P_{bc}^d + \delta_b^d S_{nc} + \delta_c^d S_{nb}$, где $S_{nb} = \partial_n \mu_b$. Найдем условия, при которых выполняется равенство

$$\tilde{G}_{AB}^E = G_{AB}^E + \delta_A^E P_B + \delta_B^E P_A.$$

Теорема. Пусть субримановы структуры $(M, \vec{\xi}, \eta, g, D)$, $(M, \vec{\xi}, \eta, \tilde{g}, D)$ находятся в проективном соответствии, тогда псевдоримановы многообразия, соответствующие продолженным субримановым структурам находятся в аффинном соответствии.

При доказательстве теоремы используется тот факт, что тензоры Схоутена исходных субримановых многообразий обращаются в нуль при условии $\tilde{G}_{AB}^E = G_{AB}^E + \delta_A^E P_B + \delta_B^E P_A$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Галаев С. В. О классификации продолженных би-метрических структур на субримановых многообразиях с нулевым тензором кривизны Схоутена // Вестн. Башкир. ун-та. 2017. Т. 22, № 4. С. 936–939.
2. Букушева А. В. Слоения на распределениях с финслеровой метрикой // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 3. С. 247–251.
3. Bukusheva A. V., Galaev S. V. Almost contact metric structures defined by connection over distribution // Bulletin of the Transilvania University of Brasov. Series III : Mathematics, Informatics, Physics. 2011. Vol. 4, № 2. P. 13–22.
4. Букушева А. В., Галаев С. В. Связности над распределением и геодезические пульверизации // Изв. вузов. Матем. 2013. № 4. С. 10–18.
5. Букушева А. В., Галаев С. В. Почти контактные метрические структуры, определяемые связностью над распределением с допустимой финслеровой метрикой // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 17–22.
6. Вагнер В. В. Геометрия $(n - 1)$ -мерного неголономного многообразия в n -мерном пространстве // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М. : Изд-во Моск. ун-та. 1941. № 5. С. 173–255.
7. Han Y., Fuc F., Zhao P. A class of non-holonomic projective connections on Sub-Riemannian manifolds // Filomat. 2017. Vol. 31, № 5. P. 1295–1303.
8. Галаев С. В. N-продолженные симплектические связности в почти контактных метрических пространствах // Изв. вузов. Матем. 2017. № 3. С. 15–23.

С. А. Бутерин

**ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА
ДЛЯ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ
С УСЛОВИЯМИ РОБЕНА**

Поступила в редакцию 05.05.2018 г.

1. Пусть $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ – спектр краевой задачи $L = L(q, M, h, H)$ вида

$$-y'' + q(x)y + \int_0^x M(x-t)y(t) dt = \lambda y, \quad 0 < x < \pi, \quad (1)$$

$$U(y) := y'(0) - hy(0) = 0, \quad V(y) := y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \quad (2)$$

где $q(x)$, $M(x)$ – комплекснозначные функции, причем $q(x) \in L_2(0, \pi)$, $(\pi - x)M(x) \in L_2(0, \pi)$, и $h, H \in \mathbb{C}$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Собственные значения задачи L имеют вид*

$$\lambda_n = \left(n + \frac{\omega}{\pi n} + \frac{\varkappa_n}{n} \right)^2, \quad \{\varkappa_n\} \in l_2. \quad (3)$$

При этом

$$\omega = h + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(x) dx. \quad (4)$$

В работе исследуется следующая *обратная задача*: по заданному спектру $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ найти функцию $M(x)$ и число H в предположении, что $q(x)$ и h известны априори. Заметим, что в силу (3), (4) альтернативно можно считать число h неизвестным, а H – заданным.

Наиболее полные результаты в теории обратных спектральных задач получены для дифференциальных операторов (см. обзоры в [1, 2]). Первое подробное исследование обратной задачи для уравнения (1) с крайевыми условиями Дирихле было предпринято в [3], а в [4] было получено ее глобальное решение. В [5] получено решение в случае $q(x) = 0$ и крайевых условий (2) при $h = 0$, но при меньшем ограничении на функцию $M(x)$, а именно, когда под интегралом в (1) вместо $y(t)$ присутствует $y'(t)$. Отметим, что крайевые условия Робена вносят существенные трудности в исследование обратной задачи. В настоящей работе с помощью

развития идей работы [4] устанавливается единственность решения рассматриваемой обратной задачи и доказывается, что асимптотика (3) является необходимым и достаточным условием ее разрешимости. Иными словами, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть задана комплекснозначная функция $q(x) \in L_2(0, \pi)$ и число $h \in \mathbb{C}$. Тогда для всякой последовательности комплексных чисел $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ вида (3) существует единственная (с точностью до значений на множестве меры нуль) функция $M(x)$, $(\pi - x)M(x) \in L_2(0, \pi)$, и единственное число $H \in \mathbb{C}$, такие что $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ является спектром соответствующей краевой задачи $L(q, M, h, H)$ вида (1), (2).

2. Пусть $\varphi(x, \lambda)$ – решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям $U(\varphi) = 0$, $\varphi(0, \lambda) = 1$. Тогда собственные значения задачи L с учетом кратности совпадают с нулями целой функции $\Delta(\lambda) = V(\varphi)$, которая называется *характеристической функцией* задачи L .

Лемма 1. Положим $\rho^2 = \lambda$. Имеет место представление

$$\varphi(x, \lambda) = \cos \rho x + \int_0^x K(x, t) \cos \rho(x - t) dt,$$

где $K(x, t) = K(x, t; q, h, M)$ – решение интегрального уравнения

$$\begin{aligned} 2K(x, t) = & 2h + \int_0^{x-\frac{t}{2}} q(\tau) d\tau + \int_0^{\frac{t}{2}} q(\tau) d\tau + \int_0^t (x - \tau)M(\tau) d\tau + \\ & + \int_0^{x-t} d\tau \int_{\tau}^{t+\tau} q(\xi)K(\xi, \xi - \tau) d\xi + \int_0^{\frac{t}{2}} d\tau \int_{\tau}^{t-\tau} q(\xi)K(\xi, \xi - \tau) d\xi + \\ & + \int_{x-t}^{x-\frac{t}{2}} d\tau \int_{\tau}^{2x-t-\tau} q(\xi)K(\xi, \xi - \tau) d\xi + \\ & + \int_0^t M(\tau) d\tau \int_0^{x-t} ds \int_0^{t-\tau} K(\xi + s, \xi) d\xi + \\ & + \int_0^t M(\tau) d\tau \int_0^{\frac{t-\tau}{2}} ds \int_0^{t-\tau-2s} K(\xi + s, \xi) d\xi + \\ & + \int_0^t M(\tau) d\tau \int_{x-t}^{x-\frac{t+\tau}{2}} ds \int_0^{2(x-s)-t-\tau} K(\xi + s, \xi) d\xi, \quad 0 \leq t \leq x \leq \pi. \end{aligned}$$

С помощью леммы 1 нетрудно получить следующее представление:

$$\Delta(\lambda) = -\rho \sin \rho \pi + \omega \cos \rho \pi + \int_0^{\pi} w(x) \cos \rho x dx, \quad w(x) \in L_2(0, \pi). \quad (5)$$

При этом ω определяется формулой (4), а функция $w(x)$ – формулой (6):

$$w(\pi - x) = K_1(\pi, x; q, h, M) + K_2(\pi, x; q, h, M) + HK(\pi, x; q, h, M), \quad (6)$$

где $K_1(x, t; q, h, M) = K_x(x, t)$ и $K_2(x, t; q, h, M) = K_t(x, t)$.

На соотношение (6) можно смотреть, как на нелинейное уравнение относительно функции $M(x)$, которое назовем *основным уравнением обратной задачи*. Следующее утверждение занимает центральное место в доказательстве теоремы 2.

Теорема 3. *Для любой функции $w(x) \in L_2(0, \pi)$ нелинейное уравнение (6) имеет единственное решение $M(x)$, $(\pi - x)M(x) \in L_2(0, \pi)$.*

Доказательство основано на развитии идей работы [4].

Всякая функция $\Delta(\lambda)$ вида (5) обладает счетным множеством нулей λ_n , $n \geq 0$, вида (3) (см., например, [1, 2]), откуда, в свою очередь, вытекает утверждение теоремы 1. Кроме того, известными методами (также см. [1, 2]) доказываются следующие два утверждения.

Лемма 2. *Всякая функция $\Delta(\lambda)$ вида (5) определяется своими нулями однозначно. При этом имеет место формула*

$$\Delta(\lambda) = \pi(\lambda_0 - \lambda) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda}{n^2}. \quad (7)$$

Лемма 3. *Пусть заданы произвольные числа $\lambda_n \in \mathbb{C}$, $n \geq 0$, вида (3). Тогда функция $\Delta(\lambda)$, определенная формулой (7), имеет вид (5).*

Доказательство теоремы 2. По заданной последовательности $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ вида (3) строим функцию $\Delta(\lambda)$ по формуле (7) и находим число H из соотношения (4). Согласно лемме 3 построенная функция $\Delta(\lambda)$ имеет представление (5) с некоторой функцией $w(x) \in L_2(0, \pi)$. Пусть $M(x)$ является решением уравнения (6) с найденными H , $w(x)$ и заданным h . Рассмотрим соответствующую краевую задачу $L = L(q, M, h, H)$. Легко увидеть, что построенная функция $\Delta(\lambda)$ является характеристической функцией этой задачи L , а значит, спектр последней совпадает $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$.

Единственность числа H очевидна, а единственность функции $M(x)$ следует из единственности решения основного уравнения (6). \square

Замечание. Доказательство конструктивно и дает алгоритм решения обратной задачи.

Работа выполнена в Саратовском университете при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01193).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Марченко В. А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев : Наук. думка, 1977.
2. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : ФИЗМАТ-ЛИТ, 2007.
3. *Юрко В. А.* Обратная задача для интегро-дифференциальных операторов // Матем. заметки. 1991. Т. 50, вып. 5. С. 134–146.
4. *Бутерин С. А.* О восстановлении сверточного возмущения оператора Штурма–Лиувилля по спектру // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, вып. 1. С. 146–149.
5. *Buterin S. A., Choque Rivero A. E.* On inverse problem for a convolution integro-differential operator with Robin boundary conditions // Appl. Math. Lett. 2015. Vol. 48. P. 150–155.

УДК 514.76

С. В. Галаев

SQS-МНОГООБРАЗИЯ С ОБОБЩЕННОЙ СВЯЗНОСТЬЮ СХОУТЕНА–ВАН КАМПЕНА

Поступила в редакцию 25.05.2018 г.

Существенный вклад в развитие геометрии квазисасакиевых многообразий (QS-многообразий) внесли В.Ф. Кириченко и его ученики [1]. В работе [1] получены условия, при которых квазисасакиево многообразие локально устроено как произведение сасакиева и кэлераво многообразий. Изучаемые в настоящей работе QS-многообразия названы специальными квазисасакиевыми многообразиями (SQS-многообразиями). SQS-многообразие является частным случаем почти AP-многообразия – почти контактного метрического многообразия с заданной на нем структурой почти произведения. Впервые понятие SQS-многообразия введено в работе [2], там же были рассмотрены некоторые примеры SQS-многообразий. В настоящей работе SQS-многообразиям наделяется связностью с кручением – обобщенной связностью Схоутена–ван Кампена [3].

Пусть M – гладкое многообразие нечетной размерности $n = 2m + 1$, $\Gamma(TM)$ – модуль гладких векторных полей на M . Предположим, что на M задана как почти контактная метрическая структура $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$, где φ – тензор типа $(1,1)$, называемый структурным эндоморфизмом, или допустимой почти комплексной структурой, $\vec{\xi}$ и η – вектор и ковектор, называемые соответственно структурным вектором и контактной формой, g – (псевдо) риманова метрика [4–7]. Гладкое распределение

$D = \ker \eta$, будем называть распределением почти контактной структуры. Гладкое распределение $D^\perp = \text{Span}(\vec{\xi})$, ортогональное распределению D , называется оснащением распределения D . Имеет место разложение $TM = D \oplus D^\perp$.

Предположим, что $\text{rk } d\eta = 2p$, $0 < 2p < 2m$. Хорошо известно, что ядро формы $\omega = d\eta$ является интегрируемым распределением, которое в дальнейшем будем обозначать символом K . Пусть $P : TM \rightarrow D$, $Q : TM \rightarrow D^\perp$, $h : TM \rightarrow L$, $v : TM \rightarrow L^\perp$ — проекторы, определяемые разложением $TM = L \oplus L^\perp \oplus D^\perp = D \oplus D^\perp$, где $L^\perp = K \cap D$, а L — ортогональное ему распределение в D . В работе [4] доказывается, что распределение L^\perp интегрируемо.

Многообразие M с почти контактной метрической структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$ назовем почти АР-многообразием, если выполняются следующие два условия:

1. Распределение L инвариантно относительно действия эндоморфизма φ ;
2. Имеет место равенство $d\eta(\vec{x}, \vec{y}) = \Omega(\vec{x}, \vec{y})$, $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(L)$.

Если при этом распределение $\tilde{L} = L \oplus D^\perp$ — интегрируемо, то почти АР-многообразие будем называть АР-многообразием.

Квазисасакиево почти АР-многообразие многообразие назовем специальным квазисасакиевым многообразием (SQS-многообразием).

Пусть $\dot{\nabla}$ — связность Леви — Чивита на почти АР-многообразии. Определим связность $\tilde{\nabla}$ и как обобщающую связность Схоутена — ван Кампена:

$$\tilde{\nabla} = h\dot{\nabla}_{\vec{x}}h\vec{y} + v\dot{\nabla}_{\vec{x}}v\vec{y} + Q\dot{\nabla}_{\vec{x}}Q\vec{y}.$$

Связность $\tilde{\nabla}$ названа нами обобщенной связностью Схоутена — ван Кампена. Имеет место

Теорема. Почти АР-многообразие является SQS-многообразием тогда и только тогда, когда выполняются условия: $L_{\vec{\xi}}g = 0$, $\tilde{\nabla}\varphi = 0$.

Замечание. Связность Схоутена — ван Кампена допускает и другие обобщения для случая почти АР-многообразия. А именно пусть ∇ — симметрическая внутренняя связность [7], заданная на почти АР-многообразии. Поставим ей в соответствие внутреннюю связность, определяемую по формуле $D_{\vec{x}}\vec{y} = h\nabla_{\vec{x}}h\vec{y} + v\nabla_{\vec{x}}v\vec{y}$. Сформулированная выше теорема останется верной, если обобщенную связность Схоутена — ван Кампена заменить связностью, ассоциированной со связностью D [7].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Кириченко В. Ф., Рустанов А. Р.* Дифференциальная геометрия квази-сасакиевых многообразий // Матем. сб. 2002. Т. 193, № 8. С. 71–100.
2. *Галаев С. В.* О распределениях, со специальной, квази-сасакиевой структурой // Вестн. Волгогр. гос. ун-та. Сер. 1, Мат. Физ. 2017. № 2(39). С. 6–17.
3. *Schouten J., van Kampen E.* Zur Einbettungs- und Krümmungstheorie nichtholonomer Gebilde // Math. Ann. 1930. № 103. P. 752–783.
4. *Bukusheva A. V., Galaev S. V.* Almost contact metric structures defined by connection over distribution // Bulletin of the Transilvania University of Brasov. Ser. III : Mathematics, Informatics, Physics. 2011. Vol. 4, № 2. P. 13–22.
5. *Букушева А. В., Галаев С. В.* Связности над распределением и геодезические пульверизации // Изв. вузов. Матем. 2013. № 4. С. 10–18.
6. *Букушева А. В., Галаев С. В.* Почти контактные метрические структуры, определяемые связностью над распределением с допустимой финслеровой метрикой // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12. вып. 3. С. 17–22.
7. *Галаев С. В.* N-продолженные симплектические связности в почти контактных метрических пространствах // Изв. вузов. Матем. 2017. № 3. С. 15–23.

УДК 517.51

Е. В. Гудошникова

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ПРОИЗВОДНЫХ ОПЕРАТОРОВ САСА–МИРАКЬЯНА

Поступила в редакцию 25.05.2018 г.

В теории линейных положительных операторов большую роль играют операторы Саса–Миракьяна [1–2]:

$$M_n(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} e^{-nx}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \geq 0. \quad (1)$$

Аппроксимативные свойства этих операторов хорошо известны, а именно имеет место

Теорема 1

Для $f \in C$ $|M_n(f; x) - f(x)| \leq 2(1 + \sqrt{x}) \omega(f; \frac{1}{\sqrt{n}});$

для $f \in C^1$ $|M_n(f; x) - f(x)| \leq \frac{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{n}} \omega(f'; \frac{1}{\sqrt{n}});$

для $f \in C^2$ $|M_n(f; x) - f(x)| \leq \frac{x}{2n} \left(1 + \sqrt{3x + \frac{1}{n}}\right) \omega(f''; \frac{1}{\sqrt{n}}) + \frac{\|f''\|x}{2n}$

и $|M_n(f; x) - f(x) - \frac{f''(x)x}{2n}| \leq \frac{x}{2n} \left(1 + \sqrt{3x + \frac{1}{n}}\right) \omega(f''; \frac{1}{\sqrt{n}});$

где $\omega(f; h)$ – модуль непрерывности функции f .

Эти оценки могут быть получены, например, как следствия теоремы 1 из работы [3]. Последнее неравенство является переносом известной

теоремы Вороновской ([4]), доказанной для операторов Бернштейна, на операторы Саса–Миракьяна. Из него, в частности, следует, что класс насыщения для операторов Саса–Миракьяна – дважды дифференцируемые функции, и общий порядок приближения этими операторами не лучше $O(\frac{1}{n})$, то есть если $f''(x) \neq 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} n |M_n(f; x) - f(x)| \neq 0$.

Наряду с операторами (1) рассматривались последовательности их производных (см., например, [5–7]):

$$M_n^{(p)}(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n^k}{k!} (x^k e^{-nx})^{(p)}, \quad p \in \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \geq 0, \quad (2)$$

для которых имеет место

Теорема 2

Для $f \in C^p$ $|M_n^{(p)}(f; x) - f^{(p)}(x)| \leq 2 \omega(f^{(p)}; \frac{1}{\sqrt{n}}) + \omega(f^{(p)}; \frac{p}{n});$

для $f \in C^{p+1}$ $|M_n^{(p)}(f; x) - f^{(p)}(x)| \leq \frac{\sqrt{x(1+\sqrt{x})}}{\sqrt{n}} \omega(f^{(p+1)}; \frac{1}{\sqrt{n}}) + \frac{p}{n} \|f^{(p+1)}\|;$

для $f \in C^{p+2}$ $|M_n^{(p)}(f; x) - f^{(p)}(x)| \leq$
 $\leq \frac{x}{2n} \left(1 + \sqrt{3x + \frac{1}{n}}\right) \omega(f^{(p+2)}; \frac{1}{\sqrt{n}}) + \frac{x}{2n} \|f^{(p+2)}\| + \frac{p}{n} \|f^{(p+1)}\|$

и для некоторого $\theta \in (0; 1)$

$$\left| M_n^{(p)}(f; x) - f^{(p)}(x) - \frac{x}{2n} f^{(p+2)}(x) - \frac{p\theta}{n} f^{(p+1)}(x) \right| \leq o\left(\frac{1}{n}\right);$$

(то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} n |M_n^{(p)}(f; x) - f^{(p)}(x)| \neq 0$).

Доказательство. В работе [6] было получено представление

$$M_n^{(p)}(f; x) = n^p \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^p \binom{p}{i} f\left(\frac{k+i}{n}\right) (-1)^{p-i} \right] \frac{(nx)^k}{k!} e^{-nx}.$$

Для p -й разности функции f (см., например, [8])

$$\Delta_h^p(f; x) = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} f\left(\frac{k+i}{n}\right) (-1)^{p-i}$$

найдется $\theta \in (0; 1)$ такое, что $\Delta_h^p(f; x) = h^p f^{(p)}(x + p\theta h)$, поэтому

$$M_n^{(p)}(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(p)}\left(\frac{k}{n} + \frac{p\theta}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} e^{-nx} = M_n(g^{(p)}(t); x),$$

где $g(t) = f(t + \frac{p\theta}{n})$. И так как

$$\left| M_n^{(p)}(f; x) - f^{(p)}(x) \right| \leq \left| M_n(g^{(p)}(t); x) - g^{(p)}(x) \right| + \left| g^{(p)}(x) - f^{(p)}(x) \right|,$$

первые три неравенства могут быть получены из теоремы 1.

Докажем последнее утверждение теоремы. Пусть $f \in C^{p+2}$. Так как

$$f^{(p)}\left(t + \frac{p\theta}{n}\right) = f^{(p)}(x) + f^{(p+1)}(x)\left(t + \frac{p\theta}{n} - x\right) + \frac{1}{2}f^{(p+2)}(x)\left(t + \frac{p\theta}{n} - x\right)^2 + \\ + \frac{1}{2}\left[f^{(p+2)}(\xi) - f^{(p+2)}(x)\right]\left(t + \frac{p\theta}{n} - x\right)^2,$$

где ξ – точка между $t + \frac{p\theta}{n}$ и x , и учитывая, что

$$M_n(1; x) = 1, \quad M_n(t - x; x) = 0, \quad M_n((t - x)^2; x) = \frac{x}{n},$$

(что может быть проверено непосредственным вычислением), получаем:

$$M_n^{(p)}(f; x) = M_n\left(g^{(p)}(t); x\right) = f^{(p)}(x) + f^{(p+1)}(x)\frac{p\theta}{n} + \frac{1}{2}f^{(p+2)}(x)\left(\frac{x}{n} + \frac{p^2\theta^2}{n^2}\right) + \\ + \frac{1}{2}M_n\left(\left(f^{(p+2)}(\xi) - f^{(p+2)}(x)\right)\left(t + \frac{p\theta}{n} - x\right)^2; x\right),$$

откуда

$$\left|M_n^{(p)}(f; x) - f^{(p)}(x) - f^{(p+1)}(x)\frac{p\theta}{n} - f^{(p+2)}(x)\frac{x}{2n}\right| \leq \\ \leq |f^{(p+2)}(x)|\frac{p^2\theta^2}{2n^2} + \frac{1}{2}M_n\left(|f^{(p+2)}(\xi) - f^{(p+2)}(x)|\left(t + \frac{p\theta}{n} - x\right)^2; x\right) \leq \\ \leq \|f^{(p+2)}\|\frac{p^2\theta^2}{2n^2} + \frac{1}{2}\omega\left(f^{(p+2)}; \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left[M_n\left(\left|t + \frac{p\theta}{n} - x\right|^2; x\right) + \sqrt{n}M_n\left(\left|t + \frac{p\theta}{n} - x\right|^3; x\right)\right],$$

так как $|f(t) - f(x)| \leq (1 + \sqrt{n}|t - x|) \cdot \omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

В силу неравенства Коши–Буняковского

$$M_n\left(\left|t + \frac{p\theta}{n} - x\right|^3; x\right) \leq \sqrt{M_n\left(\left|t + \frac{p\theta}{n} - x\right|^2; x\right)}\sqrt{M_n\left(\left|t + \frac{p\theta}{n} - x\right|^4; x\right)}.$$

Проводя непосредственные вычисления, получаем:

$$M_n\left(\left|t + \frac{p\theta}{n} - x\right|^2; x\right) = \frac{x}{n} + \frac{p^2\theta^2}{n^2},$$

$$M_n\left(\left|t + \frac{p\theta}{n} - x\right|^3; x\right) \leq \sqrt{\frac{x}{n} + \frac{p^2\theta^2}{n^2}}\sqrt{\frac{3x^2}{n^2} + \frac{x}{n^3} + \frac{4p\theta x}{n^3} + \frac{6p^2\theta^2 x}{n^2} + \frac{p^4\theta^4}{n^4}}.$$

Подставляя полученные оценки, получим утверждение теоремы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Миракьян Г.М.* Аппроксимирование непрерывных функций с помощью полиномов $e^{-nx} \sum_{k=0}^n c_{k,n} x^k$ // Докл. АН СССР. 1941. Т. 31. С.201–205.

2. Szasz O. Generalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval // J. Res. Nat. Bur. Standards, Sect. B. 1950. Vol. 45. P. 239–245.

3. Гудошникова Е. В. Оценки порядка приближения и теоремы насыщения для класса операторов // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2015. Вып. 17. С. 21–25.

4. Вороновская Е. В. Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна // Докл. АН СССР. 1932. № 4. С. 79–85.

5. Тихомиров Н. Б., Рятин А. Г. Линейные положительные операторы и сингулярные интегралы / Калининский гос. ун-т. Калининск, 1979. 76 с.

6. Xiehua Sun. On the simultaneous approximation of functions and their derivatives by the Szasz-Mirakyan operator // Journal of Approximation Theory. 1988. Vol. 55, iss. 3. December. P. 279–288.

7. Гудошникова Е. В. Сходимость последовательности натуральных и дробных производных операторов Саса–Миракьяна // Математика. Механика.: сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2016. Вып. 18. С. 21–25.

8. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М. : Наука, 1977. 512 с.

9. Коровкин П. П. О сходимости линейных положительных операторов в пространстве непрерывных функций // Докл. АН СССР. 1953. Т. 90, № 6. С. 961–964.

10. Гудошникова Е. В. Приближение операторами типа Саса–Миракьяна и Баскакова с весовыми множителями: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 1996. С. 11.

11. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М. : Наука, 1966. С. 672.

УДК 517.927.25

В. С. Гуреев, В. С. Рыхлов

О ДВУКРАТНОЙ ПОЛНОТЕ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО СИЛЬНО НЕРЕГУЛЯРНОГО ПУЧКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ 5-ГО ПОРЯДКА

Поступила в редакцию 23.05.2018 г.

В пространстве $L_2[0, 1]$ рассмотрим пучок обыкновенных дифференциальных операторов $L(\lambda)$, порожденный дифференциальным выражением n -го порядка

$$\ell(y, \lambda) := \sum_{j+s=n} p_{js} \lambda^s y^{(j)}, \quad p_{js} \in \mathbb{C}, \quad p_{n0} \neq 0, \quad p_{0n} \neq 0, \quad (1)$$

и линейно независимыми распадающимися нормированными краевыми условиями

$$\sum_{j+s=\kappa_i} \lambda^s \alpha_{ijs} y^{(j)}(0) = 0, \quad i = \overline{1, l}, \quad \sum_{j+s=\kappa_i} \lambda^s \beta_{ijs} y^{(j)}(1) = 0, \quad i = \overline{l+1, n}, \quad (2)$$

где $\lambda, \alpha_{ijs}, \beta_{ijs} \in \mathbb{C}, \kappa_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, 1 \leq l \leq n-1$.

Далее используем, не повторяя в данном тексте, известные определения корневых функций (к.ф.), m -кратной ($1 \leq m \leq n$) полноты к.ф., характеристического многоугольника (х.о.) и т.п. из [1].

Решается задача о нахождении условий на параметры пучка $L(\lambda)$, при которых имеет место m -кратная полнота системы к.ф. этого пучка в пространстве $L_2[0, 1]$. Историю вопроса можно посмотреть, например, в [1–3].

Предположим, что корни $\omega_1, \dots, \omega_n$ характеристического уравнения $\sum_{j+s=n} p_{js}\omega^j = 0$ попарно различны, отличны от нуля и лежат на двух или одном лучах, исходящих из начала в количествах k и $n - k$ ($0 \leq k \leq n$).

Не нарушая общности, можно считать, что корни расположены следующим образом:

$$\omega_n e^{i\varphi} < \omega_{n-1} e^{i\varphi} < \dots < \omega_{k+1} e^{i\varphi} < 0 < \omega_1 e^{-i\varphi} < \omega_2 e^{-i\varphi} < \dots < \omega_k e^{-i\varphi}, \quad (3)$$

где $|\varphi| < \pi/2$. В случае одного луча ($k = n$ или $k = 0$) считаем, что $\varphi = 0$ и $k = n$.

Обозначим далее $[p, q]_- = \min\{p, q\}$, $[p, q]_+ = \max\{p, q\}$.

В [4] исследована кратная полнота к.ф. для такого пучка с условием (3). Получены достаточные условия $2(n-l)$ -кратной полноты при $[k, n-k]_+ \leq l$ и $2l$ -кратной полноты при $[k, n-k]_- \geq l$ с возможным конечным дефектом. Отмечено, что в случае

$$[k, n-k]_- < l < [k, n-k]_+ \quad (4)$$

используемое доказательство не проходит из-за пока непреодолимых трудностей. Это случай пучка $L(\lambda)$ с устойчивой сильной нерегулярностью, то есть такой сильной нерегулярностью (см. [1]), которая имеет место при любых значениях коэффициентов краевых условий α_{ijs} и β_{ijs} .

Как указано в [4], вопрос о кратной полноте в некоторых случаях удается решить, используя другой подход, предложенный в [1]. Чтобы проверить это, рассмотрим конкретный пучок 5-го порядка вида (1)–(2), для которого выполняются условия (3) и (4) со следующими корнями его характеристического многочлена:

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = 2, \quad \omega_3 = 4, \quad \omega_4 = 8, \quad \omega_5 = 2i,$$

и краевыми условиями

$$U_{10} = y'(0) = 0, \quad U_{20} = y''(0) - \lambda^2 y(0) = 0, \quad U_{30} = y'''(0) + \lambda y''(0) = 0, \\ U_{41} = y(1) = 0, \quad U_{51} = y''(1) + \lambda y'(1) = 0.$$

Непосредственным подсчетом удалось установить, что

$$\begin{array}{ccccc} V_1 \notin (\alpha), & V_2 \notin (\alpha), & V_3 \notin (\alpha), & V_4 \notin (\alpha), & V_5 \in (\alpha), \\ W_1 \notin (\alpha), & W_2 \notin (\alpha), & W_3 \notin (\alpha), & W_4 \notin (\alpha), & W_5 \in (\alpha). \end{array}$$

Для того чтобы было удобно подсчитывать соответствующие определители, строить х.м. M , M_Δ , $M(V_j)$ и $M(W_j)$ и проверять выполнение условий $V_j \in (\alpha)$ и $W_j \in (\alpha)$ (обозначения взяты из [1]), была составлена компьютерная программа в среде ППП MatLab.

Некоторые результаты работы программы показаны на рис. 1–3.

На рис. 1 изображен х.м. M_Δ (сплошной линией) и многоугольник M (пунктирной линией). Точки ω_i обозначены как « i », $\omega_i + \omega_j$ как « ij » и т.д.

Наряду с этими многоугольниками программой построены х.м. $M(V_j)$ и $M(W_j)$ (в кружочек обведены те точки ω , которые принадлежат Ω_j и Ω^j соответственно), $j = \overline{1, 5}$. На рис. 2–3 приведены для примера самые важные х.м. $M(V_5)$ и $M(W_5)$, которые удовлетворяют условию (α) .



Рис. 1. M_Δ и M

Так как имеется пара векторов с одинаковыми индексами $\{V_5, W_5\} \in (\alpha)$, то по теореме 2 из [1] можно заключить, что система к.ф. данного пучка однократно полна в $L_2[0, 1]$ с возможным конечным дефектом.

Естественно возникает вопрос, а имеет ли место двух- и более кратная полнота к.ф. для рассматриваемого конкретного пучка?

Используя подход, предложенный в [5] для пучков третьего порядка, удалось установить, что для рассматриваемого пучка 5-го порядка имеет место 2-кратная полнота в пространстве $L_2[0, 1]$ с возможным конечным дефектом. Ввиду громоздкости выкладок мы опускаем детали.



Рис. 2. $M(V_5)$

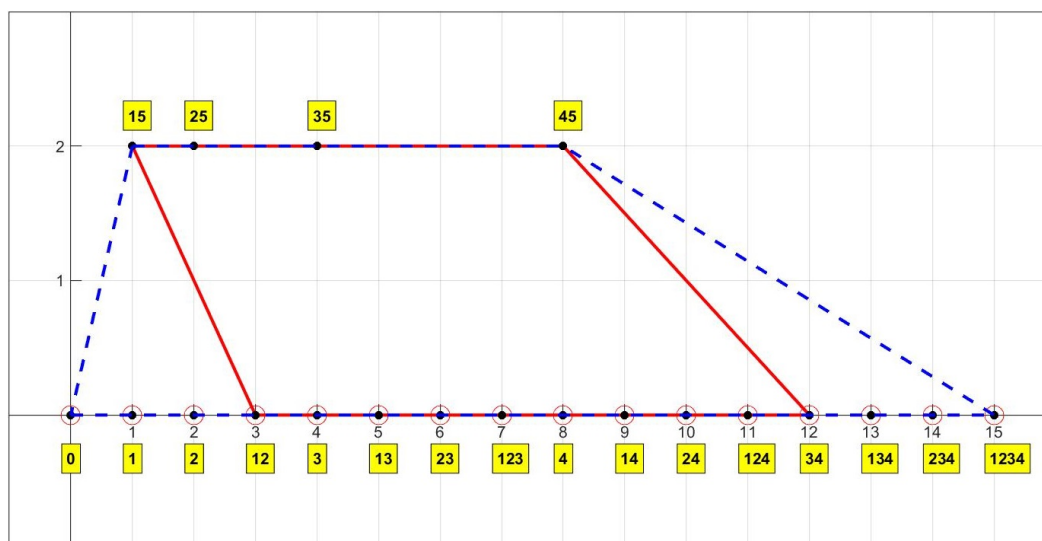


Рис. 3. $M(W_5)$

Отметим, что В. С. Рыхлов выполнил теоретическую часть работы, а В. С. Гуреев – практическую ее часть.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Рыхлов В. С.* О полноте корневых функций полиномиальных пучков обыкновенных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // ТВИМ (Таврический вестник информатики и математики). 2015. № 1(26). С. 69–86.
2. *Rykhlov V. S.* Multiple Completeness of the Root Functions for a Certain Class of Pencils of Ordinary Differential Operators // Results in Mathematics. 2017. Vol. 72, iss. 1–2. P. 281–301.
3. *Рыхлов В. С.* О кратной полноте корневых функций обыкновенного дифференциального полиномиального пучка с постоянными коэффициентами // СМФН (Современная математика. Фундаментальные направления). 2017. Т. 63, вып. 2. С. 340–361.

4. Рыжлов В. С. Достаточные условия кратной полноты корневых функций одного класса пучков дифференциальных операторов // Современные методы теории краевых задач : материалы междунар. конф., посвящ. 90-летию Владимира Александровича Ильина (Москва, 2–6 мая 2018 г.). М. : МАКС Пресс, 2017. С. 192–194.

5. Рыжлов В. С. Кратная полнота корневых функций некоторых нерегулярных пучков дифференциальных операторов // ТВИМ. 2016. № 2(31). С. 87–103.

УДК 519.853

С. И. Дудов, М. А. Осипцев

О КОЛЬЦЕ МИНИМАЛЬНОЙ ПЛОЩАДИ, СОДЕРЖАЩЕМ ГРАНИЦУ ДВУМЕРНОГО КОМПАКТА

Поступила в редакцию 21.05.2018 г.

1. Пусть D – некоторый компакт из пространства \mathbb{R}^2 , ∂D – его граница, $\|x\|$ – евклидова норма элемента $x \in \mathbb{R}^2$. Рассматривается задача

$$\varkappa(x) \equiv R^2(x) - \rho^2(x) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^2}. \quad (1)$$

Здесь функции

$$R(x) = \max_{y \in D} \|x - y\|, \quad \rho(x) = \min_{y \in \partial D} \|x - y\|$$

выражают соответственно расстояние от точки x до самой удалённой и самой близкой точки границы компакта D . Кольцо с центром в точке x , внешним радиусом $R(x)$ и внутренним радиусом $\rho(x)$ содержит границу компакта D . Величина $\pi \varkappa(x)$ выражает площадь кольца. При этом данное кольцо обладает наименьшей площадью из подобных колец с центром в точке x , содержащих границу компакта D .

Авторам не известно, рассматривалась ли такая задача ранее. Если D является выпуклым телом, то в качестве близкой по постановке можно назвать задачу

$$\varphi(x) \equiv R(x) - \rho(x) \rightarrow \min_{x \in D} \quad (2)$$

– о кольце наименьшей ширины, содержащем границу D [1, 2]. Простые примеры показывают, что задачи (1) и (2) могут иметь различные решения, а следовательно, задача (1) имеет самостоятельное значение.

Далее используются следующие обозначения :

– $\text{int } A$, $\text{co } A$, ∂A – внутренность, выпуклая оболочка, граница множества A соответственно

- $\underline{\partial}f(x)$ ($\overline{\partial}f(x)$) – субдифференциал (супердифференциал) выпуклой (вогнутой) функции $f(x)$ в точке x ;
- $f'(x, g) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \alpha^{-1}[f(x + \alpha g) - f(x)]$ – производная по направлению g функции $f(\cdot)$ в точке x ;
- $Q^R(x) = \{y \in D : R(x) = \|x - y\|\}$ – множество самых удалённых точек из D от точки x ;
- $Q^\rho(x) = \{y \in \partial D : \rho(x) = \|x - y\|\}$ – проекция точки x на границу компакта D ;
- $B(x, r)$, $S(x, r)$ – шар и сфера с центром в точке x и радиусом r ,
- $\langle x, y \rangle$ – скалярное произведение элементов x и y из \mathbb{R}^2 .

2. Приведём для дальнейшего изложения вспомогательные факты.

Лемма 1 [3]. *Функция $R(x)$ является выпуклой на \mathbb{R}^2 , формулу её субдифференциала в любой точке $x \in \mathbb{R}^2$ можно выразить в виде*

$$\underline{\partial}R(x) = \text{co} \left\{ \frac{x - z}{\|x - z\|} : z \in Q^R(x) \right\}. \quad (3)$$

Известно [4], что функция $\rho(x)$ является липшицевой на всём пространстве \mathbb{R}^2 , причём

$$|\rho(x) - \rho(y)| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2. \quad (4)$$

Лемма 2 [5, гл. 2]. *Функция $\rho(x)$ дифференцируема по любому направлению $g \in \mathbb{R}^p$ в точках $x \notin \partial D$, причём*

$$\rho'(x, g) = \min_{w \in \overline{\partial}\rho(x)} \langle w, g \rangle,$$

где

$$\overline{\partial}\rho(x) = \text{co} \left\{ \frac{x - z}{\|x - z\|} : z \in Q^\rho(x) \right\}. \quad (5)$$

Из (4) и леммы 2 вытекает справедливость следующего факта.

Лемма 3 *Функция $\rho^2(x)$ является дифференцируемой по любому направлению $g \in \mathbb{R}^p$ в точках $x \in \mathbb{R}^2$, причём*

$$(\rho^2)'(x, g) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \partial D, \\ \min_{w \in 2\rho(x)\overline{\partial}\rho(x)} \langle w, g \rangle, & \text{если } x \notin \partial D, \end{cases} \quad (6)$$

где $\overline{\partial}\rho(x)$ определяется формулой (5).

3. Теперь приведём основные результаты.

Теорема 1. Функция $\varkappa(x)$ является выпуклой на всём пространстве \mathbb{R}^2 , а ее субдифференциал в любой точке $x \in \mathbb{R}^2$ можно выразить формулой

$$\underline{\partial}\varkappa(x) = 2(\text{co}Q^\rho(x) - \text{co}Q^R(x)). \quad (7)$$

Доказательство. 1) Для евклидовой нормы имеет место

$$\|\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2\|^2 = \alpha\|x_1\|^2 + (1 - \alpha)\|x_2\|^2 - \alpha(1 - \alpha)\|x_1 - x_2\|^2 \quad (8)$$

для любых точек x_1 и x_2 из \mathbb{R}^2 и $\alpha \in [0, 1]$. Возьмём произвольную точку $y(\alpha) \in Q^R(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2)$. Поскольку $y(\alpha) \in D$, то, используя (8), получаем

$$\begin{aligned} R^2(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) &= \|\alpha(x_1 - y(\alpha)) + (1 - \alpha)(x_2 - y(\alpha))\|^2 = \\ &= \alpha\|x_1 - y(\alpha)\|^2 + (1 - \alpha)\|x_2 - y(\alpha)\|^2 - \alpha(1 - \alpha)\|x_1 - x_2\|^2 \leq \\ &\leq \alpha R^2(x_1) + (1 - \alpha)R^2(x_2) - \alpha(1 - \alpha)\|x_1 - x_2\|^2, \end{aligned} \quad (9)$$

то есть функция $R^2(x)$ является сильно выпуклой на \mathbb{R}^p .

Аналогично если взять точку $z(\alpha) \in Q^\rho(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2)$, то поскольку $z(\alpha) \in \partial D$, из (8) вытекает

$$\begin{aligned} \rho^2(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) &= \|\alpha(x_1 - z(\alpha)) + (1 - \alpha)(x_2 - z(\alpha))\|^2 = \\ &= \alpha\|x_1 - z(\alpha)\|^2 + (1 - \alpha)\|x_2 - z(\alpha)\|^2 - \alpha(1 - \alpha)\|x_1 - x_2\|^2 \geq \\ &\geq \alpha\rho^2(x_1) + (1 - \alpha)\rho^2(x_2) - \alpha(1 - \alpha)\|x_1 - x_2\|^2, \end{aligned} \quad (10)$$

то есть функция $\rho^2(x)$ является слабовогнутой на \mathbb{R}^2 [6].

Вычитая из неравенства (9) неравенство (10), делаем вывод о выпуклости функции $\varkappa(x)$ на \mathbb{R}^2 .

2) Из лемм 1 – 3 следует, что функция $\varkappa(x)$ дифференцируема по направлениям в любой точке $x \in \mathbb{R}^2$. При этом если $x \notin \partial D$, то

$$\begin{aligned} \varkappa'(x, g) &= (R^2)'(x, g) - (\rho^2)'(x, g) = 2R(x)R'(x, g) - 2\rho(x)\rho'(x, g) = \\ &= 2R(x) \max_{v \in \underline{\partial}R(x)} \langle v, g \rangle - 2\rho(x) \min_{w \in \overline{\partial}\rho(x)} \langle w, g \rangle. \end{aligned}$$

Отсюда, используя формулы (3), (5) и (6), получаем :

$$\begin{aligned} \varkappa'(x, g) &= 2 \max_{v \in \text{co}\{x-y: y \in Q^R(x)\}} \langle v, g \rangle - 2 \min_{w \in \text{co}\{x-z: z \in Q^\rho(x)\}} \langle w, g \rangle = \\ &= \max_{v \in 2(\text{co}Q^R(x) - \text{co}Q^\rho(x))} \langle v, g \rangle, \quad \forall g \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Справедливость этой формулы для любого направления $g \in \mathbb{R}^p$, как известно [5], однозначно определяет формулу субдифференциала выпуклой функции.

Справедливость формулы (7) для случая $x \in \partial D$ доказывается аналогично, при этом $Q^p(x) = \{x\}$. \square

Теорема 2. *Для того, чтобы точка x^* была точкой минимума функции $\varkappa(x)$ на \mathbb{R}^p , необходимо и достаточно, чтобы*

$$\text{co}Q^R(x^*) \cap \text{co}Q^p(x^*) \neq \emptyset. \quad (11)$$

Доказательство. В соответствии с известным фактом из выпуклого анализа [3, гл.4], то что точка x^* является точкой минимума выпуклой функции $\varkappa(x)$, эквивалентно выполнению включения

$$0_2 \in \underline{\partial \varkappa}(x). \quad (12)$$

Остаётся заметить, что включение (12), как следует из (7), эквивалентно соотношению (11).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Боннезен Т., Фенхель В. Теория выпуклых тел. М. : Фазис, 2002.
2. Bonnesen T. Uber das isoperimetrische Defizit ebener Figuren // Math. Ann. 1924. Bd. 91. S. 252–268.
3. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М. : Наука, 1980.
4. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.
5. Демьянов В. Ф., Васильев Л. В. Недифференцируемая оптимизация. М. : Наука, 1981.
6. Иванов Г. Е. Слабо выпуклые множества и функции. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.

УДК 517.518.84

А. О. Залетаева, В. В. Кривобок

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АППРОКСИМАЦИЙ ПАДЕ

Поступила в редакцию 29.05.2018 г.

Аппроксимации Паде являются локально наилучшими рациональными приближениями заданных степенных рядов. Данный вид аппроксимаций находит широкое применение в научно-технических расчетах. В пакете программ Matlab имеется стандартная функция, вычисляющая

аппроксимации Паде, но она не учитывает многомерности ядра матрицы, из которого находятся коэффициенты знаменателя аппроксимации Паде. В результате чего числитель и знаменатель аппроксимации Паде могут иметь общие множители, сокращая которые получаем нужный ответ единственным образом. На практике данные множители являются зачастую лишь примерно равными, что приводит к дуплетам Фруассара. Дуплетов Фруассара можно избежать, если находить знаменатель аппроксимации Паде без лишних нулей. Алгоритм, предложенный в статье, посвящен именно этой процедуре.

Определение. *Аппроксимацией Паде типа (m, n) для ряда $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ называется рациональная функция $\pi_{n,m} = \frac{P_{n,m}(z)}{Q_{n,m}(z)}$ такая, что многочлены $P_{n,m}(z)$ и $Q_{n,m}(z)$ удовлетворяют условиям*

1. $Q_{n,m}(z) \neq 0$, $\deg Q_{n,m}(z) \leq m$;
2. $\deg P_{n,m}(z) \leq n$;
3. $f(z)Q_{n,m}(z) - P_{n,m}(z) = O(z^{n+m+1})$, при $z \rightarrow 0$.

Если из коэффициентов знаменателя составить вектор, то он будет принадлежать ядру теплицевой матрицы:

$$T_{n+1} = \begin{pmatrix} c_{n+1} & c_n & \cdots & c_{n-m+1} \\ c_{n+2} & c_{n+1} & \cdots & c_{n-m+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n+m} & c_{n+m-1} & \cdots & c_n \end{pmatrix}.$$

В работе [1] показано, что множество всех знаменателей аппроксимации Паде допускает параметризацию $Q_{n,m}(z) = q(z)Q_1(z)$, где $q(z)$ – произвольный многочлен степени, не выше $n - \mu_1$ и μ_1 , $Q_1(z)$ – так называемые первый существенный индекс и первый существенный многочлен последовательности $c_{n-m+1}, c_{n-m+2}, \dots, c_{n+m}$. Таким образом, из всех многочленов $Q_{n,m}(z)$ первый существенный многочлен $Q_1(z)$ имеет минимальную степень. Предложенный в этой статье алгоритм нахождения аппроксимации Паде основан на выборе в качестве знаменателя аппроксимации многочлена $Q_1(z)$. Множество всех числителей аппроксимации Паде также допускает аналогичную параметризацию. Корнями многочлена $q(z)$ являются общие ненулевые корни числителя $P_{n,m}(z)$ и знаменателя $Q_1(z)$ аппроксимации Паде. На практике из-за неточных исходных данных и ошибок вычислений часто оказывается, что лишнему корню знаменателя (не полюсу аппроксимируемой функции) соответ-

стует лишь примерно равный ему корень числителя. Такая пара корней носит название дуплетов Фруассара (Froissart doublets).

Опишем алгоритм для нахождения аппроксимаций Паде типа (n, m) функции $f(x)$ в точке $x = a$.

1. Находим коэффициенты c_0, \dots, c_{n+m} разложения в ряд Тейлора аппроксимируемой функции $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ в точке $x = a$.

2. Составим теплицевы матрицы (здесь $c_k = 0$, если $k < 0$)

$$T_{n+1} = \begin{pmatrix} c_k & c_{k-1} & \dots & c_M \\ c_{k+2} & c_k & \dots & c_{M+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_N & c_{N-1} & \dots & c_{N+M-k} \end{pmatrix},$$

где $M = n - m + 1$, $N = n + m$, $M \leq N$. Ядра этих матриц образуют цепочку вложенных пространств. Первое нетривиальное ядро в этой цепочке обязательно является одномерным, а производящий многочлен его базиса является искомым знаменателем $Q_1(z)$.

3. Находим ранги r_k матриц T_k , $M \leq k \leq N$. Функция $\text{rank}(A)$ в Matlab возвращает ранг матрицы A , который определяется как количество ее сингулярных чисел, превышающих порог tol .

4. Находим размерности $d_k = k - M + 1 - r_k$, $M \leq k \leq N$ правых ядер матриц T_k . Положим также $d_{M-1} = 0$, $d_{N+1} = N - M + 2$.

5. Составляем разности $\Delta_k = d_k - d_{k-1}$, $M \leq k \leq N + 1$, и находим существенные индексы μ_1, μ_2 . Для чисел Δ_k , как следует из работы [1], справедливы равенства: $\Delta_M = \dots = \Delta_{\mu_1} = 0$, $\Delta_{\mu_1+1} = \dots = \Delta_{\mu_2} = 1$, $\Delta_{\mu_2+1} = \dots = \Delta_{N+1} = 2$. Числа μ_1, μ_2 , определяемые этими соотношениями, и называются первым и вторым существенным индексами последовательности c_M, \dots, c_N . Заметим, что последовательность Δ_k является монотонной. Нарушение монотонности этой последовательности указывает на то, что индексы найдены неверно.

6. Находим вектор $(g_0, g_1, \dots, g_{\mu_1+1-M})^T$ из одномерного ядра матрицы T_{μ_1+1-M} . Он содержит коэффициенты знаменателя аппроксимации Паде, имеющего минимальную степень.

7. Находим знаменатель аппроксимации Паде $Q_1(z) = \sum_{k=0}^{\mu_1+1-M} g_k(z - a)^k$.

Степень многочлена $Q_1(z)$ может быть формальной. Если $\deg Q_1(z) = s < \mu_1 + 1 - M$, то обычно считают, что $z = \infty$ является корнем $Q_1(z)$ кратности $\mu_1 + 1 - M - s$. Из-за приближенных вычислений коэффициенты g_k , $k = s + 1, \dots, \mu_1 + 1 - M$, могут оказаться

лишь близкими к нулю. Это приведет к тому, что многочлен $Q_1(z)$ будет иметь k корней с большой абсолютной величиной.

Известный априорный дополнительный параметр *tolerance*, задаваемый пользователем, используется программой для того, чтобы определить, какие из коэффициентов g_k следует считать равными нулю.

8. Составляем матрицу $M = \|c_{i-j}\|$ $i = 1, \dots, n + 1$, $j = 1, \dots, s + 1$, ($c_k = 0$, если $k < 0$), необходимую для нахождения числителя аппроксимации Паде. Здесь s – степень многочлена $Q_1(z)$. После исключения почти нулевых коэффициентов в многочлене $Q_1(z)$ его степень s может оказаться меньше формальной степени $\mu_1 + 1 - M$.

9. Находим вектор $(p_0, p_1, \dots, p_n)^T = M \cdot (q_0, q_1, \dots, q_s)^T$ и числитель аппроксимации Паде $P_1(z) = \sum_{k=0}^n p_k(z - a)^k$. На этом этапе также целесообразно убрать нулевые (меньшие, чем *tolerance*) элементы p_k перед образованием числителя.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Adukov V.M.* The problem of Pade approximation as the Riemann boundary problem // *Vestsi NAN Belarusi. Seriya Fiziko-matem. nauk.* 2004. № 4. P. 55 – 61.

УДК 513.6

Е. В. Залетаева, С. И. Небалуев, Е. В. Сецинская

ПЕРСИСТЕНТНЫЕ ГОМОЛОГИИ И ТОЛЕРАНТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Поступила в редакцию 24.05.2018 г.

В статье кратко изложена суть метода обработки большого массива данных (*big data*), основанного на применении персистентных гомологий (*persistent homology*), и с помощью теории толерантных пространств проведено строгое математическое обоснование этого метода, что до настоящего времени сделано не было.

Не вдаваясь в историю вопроса, можно констатировать, что обработка больших объемов данных (*big data*) уже давно стала приносить реальную и существенную пользу в различных областях науки: в медицине, промышленности, торговле и т.д. К решению задач по программе *big data* все больше привлекаются математики самых различных специальностей. Так, например, в работах Карлсона (*Carlsson*) [1] применяются методы

алгебраической топологии для анализа глобальной структуры исследуемого массива по дискретной выборке имеющихся данных. Основным инструментом в этих работах являются введенные авторами персистентные гомологии (*persistent homology*).

Приведем пример, являющийся мотивацией исследований Карлсона и соавторов. Пусть данные, полученные каким-либо способом, представляют собой конечный набор точек X в подпространстве $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$. X называют множеством точечных облачных данных, коротко *ТОД*. Работы по персистентным гомологиям основаны на предположении, что при достаточно большой плотности *ТОД* можно вычислить алгебраические характеристики (например, гомологии) пространства \mathbb{X} непосредственно по *ТОД*. В рамках этого предположения предлагается взять некоторое малое действительное число $\varepsilon > 0$ и рассмотреть симплициальный комплекс $R_\varepsilon(X)$, вершинами которого будут точки $x \in X$, а симплексами — конечные наборы $\sigma = (x_0, \dots, x_k)$ такие, что расстояние в \mathbb{R}^n между этими точками $\rho(x_i, x_j) < \varepsilon$. Далее, по $R_\varepsilon(X)$ строится цепной комплекс

$$K(X, \varepsilon) = \{K_k(X, \varepsilon)\}_{k \geq 0},$$

а затем вычисляются группы гомологий

$$H(X, \varepsilon) = \bigoplus_k H_k(K(X, \varepsilon)).$$

Если число ε достаточно мало, а множество X в \mathbb{X} не достаточно плотно, то в гомологиях $H(X, \varepsilon)$ могут появиться элементы, соответствующие «дырам», не существующим в пространстве \mathbb{X} , и, значит, гомологии $H(X, \varepsilon)$ будут существенно отличаться от гомологий $H(\mathbb{X})$ этого топологического пространства \mathbb{X} . Если же ε взять чрезмерно большим, то гомологии $H(X, \varepsilon)$ превратятся в гомологии точки и вообще не будут содержать информации об $H(\mathbb{X})$. Учитывая сказанное, предлагается вместо одного числа ε взять возрастающую последовательность $0 = \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \dots$. Ей будут соответствовать фильтрации симплициальных и цепных комплексов

$$R^{(0)}(X) \subset R^{(1)}(X) \subset \dots, \quad K^{(0)}(X) \subset K^{(1)}(X) \subset \dots,$$

$$R^{(l)}(X) = R_{\varepsilon_l}(X), \quad K^{(l)}(X) = K(X, \varepsilon_l), \quad l = \overline{0, \infty}.$$

Отсюда получаем последовательность индуцированных гомоморфизмов групп гомологий

$$H^{(0)}(X) \subset H^{(1)}(X) \subset \dots, \quad H^{(l)}(X) = H(K^{(l)}(X)), \quad l \geq 0.$$

По мнению авторов этой теории, те элементы группы $H^{(l)}(X)$, которые обладают свойством персистентности (устойчивости), то есть они не обнуляются композицией гомоморфизмов $\varphi^{(l+p)} \circ \dots \circ \varphi^{(l)}$ при достаточно больших p , именно эти персистентные элементы должны соответствовать ненулевым элементам группы $H(\mathbb{X})$. Поэтому авторы предложили сосредоточить внимание на группах

$$H^{(l,p)}(X) = Jm(\varphi^{(l+p)} \circ \dots \circ \varphi^{(l)}),$$

которые они и называли персистентными гомологиями.

Несмотря на оригинальность и ясные мотивировки метода персистентных гомологий, до настоящего времени остается вопрос об обоснованности этого метода: достигается ли решение поставленных задач; и при каких условиях эти задачи решаются? Чтобы перейти к обоснованию, заметим, что с точки зрения теории толерантных пространств [2], гомологии $H(X, \varepsilon)$ представляют собой толерантные гомологии метрического толерантного пространства (X, τ_ε) , следовательно, по ним мы можем судить лишь о толерантных гомологиях ${}^{tol}H(\mathbb{X})$ толерантного пространства $(\mathbb{X}, \tau_\varepsilon)$. В плане обоснований возникает первый вопрос: могут ли толерантные гомологии конечного толерантного пространства (X, τ_ε) совпадать с толерантными гомологиями толерантного пространства $(\mathbb{X}, \tau_\varepsilon)$, которое содержит (X, τ_ε) и предполагается континуальным? В топологии ответ на такой вопрос отрицательный, кроме совершенно тривиальных случаев. В толерантных пространствах этот вопрос известен как проблема дискретизации и известны достаточные условия его положительного решения [2, 3].

Теорема 1. Пусть пространство (X, τ) имеет конечное хорошее покрытие классами толерантности $L = \{L_1, \dots, L_m\}$ [2]. Тогда существует конечное толерантное пространство (X_L, τ_L) и толерантное вложение $j(L) : (X_L, \tau_L) \rightarrow (X, \tau)$, которое индуцирует изоморфизм групп гомологий

$$j(L)_* : {}^{tol}H(X_L) \cong {}^{tol}H(X).$$

Теорема 2. Если толерантное отображение $f : (X', \tau') \rightarrow (X, \tau)$ имеет вид $f = i \circ g$, где $i : (R, \tau) \subset (X, \tau)$ — вложение, (R, τ) простой толерантный ретракт пространства (X, τ) , $g : (X', \tau') \rightarrow (R, \tau)$ — толерантный гомеоморфизм, тогда f является всюду плотным толерантным вложением, индуцирующим изоморфизм групп толерантных гомологий

$$f_* : {}^{tol}H(X') \cong {}^{tol}H(X).$$

Второй вопрос в обосновании метода персистентных гомологий — это вопрос о совпадении толерантных гомологий ${}^{tol}H(\mathbb{X})$ и топологических гомологий ${}^{top}H(\mathbb{X})$, так как даже при положительном решении проблемы дискретизации мы будем иметь гомологии ${}^{tol}H(\mathbb{X})$, а нам нужна информация о группах ${}^{top}H(\mathbb{X})$. Условия, при которых получаем нужное совпадение, достаточно необременительные для топологического пространства $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$.

Теорема 3. *Если в каком-либо хорошем покрытии толерантного пространства $(\mathbb{X}, \tau_\varepsilon)$ все классы толерантности вместе с их пересечениями являются топологически стягиваемыми, то толерантные и топологические гомологии пространств $(\mathbb{X}, \tau_\varepsilon)$ и $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$ изоморфны ${}^{tol}H(\mathbb{X}) \cong {}^{top}H(\mathbb{X})$.*

Доказательство теоремы 3 получается с помощью теоремы 3.2.2 из работы [2], теоремы двойственности Доукера [4] и теоремы 15.8 [5].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ghrist R.* Barcodes : the persistent topology of data // Bulletin of the american mathematical society. 2008. Vol. 45, № 1. P. 61–75.
2. *Небалуев С. И.* Гомологическая теория толерантных пространств. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2006. 112 с.
3. *Небалуев С. И., Сецинская Е. В.* О гипотезе Зимана для конечных толерантных пространств // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2017. Вып. 19. С. 73–75.
4. *Dowker C. H.* Homology groups of relation // Ann. of Math. 1956. Vol. 56. P. 84–95.
5. *Ботт Р., Ту Л. В.* Дифференциальные формы в алгебраической топологии. М. : Наука, 1989.

УДК 517.84

В. В. Корнев, А. П. Хромов

КЛАССИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Поступила в редакцию 04.05.2018 г.

1. В этом параграфе рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T; \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0; \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u'_t(x, 0) = 0. \quad (3)$$

Считаем, что $f(x, t)$ продолжена на $x \in R$ нечетным образом с периодом 2.

Под классическим решением задачи (1)–(3) понимаем функцию $u(x, t)$, непрерывную вместе с $u'_x(x, t)$ и $u'_t(x, t)$ в $Q = [0, 1] \times [0, T]$, которые абсолютно непрерывны по x и по t соответственно, удовлетворяющую условиям (2), (3) и почти всюду уравнению (1).

Теорема 1. Пусть $f(x, t) \in L(Q)$, почти при каждом x функция $f(x, t)$ абсолютно непрерывна по t и $f'_t(x, t) \in L(Q)$. Тогда существует классическое решение задачи (1)–(3) и оно дается формулой

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\eta, \tau) d\eta,$$

причем $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \in L(Q)$.

Доказательство этой теоремы весьма большое. Опишем его структуру в виде последовательности лемм. Без ограничения общности считаем, что $f(x, t)$ абсолютно непрерывна по t при каждом $x \in [0, 1]$, так как для тех x , где это не выполняется, можно положить $f(x, t) = 0$, что не влияет на значение $u(x, t)$.

Лемма 1. При каждом t функция $f(x, t)$ суммируема по $x \in [0, 1]$.

Лемма 2. Функция $u(x, t)$ непрерывна и

$$u(0, t) = u(1, t) = u(x, 0) = 0.$$

Лемма 3. Функция $u(x, t)$ непрерывно дифференцируема по t , причем имеет место формула

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = J_1(x, t) + J_2(x, t),$$

где $J_1(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t f(x + t - \tau, \tau) d\tau$, $J_2(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t f(x - t + \tau, \tau) d\tau$, функции $J_1(x, t)$ и $J_2(x, t)$ непрерывны по x и t .

Лемма 4. Функция $u(x, t)$ непрерывно дифференцируема по x , причем имеет место формула

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = J_1(x, t) - J_2(x, t).$$

Лемма 5. При фиксированном x функция $J_1(x, t)$ абсолютно непрерывна по t , причем почти при всех t

$$2 \frac{\partial J_1(x, t)}{\partial t} = f(x + t, 0) + \int_x^{x+t} f'_t(\xi, x + t - \xi) d\xi.$$

Лемма 6. При фиксированном t функция $J_1(x, t)$ абсолютно непрерывна по x и почти при всех x

$$2 \frac{\partial J_1(x, t)}{\partial x} = f(x + t, 0) - f(x, t) + \int_x^{x+t} f'_t(\xi, x + t - \xi) d\xi.$$

Лемма 7. При фиксированном x функция $J_2(x, t)$ абсолютно непрерывна по t , причем почти при всех t

$$2 \frac{\partial J_2(x, t)}{\partial t} = f(x - t, 0) + \int_{x-t}^x f'_t(\xi, \xi - x + t) d\xi.$$

Лемма 8. При фиксированном t функция $J_2(x, t)$ абсолютно непрерывна по x и почти при всех x

$$2 \frac{\partial J_2(x, t)}{\partial x} = f(x, t) - f(x - t, 0) - \int_{x-t}^x f'_t(\xi, \xi - x + t) d\xi.$$

Из лемм 3 и 4 следует, что $u(x, t)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по x и t , причем $u'_t(x, 0) = 0$. Таким образом, на основании леммы 2 условия (2) и (3) выполняются. Из лемм 5–8 заключаем, что функции $u'_x(x, t)$ и $u'_t(x, t)$ абсолютно непрерывны по x и t соответственно и почти всюду в Q

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial t}(u'_t(x, t)) - \frac{\partial}{\partial x}(u'_x(x, t)) = \\ &= J'_{1t}(x, t) + J'_{2t}(x, t) - J'_{1x}(x, t) - J'_{2x}(x, t) = \\ &= \frac{1}{2} \left[f(x + t, 0) + \int_x^{x+t} f'_t(\xi, x + t - \xi) d\xi + f(x - t, 0) - \right. \end{aligned}$$

$$- \int_{x-t}^x f'_t(\xi, \xi - x + t) d\xi - f(x+t, 0) + f(x, t) - \left[\int_x^{x+t} f'_t(\xi, x+t-\xi) d\xi + f(x, t) - f(x-t, 0) - \int_{x-t}^x f'_t(\xi, \xi - x + t) d\xi \right] = f(x, t),$$

т.е. уравнение (1) выполняется почти всюду. Кроме того, согласно леммам 5 и 7 имеем $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \in L(Q)$.

Замечание. Теорема остается в силе, если предположить, что $f(x, t) \in L(Q)$, почти при каждом t функция $f(x, t)$ абсолютно непрерывна по x , причем $f(0, t) = f(1, t) = 0$.

2. Дадим приложение теоремы 1 к классическому решению задачи:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - q(x)u(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, \infty); \quad (4)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0; \quad (5)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u'_t(x, 0) = 0. \quad (6)$$

Считаем, что $q(x)$, $\varphi(x)$ – комплекснозначные функции, причем $q(x) \in L[0, 1]$.

Теорема 2. Для того, чтобы классическое решение смешанной задачи (4)–(6) существовало, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ были абсолютно непрерывны и $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. При этом имеет место формула

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x, t), \quad (7)$$

где $a_n(x, t) = -\frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{q}(\eta) a_{n-1}(\tau, \eta) d\eta$ ($n = 1, 2, \dots$), $a_0(x, t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)]$, $\tilde{q}(x)$ ($\tilde{\varphi}(x)$) четное (нечетное) продолжение $q(x)$ ($\varphi(x)$) на всю ось. Ряд (7) сходится абсолютно и равномерно по x , $t \in Q_T = [0, 1] \times [0, T]$ при любом $T > 0$.

Тем самым получено предельное усиление соответствующего результата о классическом решении из [3]. Относительно формулы (7) см. также [4, 5].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Резольвентный подход в методе Фурье // Докл. АН. 2014. Т. 458, № 2. С. 138–140.
2. *Хромов А. П.* Классическое решение методом Фурье смешанных задач // Новые методы аппроксимации в задачах действительного анализа и в спектральной теории. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2015. Раздел 1. С. 7–92.
3. *Хромов А. П.* О сходимости формального решения по методу Фурье для волнового уравнения с суммируемым потенциалом // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56, № 10. С. 1795–1809.
4. *Корнев В. В., Хромов А. П.* Об обобщенном формальном решении по методу Фурье смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 19-й междунар. Сарат. зимн. школы, посвящ. 90-летию академика П. Л. Ульянова (Саратов, 29 янв.–2 февр. 2018 г.). Саратов : Науч. книга, 2018. С. 156–159.
5. *Корнев В. В., Хромов А. П.* О классическом и обобщенном решении смешанной задачи для волнового уравнения // Современные методы краевых задач. Понтрягинские чтения - XXIX : материалы междунар. конф., посвящ. 90-летию академика РАН В. А. Ильина (Москва, 2–6 мая 2018 г.). М. : МАКС-ПРЕСС, 2018. С. 132–134.

УДК 513.6

Е. В. Коробченко, В. В. Кривобок, С. И. Небалуев

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ТОЛЕРАНТНЫХ РАССЛОЕНИЙ

Поступила в редакцию 24.05.2018 г.

Спектральные последовательности (см. [1]) зарекомендовали себя как один из самых сложных, но и самых эффективных методов вычислений в различных разделах математики, например, таких как алгебраическая топология, алгебраическая геометрия и др. В алгебраической топологии спектральные последовательности часто появляются в связи с изучением расслоений топологических пространств. В качестве самого известного примера можно привести спектральную последовательность Лере–Серра топологического расслоения. Методы алгебраической топологии в значительной степени переносятся в теорию толерантных пространств (см. [2]). И хотя при этом эти методы приобретают специфические черты, тем не менее многие результаты в обеих теориях оказываются схожими.

Отсылая к работе [3], приведем определение.

Определение 1. Толерантное отображение $p : (E, \bar{\tau}) \rightarrow (B, \tau)$ называется толерантным расслоением (в смысле Гуревича), если для любого толерантного пространства (Y, ϑ) и любых толерантных отображений $F : (Y \times I_n, \vartheta \times \iota_n) \rightarrow (B, \tau)$, $\bar{f} : (Y, \vartheta) \rightarrow (E, \bar{\tau})$ таких, что $F|(Y \times \{0\}) = p \circ \bar{f}$, существует толерантное отображение $\bar{F} : (Y \times I_n, \vartheta \times \iota_n) \rightarrow (E, \bar{\tau})$ такое, что $\bar{F}|(Y \times \{0\}) = \bar{f}$, $p \circ \bar{F} = F$.

В этом определении (I_n, ι_n) – толерантный отрезок длины n , в котором $I_n = \{\frac{k}{n} | k = \overline{0, n}\}$, $\frac{k}{n} \iota_n \frac{l}{n} \Leftrightarrow |k - l| \leq 1$.

Для толерантного расслоения $p : (E, \bar{\tau}) \rightarrow (B, \tau)$ – толерантное пространство $(E, \bar{\tau})$ называется пространством расслоения, пространство (B, τ) – называется базой расслоения, а пространство $(F, \bar{\tau})$, где $F = p^{-1}(b_0) \subset E$, $b_0 \in B$ называется слоем расслоения над точкой b_0 .

Теорема 1. (Спектральная последовательность Лере–Серра для толерантных расслоений) Пусть $p : (E, \bar{\tau}) \rightarrow (B, \tau)$ – толерантное расслоение с линейно связными базой (B, τ) и слоем $(F, \bar{\tau})$, тогда имеется спектральная последовательность $\varepsilon = \{\varepsilon^m = \bigoplus_{s,t} \varepsilon_{s,t}^m\}_m$, эта последовательность сходится и ее первые члены имеют вид

$$\varepsilon_{s,t}^1 \cong C_s^\bullet(B) \otimes H_t(F), \quad (1)$$

$$\varepsilon_{s,t}^2 \cong H_s(B; H_t(F)). \quad (2)$$

Замечание 1. В формуле (1) $C_s^\bullet(B)$ обозначает группу s -мерных нормализованных пунктированных толерантных сингулярных цепей пространства (B, τ) (см. [4]).

Замечание 2. В правой части формулы (2) $H(B; H(F))$ представляют собой гомологии базы (B, τ) с локальными коэффициентами в группе гомологий слоя $(F, \bar{\tau})$. При этом локальная система коэффициентов определяется с помощью действия фундаментальной группы $\pi(B, b_0)$ на группе гомологий $H(F)$, описанного в работе [5].

Замечание 3. Доказательство теоремы 1 оказалось весьма громоздким (см. [6]), но его можно упростить с помощью процедуры окаймления толерантных сингулярных кубов (см. [7–8]).

В топологии особую роль играют расслоения, чье расслоенное пространство является пространством непрерывных путей. В случае толерантных пространств пространство $(P(X, x_0), \varkappa)$ (см. [9]) определяет лишь квазирасслоение.

Теорема 2. Толерантное отображение $p : (P(X, x_0), \varkappa) \rightarrow (X, \tau)$, определяемое формулой $(\forall \omega_M \in P(X, x_0)) \quad p(\omega_M) = \omega_M$, является толерантным квазирасслоением в том смысле, что для любого пространства (Y, ϑ) и любых толерантных отображений $F : (Y \times I_M, \vartheta \times \iota_M) \rightarrow (X, \tau)$, $\bar{f} : (Y, \vartheta) \rightarrow (P(X, x_0), \varkappa)$, $F|_{(Y \times \{0\})} = p \circ \bar{f}$, существует толерантное отображение $\bar{F} : (Y \times I_M, \vartheta \times \iota_M) \rightarrow (P(X, x_0), \varkappa)$ такое, что

$$p \circ \bar{F} = F, \quad (\forall y \in Y) \bar{F}(y, 0) = \bar{f}(y) * (\varepsilon_{p \circ \bar{f}(y)})_M = \bar{f}(y) * (\varepsilon_{F(y,0)})_M,$$

где $(\varepsilon_{F(y,0)})_M$ — постоянный путь длины M в точке $F(y, 0)$, а символ $*$ означает операцию склейки путей (см. [2]). При этом квазирасслоение p имеет слой $p^{-1}(x_0) = (\Omega(X, x_0), \varkappa)$ — пространство толерантных петель в пространстве (X, τ) .

Несмотря на отсутствие полного набора свойств из определения 1, для построенного квазирасслоения имеется спектральная последовательность типа Лере–Серра.

Теорема 3. В обозначениях предыдущей теоремы для линейно связного и односвязного толерантного пространства (X, τ) имеется сходящаяся спектральная последовательность $\varepsilon = \{\varepsilon^m = \bigoplus_{s,t} \varepsilon_{s,t}^m\}_m$, чьи первые члены имеют вид

$$\varepsilon_{s,t}^1 \cong C_s^\bullet \otimes H_t(\Omega(X, x_0)),$$

$$\varepsilon_{s,t}^2 \cong H_s(X; H_t(\Omega(X, x_0))).$$

Замечание 1. Односвязность пространства (X, τ) означает тривиальность фундаментальной группы $\pi(X, x_0)$, что эквивалентно линейной связности пространства $(\Omega(X, x_0), \varkappa)$, являющегося слоем квазирасслоения (ср. с условиями теоремы 1). Тривиальность группы $\pi(X, x_0)$ означает также, что в последней формуле $H_t(\Omega(X, x_0))$ — обычная группа коэффициентов.

Важным частным случаем толерантных расслоений являются толерантные накрытия (см. [3]). Но так как слои толерантных накрытий дискретны и поэтому не являются линейно связными, а, как видно из теорем 1 и 3, это условие требуется для построения спектральной последовательности Лере–Серра, то для толерантных накрытий следует искать спектральные последовательности другого типа.

Теорема 4. Пусть $p : (\bar{X}, \bar{\tau}) \rightarrow (X, \tau)$ — толерантное накрытие с линейно связной базой (X, τ) , тогда существует спектральная последовательность $\varepsilon = \{\varepsilon^m = \bigoplus_{s,t} \varepsilon_{s,t}^m\}_m$, сходящаяся к группе гомологий $H(X)$ такая, что

$$\varepsilon_{s,t}^2 \cong H_s(\pi(X, x_0); H_t(X)).$$

Доказательство этой теоремы основано на применении спектральной последовательности Картана–Лере и использует теорему 3 из работы [10], а также теоремы 7 и 8 из работы [11].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Мак-Клири Дж. Путеводитель по спектральным последовательностям. М. : МЦНМО, 2008.

2. *Небалуев С. И.* Гомологическая теория толерантных пространств. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2006.

3. *Небалуев С. И.* Фундаментальная группа толерантного пространства и толерантные накрытия // Чебышевский сб. Тула : Изд-во Тульск. гос. пед. ун-та, 2004. Т. 5, вып. 3. С. 144–152.

4. *Небалуев С. И., Кляева И. А.* Теория пунктированных толерантных кубических сингулярных гомологий // Вестн. Самар. гос. ун-та. Самара : Изд-во Самар. ун-та, 2007. Вып. 7(57). С. 134–151.

5. *Небалуев С. И., Кривобок В. В.* О действиях фундаментальных групп толерантных пространств // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2017. Вып. 19. С. 70–72.

6. *Небалуев С. И., Кляева И. А., Сусин М. Н.* Построение спектральной последовательности толерантного расслоения // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2009. Вып. 5. С. 94–118.

7. *Коробченко Е. В.* Гомологические свойства конструкции окаймления толерантных сингулярных кубов // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2010. Вып. 6. С. 26–36.

8. *Небалуев С. И., Коробченко Е. В., Сусин М. Н.* Пунктированные толерантные кубические сингулярные гомологии // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2010. Вып. 6. С. 79–89.

9. *Небалуев С. И., Сусин М. Н.* Точная гомотопическая последовательность квазиразслоения пространства толерантных путей // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2010. Вып. 6. С. 62–78.

10. *Небалуев С. И.* Спектральная последовательность Картана–Лере для толерантных пространств // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2011. Вып. 13. С. 70–73.

11. *Небалуев С. И.* Накрывающие преобразования толерантных пространств // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2003. Вып. 2. С. 30–35.

УДК 519.2

И. А. Кузнецова

**ИЕРАРХИЧЕСКИЕ ИГРЫ
С КОНЕЧНО-ОПРЕДЕЛЕННЫМ ПРАВИЛОМ ВЫБОРА
И НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ ПЕРВОГО ИГРОКА О
ВЫБОРЕ ВТОРОГО**

Поступила в редакцию 24.05.2018 г.

Иерархические игры – это модели конфликтных ситуаций с неравноправными участниками [1 – 4]. При исследовании таких игр важную роль

играет информированность первого (управляющего) игрока как о выборе, так и об интересах партнера. Наибольший гарантированный результат первого игрока при точном знании им выбора и интересов второго найден в основополагающей работе Ю.Б. Геймера [1]. Оптимальный способ организации обмена первым игроком при отсутствии самостоятельной информации о выборе второго приведен в [5]. Наибольший гарантированный результат первого игрока для специального вида его информированности об интересах второго, а именно конечно-определенного правила выбора при точном знании управляющим игроком выбора партнера вычислен в [6]. В настоящей работе ограничения накладываются на информацию первого игрока как о выборе, так и об интересах второго, то есть вычисляется наибольший гарантированный результат управляющего игрока в иерархической игре с конечноопределенным правилом выбора и неполной информацией о выборе партнера.

Определение 1. Иерархической игрой называется система $\Gamma = (X, Y, F, \mu)$, где X – множество стратегий первого игрока, Y – множество стратегий второго игрока, $F : X \times Y \rightarrow R$ – функция выигрыша первого игрока, отображение $\mu : 2^{X \times Y} \rightarrow 2^{X \times Y}$, обладающее свойствами $\forall T \subset X \times Y \mu(T) \neq \emptyset, \mu(T) \subset T$ – правило выбора, с помощью которого задается информированность первого игрока об интересах второго.

Для упрощения изложения будем считать множества конечными.

Определение 2. Пусть $\Gamma = (X, Y, F, \mu)$ – иерархическая игра. Наибольший гарантированный результат первого игрока в данной игре обозначается $\gamma(\Gamma)$ и определяется равенством

$$\gamma(\Gamma) = \max_{x \in X} \min_{y: (x,y) \in \mu(\{x\} \times Y)} F(x, y).$$

Определение 3. Пусть $\Gamma = (X, Y, F, \mu)$ – иерархическая игра. Квазиинформационным расширением данной игры называется игра $\bar{\Gamma} = (\bar{X}, \bar{Y}, \bar{F}, \bar{\mu})$ такая, что существует отображение $\pi : \bar{X} \times \bar{Y} \rightarrow X \times Y$, удовлетворяющее условиям

$$\forall x \in X \exists \bar{x} \in \bar{X} \forall \bar{y} \in \bar{Y} \text{ пр}_1 \pi(\bar{x}, \bar{y}) = x, \quad (1)$$

$$\forall y \in Y \exists \bar{y} \in \bar{Y} \forall \bar{x} \in \bar{X} \text{ пр}_2 \pi(\bar{x}, \bar{y}) = y, \quad (2)$$

$$\forall \bar{x} \in \bar{X} \forall \bar{y} \in \bar{Y} \bar{F}(\bar{x}, \bar{y}) = F(\pi(\bar{x}, \bar{y})), \quad (3)$$

$$\forall \bar{T} \subset \bar{X} \times \bar{Y} \pi(\bar{\mu}(\bar{T})) = \mu(\pi(\bar{T})). \quad (4)$$

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$\gamma(\bar{\Gamma}) = \max_{\bar{T}_{\bar{x}} \in \tau_{\bar{X}}} \min_{(x,y) \in \mu(\bar{T}_{\bar{x}})} F(x, y),$$

где

$$\tau_{\bar{X}} = \{\bar{T}_{\bar{x}}\}_{\bar{x} \in \bar{X}}, \quad \bar{T}_{\bar{x}} = \{\pi(\bar{x}, \bar{y}) : \bar{y} \in \bar{Y}\}.$$

Определение 4. Расширение $\bar{\Gamma}_0$ называется оптимальным в некотором классе расширений, если для всех расширений $\bar{\Gamma}$ из данного класса верно неравенство $\gamma(\bar{\Gamma}) \leq \gamma(\bar{\Gamma}_0)$.

Определение 5. Будем говорить, что в расширении $\bar{\Gamma}$ игры Γ первый игрок имеет самостоятельную информацию о выборе второго с точностью не больше, чем до Y_β , где $\{Y_\beta\}_{\beta \in B}$ – семейство подмножеств Y такое, что $\bigcup_{\beta \in B} Y_\beta = Y$, если справедливо условие

$$\forall \bar{x} \in \bar{X} \forall \bar{y} \in \bar{Y} \exists x \in X \forall y \in Y_\beta \exists \bar{y} \in \bar{Y} \pi(\bar{x}, \bar{y}) = (x, y).$$

Определение 6. Положим $\bar{\Gamma}_{\tau_2} = (\tau_2, \Phi, \bar{F}, \bar{\mu})$, где τ_2 – семейство подмножеств $T \subset X \times Y$, удовлетворяющих условию $\forall \beta \in B \exists x \in X \forall y \in Y_\beta (x, y) \in T$, Φ – семейство отображений $\varphi : 2^{X \times Y} \rightarrow X \times Y$, обладающих свойством $\forall T \subset X \times Y \varphi(T) \in T$, $\pi : \tau_2 \times \Phi \rightarrow X \times Y$ определяется равенством $\pi(T, \varphi) = \varphi(T)$, \bar{F} и $\bar{\mu}$ задаются условиями (3) и (4).

Теорема 2. $\bar{\Gamma}_{\tau_2}$ является оптимальным расширением в классе расширений, в которых первый игрок имеет самостоятельную информацию о выборе второго с точностью не больше, чем до Y_B .

Доказательство проводится аналогично доказательству факта для расширения $\bar{\Gamma}_{\tau_1}$ в [5].

Наибольший гарантированный результат управляющего игрока в расширении $\bar{\Gamma}_{\tau_2}$ вычисляется по формуле

$$\gamma(\bar{\Gamma}_{\tau_2}) = \max_{T \in \tau_2} \min_{(x, y) \in \mu(T)} F(x, y).$$

Его вычисление – это экстремальная задача на системе подмножеств с ограничениями. Рассмотрим класс правил выбора, для которых данная задача сводится к экстремальной задаче на исходных множествах.

Определение 7. Правило выбора μ называется конечно-определенным, если его можно задать в виде

$$\mu(T) = \{(x, y) \in T : S(\varphi(T), x, y)\},$$

где $\varphi : 2^{X \times Y} \Rightarrow R^m$, S – предикат, определенный на $R^m \times X \times Y$, причем отображение φ обладает свойствами

$$\forall T_1, T_2 (\varphi(T_1) = \varphi(T_2) \& T_1 \subset T_2 \Rightarrow \forall T_1 \subset T \subset T_2 \varphi(T) = \varphi(T_1) = \varphi(T_2)), \\ \forall \{T_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} ((\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda \varphi(T_{\lambda_1}) = \varphi(T_{\lambda_2})) \Rightarrow (\forall \lambda \in \Lambda \varphi(T_\lambda) = \varphi(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda))).$$

Замечание. Множества T_1 и T_2 будем называть эквивалентными, если выполняется равенство $\varphi(T_1) = \varphi(T_2)$.

Теорема 2. Если правило выбора μ является конечно-определенным и каждое множество включает в себя эквивалентное конечное подмножество, содержащее не более k элементов, то справедливо равенство

$$\gamma(\bar{\Gamma}_{\tau_2}) = \max_{l \in L_{\tau_2}} l,$$

где $L_{\tau_2} = \{l : \exists \bar{r}, (\bar{x}, \bar{y}) (\forall j = 1, \dots, k P(\bar{r}, (\bar{x}, \bar{y}), x_j, y_j, l)) \& \& \forall \beta \exists x \forall y \in Y_B P(\bar{r}, (\bar{x}, \bar{y}), x, y, l)\}$, $P(\bar{r}, (\bar{x}, \bar{y}), x, y, l) \Leftrightarrow ((\varphi(\{(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k), (x, y)\})) = \bar{r} \& (F(x, y) \geq l) \text{ или } \neg S(\bar{r}, x, y), (\bar{x}, \bar{y}) = ((x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k))$.

Доказательство. Докажем, что любой результат $l \in L_{\tau_2}$ гарантирован первому игроку. Пусть $l \in L_{\tau_2}$. Определим множество T равенством

$$T = \{(x, y) : \varphi(\{(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k), (x, y)\}) = \bar{r} \& \& (F(x, y) \geq l \text{ или } \neg S(\bar{r}, x, y)),$$

где \bar{r} и (\bar{x}, \bar{y}) – те векторы, существование которых вытекает из принадлежности l к L_{τ_2} . Вследствие определений L_{τ_2} и T множество T содержит все точки $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$ и принадлежит τ_2 . Следовательно, для любой точки $(x, y) \in T$ условия $\neg S(\bar{r}, x, y)$ и $(x, y) \notin \mu(T)$ равносильны и справедливо соотношение

$$\forall (x, y) \in T (F(x, y) \geq l \text{ или } (x, y) \notin \mu(T)),$$

то есть выполняется неравенство $\inf_{(x, y) \in \mu(T)} F(x, y) \geq l$.

Таким образом, результат l гарантирован первому игроку. Можно показать, что большего результата первый игрок гарантировать не может. Доказательство теоремы завершено.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Гермейер Ю. Б.* Игры с непротивоположными интересами. М. : Наука, 1976. 326 с.
2. *Кукушкин Н. С., Морозов В. В.* Теория неантагонистических игр. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1977. 325 с.
3. *Горелов М. А.* Иерархические игры с неопределенными факторами // Управление большими системами. М. : ИПУ РАН, 2016. Вып. 59. С. 6–22.
4. *Шолпо И. А.* Исследование операций. Теория игр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1983. 42 с.
5. *Кузнецова И. А.* Иерархические игры с неполной информацией первого игрока о выборе второго // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов. : Изд-во Саратов. ун-та, 2015. Вып. 17. С. 29–32.
6. *Кузнецова И. А.* Иерархические игры с конечноопределенным правилом выбора // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов. : Изд-во Саратов. ун-та, 2017. Вып. 19. С. 46–49.

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛУГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ

Поступила в редакцию 11.05.2018 г.

В работе применяются методы нестандартного анализа [1] и используются основные понятия алгебры отношений [2] и общепринятая топологическая терминология [3]. Для простоты рассуждений все основные множества X рассматриваемых алгебраических систем и пространств сходимости считаются подмножествами множества атомов \mathbf{S} , над которым строится стандартный теоретико-множественный универсум $\mathbf{U} = \mathbf{V}(\mathbf{S})$ и нестандартное расширение ${}^*\mathbf{U}$, по описанному в [1] принципу. Тогда для множества X определено нестандартное расширение *X , и любой фильтр F над X характеризуется своей монадой $\mu F = \bigcap \{ {}^*A : A \in F \}$. Монады ультрафильтров над множеством X разбивают расширение *X на классы эквивалентности ε_X . Подмножество $M \subset {}^*X$ называется насыщенным, если $\varepsilon_X(M) \subset M$. При нестандартном подходе к топологии [4] сходимость на множестве X определяется как соответствие $\rho \subset X \times {}^*X$, для которого при любом $a \in X$ множество $\rho(a)$ содержит элемент a и является насыщенным подмножеством расширения *X . Такие соответствия называются (нестандартными) сходимостями и на них распространяется общепринятая топологическая терминология.

В работе [4] показано, что при нестандартном подходе основные топологические понятия и многие важные свойства отображений топологических пространств выражаются простыми теоретико-множественными условиями для нестандартных сходимостей. Это, с одной стороны, обосновывает естественное обобщение топологических свойств отображений на произвольные пространства сходимости и, с другой стороны, позволяет эффективно применять нестандартные методы в топологических исследованиях. Так, в силу результатов [4] отображение f пространства сходимости (X, ρ_X) в пространство сходимости (Y, ρ_Y) непрерывно, если ${}^*f \circ \rho_X \subset \rho_Y \circ f$, открыто, если $\rho_Y \circ f \subset {}^*f \circ \rho_X$, непрерывно открыто, если ${}^*f \circ \rho_X = \rho_Y \circ f$, замкнуто-компактно, если ${}^*f \circ \rho_X \overset{-1}{\subset} \rho_Y \overset{-1}{\subset} \rho_X \circ f$, совершенно.

Нестандартная классификация отображений непосредственно приводит к каноническому описанию ряда важных сходимостей в пространствах отображений, которые "внутренним образом" канонически выра-

жаются простыми теоретико-множественными формулами через нестандартные сходимости исходных пространств. В силу результатов [4] для любого пространства сходимости $X = (X, \rho)$ на множестве $F_c = F_c(X)$ всех непрерывных преобразований пространства X по формуле

$$(f, h) \in \gamma_c \iff h \circ \rho \subset \rho \circ f \quad (f \in F_c, h \in {}^*F_c)$$

определяется непрерывная сходимость [3] $\gamma_c \subset F_c \times {}^*F_c$, которая удовлетворяет условиям: 1) γ_c является самой слабой сходимостью на множестве F_c , относительно которой непрерывно отображение вычисления $\Lambda : F_c \times X \rightarrow X$ (где $\Lambda(f, x) = f(x)$ для элементов $f \in F_c, x \in X$), 2) γ_c является компактно-открытой топологией, если (X, ρ) – локально-компактное топологическое пространство, 3) сходимость γ_c хаусдорфова (соответственно регулярна), если сходимость ρ хаусдорфова (соответственно регулярна), 4) композиция преобразований непрерывна относительно сходимости γ_c .

Аналогично канонически описываются остальные нестандартные сходимости преобразований пространства сходимости $X = (X, \rho)$:

1) на множестве $F_o = F_o(X)$ всех открытых преобразований пространства X по формуле $(f, h) \in \gamma_o \iff \rho \circ f \subset h \circ \rho$ ($f \in F_o, h \in {}^*F_o$) определяется открытая сходимость $\gamma_o \subset F_o \times {}^*F_o$;

2) на множестве $F_{c-o} = F_{c-o}(X)$ всех непрерывно открытых преобразований пространства X по формуле $(f, h) \in \gamma_{c-o} \iff h \circ \rho = \rho \circ f$ ($f \in F_{c-o}, h \in {}^*F_{c-o}$) определяется непрерывнооткрытая сходимость $\gamma_{c-o} \subset F_{c-o} \times {}^*F_{c-o}$,

3) на множестве $F_{z-c} = F_{z-c}(X)$ всех замкнуто-компактных преобразований пространства X по формуле $(f, h) \in \gamma_{z-c} \iff h^{-1} \circ \rho \subset \rho \circ f^{-1}$ ($f \in F_{z-c}, h \in {}^*F_{z-c}$) определяется замкнуто-компактная сходимость $\gamma_{z-c} \subset F_{z-c} \times {}^*F_{z-c}$,

4) на множестве $F_p = F_p(X)$ всех совершенных преобразований пространства X по формуле $(f, h) \in \gamma_p \iff h^{-1} \circ \rho = \rho \circ f^{-1}$ ($f \in F_p, h \in {}^*F_p$) определяется совершенная сходимость $\gamma_p \subset F_p \times {}^*F_p$.

Легко видеть, что композиция преобразований непрерывна относительно всех перечисленных сходимостей.

В настоящей работе приводятся результаты, показывающие возможности применения нестандартных сходимостей преобразований в топологической алгебре. Здесь показано, как при таком подходе можно представлять топологические полугруппы преобразованиями с каноническими сходимостями. Под топологической полугруппой (сокращенно т. полугруппой) в работе понимается полугруппа $G = (G, \cdot)$ с заданной на

ее основном множестве G сходностью α , относительно которой непрерывна операция полугруппы. Топологическим изоморфизмом т. полугруппы $G = (G, \alpha)$ на т. полугруппу $G_1 = (G_1, \alpha_1)$ называется изоморфизм полугруппы G на полугруппу G_1 , который является гомеоморфизмом пространства сходимости (G, α) на пространство сходимости (G_1, α_1) . В частности, в силу результатов [4] т. полугруппой является множество всех непрерывных преобразований F_c произвольного пространства сходимости (X, ρ) с операцией композиции \circ и непрерывной сходимостью γ_c . Т. полугруппами являются подполугруппы $\Phi = (\Phi, \circ, \gamma_c)$ т. полугруппы F_c . При этом сходимость на Φ является ограничением на этом множестве непрерывной сходимости γ_c и обозначается тем же символом γ_c .

Топологический изоморфизм λ т. полугруппы $G = (G, \cdot, \alpha)$ на т. полугруппу непрерывных преобразований с непрерывной сходимостью $\Phi = (\Phi, \circ, \gamma_c)$ называется представлением т. полугруппы G непрерывными преобразованиями. По определению это означает, что для любых $a, b \in G$, $x \in {}^*G$, выполняется $\lambda(a \cdot b) = \lambda(b) \circ \lambda(a)$, $(a, x) \in \alpha \iff (\lambda(a), {}^*\lambda(x)) \in \gamma_c$.

Аналогично канонически описываются т. полугруппы непрерывно-открытых, совершенных и др. преобразований, и определяются представления т. полугрупп непрерывно-открытыми, совершенными и др. преобразованиями.

Важность введенных понятий подтверждается, в частности, тем, что т. полугруппами непрерывных преобразований с непрерывными сходимостями исчерпываются все возможные т. полугруппы.

Теорема 1. Любая т. полугруппа $G = (G, \cdot, \alpha)$ имеет представление непрерывными преобразованиями, т. е. существует топологический изоморфизм т. полугруппы G на некоторую полугруппу непрерывных преобразований с непрерывной сходимостью.

Следствие 1. Любая локально компактная т. полугруппа топологически изоморфна т. полугруппе непрерывных преобразований локально-компактного топологического пространства с компактно-открытой топологией.

Следствие 2. Любая (локально-компактная) т. группа топологически изоморфна т. группе гомеоморфизмов пространства сходимости (локально-компактного топологического пространства) с непрерывной сходимостью (с компактно-открытой топологией).

Под топологическим кольцом (сокращенно т. кольцом) понимается кольцо $K = (K, +, \cdot)$ с заданной на его основном множестве K сходимостью α , относительно которой непрерывны обе операции кольца.

Следствие 3. Любое (локально-компактное) т. кольцо $K = (K, +, \cdot, \alpha)$ топологически изоморфно т. кольцу непрерывных эндоморфизмов т. группы $K = (K, +, \alpha)$ с непрерывной сходимостью (с компактно-открытой топологией).

Теорема 2. Любой коммутативный т. моноид $G = (G, \cdot, \alpha)$ со свойством $\alpha(a) \subset \alpha(e) \cdot \alpha(a)$ ($a \in G$) имеет представление непрерывно-открытыми преобразованиями, т. е. т. моноид G топологически изоморфен т. моноиду непрерывно-открытых преобразований с непрерывно-открытой сходимостью.

Следствие 4. Любая коммутативная т. группа представима гомеоморфизмами с непрерывно-открытой сходимостью.

Теорема 3. Хаусдорфова т. полугруппа $G = (G, \cdot, \alpha)$ со свойством $(*G \setminus \alpha(G)) \cdot \alpha(G) \subset *G \setminus \alpha(G)$ имеет представление совершенными преобразованиями, т. е. т. полугруппа G топологически изоморфна т. полугруппе совершенных преобразований с совершенной сходимостью.

Следствие 5. Любая хаусдорфова т. группа представима совершенными перестановками с совершенной сходимостью.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Альбеверио С., Фенстад Й., Хезг-Крон Р., Линдстрем Т. Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике. М., 1990.
2. Вагнер В. В. Теория отношений и алгебра частичных отображений // Теория полугрупп и ее приложения : сб. ст. Саратов, 1965. Вып.1. С. 3—178.
3. Келли Дж. Общая топология. М., 1981.
4. Молчанов В. А. Нестандартные сходимости в пространствах отображений // Сибирский мат. журн. 1992. Т.33, № 6. С. 141—153.

УДК 512.534.5,519.17

В. А. Молчанов, Р. А. Фарахутдинов

О КОНКРЕТНОЙ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ПОЛУГРУПП ЭНДОМОРФИЗМОВ БЕСКОНТУРНЫХ ГРАФОВ

Поступила в редакцию 29.05.2018 г.

Введение. Проблема конкретной характеристики [1] для полугрупп эндоморфизмов графов формулируется следующим образом: при каких условиях полугруппа преобразований S множества X является полугруппой эндоморфизмов некоторого графа G с множеством вершин X , т. е. на множестве X можно так задать бинарное отношение ρ , что для

графа $G = (X, \rho)$ выполняется равенство $S = \text{End } G$. Такая задача имеет прямое отношение к известной проблеме С.Улама об определении математической структуры по данному множеству эндоморфизмов (см., например, [2]) и до сих пор не решена для графов общего вида. Мы исследовали эту задачу для бесконтурных рефлексивных графов. Этот важный класс графов охватывает, в частности, класс ориентированных деревьев и класс графов порядка.

Бесконтурные графы. *Графом* называется алгебраическая система $G = (X, \rho)$, где X — непустое множество, элементы которого называются *вершинами* графа, ρ — бинарное отношение между элементами множества X , элементы которого называются *дугами* графа.

Контуром в графе называется его замкнутый путь. Граф называется *бесконтурным*, если он не содержит нетривиальных контуров.

Идея решения конкретной характеристики полугрупп эндоморфизмов бесконтурных рефлексивных графов состоит в следующем: для полугруппы S преобразований множества X строится каноническое отношение $Q \subset X \times X$ и с его помощью формулируются необходимые и достаточные условия, при которых на множестве X можно так определить бесконтурное рефлексивное бинарное отношение ρ , чтобы полугруппа эндоморфизмов $\text{End } G$ графа $G = (X, \rho)$ совпала с полугруппой преобразований S .

Каноническое отношение. Пусть S — полугруппа преобразований множества X . Для преобразования $f \in S$ символ

$$\begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix}_f$$

будет означать, что $f(X) = \{x, y\}$ и $f(u) = x$, $f(v) = y$. Символ

$$\begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix}$$

будет означать, что

$$\begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix}_f$$

для некоторого преобразования $f \in S$.

Для полугруппы S на множестве X определяется каноническое отношение Q по формуле

$$Q = \left\{ (x, y) \in X \times X \mid \begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix} \wedge \neg \begin{pmatrix} y & x \\ x & y \end{pmatrix} \right\}.$$

Лемма 1. Для полугруппы эндоморфизмов $S = \text{End } G$ нетривиального рефлексивного графа $G = (X, \rho)$ справедливы утверждения:

- 1) для любых $x, y \in X$ условие $(x, y) \in Q$ выполняется в том и только том случае, если вершины x, y соединяются дугой, не лежащей в контуре;
- 2) если $(x, y) \in Q \cap \rho$, то для любых $u, v \in X$ условие $\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$ выполняется в том и только том случае, если $(u, v) \in \rho$.

□

Лемма 2. Пусть ρ — рефлексивное бинарное отношение на X , такое, что дуга $(x_0, y_0) \in \rho$ не принадлежит нетривиальному контуру и $(x, y) \in \rho$. Тогда отображение f , определенное для элементов $u \in X$ по формуле

$$f(u) = \begin{cases} y, & \text{если существует путь из } y_0 \text{ в } u, \\ x, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

является эндоморфизмом графа $G = (X, \rho)$. □

Лемма 3. Для любой полугруппы S и любого преобразования $f \in S$ выполняется $f^2(Q) \subset Q$. □

Полугруппу S преобразований множества X будем называть Q -замкнутой, если для любого преобразования f множества X из условия, что для любой пары $(x, y) \in Q$ существует такое преобразование $\varphi \in S$, что ограничение $\varphi \mid \{x, y\}$ совпадает с ограничением $f \mid \{x, y\}$, следует $f \in S$.

Теорема. Полугруппа S преобразований множества X в том и только в том случае будет полугруппой эндоморфизмов некоторого бесконтурного рефлексивного графа, если S является Q -замкнутой полугруппой с непустым каноническим отношением Q и выполняются следующие условия:

- 1) $(\forall x, y, u \in X) \begin{pmatrix} x & y \\ u & u \end{pmatrix}$;
- 2) $(x, y) \in Q \wedge (u, v) \in Q \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} x & y \\ v & u \end{pmatrix}$;
- 3) $(x, y) \in Q \wedge \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \Rightarrow (u, v) \in Q$.

□

Заключение. Полученные результаты дают инструмент для исследования проблем абстрактной характеристики [1] полугрупп эндоморфизмов бесконтурных рефлексивных графов и относительной аксиоматизации [3] классов таких полугрупп, а также позволяют проанализировать взаимосвязь различных проблем разрешимости [4]

элементарной теории класса бесконтурных рефлексивных графов и элементарной теории класса полугрупп.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Jonson B.* Topics in Universal Algebras. Lecture Notes : Nashville Vanderbilt University, 1969–1970. 397 p.
2. *Улам С.* Нерешенные математические задачи. М. : Наука, 1964. 168 с.
3. *Робинсон А.* Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры. М. : Наука, 1967. 376 с.
4. *Ершов Ю. Л., Лавров И. А., Тайманов А. Д., Тайцлин М. А.* Элементарные теории // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20, № 4. С. 37–108.

УДК 519.7

В. Е. Новиков

СВОЙСТВА РЕШЁТКИ КОНЦЕПТОВ ОДНОЗНАЧНОГО МИНИМАЛЬНОГО КОНТЕКСТА

Поступила в редакцию 30.05.2018 г.

Формальный контекст — это тройка $\mathbb{K} = (G, \{M_i\}, \rho)$, где G — конечное множество объектов, $|G| \geq 2$, $\{M_i\}$ — семейство конечных множеств атрибутов с множеством индексов $1 \leq i \leq n$, $|M_i| \geq 2$, $\rho \subset G \times M_1 \times \dots \times M_n = G \times M_{\bar{n}}$ — некоторое $(n+1)$ -арное отношение.

Концептом по системе атрибутов $\bar{j}_k \subseteq \bar{n}$ в контексте \mathbb{K} называется замкнутое подмножество $X \subseteq G$ объектов, обладающих общностью значений по набору атрибутов \bar{j}_k . Замкнутое в том смысле, что объектов с этими же значениями указанного набора атрибутов, не вошедших в подмножество X , в контексте \mathbb{K} нет.

Будем говорить, что контекст $\mathbb{K} = (G, \{M_i\}, \rho)$ *однозначен*, если отношение ρ имеет F -зависимость $G \rightarrow M_n$ [1]. Однозначный контекст моделируется реляционной базой данных, в которой множество объектов является одним из ключей этой базы [2]. Например, если $(g, m_1, \dots, m_n) \in \rho$, то говорим, что объект g по атрибуту 1 имеет значение m_1 , по атрибуту 2 — значение m_2 , по системе атрибутов $(1, 2)$ — значение (m_1, m_2) , и т.д. Если любой объект по каждому атрибуту имеет точно одно значение, то такой контекст является однозначным. В [3] были представлены следующие результаты.

Теорема 1. Пусть $\mathbb{K} = (G, \{M_i\}, \rho)$ — однозначный контекст. Тогда справедливы следующие утверждения :

- 1) множество концептов контекста \mathbb{K} образует полную решётку $L(\mathbb{K})$, относительно теоретико-множественного включения ;
- 2) множество собственных концептов по любому $\bar{j}_k \subseteq \bar{n}$ образует разбиение множества G , которое обозначаем G/\bar{j}_k ;
- 3) если $\bar{l}_q \subseteq \bar{j}_p \subseteq \bar{n}$, то G/\bar{j}_p – подразбиение разбиения G/\bar{l}_q ($G/\bar{j}_p \leq G/\bar{l}_q$);
- 4) если концепт X в решётке концептов $L(\mathbb{K})$ не является атомом, то X покрывает не менее двух концептов контекста \mathbb{K} ;
- 5) высота решётки концептов $h(L(\mathbb{K})) \leq \min\{n + 2, |G| + 1\}$, а её ширина $w(L(\mathbb{K})) \leq |G|$.

Свойство 4 в теореме 1 отражает фундаментальное свойство в логике понятий. Оно заключается в том, что если в классе удаётся выделить подкласс по какому-либо атрибуту, то вместе с ним всегда выделяется и другой подкласс (или подклассы), элементы которого имеют другое значение по данному атрибуту. Таким образом, любой класс покрывает не менее чем два подкласса.

В [4] представлен алгоритм минимизации контекста по числу объектов и числу атрибутов с сохранением решётки концептов. Для минимизации контекста \mathbb{K} по числу объектов достаточно все атомы решётки $L(\mathbb{K})$ сконденсировать до одноэлементных концептов. Пусть контекст \mathbb{K} уже минимизирован по числу объектов. Рассмотрим случай, когда $|G| = 2$, $G = \{g_1, g_2\}$, и контекст \mathbb{K} определяется базой данных заданной табл. 1.

Для значений атрибутов здесь возможны два варианта, либо совпадают, либо различны. Если существует $i(1 \leq i \leq n)$ такой, что значения атрибута M_i для g_1 и g_2 различны, то решётка концептов $L(\mathbb{K})$ имеет вид, показанный на рис. 1, а. В этом случае минимальный контекст будет определён базой данных заданной табл. 2 с условием, что $a_1 \neq a_2$.



Рис. 1. Решётки концептов

Если для всех $i(1 \leq i \leq n)$ значения атрибута M_i для g_1 и g_2 совпадают, то решётка концептов имеет вид, показанный на рис. 1, б. Тогда $G = \{g_1, g_2\}$ является атомом в решётке концептов, и контекст \mathbb{K} не минимизирован по числу объектов. Минимальный контекст будет опре-

делён базой данных заданной табл. 3. Вырожденный случай $|G| = 1$ не представляет собой исследовательского интереса, так как база данных из одного объекта с точки зрения концептуального анализа не нуждается в атрибутах, поскольку нет объектов, от которых его можно было бы отличить.

Таблица 1

G	M_1	M_2	M_3	...	M_n
g_1	a_1	b_1	c_1	...	d_1
g_2	a_2	b_2	c_2	...	d_2

Таблица 2

G	M_1
g_1	a_1
g_2	a_2

Таблица 3

G
g

Рассмотрим случай, когда $|G| = 3, G = \{g_1, g_2, g_3\}$, и контекст \mathbb{K} определяется базой данных, заданной табл. 4. Для значений атрибутов здесь возможны три варианта, либо все три значения равны, либо равны какие-то два значения, либо все три значения различны.

Таблица 4

G	M_1	M_2	M_3	...	M_n
g_1	a_1	b_1	c_1	...	d_1
g_2	a_2	b_2	c_2	...	d_2
g_3	a_3	b_3	c_3	...	d_3

Таблица 5

G	M_1	M_2	M_3
g_1	a_1	b_1	c_1
g_2	a_1	b_2	c_2
g_3	a_2	b_1	c_2

Отсюда следуют четыре варианта минимального контекста. Первый определён табл. 5, его решётка концептов изображена на рис. 2, a и является решёткой всех подмножеств множества G .

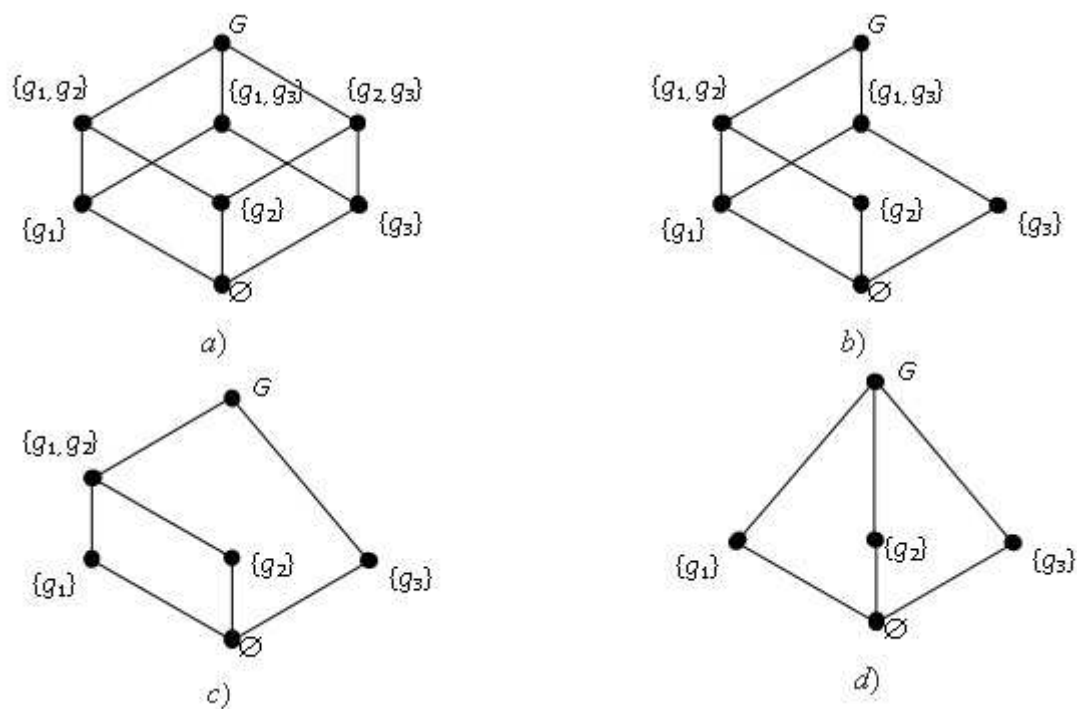


Рис. 2. Решётки концептов

Второй, третий и четвёртый случаи соответственно определены таблицами 6, 7, 8, их решётки концептов изображены на рис. 2 *b, c, d*. Все они подрешётки решётки L_3 , сохраняющие свойство 4 теоремы 1.

G	M_1	M_2
g_1	a_1	b_1
g_2	a_1	b_2
g_3	a_2	b_1

G	M_1	M_2
g_1	a_1	b_1
g_2	a_1	b_2
g_3	a_2	b_3

G	M_1
g_1	a_1
g_2	a_2
g_3	a_3

Теорема 2. *В минимальном однозначном контексте $\mathbb{K} = (G, \{M_i\}_{1 \leq i \leq n}, \rho)$ число атрибутов не превосходит числа объектов, т.е.*

$$n \leq |G|.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Новиков В. Е. Функциональные зависимости в формальном контексте // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 53–55.
2. Мейер Д. Теория реляционных баз данных. М. : Мир, 1987.
3. Новиков В. Е. Решётка концептов в однозначном контексте // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2010. Вып. 12. С. 53–56.
4. Новиков В. Е. Минимизация однозначного контекста // Компьютерные науки и информационные технологии : материалы Междунар. науч. конф. Саратов : ИЦ Наука, 2012. С. 233–236.

УДК 519.95

С. И. Поликарпов, И. А. Баланов

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОНЕЧНЫХ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ АВТОМАТОВ КОНЕЧНЫМИ РЯДАМИ ФУРЬЕ – УОЛША

Поступила в редакцию 31.05.2018 г.

В статье [5] был рассмотрен метод представления конечного детерминированного автомата Мили в виде композиции простейших автоматов. Это достигается путём разложения геометрического образа исходного автомата в конечный ряд Фурье–Уолша по системе функций Уолша и сопоставления каждой из этих функций автомата, геометрический образ которого совпадает с данной функцией.

В данной работе представлена практическая реализация данного метода на примере конкретного автомата.

Конечным детерминированным автоматом Мили называется совокупность шести объектов

$$A = (S, X, Y, \delta, \lambda, s_0),$$

где S – конечное непустое множество состояний, X – конечное непустое множество входных сигналов, Y – конечное непустое множество выходных сигналов, s_0 – начальное состояние, а δ и λ – отображение вида:

$$\delta : S \times X \rightarrow S \quad \text{и} \quad \lambda : S \times X \rightarrow Y,$$

δ и λ называются функцией переходов и функцией выходов автомата A соответственно.

В.А.Твердохлебов предложил представлять автоматы геометрическими образами в специальных словарных геометриях и исследовал свойства геометрических образов [1, 2]. На содержательном уровне геометрический образ можно считать ломаной линией.

Рассмотрим инициальный автомат Мили $A = (S, X, Y, \delta, \lambda, s_0)$ с начальным состоянием s_0 , геометрический образ которого является периодическим с периодом $N = 2^n$ ($n = 5$, например). Обозначим N как первые входные сигналы $0, 1, 2, \dots, 31$. Пусть $Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ и

$y(0)=3;$	$y(1)=3;$	$y(2)=2;$	$y(3)=3;$	$y(4)=4;$	$y(5)=1;$	$y(6)=0;$
$y(7)=5;$	$y(8)=1;$	$y(9)=0;$	$y(10)=1;$	$y(11)=5;$	$y(12)=4;$	$y(13)=0;$
$y(14)=5;$	$y(15)=3;$	$y(16)=4;$	$y(17)=1;$	$y(18)=0;$	$y(19)=4;$	$y(20)=1;$
$y(21)=4;$	$y(22)=0;$	$y(23)=3;$	$y(24)=2;$	$y(25)=1;$	$y(26)=3;$	$y(27)=4;$
$y(28)=4;$	$y(29)=1;$	$y(30)=4;$	$y(31)=4;$			

Функции Уолша можно определить через функции Радемахера. Функция Радемахера i -го порядка определяется следующим образом:

$r_i(x) = (-1)^{x_i} = \cos \pi x_i$, где $x_i = 0, 1$ есть i -й разряд двоичного представления переменной x .

Функции Уолша в форме Пэли – это действительные функции, определяемые как произведение степеней функций Радемахера:

$pal(p, x) = [r_1(x)]^{p_n} [r_2(x)]^{p_{n-1}} \dots [r_n(x)]^{p_1}$, где p_i – разрядные коэффициенты в двоичном представлении числа p , тогда первые несколько функций будут представлены следующим образом:

$$\begin{aligned}
 pal(0, x) &= 1, \\
 pal(1, x) &= r_1(x), \\
 pal(2, x) &= r_2(x), \\
 pal(3, x) &= r_1(x)r_2(x), \\
 &\dots \\
 pal(31, x) &= r_1(x)r_2(x)r_3(x)r_4(x)r_5(x).
 \end{aligned} \tag{1}$$

Поскольку на интервале определения $N = 2^n$ в систему функций Уолша входит N ортогональных функций, то она является полной.

Заменим геометрический образ γ_{s_0} исходного автомата его разложением в ряд по системе функций Уолша:

$$F(x) = \sum_{p=0}^{N-1} c_p pal(p, x), \quad (2)$$

при этом значения суммы ряда в точках $0, 1, \dots, 31$ точно совпадают со значениями геометрического образа, а коэффициенты c_p можно подсчитать, используя свойство ортогональности функций Уолша:

$$c_p = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} pal(p, x) F(x). \quad (3)$$

Получим:

$c_0=2,5;$	$c_1=-0,125;$	$c_2=-0,375;$	$c_3=0,875;$	$c_4=-0,1875;$
$c_5=-0,1875;$	$c_6=-0,0625;$	$c_7=0,0625;$	$c_8=-0,125;$	$c_9=-0,5;$
$c_{10}=0,625;$	$c_{11}=0,125;$	$c_{12}=0,3125;$	$c_{13}=0,5625;$	$c_{14}=0,0625;$
$c_{15}=-0,0625;$	$c_{16}=0;$	$c_{17}=0,125;$	$c_{18}=-0,125;$	$c_{19}=0,125;$
$c_{20}=-0,0625;$	$c_{21}=-0,3125;$	$c_{22}=0,0625;$	$c_{23}=-0,3125;$	$c_{24}=0,25;$
$c_{25}=0,125;$	$c_{26}=0;$	$c_{27}=0;$	$c_{28}=0,0625;$	$c_{29}=0,0625;$
$c_{30}=0,0625;$	$c_{31}=-0,5625$			

Каждая базисная функция системы (1) является N -периодической и принимает лишь два значения: 1 или -1, тогда эти функции можно рассматривать как геометрические образы $\gamma_p(x)$ некоторых автоматов. А по этим геометрическим образам однозначно восстанавливаются автоматы A_0, \dots, A_{N-1} . Функции выходов автоматов A_0, \dots, A_{N-1} определяются формулами:

$$\lambda_p(s_0, x) = pal(p, x), \text{ где } p = 0, \dots, N - 1, \quad (4)$$

а функции переходов могут быть произвольными. Такие автоматы A_0, \dots, A_{N-1} с тем же множеством $X, Y = \{-1, 1\}$ и произвольным множеством состояний и любыми функциями переходов будем называть простейшими.

Так как для этих автоматов $Y = \{-1, 1\}$, то эти автоматы легко строятся, и изучать их свойства гораздо удобнее.

Таким образом, базисные автоматы A_0, \dots, A_{N-1} получены разложением в ряд Фурье–Уолша геометрического образа γ_{s_0} исходного автомата и выделением в этом ряде соответствующих этим автоматам компонент.

Композиция простейших автоматов A_0, \dots, A_{N-1} , где элемент Σ определяется равенством

$$\lambda_{\Sigma}(s_0, x) = \sum_{p=0}^{N-1} c_p pal(p, x), \quad (5)$$

задает автомат, эквивалентный исходному автомату A . Проверим это утверждение:

$\lambda(0)=3;$	$\lambda(1)=3;$	$\lambda(2)=2;$	$\lambda(3)=3;$	$\lambda(4)=4;$	$\lambda(5)=1;$	$\lambda(6)=0;$
$\lambda(7)=5;$	$\lambda(8)=1;$	$\lambda(9)=0;$	$\lambda(10)=1;$	$\lambda(11)=5;$	$\lambda(12)=4;$	$\lambda(13)=0;$
$\lambda(14)=5;$	$\lambda(15)=3;$	$\lambda(16)=4;$	$\lambda(17)=1;$	$\lambda(18)=0;$	$\lambda(19)=4;$	$\lambda(20)=1;$
$\lambda(21)=4;$	$\lambda(22)=0;$	$\lambda(23)=3;$	$\lambda(24)=2;$	$\lambda(25)=1;$	$\lambda(26)=3;$	$\lambda(27)=4;$
$\lambda(28)=4;$	$\lambda(29)=1;$	$\lambda(30)=4;$	$\lambda(31)=4$			

А теперь сравним значения с исходным автоматом:

$y(0)=3;$	$y(1)=3;$	$y(2)=2;$	$y(3)=3;$	$y(4)=4;$	$y(5)=1;$	$y(6)=0;$
$\lambda(0)=3;$	$\lambda(1)=3;$	$\lambda(2)=2;$	$\lambda(3)=3;$	$\lambda(4)=4;$	$\lambda(5)=1;$	$\lambda(6)=0;$
$y(7)=5;$	$y(8)=1;$	$y(9)=0;$	$y(10)=1;$	$y(11)=5;$	$y(12)=4;$	$y(13)=0;$
$\lambda(7)=5;$	$\lambda(8)=1;$	$\lambda(9)=0;$	$\lambda(10)=1;$	$\lambda(11)=5;$	$\lambda(12)=4;$	$\lambda(13)=0;$
$y(14)=5;$	$y(15)=3;$	$y(16)=4;$	$y(17)=1;$	$y(18)=0;$	$y(19)=4;$	$y(20)=1;$
$\lambda(14)=5;$	$\lambda(15)=3;$	$\lambda(16)=4;$	$\lambda(17)=1;$	$\lambda(18)=0;$	$\lambda(19)=4;$	$\lambda(20)=1;$
$y(21)=4;$	$y(22)=0;$	$y(23)=3;$	$y(24)=2;$	$y(25)=1;$	$y(26)=3;$	$y(27)=4;$
$\lambda(21)=4;$	$\lambda(22)=0;$	$\lambda(23)=3;$	$\lambda(24)=2;$	$\lambda(25)=1;$	$\lambda(26)=3;$	$\lambda(27)=4;$
$y(28)=4;$	$y(29)=1;$	$y(30)=4;$	$y(31)=4$			
$\lambda(28)=4;$	$\lambda(29)=1;$	$\lambda(30)=4;$	$\lambda(31)=4$			

Таким образом, нам удалось удостовериться в возможности реализации данного метода и достоверности получаемых значений. В геометрическом образе автомата функциональная зависимость представлена как автоматное отображение, то есть отображение с изменяющимся параметром (изменяющимся состоянием). Это позволяет каждую функцию $pal(p, x)$ преобразовывать в автомат A_p с конкретным множеством состояний. Следовательно, в рассматриваемой композиции все компоненты – автоматы и результат композиции – автомат.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Твердохлебов В. А.* Основные свойства геометрических образов автоматов // Проблемы точной механики и управления : сб. науч. тр. ИПТМУ РАН. Саратов, 2004. С. 48.
2. *Твердохлебов В. А., Епифанов А. С.* Представление автоматных отображений геометрическими структурами. Саратов : Изд. дом «Наука», 2013.

3. *Поликарпов С. И.* Представление автомата рядом Фурье в задачах диагностирования и управления // Информационные технологии в науке, производстве и социальной сфере : сб. науч. тр. Саратов : Науч. книга, 2005.

4. *Поликарпов С. И.* Представление конечного автомата рядом по системе функций Уолша // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2015. Вып. 17. С. 45–47.

5. *Поликарпов С. И.* Представление конечного детерминированного автомата конечным рядом по системе функций Уолша // Актуальные направления научных исследований XXI века : Теория и практика : сб. науч. тр. Воронеж, 2017. № 8, ч. 2. С. 143–147.

УДК 512.53

В. Б. Поплавский

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ИДЕМПОТЕНТЫ УПОРЯДОЧЕННЫХ МОНОИДОВ

Поступила в редакцию 29.05.2018 г.

В этой статье рассматриваются свойства множеств левых и правых единиц произвольного элемента частично упорядоченного моноида \mathbf{X} , т. е. полугруппы с единицей, на которой задан стабильный относительно полугрупповой операции умножения частичный порядок \leq .

Определение 1. Пусть существует наибольшее решение уравнения $xa = a$ для некоторого $a \in \mathbf{X}$, тогда обозначим его через a^R . Если существует наименьшее решение уравнения $xa = a$, то обозначим его через a_R . Соответственно если для уравнения $ax = a$ существует наибольшее решение, то обозначим его через a^L , и если среди решений уравнения $ax = a$ существует наименьшее, то обозначим его через a_L .

Теорема 1. Если a^R, a_R, a^L, a_L существуют, то они являются идемпотентами моноида \mathbf{X} .

Доказательство. Из определения 1 следует, что $1 \leq a^R$. Умножая последнее неравенство на a^R , получаем $a^R \leq a^R a^R$.

С другой стороны, $(a^R a^R)a = a^R(a^R a) = a$ и, следовательно, из определения 1 следует, что $(a^R a^R) \leq a^R$. Получаем равенство $a^R = a^R a^R$.

Аналогичным образом можно доказать равенство $a^L = a^L a^L$, а учитывая, что $a_R \leq 1$ и $a_L \leq 1$, можно показать и идемпотентность элементов a_R и a_L . ■

Теорема 2. Если a^R, a_R, a^L, a_L существуют, то выполняются следующие равенства: $(a^R)^R = (a^R)^L = a^R$, $(a^L)^L = (a^L)^R = a^L$, $(a_L)_L = (a_L)_R = a_L$, $(a_R)_R = (a_R)_L = a_R$.

Доказательство. Из неравенства $1 \leq a^R$ получаем $(a^R)^R \leq (a^R)^R a^R = a^R$, $(a^R)^L \leq a^R (a^R)^L = a^R$. Это позволяет записать $(a^R)^R \leq a^R$, $(a^R)^L \leq a^R$.

С другой стороны, сравнивая равенства $a^R a^R = a^R$, $(a^R)^R a^R = a^R$, $a^R (a^R)^L = a^R$ и учитывая максимальность элементов $(a^R)^R$, $(a^R)^L$, имеем $a^R \leq (a^R)^R$, $a^R \leq (a^R)^L$, что доказывает равенство $(a^R)^R = (a^R)^L = a^R$.

Остальные равенства доказываются аналогично. ■

Теорема 3. Пусть e – идемпотент моноида \mathbf{X} . Тогда следующие условия равносильны: $1 \leq e \iff e = e^R \iff e = e^L$;
 $e \leq 1 \iff e = e_R \iff e = e_L$.

Доказательство. Пусть $1 \leq e = ee$. Тогда существует решение уравнения $xe = e$. Из неравенства $1 \leq e = xe$ получаем $x \leq xe = xxe = e$, т.е. e является наибольшим решением уравнения $e = xe$. Следовательно, e^R существует и $e = e^R$. Таким же способом можно показать, что $e = e^L$.

Если выполняется равенство $e = e^R$, то из неравенства $1 \leq e^R$ получаем $1 \leq e$.

Аналогично доказывается эквивалентность $e \leq 1 \iff e = e_R \iff e = e_L$. ■

Определение 2. Идемпотент e назовем *вторичным идемпотентом*, порожденным заданным на моноиде порядком \leq , если он сравним с единицей моноида \mathbf{X} , т.е. $e \leq 1$ или $1 \leq e$.

Идемпотент назовем *первичным* в противном случае, т.е. если он не сравним с единицей заданным на моноиде частичным порядком \leq .

Таким образом, если идемпотент e – вторичный, то выполняется либо $e = e^R = e^L$, либо $e = e_R = e_L$. В случае $e = e^R = e^L$ идемпотент e назовем *вторичным идемпотентом максимального типа*, в случае $e = e_R = e_L$ идемпотент e назовем *вторичным идемпотентом минимального типа*.

Из теорем 1 и 2 получаем, что если существуют элементы a^R, a_R, a^L, a_L для некоторого $a \in \mathbf{X}$, то они являются вторичными идемпотентами. Будем называть их соответственно *R-вторичными идемпотентами максимального, минимального типа* или *L-вторичными идемпотентами максимального, минимального типа, порожденными элементом a* . Будем в этом случае также говорить, что элемент a *обладает вторичным идемпотентом (или порождает вторичный идемпотент) соответствующего типа*.

Множества всех идемпотентов, первичных идемпотентов, вторичных идемпотентов максимального и минимального типов будем обозначать символами E, E_0, E^\uparrow и E_\downarrow соответственно. Заметим, что $E_0 \cap E^\uparrow = \emptyset$, $E_0 \cap E_\downarrow = \emptyset$, $E^\uparrow \cap E_\downarrow = \{1\}$, что следует из теоремы 3, и $E = E_0 \cup E^\uparrow \cup E_\downarrow$.

Теорема 4. Пусть \mathbf{X} – моноид и \leq – некоторый стабильный частичный порядок на нем. Тогда выполняются следующие эквивалентности, если все входящие в них вторичные идемпотенты существуют:

$$\begin{aligned} a^R \leq b^R &\leftrightarrow a^R \cdot b = b \leftrightarrow a^R \cdot b^R = b^R \cdot a^R = b^R; \\ a^L \leq b^L &\leftrightarrow b \cdot a^L = b \leftrightarrow a^L \cdot b^L = b^L \cdot a^L = b^L; \\ a^L \leq b^R &\leftrightarrow a^L \cdot b = b \leftrightarrow a^L \cdot b^R = b^R \cdot a^L = b^R; \\ a^R \leq b^L &\leftrightarrow b \cdot a^R = b \leftrightarrow a^R \cdot b^L = b^L \cdot a^R = b^L; \\ a_R \leq b_R &\leftrightarrow b_R \cdot a = a \leftrightarrow a_R \cdot b_R = b_R \cdot a_R = a_R; \\ a_L \leq b_L &\leftrightarrow a \cdot b_L = a \leftrightarrow a_L \cdot b_L = b_L \cdot a_L = a_L; \\ a_L \leq b_R &\leftrightarrow a \cdot b_R = a \leftrightarrow a_L \cdot b_R = b_R \cdot a_L = a_L; \\ a_R \leq b_L &\leftrightarrow b_L \cdot a = a \leftrightarrow a_R \cdot b_L = b_L \cdot a_R = a_R; \end{aligned}$$

Доказательство. Имеем $a^R \leq b^R \rightarrow 1 \leq a^R \leq b^R \rightarrow b \leq a^R \cdot b \leq b^R \cdot b = b \rightarrow a^R \cdot b = b$. Тогда по определению R -вторичного идемпотента получаем $a^R \cdot b = b \rightarrow a^R \leq b^R$. Поэтому $a^R \leq b^R \leftrightarrow a^R \cdot b = b$. Далее, $a^R \leq b^R \rightarrow 1 \leq a^R \leq b^R \rightarrow b^R \leq a^R \cdot b^R \leq b^R \cdot b^R = b^R \rightarrow a^R \cdot b^R = b^R$. Тогда по определению R -вторичного идемпотента и формулы из теоремы 2 получаем $a^R \cdot b^R = b^R \rightarrow a^R \leq (b^R)^R = b^R$. С другой стороны, $a^R \leq b^R \rightarrow 1 \leq a^R \leq b^R \rightarrow b^R \leq b^R \cdot a^R \leq b^R b^R = b^R \rightarrow b^R \cdot a^R = b^R \cdot a^R \leq b^R \leftrightarrow a^R \cdot b^R = b^R \cdot a^R = b^R$.

Остальные эквивалентности проверяются аналогично. ■

Множество идемпотентов E любой полугруппы \mathbf{X} всегда можно частично упорядочить, вводя так называемый *естественный порядок* \preceq , определяемый для элементов $a, b \in E$, следующим образом: $a \preceq b \Leftrightarrow a = a \cdot b = b \cdot a$ (см. [1–3]).

Следующее утверждение сразу следует из теоремы 4.

Теорема 5. Какой бы стабильный порядок \leq ни был на моноиде \mathbf{X} , всегда выполняется равенство $\leq = \preceq$ на множестве вторичных идемпотентов минимального типа $E_\downarrow \subseteq \mathbf{X}$, и равенство $\leq = \succeq$ на множестве вторичных идемпотентов максимального типа E^\uparrow , где \preceq – естественный порядок на множестве идемпотентов $E \subseteq \mathbf{X}$, а частичный порядок $\succeq = \preceq^{-1}$ является обратным для естественного порядка \preceq .

Теорема 6. Если естественный частичный порядок на множестве идемпотентов $E \subseteq \mathbf{X}$ можно продолжить до стабильного частичного порядка на всем моноиде \mathbf{X} , то множество вторичных идемпотентов минимального типа относительно этого частичного порядка состоит из всех идемпотентов моноида $E_\downarrow = E$, а множество вторичных идемпотентов максимального типа состоит из одного элемента: $E^\uparrow = \{1\}$.

Доказательство. Из определения естественного частичного порядка на множестве идемпотентов $a \preceq b \Leftrightarrow a = a \cdot b = b \cdot a$ следует, что все идемпотенты моноида меньше либо равны единице моноида. ■

На нетривиальное строение множества идемпотентов указывает следующий пример.

Рассмотрим множество всех бинарных отношений $B(X)$ на произвольном множестве X ($|X| \geq 2$), которое определяется как множество всевозможных подмножеств декартова квадрата $X \times X$ с частичным порядком включения \subseteq . На множестве $B(X)$ определена естественным образом структура моноида с операцией умножения бинарных отношений и единицей $\Delta = \{(x, x) | x \in X\}$. Заметим, что частичный порядок включения \subseteq стабилен относительно умножения бинарных отношений. Для этого частично упорядоченного моноида $(B(X), \subseteq)$ вторичными идемпотентами минимального типа являются все бинарные отношения ρ , для которых выполняется $\rho \subseteq \Delta$, например, $\rho = \{(x, x), (y, y)\}$ для любых $x, y \in X$. Очевидно также, что множество первичных идемпотентов E_0 непусто. Например, $\{(x, x), (x, y), (y, y), (y, x)\} \in E_0 \subset B(X)$. Множество вторичных идемпотентов максимального типа E^\uparrow содержит также элементы, отличные от Δ . Например, $\Delta \cup \{(x, y), (y, x)\} \in E^\uparrow \subset B(X)$.

Таким образом, частичный порядок \subseteq , определенный на моноиде $B(X)$ всех бинарных отношений на множестве X , не является продолжением естественного порядка \preceq , определенного на множестве всех его идемпотентов $E \subset B(X)$, хотя и совпадает с ним на множестве вторичных идемпотентов минимального типа $E_\downarrow \subset E \subset B(X)$.

Примеры построения вторичных идемпотентов максимального типа в полугруппах матриц с элементами из произвольной булевой алгебры можно найти в [4, 5].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вагнер В. В. Обобщенные группы // Докл. АН СССР. 1952. № 84. С. 1119—1122.
2. Mitsch H. A Natural Partial Order for Semigroups // Proceedings of the Amer. Math. Society. 1986. Vol. 97, № 3. P. 384—388.
3. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп : в 2 т. М. : Мир, 1972. Т. 2. 422 с.
4. Поплавский В. Б. Об идемпотентах алгебры булевых матриц // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 2. С. 26—33.
5. Поплавский В. Б. О частичных порядках на множестве булевых матриц // Электронные информационные системы. 2017. № 3 (14). С.105—113.

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ НЕРАВЕНСТВА АДМАРА

Поступила в редакцию 24.05.2018 г.

Известно [1], что если y и $y'' \in L_2(-\infty, \infty)$, то

$$\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (y')^2 dx \right\}^2 < \int_{-\infty}^{\infty} y^2 dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (y'')^2 dx, \quad (1)$$

кроме того случая, когда $y = 0$. Константа (единица) в правой части является наилучшей. Введём класс функций $U = \{u : u \in L_2(R^m), \Delta^n u \in L_2(R^m)\}$, $m \geq 1$ и итерированный оператор Лапласа $\Delta^n u$ понимается в обобщённом, по Соболеву, смысле [2]. Рассмотрим дифференциальные операторы следующего вида:

$$P_k u = \sum_{|\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_m=k} C_\alpha \cdot \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}},$$

где C_α – постоянные коэффициенты. Эти операторы определяются однородным полиномом

$$p_k(t) = \sum_{|\alpha|=k} C_\alpha \cdot t_1^{\alpha_1} \dots t_m^{\alpha_m}. \quad (2)$$

При $k = 0$ $P_k u = u$. Получено следующее обобщение неравенства 1, а именно:

Теорема. Для любых целых $\alpha_i \geq 0$ и натуральных чисел m, k и n , удовлетворяющих условиям $k = \sum_{i=1}^m \alpha_i$, $0 < k < 2n$, для любых функций $u \in U$ справедливо точное неравенство:

$$\|P_k u\|_{L_2} \leq \|p_k\|_{C(S^{m-1})} \cdot \|u\|_{L_2}^{\frac{2n-k}{2n}} \cdot \|\Delta^n u\|_{L_2}^{\frac{k}{2n}}, \quad (3)$$

где S^{m-1} – единичная сфера пространства R^m .

Доказательство. Пусть $u \in U$ и $\hat{u}(x)$ – её преобразование Фурье в смысле пространства L_2 или, то же самое, что в смысле теории обобщённых функций. По теореме Планшереля $\hat{u} \in L_2$ и $\|\hat{u}\|_{L_2} = \|u\|_{L_2}$. Известно [3], что если $u \in S$, то $\hat{u} \in S$, где $S = S(R^m)$ – пространство бесконечнодифференцируемых в R^m функций, убывающих при $|x| \rightarrow \infty$ вместе со всеми производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$.

Нетрудно проверить, что у функции $u \in U$ производная любого порядка $k \leq 2n$ является классической функцией и принадлежит L_2 .

Пусть $u \in U$. Тогда в смысле L_2 справедливо равенство

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int_{R^m} \hat{u}(t) \exp(ixt) dt, \quad x \in R^m.$$

Отсюда получаем, что

$$P_k u = \frac{i^k}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int_{R^m} \hat{u}(t) p_k(t) \exp(ixt) dt. \quad (4)$$

Рассмотрим следующий оператор:

$$(S_h u)(x) = \frac{i^k}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int_{R^m} \lambda(h, t) \hat{u}(t) \exp(ixt) dt, \quad x \in R^m,$$

где

$$\lambda(h, t) = \begin{cases} p_k(s) \left(|t|^k - \frac{k}{2n} \cdot h^{2n-k} \cdot |t|^{2n} \right), & |t|^{2n-k} \leq \frac{2n}{k} \left(\frac{1}{h} \right)^{2n-k}; \\ 0, & |t|^{2n-k} \geq \frac{2n}{k} \cdot \left(\frac{1}{h} \right)^{2n-k}. \end{cases} \quad (5)$$

Равномерная норма $\lambda(h, t)$ вычисляется без труда и равна $\|\lambda(h, t)\|_{L_\infty} = \|p_k\|_{C(S^{m-1})} \cdot \frac{2n-k}{2n} \cdot \left(\frac{1}{h} \right)^k$. Отсюда норма

$$\|S_h\|_{L_2 \rightarrow L_2} = \max \{ |\lambda(h, t)| : t \in R^m \} = \|p_k\|_{C(S^{m-1})} \cdot \frac{2n-k}{2n} \cdot \frac{1}{h^k}. \quad (6)$$

Для всякого $u \in U$ справедливо неравенство

$$\|P_k u - S_h u\|_{L_2} \leq \max \left\{ \left| \frac{p_k(t) - \lambda(h, t)}{|t|^{2n}} \right| : t \in R^m \right\} \cdot \|\Delta^n u\|_{L_2}.$$

Поскольку

$$\left\| \frac{p_k(t) - \lambda(h, t)}{|t|^{2n}} \right\|_{L_\infty} = \|p_k\|_{C(S^{m-1})} \cdot \frac{k}{2n} \cdot h^{2n-k}, \quad (7)$$

то равенства (6) и (7) дают возможность получить следующую оценку:

$$\begin{aligned} \|P_k u\|_{L_2} &\leq \|p_k\|_{C(S^{m-1})} \cdot \frac{2n-k}{2n} \cdot \frac{1}{h^k} \cdot \|u\|_{L_2} + \\ &+ \|p_k\|_{C(S^{m-1})} \cdot \frac{k}{2n} \cdot h^{2n-k} \cdot \|\Delta^n u\|_{L_2} = \|p_k\|_{C(S^{m-1})} \times \\ &\times \left[\left(\frac{2n-k}{2n} \right) \cdot \frac{1}{h^k} \cdot \|u\|_{L_2} + \frac{k}{2n} \cdot h^{2n-k} \cdot \|\Delta^n u\|_{L_2} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Минимизируя правую часть (8) по $h > 0$, приходим к неравенству (3). Покажем, что это неравенство точное.

Пусть S_0 — точка, в которой выполняется равенство $p_k(S_0) = \|p_k\|_{C(S^{m-1})}$. Построим последовательность, экстремальную в неравенстве (3). Обозначим

$$\varphi(x_1) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_1 \leq 0, \\ \text{бесконечно-дифференцируемая,} & \text{если } 0 \leq x_1 \leq \pi, \\ 0, & \text{если } x_1 \geq \pi. \end{cases}$$

Положим $h_l(x) = \varphi(x_1 - l\pi) \cdot \varphi(l\pi - x_1)$ и пусть $u_l(x) = h_l(x_1) \times \dots \times h_l(x_m) \cdot \sin(S_0, x)$, для любого $x \in R^m$. Вычислим нормы $\|P_k u_l\|_{L_2}$, $\|u_l\|_{L_2}$ и $\|\Delta^n u_l\|_{L_2}$. Имеем:

$$\begin{aligned} \|u_l\|_{L_2}^2 &= (2\pi l)^{m-1} \cdot l\pi + \underline{O}((2\pi l)^{m-1}); \\ \|\Delta^n u_l\|_{L_2}^2 &= (2\pi l)^{m-1} \cdot l\pi + \underline{O}((2\pi l)^{m-1}); \\ \|P_k u_l\|_{L_2}^2 &= \|p_k\|_{C(S^{m-1})} \cdot [(2\pi l)^{m-1} \cdot l\pi + \underline{O}((2\pi l)^{m-1})]. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для наилучшей константы K в неравенстве

$$\|P_k u\|_{L_2} \leq K \cdot \|u\|_{L_2}^{\frac{2n-k}{2n}} \cdot \|\Delta^n u\|_{L_2}^{\frac{k}{2n}}$$

справедливо $K = \|p_k\|_{C(S^{m-1})}$. □

Заметим, что в одномерном случае аналогичные неравенства получены в работах [4, 5]. В многомерном случае подобные задачи рассматривались в работах [6–8] и др.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Харди Г., Литтлвуд Дж., Полиа Г. Неравенства. : пер. с англ. М. : Наука, 1948. 454 с.
2. Соболев С. Л. Уравнения математической функции. М. : Гостех. изд-во, 1954. 444 с.
3. Владимиров В. С. Обобщённые функции в математической физике. М. : Наука, 1979. 318 с.
4. Субботин Ю. Н., Тайков Л. В. Наилучшее приближение оператора дифференцирования в пространстве L_2 // Математические заметки. 1968. Т. 3, вып. 2. С. 157–164.
5. Тайков Л. В. Неравенства типа Колмогорова и наилучшие формулы численного дифференцирования // Математические заметки. 1968. Т. 4, вып. 2. С. 221–232.
6. Тимофеев В. Г. Наилучшее приближение в равномерной и L_2 -метриках оператора дифференцирования на некоторых классах функций многих переменных / Саратов. ун-т. Саратов, 1985. 22 с. Библиогр. 15 назв. Деп. в ВИНТИ 11. 04.1985, № 2451-85.

7. Тимошин О. А. Наилучшее приближение оператора второй смешанной производной в метриках L и C на плоскости. // Матем. заметки. 1984. Т. 36, вып. 2. С. 369–377.

8. Кошелев А. А. Наилучшее L_p приближение оператора Лапласа линейными ограниченными операторами на классах функций двух и трех переменных // Тр. Ин-та математики и механики Уро РАН. 2011. Вып. 17, ч. 3. С. 217–224.

УДК 519.8

В. В. Розен

ВЫПУКЛОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ПОРЯДКА НА МНОЖЕСТВО ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР

Поступила в редакцию 21.05.2018 г.

В задачах принятия решения с упорядоченными исходами возникает проблема продолжения упорядоченности на множество вероятностных мер. В данной работе эта проблема рассматривается в общем виде. В качестве продолжения отношения порядка на множество вероятностных мер предлагается его выпуклая оболочка. Указаны основные свойства выпуклой оболочки отношения порядка и дано ее описание с помощью так называемых матриц декомпозиции упорядоченного множества. Альтернативные способы продолжения упорядоченности на множество вероятностных мер рассмотрены в работах автора [1 – 3].

1. Под *вероятностной мерой* на конечном множестве $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ понимается отображение $\mu : A \rightarrow \mathbf{R}$

$$\mu(a_i) \geq 0 (i = 1, \dots, n), \sum_{i=1}^n \mu(a_i) = 1.$$

Если задана вероятностная мера μ , то, полагая $\mu(a_i) = \mu^i$, получаем n – компонентный вектор (μ^1, \dots, μ^n) пространства \mathbf{R}^n , который называется *вероятностным вектором над A* , соответствующим указанной вероятностной мере. Учитывая, что вероятностная мера на A и соответствующий ей вероятностный вектор взаимно однозначно определяют друг друга, в дальнейшем мы их обозначаем одним и тем же символом. Для любого $a_i \in A$ обозначаем через δ_{a_i} вырожденную вероятностную меру, сосредоточенную в точке a_i . Можно рассматривать A как подмножество \bar{A} . Введем следующее

Определение 1. Произвольное бинарное отношение $\rho \subseteq \tilde{A} \times \tilde{A}$, заданное на множестве вероятностных мер \tilde{A} , называется *выпуклым*, если условия

$$\begin{cases} (\mu_1, \nu_1) \in \rho \\ (\mu_2, \nu_2) \in \rho \end{cases}$$

влекут $(\alpha\mu_1 + \beta\mu_2, \alpha\nu_1 + \beta\nu_2) \in \rho$ при любых $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$.

Учитывая, что пересечение любого семейства выпуклых бинарных отношений на множестве вероятностных мер \tilde{A} также является выпуклым бинарным отношением на \tilde{A} , получаем, что определена операция выпуклого замыкания, которая каждому отношению $\rho \subseteq \tilde{A} \times \tilde{A}$ ставит в соответствие наименьшее (по включению) содержащее его бинарное отношение $\hat{\rho} \subseteq \tilde{A} \times \tilde{A}$. При этом отношение $\hat{\rho}$ называется *выпуклой оболочкой бинарного отношения* ρ .

2. Пусть $\langle A, \omega \rangle$ – некоторое упорядоченное множество. Так как $\omega \subseteq A \times A \subseteq \tilde{A} \times \tilde{A}$, то существует выпуклая оболочка $\hat{\omega}$ отношения порядка ω . Основной задачей данной работы является нахождение основных свойств и описание отношения $\hat{\omega}$. С этой целью дадим следующее определение.

Определение 2. Назовем *порождающей последовательностью* в упорядоченном множестве $\langle A, \omega \rangle$ всякую конечную последовательность, членами которой являются пары вероятностных мер, принадлежащих множеству \tilde{A} , причем каждый член (μ, ν) этой последовательности имеет вид

- 1) либо $\mu = \delta_{a_i}, \nu = \delta_{a_j}$, где $a_i \leq^\omega a_j$;
- 2) либо (μ, ν) есть выпуклая линейная комбинация двух уже имеющих членов этой последовательности (μ_1, ν_1) и (μ_2, ν_2) .

Теорема 1. Пусть $\langle A, \omega \rangle$ – конечное упорядоченное множество. Обозначим через $\bar{\omega}$ множество пар вероятностных мер $(\mu, \nu) \in \tilde{A} \times \tilde{A}$, для которых существует порождающая последовательность, последним членом которой является (μ, ν) . Тогда $\bar{\omega}$ совпадает с выпуклой оболочкой отношения ω , то есть $\bar{\omega} = \hat{\omega}$

Доказательство. Включение $\bar{\omega} \subseteq \hat{\omega}$ устанавливается индукцией по порождающей последовательности. Обратное включение $\hat{\omega} \subseteq \bar{\omega}$ следует из того, что отношение $\bar{\omega}$ является выпуклым и содержит ω .

Теорема 2. Пусть $\langle A, \omega \rangle$ – конечное упорядоченное множество. Тогда $\hat{\omega}$ есть выпуклое отношение порядка на множестве вероятностных мер \tilde{A} , ограничение которого на подмножестве $A \subseteq \tilde{A}$ совпадает с ω .

Будем называть отношение $\widehat{\omega}$ *выпуклым продолжением порядка ω на множество вероятностных мер*.

3. Полное описание отношения $\widehat{\omega}$ дается с помощью матриц декомпозиции упорядоченного множества.

Определение 3. Назовем *матрицей декомпозиции упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$* , где $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, действительную неотрицательную матрицу $D = \|d_{ij}\|$ формата $n \times n$, удовлетворяющую следующим условиям:

- 1) сумма элементов любой строки матрицы D равна 1 (то есть матрица D является стохастической);
- 2) для всех $i, j = 1, \dots, n$ условие $d_{ij} \neq 0$ влечет $a_i \leq^\omega a_j$.

Замечание 1. Будем считать, что элементы множества A пронумерованы таким образом, что большему относительно порядка ω элементу соответствует больший номер (условие согласованности). Тогда матрица декомпозиции D упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$ всегда является треугольной, в которой все элементы ниже главной диагонали равны 0. В самом деле, условие $d_{ij} \neq 0$ влечет $a_i \leq^\omega a_j$, а тогда по условию согласованности выполнено $i \leq j$. Отметим важнейшие свойства матриц декомпозиции упорядоченного множества.

Теорема 3. Пусть $\langle A, \omega \rangle$ – конечное упорядоченное множество, где $A = a_1, \dots, a_n$, $\widehat{\omega}$ – выпуклое продолжение отношения порядка ω на множество \widetilde{A} вероятностных векторов. Для любых вероятностных векторов $\mu, \nu \in \widetilde{A}$ условие $(\mu, \nu) \in \widehat{\omega}$ выполняется тогда и только тогда, когда существует матрица декомпозиции D упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$, для которой имеет место равенство $\nu = \mu \circ D$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Розен В. В. Продолжение упорядоченности на множество вероятностных мер // Математика. Механика. : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2005. Вып. 1. С. 61–70.
2. Розен В. Принятие решений по качественным критериям // Математические модели. Saarbrücken ; Deutschland, Verlag : Palmarium Academic Publishing, 2013. С. 284.
3. Розен В. В. Упорядоченные векторные пространства и их приложения. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2014. С. 216.

**КООРДИНАТЫ СЕРЕДИН НЕПАРАБОЛИЧЕСКИХ
ОТРЕЗКОВ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ
ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ В КАНОНИЧЕСКОМ
РЕПЕРЕ ПЕРВОГО ТИПА**

Поступила в редакцию 18.05.2018 г.

Пусть A, B — концы непараболического отрезка σ плоскости \widehat{H} [1, 2]. На прямой AB существует пара вещественных взаимно ортогональных точек S, S_0 , гармонически разделяющих пару точек A, B . Обозначим через K_1, K_2 точки пересечения прямой AB с абсолютом. В случае эллиптической (гиперболической) прямой точки K_1, K_2 мнимо сопряженные (вещественные различные). Условие ортогональности точек S, S_0 можно записать равенством $(SS_0K_1K_2) = -1$, а условие гармонической разделенности пар точек S, S_0 и A, B — равенством $(SS_0AB) = -1$. Одна из точек S, S_0 , пусть S принадлежит отрезку σ , а вторая — дополнению этого отрезка до прямой AB . Согласно определениям (см. [1, раздел 4.2]) точка S (S_0) — *середина* (*квазисередина*) отрезка AB . Если прямая AB эллиптическая, то обе точки S, S_0 собственные на \widehat{H} . Если прямая AB гиперболическая, то S — собственная точка, а S_0 — идеальная.

В каноническом репере R^* первого типа (см. [1, п. 4.1.1]) точки A, B зададим координатами $(a_j), (b_j), j = 1, 2, 3$, и найдем выражения координат $(s_j), (\bar{s}_j)$ соответственно точек S и S_0 через координаты $(a_j), (b_j)$. В репере R^* прямая AB имеет координаты

$$u_1 = a_2b_3 - a_3b_2, \quad u_2 = a_3b_1 - a_1b_3, \quad u_3 = a_1b_2 - a_2b_1. \quad (1)$$

Принадлежность точек S, S_0 прямой AB определена равенствами

$$u_1s_1 + u_2s_2 + u_3s_3 = 0, \quad u_1\bar{s}_1 + u_2\bar{s}_2 + u_3\bar{s}_3 = 0, \quad (2)$$

а условие ортогональности точек S, S_0 (см. (4.53) из [1]) имеет вид

$$s_1\bar{s}_1 + s_2\bar{s}_2 - s_3\bar{s}_3 = 0. \quad (3)$$

Предположим, что $u_3 \neq 0$, и выразим из равенств (2) значения s_3, \bar{s}_3 . Подставляя полученные выражения в условие (3), получим равенство

$$s_1\bar{s}_1 (u_3^2 - u_1^2) + s_2\bar{s}_2 (u_3^2 - u_2^2) - u_1u_2 (s_1\bar{s}_2 + s_2\bar{s}_1) = 0. \quad (4)$$

Условие $(SS_0AB) = -1$ гармонической сопряженности пар точек S , S_0 и A , B , записанное в координатах этих точек, приводит к условию

$$2s_1\bar{s}_1a_2b_2 + 2s_2\bar{s}_2a_1b_1 - \Delta(s_1\bar{s}_2 + s_2\bar{s}_1) = 0, \quad \Delta = a_1b_2 + a_2b_1. \quad (5)$$

Исключив из равенств (4), (5) выражение $s_1\bar{s}_2 + s_2\bar{s}_1$, находим

$$s_1\bar{s}_2 + s_2\bar{s}_1 = \frac{2s_1\bar{s}_1a_2b_2 + 2s_2\bar{s}_2a_1b_1}{\Delta},$$

$$s_1\bar{s}_1(\Delta(u_3^2 - u_1^2) - 2u_1u_2a_2b_2) + s_2\bar{s}_2(\Delta(u_3^2 - u_2^2) - 2u_1u_2a_1b_1) = 0. \quad (6)$$

Поделив обе части равенств в системе (6) на $s_2\bar{s}_2$, получим

$$\frac{s_1}{s_2} + \frac{\bar{s}_1}{\bar{s}_2} = \frac{2\frac{s_1}{s_2}\frac{\bar{s}_1}{\bar{s}_2}a_2b_2 + 2a_1b_1}{\Delta}, \quad \frac{s_1}{s_2}\frac{\bar{s}_1}{\bar{s}_2} = -\frac{\Delta(u_3^2 - u_2^2) - 2u_1u_2a_1b_1}{\Delta(u_3^2 - u_1^2) - 2u_1u_2a_2b_2}. \quad (7)$$

Решая систему (7) относительно переменных $\frac{s_1}{s_2}$, $\frac{\bar{s}_1}{\bar{s}_2}$, получаем

$$\frac{s_1}{s_2} = \Omega + \varepsilon\sqrt{\Omega^2 - \Theta}, \quad \frac{\bar{s}_1}{\bar{s}_2} = \Omega - \varepsilon\sqrt{\Omega^2 - \Theta}, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

$$\Theta = -\frac{\Delta(u_3^2 - u_2^2) - 2u_1u_2a_1b_1}{\Delta(u_3^2 - u_1^2) - 2u_1u_2a_2b_2}, \quad \Omega = \frac{\Theta a_2b_2 + a_1b_1}{\Delta}. \quad (8)$$

Из условий (1), (2), (8) находим координаты точек S , S_0 :

$$\left(u_3 \left(\Omega + \varepsilon\sqrt{\Omega^2 - \Theta}\right) : u_3 : -u_1 \left(\Omega + \varepsilon\sqrt{\Omega^2 - \Theta}\right) - u_2\right), \quad \varepsilon = \pm 1,$$

$$u_1 = a_2b_3 - a_3b_2, \quad u_2 = a_3b_1 - a_1b_3, \quad u_3 = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0,$$

$$\Theta = \frac{a_1^2(b_2^2 - b_3^2) - b_1^2(a_2^2 - a_3^2)}{a_2^2(b_1^2 - b_3^2) - b_2^2(a_1^2 - a_3^2)},$$

$$\Omega = \frac{a_1a_2(b_1^2 + b_2^2 - b_3^2) - b_1b_2(a_1^2 + a_2^2 - a_3^2)}{a_2^2(b_1^2 - b_3^2) - b_2^2(a_1^2 - a_3^2)}. \quad (9)$$

В конкретной задаче принадлежность точки S отрезку AB однозначно определит число ε в координатах (9). Противоположное по знаку число будет соответствовать квазисередине S_0 отрезка AB .

В частном случае, когда прямая AB проходит через вершину A_3 репера R^* , имеем $u_3 = 0$. Согласно условиям (2) при $u_3 = 0$ координаты точек S , S_0 можно искать соответственно в виде $(-u_2 : u_1 : s_3)$, $(-u_2 : u_1 : \bar{s}_3)$. Точки S , S_0 ортогональны, согласно условию (4.53) из [1] находим

$$s_3\bar{s}_3 = u_1^2 + u_2^2. \quad (10)$$

Поскольку $A \neq B$, при $u_3 = 0$, по крайней мере, одно из чисел u_1 , u_2 отлично от нуля. Пусть $u_1 \neq 0$ (или $u_2 \neq 0$). Запишем соответственно случаю условие $(SS_0AB) = -1$, используя вторую и третью (первую и третью) координаты точек S, S_0, A, B . После преобразований получим:

$$2(s_3\bar{s}_3a_2b_2 + u_1^2a_3b_3) - u_1(a_2b_3 + a_3b_2)(s_3 + \bar{s}_3) = 0$$

$$(2(s_3\bar{s}_3a_1b_1 + u_2^2a_3b_3) + u_2(a_1b_3 + a_3b_1)(s_3 + \bar{s}_3) = 0). \quad (11)$$

Из равенств (10), (11) соответственно условию $u_1 = a_2b_3 - a_3b_2 \neq 0$ ($u_2 = a_3b_1 - a_1b_3 \neq 0$) находим координаты точек S, S_0 при $u_3 = 0$:

$$\left(-u_2 : u_1 : \Omega + \varepsilon\sqrt{\Omega^2 - u_1^2 - u_2^2}\right), \quad \varepsilon = \pm 1,$$

$$\Omega = \frac{a_2b_2(u_1^2 + u_2^2) + u_1^2a_3b_3}{u_1(a_2b_3 + a_3b_2)} \quad \left(\Omega = -\frac{a_1b_1(u_1^2 + u_2^2) + u_2^2a_3b_3}{u_2(a_1b_3 + a_3b_1)}\right). \quad (12)$$

Знак ε в координатах (12) может быть определен условием принадлежности точки S отрезку AB . Если при $u_3 = 0$ выполняется условие $u_1u_2 \neq 0$, то для вычисления координат середины отрезка можно пользоваться любым из альтернативных условий (12).

Заметим, что координаты (9), (12) получены для эллиптического или гиперболического отрезка AB , в частности, он может лежать в плоскости Лобачевского. Если точки A, B принадлежат различным компонентам плоскости H^2 , определяя квазиотрезок, то координаты (9), (12) определяют мнимо сопряженные точки S, S_0 (см. [1, раздел 4.2]).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ромакина Л. Н. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны : в 4 ч. Ч. 1 : Тригонометрия. Саратов. : Изд-во Саратов. ун-та, 2013. 244 с.
2. Ромакина Л. Н. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны : в 4 ч. Ч. 2 : Преобразования и простые разбиения. Саратов. : Изд-во Саратов. ун-та, 2013. 277 с.

О КРАТНОЙ ПОЛНОТЕ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО КЛАССА СИЛЬНО НЕРЕГУЛЯРНЫХ ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Поступила в редакцию 21.05.2018 г.

В пространстве $L_2[0, 1]$ рассмотрим пучок обыкновенных дифференциальных операторов $L(\lambda)$, порожденный дифференциальным выражением n -го порядка

$$\ell(y, \lambda) := \sum_{j+s=n} p_{js} \lambda^s y^{(j)}, \quad p_{js} \in \mathbb{C}, \quad p_{n0} \neq 0, \quad p_{0n} \neq 0, \quad (1)$$

и линейно независимыми однородными двухточечными распадающимися нормированными краевыми условиями:

$$\sum_{j+s=\kappa_i} \lambda^s \alpha_{ijs} y^{(j)}(0) = 0, \quad i = \overline{1, l}, \quad (2)$$

$$\sum_{j+s=\kappa_i} \lambda^s \beta_{ijs} y^{(j)}(1) = 0, \quad i = \overline{l+1, n}, \quad (3)$$

где $\lambda, \alpha_{ijs}, \beta_{ijs} \in \mathbb{C}, \kappa_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, 1 \leq l \leq n-1$.

Далее используем, не повторяя в данном тексте, известные определения собственных и присоединенных функций, или кратко корневых функций (к.ф.), m -кратной ($1 \leq m \leq n$) полноты к.ф., характеристического определителя, характеристического многоугольника и т. п. из [1].

Решается задача о нахождении условий на параметры пучка $L(\lambda)$, при которых имеет место m -кратная полнота системы к.ф. этого пучка в пространстве $L_2[0, 1]$. Историю вопроса можно посмотреть, например, в [1–3].

В [2] рассмотрен случай, когда корни характеристического уравнения пучка расположены на двух лучах, исходящих из начала. В теореме 1 из [2] получены достаточные условия кратной полноты системы к.ф. для вроде бы более общего класса пучков вида (1)–(3) в случае полураспадающихся «в широком смысле» краевых условий (то есть когда не только $2l \geq n$, но и $2l < n$ в случае $1 \leq l \leq n-1$). Но, несмотря на то что краевые условия (2)–(3) являются частным случаем полураспадающихся «в широком смысле» краевых условий из [2], тем не менее, теорема 1 о полноте из [2] не может быть непосредственно применена к случаю распадающихся краевых условий (2)–(3), так как соответствующие определители в этой теореме обращаются в ноль.

Видоизменив доказательство теоремы 1 из [2], удалось получить достаточные условия кратной полноты и в случае распадающихся краевых условий, но, к сожалению, не во всех случаях. Чтобы сформулировать полученные результаты, введем необходимые предположения и обозначения.

Предположим, что корни $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ характеристического уравнения $\sum_{j+s=n} p_{js}\omega^j = 0$ попарно различны, отличны от нуля и лежат на двух или одном лучах, исходящих из начала, в количествах k и $n - k$ ($0 \leq k \leq n$). Не нарушая общности, можно считать, что корни расположены следующим образом:

$$\omega_n e^{i\varphi} < \omega_{n-1} e^{i\varphi} < \dots < \omega_{k+1} e^{i\varphi} < 0 < \omega_1 e^{-i\varphi} < \omega_2 e^{-i\varphi} < \dots < \omega_k e^{-i\varphi}, \quad (4)$$

где $|\varphi| < \pi/2$. В случае одного луча ($k = n$ или $k = 0$) считаем, что $\varphi = 0$ и $k = n$.

Обозначим $[q]_+ = \max\{0, q\}$, $[p, q]_- = \min\{p, q\}$, $[p, q]_+ = \max\{p, q\}$ и положим при $j = \overline{1, n}$

$$a_{ij} = \sum_{\nu+s=\kappa_i} \alpha_{i\nu s} \omega_j^\nu, \quad i = \overline{1, l}; \quad b_{ij} = \sum_{\nu+s=\kappa_i} \beta_{i\nu s} \omega_j^\nu, \quad i = \overline{l+1, n}.$$

Используя эти обозначения, введем условия:

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1, l}}^{j=\overline{1, k+l-n; k+1, n}} \neq 0, \quad \det(b_{ij})_{i=\overline{l+1, n}}^{j=\overline{k+l-n+1, k}} \neq 0 \quad \text{при } n - k \leq l; \quad (5)$$

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1, l}}^{j=\overline{n-l+1, n}} \neq 0, \quad \det(b_{ij})_{i=\overline{l+1, n}}^{j=\overline{1, n-l}} \neq 0 \quad \text{при } n - k > l; \quad (6)$$

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1, l}}^{j=\overline{1, l}} \neq 0, \quad \det(b_{ij})_{i=\overline{l+1, n}}^{j=\overline{l+1, n}} \neq 0, \quad \text{при } k \leq l; \quad (7)$$

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1, l}}^{j=\overline{k-l+1, k}} \neq 0, \quad \det(b_{ij})_{i=\overline{l+1, n}}^{j=\overline{1, k-l; k+1, n}} \neq 0 \quad \text{при } k > l. \quad (8)$$

Отметим, что в граничном случае $n - k = l$ условия (5) и (6) совпадают. Аналогично в граничном случае $k = l$ совпадают условия (7) и (8).

Теорема 1. Если $[k, n - k]_+ \leq l$ и выполняются условия (5) и (7), то при $t \leq 2(n - l)$ система к.ф. пучка (1)–(3) t -кратно полна в $L_2[0, 1]$ с возможным конечным дефектом, не превышающим числа $d_1 := \sum_{i=l+1}^n [m - 1 - \kappa_i]_+$.

Теорема 2. Если $[k, n - k]_- \geq l$ и выполняются условия (6) и (8), то при $t \leq 2l$ система к.ф. пучка (1)–(3) t -кратно полна в $L_2[0, 1]$ с возможным конечным дефектом, не превышающим числа

$$d_2 := \sum_{i=1}^l [m - 1 - \varkappa_i]_+.$$

Граничный случай в теоремах 1 и 2 сформулируем в отдельной теореме. Это соответствует случаю регулярного пучка.

Теорема 3. *Если $[k, n - k]_- = [k, n - k]_+ = l$ или, что эквивалентно, $n = 2k = 2l$ и выполняются условия (5) (или (6)) и (7) (или (8)), то система к.ф. пучка (1)–(3) n -кратно полна в $L_2[0, 1]$ с возможным конечным дефектом, не превышающим числа $[d_1, d_2]_-$ в случае, если, по крайней мере, для одного $i = \overline{1, n}$ выполняется неравенство $\varkappa_i > n - 1$, и с нулевым дефектом в противном случае.*

Показано, что в случае

$$[k, n - k]_- < l < [k, n - k]_+, \quad (9)$$

который исключен из рассмотрения в теоремах 1–3, используемое доказательство не проходит из-за пока непреодолимых трудностей. Это случай пучка $L(\lambda)$ с устойчивой сильной нерегулярностью, то есть такой сильной нерегулярностью (см. [1]), которая имеет место при любых значениях коэффициентов краевых условий α_{ijs} и β_{ijs} .

Использование другого подхода, предложенного в [1], позволяет получать результаты о кратной полноте к.ф. в некоторых подслучаях случая (9). Например, имеет место следующий результат.

Теорема 4. *Если $k = n - 1$, $1 < l < n - 1$ (это подслучай случая (9)) и характеристический многоугольник пучка (1)–(3) не является отрезком, то система его к.ф. 1-кратно полна в $L_2[0, 1]$ с возможным конечным дефектом.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Рыжлов В. С. О полноте корневых функций полиномиальных пучков обыкновенных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // ТВИМ (Таврический вестник информатики и математики). 2015. № 1(26). С. 69–86.

3. Ryzhlov V. S. Multiple Completeness of the Root Functions for a Certain Class of Pencils of Ordinary Differential Operators // Results in Mathematics. 2017. Vol. 72, iss. 1–2. P. 281–301.

3. Рыжлов В. С. О кратной полноте корневых функций обыкновенного дифференциального полиномиального пучка с постоянными коэффициентами // СМФН (Современная математика. Фундаментальные направления). 2017. Т. 63, вып. 2. С. 340–361.

**ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ
ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
В ТРЁХМЕРНОМ СЛОЕ**

Поступила в редакцию 29.05.2018 г.

Получено интегральное представление решения уравнения

$$\Delta u + cu = f \quad (1)$$

в слое

$$\Pi_h = \{ \xi \in R^3 : -h < \xi_1 < h, -\infty < \xi_i < \infty, i = 2, 3; h > 0 \},$$

являющееся более общим, чем рассмотренное в работе [1].

Если обозначить через U класс функций $u \in C$, где $C = C(R^3)$ — пространство непрерывных ограниченных на R^3 функций, для которых значение оператора Лапласа Δu принадлежит пространству $L_\infty(R^3)$, а сам оператор Лапласа Δu понимается в смысле Соболева [2], то справедливо следующее утверждение:

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Pi_h} u(\xi) \frac{\partial G}{\partial n_\xi} d\xi - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Pi_h} L(u) G(\xi, x) d\xi, \quad x \in \Pi_h, \quad (2)$$

где $G(\xi, x)$ — функция Грина слоя Π_h , $\frac{\partial G(\xi, x)}{\partial n_\xi}$ — производная по направлению внешней нормали к $\partial\Pi_h$, а $L(u) = \Delta u + cu$.

Представление (2) даёт возможность получения точных неравенств типа Ландау, более общих, чем аналогичные неравенства работы [1].

Известно [3], что всякое однородное уравнение эллиптического типа с постоянными коэффициентами может быть сведено к виду

$$\Delta u + cu = 0. \quad (3)$$

Свойства решения этого уравнения зависят от знака коэффициента c , что очевидно с физической точки зрения, если иметь в виду диффузионную интерпретацию этого уравнения.

Распространим теорию потенциала, построенную в [3, 4] для уравнения Лапласа, на уравнение (3). Положим $c = -\kappa^2$, $\kappa > 0$ (для $\kappa < 0$ рассуждения аналогичны, если в формуле (4) заменить κ на $-\kappa$).

Пусть $u \in U$. Для $x \in R^3$, $\xi \in R^3$, $h > 0$, $\xi_1 \neq x_1 + 2ph$, где p — произвольное целое число, положим

$$G(\xi, x) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\exp(-\kappa r_p)}{r_p} - \frac{\exp(-\kappa \bar{r}_p)}{\bar{r}_p} \right\}, \quad (4)$$

где

$$r_p = \sqrt{(\xi_1 - x_1 - 4ph)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2},$$

$$\bar{r}_p = \sqrt{(\xi_1 + x_1 - 4ph - 2h)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2}.$$

Для уравнения $L(u) = f$ выведем формулы Грина, аналогичные формулам, полученным в [1, 3, 4] для уравнения Лапласа. Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Функция $G(\xi, x)$ является функцией Грина слоя Π_h и для любой функции $u \in U$ имеет место интегральное представление (2).*

Доказательство. Следуя [5, задача 36; с. 73; 357], устанавливаем, что функция (4) является функцией Грина слоя Π_h , а следовательно, обладает свойствами:

1. $G(\xi, x) = G(x, \xi)$. Отсюда вытекает, что свойства функции Грина справедливы относительно каждой переменной x и ξ .
2. $G(\xi, x)$ удовлетворяет уравнению (3) во всех точках $x \in \Pi_h \setminus \{\xi\}$, что проверяется непосредственно [3].
3. $G(\xi, x)$ представима в виде $G(\xi, x) = \frac{\exp(-\kappa r_0)}{r_0} + \nu$, где $r_0 = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\xi_i - x_i)^2}$, а $\nu = \nu(\xi, x)$ удовлетворяет уравнению $L(u) = 0$ уже всюду в Π_h .
4. $G(\xi, x)$ на границе слоя Π_h обращается в нуль, то есть $G(\xi, x) = 0$, если $\xi \in \partial\Pi_h$ (что вытекает непосредственно из построения функции (4), аналогично методу электростатических изображений).
5. Функции $G(\xi, x)$ и $\frac{\partial G(\xi, x)}{\partial n_\xi}$ имеют интегрируемую особенность при $\xi = x$, что следует, например, из того обстоятельства, что функция $G(\xi, x)$ имеет особенность $\frac{1}{r_0}$, а $\frac{\partial G(\xi, x)}{\partial n_\xi}$ — особенность вида $\frac{1}{r_0^2}$ (см. [3]).

Перечисленные свойства функции $G(\xi, x)$ позволяют для любой функции u , определённой, непрерывной и ограниченной вместе со своими производными до второго порядка включительно на R^3 , получить [1, 3] следующее интегральное представление:

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Pi_h} u(\xi) \frac{\partial G(\xi, x)}{\partial n_\xi} d\xi - \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Pi_h} L(u(\xi)) G(\xi, x) d\xi. \quad (5)$$

На самом деле, оно остаётся верным и для всякой функции $u \in U$. Покажем это.

Пусть $\varphi \in D$, где $D = D(R^3)$ — пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций на R^3 , и $\int_{R^3} \varphi dx = 1$. Для любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим функцию $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^3} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Определим функцию $u_\varepsilon(x)$ следующим образом:

$$u_\varepsilon(x) = \int_{R^3} u(x-t)\varphi_\varepsilon(t) dt = \int_{R^3} u(t)\varphi_\varepsilon(x-t) dt.$$

Очевидно, что u_ε бесконечно дифференцируема. Положим

$$\Delta u_\varepsilon(x) = \int_{R^3} u(t)\Delta\varphi_\varepsilon(x-t) dt = \int_{R^3} \Delta u(x-t)\varphi_\varepsilon(t) dt.$$

Для функции u_ε справедливо равенство (5), то есть

$$u_\varepsilon(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Pi_h} u_\varepsilon(\xi) \frac{\partial G(\xi, x)}{\partial n_\xi} d\xi - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Pi_h} L(u_\varepsilon(\xi))G(\xi, x) d\xi. \quad (6)$$

Очевидно, что $\|u_\varepsilon\|_c$ и $\|\Delta u_\varepsilon\|_\infty$ равномерно по ε ограничены; при $\varepsilon \rightarrow 0$ функции u_ε сходятся всюду к u в R^3 , а Lu_ε к Lu почти всюду, что следует из [6]. По теореме Лебега о мажорантной сходимости из (6) в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем представление (2) уже для функций $u \in U$. \square

Если рассмотреть уравнение $\Delta u + cu = f$ для $c = \kappa^2$, то по той же схеме можно построить функцию Грина полосы Π_h , а затем представление (2).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тимофеев В. Г. Неравенство типа Ландау для функций нескольких переменных // Матем. заметки. 1985. Т. 37, вып. 5. С. 676–689.
2. Соболев С. Л. Уравнения математической функции. М. : Наука, 1966. 444 с.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической функции. М. : Наука, 1972. 735 с.
4. Тиман А. Ф., Трофимов В. Н. Введение в теорию гармонических функций. М. : Наука, 1968. 208 с.
5. Будаков Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. М. : Наука, 1972. 678 с.
6. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М. : Мир, 1974. 333 с.

Доказательство. Очевидно, (1) можно представить в виде

$$S_\alpha f = \frac{1}{\alpha} \int_x^{x+\alpha} \varphi_1^1(t, \tau) f(\tau) d\tau,$$

где $\varphi_1^1(t, \tau) = 1$.

Пусть $m = 2$. Имеем:

$$S_\alpha^2 f = \frac{1}{\alpha^2} \int_x^{x+\alpha} dt \int_t^{t+\alpha} f(\tau) d\tau. \quad (3)$$

Будем менять порядок интегрирования, используя функцию

$$\varepsilon(\xi, \eta) = \begin{cases} 1, \eta \leq \xi, \\ 0, \eta > \xi. \end{cases}$$

Поскольку в (3) τ меняется в пределах от x до $x + 2\alpha$, то запишем повторный интеграл в (3) в виде

$$I_1^2 \equiv \int_x^{x+\alpha} dt \int_t^{t+\alpha} f(\tau) d\tau = \int_x^{x+2\alpha} \varepsilon(t, x) \varepsilon(x + \alpha, t) dt \int_x^{x+2\alpha} \varepsilon(\tau, t) \varepsilon(t + \alpha, \tau) f(\tau) d\tau.$$

Теперь пределы интегрирования не зависят от переменных интегрирования. Меняем порядок интегрирования. Получим:

$$I_1^2 = \int_x^{x+2\alpha} f(\tau) d\tau \int_x^{x+2\alpha} \varepsilon(t, x) \varepsilon(x + \alpha, t) \varepsilon(\tau, t) \varepsilon(t + \alpha, \tau) dt.$$

Далее из определения $\varepsilon(\xi, \eta)$:

$$x \leq t \leq x + \alpha, \quad \tau - \alpha \leq t \leq \tau.$$

Отсюда

$$\max(x, \tau - \alpha) \leq t \leq \min(x + \alpha, \tau).$$

Рассмотрим различные возможности:

а) $\max(x, \tau - \alpha) = x;$

$$\min(x + \alpha, \tau) = \tau.$$

В этом случае $\tau \leq x + \alpha$.

б) $\max(x, \tau - \alpha) = \tau - \alpha;$

$$\min(x + \alpha, \tau) = x + \alpha.$$

В этом случае $\tau \geq x + \alpha$. При этом из (3) $\tau \leq x + 2\alpha$.

Случаи: в) $\max(x, \tau - \alpha) = \tau - \alpha;$

$$\min(x + \alpha, \tau) = \tau$$

г) $\max(x, \tau - \alpha) = x;$

$$\min(x + \alpha, \tau) = x + \alpha$$

приводят к противоречивым неравенствам: $\tau \leq x + \alpha$ и $\tau \geq x + \alpha$.

На основании вышесказанного получаем:

$$I_1^2 = \int_x^{x+\alpha} f(\tau) d\tau \int_x^\tau \varphi_1^1(t, \tau) dt + \int_{x+\alpha}^{x+2\alpha} f(\tau) d\tau \int_{\tau-\alpha}^{x+\alpha} \varphi_1^1(t, \tau) dt$$

Отсюда получаем представление (2) для $m = 2$.

Рассуждая по индукции, получим формулу (2) в общем случае. \square

Замечание. Для $m = 2$ интегральный оператор приведен в [3]. Здесь этот случай рассматривается только для того, чтобы продемонстрировать общий подход, который мы применяем при перемене порядка интегрирования.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромова Г. В. Операторы с разрывной областью значений в задачах приближения функций и некорректных задачах // Новые методы аппроксимации и оптимизации в задачах действительного и комплексного анализа. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2016. Раздел IV. С. 238–294.

2. Сендов Б. Х. Модифицированная функция Стеклова // Докл. Болг. акад. наук. 1983. Т. 134, № 2. С. 355–379.

3. Хромов А. А. Приближение функции и её производной с помощью модифицированного оператора Стеклова // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 4, ч. 2. С. 593–597.

УДК 517.984

В. А. Юрко

ОБ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ С УСЛОВИЯМИ РАЗРЫВА ВНУТРИ ИНТЕРВАЛА

Поступила в редакцию 04.05.2018 г

Рассмотрим краевые задачи L_k , $k = \overline{1, n-1}$ для дифференциального уравнения

$$\ell y(x) := y^{(n)}(x) + \sum_{j=0}^{n-2} p_j(x)y^{(j)}(x) = \lambda y(x), \quad 0 < x < T, \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$y^{(\nu-1)}(0) = y^{(\xi-1)}(T) = 0, \quad \nu = \overline{1, k}, \quad \xi = \overline{1, n-k}, \quad (2)$$

и условиями разрыва во внутренней точке $a \in (0, T)$:

$$y^{(\nu-1)}(a+0) = \sum_{j=1}^{\nu} a_{\nu j} y^{(j-1)}(a-0), \quad \nu = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Здесь $n = 2m$, $p_j(x) \in L(0, T)$ – комплекснозначные функции и $a_{\nu j}$ – комплексные числа, $a_{\nu\nu} \neq 0$. Таким образом, условия разрыва порождаются матрицей перехода $A = [a_{\nu j}]_{\nu, j = \overline{1, n}}$, где $a_{\nu j} = 0$ при $\nu < j$ и $\det A \neq 0$.

В данной статье исследуются обратные спектральные задачи для дифференциальных уравнений произвольных порядков вида (1) на конечном интервале с условиями (2)-(3). В качестве основной спектральной характеристики вводится и изучается матрица типа Вейля, которая является обобщением понятий функции Вейля для операторов Штурма–Лиувилля и матрицы типа Вейля для дифференциальных операторов высших порядков без разрывов, введенной в [1–2]. Доказывается, что задание матрицы типа Вейля однозначно определяет потенциалы $p_j(x)$, $j = \overline{0, n-2}$. Рассматривается также обратная задача восстановления оператора по системе спектров. Эта обратная задача является обобщением известной обратной задачи Борга для операторов Штурма–Лиувилля. Отметим, что обратные спектральные задачи для дифференциальных операторов второго порядка с условиями разрыва рассматривались в [3–6] и других работах.

Пусть $\varphi_j(x, \lambda)$, $j = \overline{1, n}$ – решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям разрыва (3) и начальным условиям

$$\varphi_j^{(\nu-1)}(0, \lambda) = \delta_{\nu j}, \quad \nu = \overline{1, n},$$

где $\delta_{\nu j}$ – символ Кронекера. Ясно, что

$$\det[\varphi_j^{(\nu-1)}(x, \lambda)]_{\nu, j = \overline{1, n}} = \eta(x), \quad (4)$$

где $\eta(x) := 1$ при $x < a$, и $\eta(x) := \det A$ при $x > a$. Обозначим

$$\Delta_k(\lambda) := \det[\varphi_j^{(\nu-1)}(T, \lambda)]_{j = \overline{k+1, n}; \nu = \overline{1, n-k}}, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Функции $\Delta_k(\lambda)$, $k = \overline{1, n-1}$, являются целыми по λ порядка $1/n$, и их нули $\{\lambda_{lk}\}_{l \geq 0}$ (с учетом кратностей) совпадают с собственными значениями краевых задач L_k вида (1)-(3). Функции $\Delta_k(\lambda)$ называются характеристическими функциями краевых задач L_k . В силу (4) $\Delta_0(\lambda) \equiv \det A$. Положим дополнительно $\Delta_n(\lambda) := 1$.

Пусть $\Phi_k(x, \lambda)$, $k = \overline{1, n}$ – решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям разрыва (3) и краевым условиям

$$\Phi_k^{(\nu-1)}(0, \lambda) = \delta_{\nu k}, \quad \nu = \overline{1, k}, \quad \Phi_k^{(\xi-1)}(T, \lambda) = 0, \quad \xi = \overline{1, n-k}.$$

Функции $\Phi_k(x, \lambda)$ называются решениями типа Вейля. Обозначим $M_{k\nu}(\lambda) := \Phi_k^{(\nu-1)}(0, \lambda)$. Функции $M_{k\nu}(\lambda)$ называются функциями типа

Вейля, а матрица $M(\lambda) = [M_{k\nu}(\lambda)]_{k,\nu=\overline{1,n}}$ называется матрицей типа Вейля. Очевидно, что $M_{k\nu}(\lambda) \equiv \delta_{k\nu}$ при $k \geq \nu$ и $\det M(\lambda) \equiv 1$. Ясно, что

$$\Phi_k(x, \lambda) = \varphi_k(x, \lambda) + \sum_{\nu=k+1}^n M_{k\nu}(\lambda) \varphi_\nu(x, \lambda), \quad (5)$$

$$M_{k\nu}(\lambda) = \frac{\Delta_{k\nu}(\lambda)}{\Delta_k(\lambda)}, \quad k \leq \nu,$$

где

$$\Delta_{k\nu}(\lambda) := (-1)^{k+\nu} \det[\varphi_j^{(\mu-1)}(T, \lambda)]_{\nu=\overline{1,n-k}, j=\overline{k,n}\setminus\nu}, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad \nu = \overline{k, n}.$$

В частности, $\Delta_{kk}(\lambda) \equiv \Delta_k(\lambda)$. Из (4) и (5) следует, что

$$\det[\Phi_j^{(\nu-1)}(x, \lambda)]_{\nu,j=\overline{1,n}} = \eta(x).$$

Функции $\Delta_{k\nu}(\lambda)$ являются целыми по λ порядка $1/n$, и их нули $\{\lambda_{lk\nu}\}_{l \geq 0}$ (с учетом кратностей) совпадают с собственными значениями краевых задач $L_{k\nu}$ для уравнения (1) с условиями разрыва (3) и с крайевыми условиями

$$y^{(\mu-1)}(0) = y^{(\xi-1)}(T) = 0, \quad \mu = \overline{1, k-1}, \nu; \quad \xi = \overline{1, n-k}.$$

В частности, $\lambda_{lkk} = \lambda_{lk}$. Функции $\Delta_{k\nu}(\lambda)$ называются характеристическими функциями краевых задач $L_{k\nu}$. Обратные задачи ставятся следующим образом.

Обратная задача 1. Дана матрица типа Вейля $M(\lambda)$, построить ℓ .

Обратная задача 2. Даны спектры $\{\lambda_{lk\nu}\}_{l \geq 0}$, $k = \overline{1, n-1}$, $\nu = \overline{k, n}$, построить ℓ .

Сформулируем теоремы единственности для рассматриваемых обратных задач. Для этого наряду с ℓ мы рассмотрим оператор $\tilde{\ell}$ того же вида, но с другими коэффициентами $\tilde{p}_j(x)$. Условимся, что если некоторый символ обозначает объект, относящийся к ℓ , то соответствующий символ с волной наверху будет обозначать объект, относящийся к $\tilde{\ell}$.

Теорема 1. Если $M(\lambda) \equiv \tilde{M}(\lambda)$, то $\ell = \tilde{\ell}$. Таким образом, задание матрицы типа Вейля $M(\lambda)$ однозначно определяет дифференциальный оператор ℓ .

Теорема 2. Если $\lambda_{lk\nu} = \tilde{\lambda}_{lk\nu}$, $k = \overline{1, n-1}$, $\nu = \overline{k, n}$, то $\ell = \tilde{\ell}$.

Замечание. Используя полученные выше результаты и метод спектральных отображений [1], можно получить алгоритм решения рассмотренных нелинейных обратных задач, а также необходимые и достаточные условия их разрешимости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 1.1660.2017/4.6) и Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 16-01-00015, 17-51-53180).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Yurko V. A.* Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. // V.A.VSP. Utrecht. 2002. P. 40.
2. *Yurko V. A.* Inverse Spectral Problems for Differential Operators and their Applications. // Gordon and Breach. Amsterdam, 2000. P. 253.
3. *Hald O. H.* Discontinuous inverse eigenvalue problems. Comm. // Pure Appl. Math. 1984. Vol. 37. P. 539–577.
4. *Aktosun T. Klaus M., Mee C.* Inverse wave scattering with discontinuous wave speed // J. Math. Phys. 1995. Vol 36, № 6. P. 2880–2928.
5. *Юрко В. А.* О краевых задачах с условиями разрыва внутри интервала // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 8. С. 1139–1140.
6. *Yurko V. A.* Integral transforms connected with discontinuous boundary value problems. // Integral Transforms and Special Functions. 2000. Vol 10, № 2. P. 141–164.

УДК 539.3

Н. С. Анофрикова, С. Г. Синельникова

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА АСИМПТОТИЧЕСКИ
ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ
О РАСПРОСТРАНЕНИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН
В ВЯЗКОУПРУГИХ СТЕРЖНЯХ**

Поступила в редакцию 21.05.2018 г.

В статье описывается построение приближенного решения для одномерной задачи о распространении нестационарных волн в вязкоупругом стержне с помощью метода асимптотически эквивалентных функций. Производится сравнение данного решения с решением, полученным с помощью метода контурного интегрирования.

Рассматривается тонкий полубесконечный вязкоупругий стержень, выполненный из материала, свойства которого описываются моделью Максвелла. Предполагается, что в начальный момент времени к торцу стержня, находящегося в состоянии покоя, приложена ударная продольная нагрузка. Математическая модель, описывающая процесс распространения одномерной волны в данном случае имеет вид

определяющее уравнение:

$$\frac{\partial^2 \sigma(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \sigma(x, t)}{\partial t^2} + \frac{1}{n} \frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial t}. \quad (1)$$

начальные условия:

$$\sigma(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \sigma(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad (2)$$

граничное условие:

$$\sigma(0, t) = IH(t), \quad (3)$$

где σ — напряжение, u — продольное перемещение, ε — деформация, x — продольная координата, t — время, ρ — плотность материала стержня,

E — мгновенный модуль упругости, n — время релаксации, I — амплитуда напряжения на торце.

Задача (1)–(3) может быть решена с помощью интегрального преобразования Лапласа [1] по переменной времени.

Решение в изображениях имеет вид

$$\overline{\sigma^*}(\xi, s) = \frac{I^*}{s} e^{-s \frac{\sqrt{n^*s+1}}{\sqrt{n^*s}} \xi}, \quad (4)$$

где $\sigma^* = \frac{\sigma}{E}$, $\xi = \frac{x}{L}$, $n^* = \frac{cn}{L}$, $c^2 = \frac{E}{\rho}$, L — характерный размер длины, s — параметр интегрального преобразования.

Наиболее трудным при использовании методов интегральных преобразований является этап нахождения оригинала по известному изображению. В случаях не слишком сложных с аналитической точки зрения изображений обращение может быть произведено с помощью применения формулы Меллина и последующего вычисления интеграла методом контурного интегрирования [2].

Поскольку в большинстве случаев данный метод неприменим в связи со сложностью решения в изображениях, то в основном применяются различные приближенные методы: численные или аналитические.

Из аналитических методов наиболее распространенными являются методы, основанные на представлении изображения в виде рядов по степеням интегрального преобразования Лапласа, допускающих почленное обращение с помощью таблиц интегрального преобразования.

Разложения (4) в ряды по положительным и отрицательным степеням параметра интегрального преобразования Лапласа имеют вид

$$\overline{\sigma^*}(\xi, s) = \frac{I^*}{s} e^{-\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{n^*}} \xi} \left(1 - \frac{\sqrt{n^*}}{2} s^{\frac{3}{2}} \xi + \frac{n^{*\frac{3}{2}}}{8} s^{\frac{5}{2}} \xi + \dots \right) \text{ при } s \rightarrow 0, \quad (5)$$

$$\overline{\sigma^*}(\xi, s) = I^* e^{-\frac{1}{2n^*} \xi} \frac{e^{-s\xi}}{s} \left(1 + \frac{1}{8(n^*)^2 s} \xi + \frac{1}{128(n^*)^4 s^2} \xi^2 \right) \text{ при } s \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Асимптотически главные части решений, полученных почленным обращением (5), (6), задаются выражениями

$$\sigma^*_1(\xi, \tau) = I^* \operatorname{erfc} \left(\frac{\xi}{2\sqrt{n^* \tau}} \right), \quad (7)$$

$$\sigma^*_2(\xi, \tau) = I^* e^{-\frac{1}{2n^*} \xi} \left(1 + \frac{\xi}{8(n^*)^2} (\tau - \xi) + \frac{\xi^2}{256(n^*)^4} (\tau - \xi)^2 \right) \times \quad (8) \\ \times H(\tau - \xi).$$

Численные расчеты показывают, что решения (7) и (8) работают только в области больших и малых значений переменной соответственно.

Построение единого аналитического решения – непростая, но актуальная задача. В настоящей работе для построения единого решения используется метод асимптотически эквивалентных функций [3]. При этом точное решение, получение которого возможно в данном случае, может быть использовано для оценки применимости приближенных решений.

Метод асимптотически эквивалентных функций заключается в замене полученного изображения $\bar{\sigma}^*$ функцией $\bar{\sigma}_0$, допускающей точный переход к оригиналам и отвечающей условиям

$$\bar{\sigma}_0 \sim \bar{\sigma}^* \text{ при } s \rightarrow 0 \text{ и } s \rightarrow \infty, \bar{\sigma}_0' \sim \bar{\sigma}^{*'} \text{ при } s \rightarrow 0. \quad (9)$$

Анализ (7) и (8) позволяет предположить, что асимптотически эквивалентная функция может иметь вид

$$\bar{\sigma}_0(\xi, s) = I^* e^{-\frac{\xi}{2n^*}} \frac{e^{-\xi s} a_0 + a_1 \sqrt{s}}{s b_0 + b_1 \sqrt{s}}, \quad (10)$$

где a_0, a_1, b_0, b_1 – свободные параметры, которые нужно определить из выполнения условий (9).

Раскладывая (10) в ряды по положительным и отрицательным степеням интегрального преобразования Лапласа и удовлетворяя условиям (9), находим, что $a_0 = e^{\frac{\xi}{2n^*}}, b_0 = 1, a_1 = b_1 = \frac{\xi}{\sqrt{n^*}} \frac{1-2n^*}{n^*} \frac{e^{\frac{\xi}{2n^*}}}{1-e^{\frac{\xi}{2n^*}}}$.

С учетом последнего приходим к следующему оригиналу нулевого приближения решения, используя таблицу интегральных преобразований Лапласа и теорему о сдвиге [1] :

$$\sigma_0(\xi, s) = I^* \left(1 - \left(1 - e^{\frac{\xi}{2n^*}} \right) \exp \left(\frac{\tau - \xi}{b_1^2} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{\tau - \xi}}{b_1} \right) \right). \quad (11)$$

Сравнение графиков точного решения с асимптотиками (7), (8), (11) показывает, что асимптотика (11) достаточно хорошо описывает поведение точного решения на всей области изменения переменной времени, в отличие от асимптотик (7) и (8).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М. : Наука, 1971.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М. : Наука, 1977.

3. Слепьян Л. И., Яковлев Ю. С. Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. Л. : Судостроение, 1980.

УДК 519.6,532

П. А. Бодрилов, В. С. Кожанов

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ В ЯЧЕЙКЕ С ДВИЖУЩЕЙСЯ ВЕРХНЕЙ СТЕНКОЙ И С ТВЕРДЫМ ТЕЛОМ ВНУТРИ С ПРИМЕНЕНИЕМ OpenFOAM

Поступила в редакцию 24.05.2018 г.

Рассмотрено ламинарное течение вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости в объёмной ячейке, вызванное поступательным движением ее верхней стенки. Ячейка имеет кубическую форму и содержит внутри себя шар. Представлена качественная картина движения жидкости внутри ячейки.

Задача о течении в ячейке с твердым телом внутри сама по себе не является новой. Разнообразие постановок и подходов к решению велико, например [1,2]. Однако решений с применением пакета OpenFOAM не имеется, что дает возможность провести сравнение с соответствующими результатами, полученными другими методами.

Активное развитие CFD-пакетов, таких как OpenFOAM, тем не менее требует их детального тестирования на базовых модельных задачах. Так, в [3,4] оцениваются возможности OpenFOAM при исследовании течений мелкой воды, в [5,6] – при изучении течений Куэтта и Пуазейля, а в [7] – при решении задачи невязкого обтекания конуса.

Течение вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости внутри кубической ячейки описывается уравнениями неразрывности и количества движения. Верхняя стенка ячейки движется горизонтально с постоянной скоростью, остальные – неподвижны. На стенках каверны выполняются условия непроницаемости и прилипания. Нормальный градиент давления на стенках равен нулю. Внутри ячейки находится шар. На поверхности шара выполняются те же граничные условия, что и на стенках ячейки.

Фоновая сетка внутри куба описана в файле blockMeshDict. Геометрия тела, встроенного в ячейку, описывается с помощью stl-файла. Например, чтобы получить stl-файл, описывающий шар с радиусом 0.05 м, необходимо выполнить команду в программе OpenSCAD:

```
translate([0.03, 0.03, 0]) sphere(r = 0.05, fn = 100);
```

Коэффициент f_n отвечает за гладкость фигуры и называется разрешением.

Геометрия, используемая при построении сетки на встроенном теле, описывается в подразделе `geometry` файла `snappyHexMeshDict`. В частности, геометрия может быть задана посредством `stl`-файлов, которые должны располагаться в папке `triSurface`. Пример описания геометрии приведен ниже (рис. 1–4).

```
sphere.stl
{
    type triSurfaceMesh;
    name sphere;
}
```

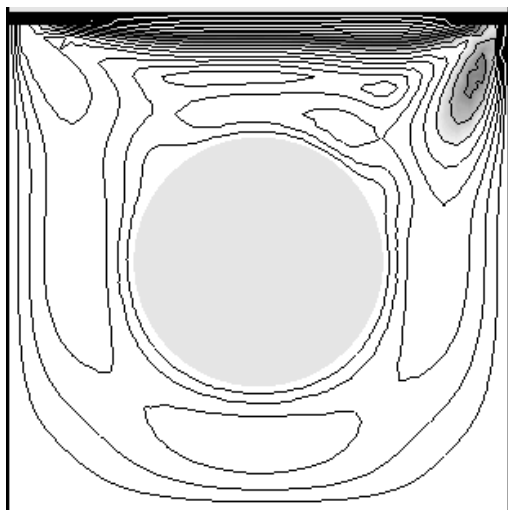


Рис. 1

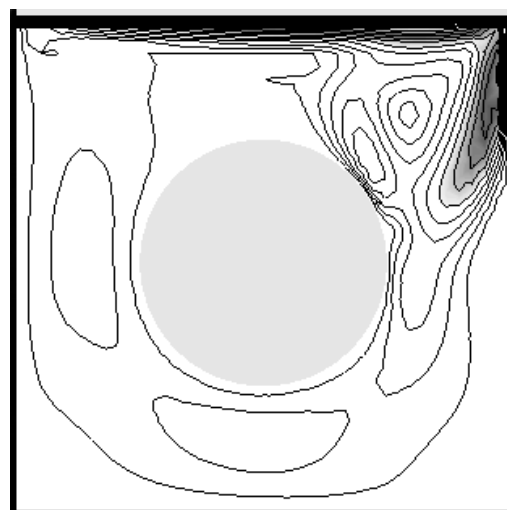


Рис. 2

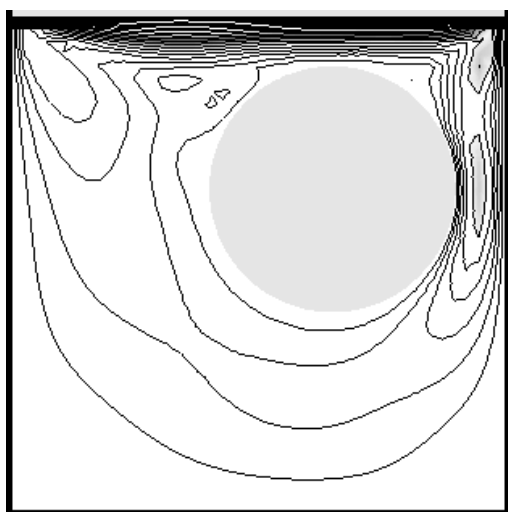


Рис. 3

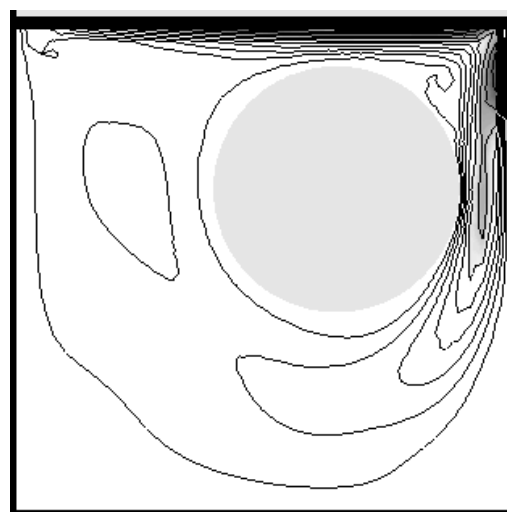


Рис. 4

Так как поток считается ламинарным, то для расчета течения был выбран решатель isoFoam из набора стандартных решателей OpenFOAM.

Расчеты выполнены для кубической ячейки с ребром 0.2 м. Фоновая сетка равномерная размером 10x10x10 ячеек. Рассмотрены два варианта расположения шара в ячейке: в центре и в верхней правой части. Картины течения для числа $Re = 100$ приведены на рис. 1 и 3, а для числа $Re = 1000$ – на рис. 2 и 4.

При увеличении числа Re центральный вихрь смещается в правый верхний угол, и скорость течения жидкости около сферы уменьшается.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Khanafar K., Aithal S.M.* Laminar mixed convection flow and heat transfer characteristics in a lid driven cavity with a circular cylinder // Intern. Journal of Heat and Mass Transfer. 2013. Vol. 66. P. 200–209.

2. *Kareem A.K., Gao S.* Mixed convection heat transfer enhancement in a cubic lid-driven cavity containing a rotating cylinder through the introduction of artificial roughness on the heated wall // Physics of Fluids. 2018. Vol. 30, № 2. P. 025103.

3. *Панкратов И. А.* Применение метода конечных объёмов к расчёту течений мелкой воды // Моделирование. Фундаментальные исследования, теория, методы и средства : материалы 17-й Междунар. науч.-практ. конф. (Новочеркасск, 26-27 сент. 2017 г.). Новочеркасск : Лик, 2017. С. 60–63.

4. *Медведева Л. В., Панкратов И. А.* Расчёт течений мелкой воды методом конечных объёмов // Актуальные направления научных исследований XXI века : теория и практика : сб. науч. тр. по материалам междунар. заоч. науч.-практ. конф. Воронеж : ВГЛТУ, 2017. Т. 5, № 7-1. С. 162–165.

5. *Панкратов И. А.* Математическое моделирование некоторых нестационарных течений жидкости средствами пакета OpenFOAM // Моделирование. Фундаментальные исследования, теория, методы и средства : материалы 17-й Междунар. науч.-практ. конф. (Новочеркасск, 26-27 сент. 2017 г.). Новочеркасск : Лик, 2017. С. 63–67.

6. *Панкратов И. А.* Об аппроксимации простейших течений несжимаемой жидкости средствами OpenFOAM // Математическое и компьютерное моделирование : сб. материалов V междунар. науч. конф., посвящ. памяти Р. Л. Долганова (Омск, 1 дек. 2017 г.). Омск : Изд-во ОмГУ, 2017. С. 65–67.

7. *Бондарев А.Е., Кузвинников А.Е.* Сравнительный анализ точности солверов пакета OpenFOAM для задачи невязкого обтекания конуса. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. М., 2017. № 12. С. 1–16.

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ИЗГИБА КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ТОНКИХ ПЛАСТИН И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

Поступила в редакцию 30.05.2018 г.

В статье проводилось решение задачи изгиба для композиции, состоящей из цилиндрической оболочки и пластины. Поверхность задавалась непрерывной функцией, построенной с помощью функции Хевисайда. Уравнения выводятся на основе вариационных методов из основных уравнений теории пластин и оболочек. В ходе решения задачи были получены сингулярные коэффициенты таких уравнений для композиции, состоящей из цилиндрической оболочки и пластины.

В пределах классических гипотез Кирхгофа–Лява рассмотрим композицию из пологой цилиндрической оболочки и пластины, гладко сопряженных между собой и отнесенных к криволинейным координатам, как это указано на рис. 1.

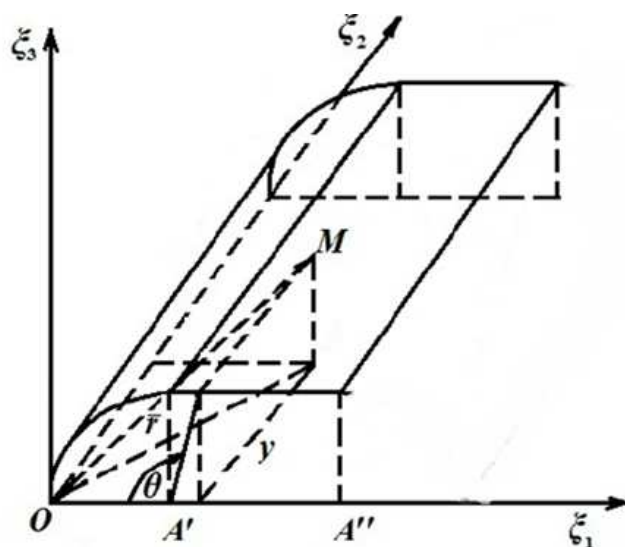


Рис. 1. Исследуемая композиция цилиндр–пластина

Для рассматриваемой композиции определим вектор положения любой точки срединной поверхности рассматриваемой конструкции в следующем виде:

$$\begin{aligned} \vec{r}(\theta, \phi) = & R \left\langle (1 - \cos\theta) + \left[\left(1 - \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - (1 - \cos\theta)\right) H(\theta - \theta_1) \right] \right\rangle \vec{\xi}_1 + \\ & + y \vec{\xi}_2 + R \left\langle \sin\theta + [1 - \sin\theta] H(\theta - \theta_1) \right\rangle \vec{\xi}_3, \quad \theta_1 = \frac{\pi}{2}. \quad (1) \end{aligned}$$

Уравнение гладкой срединной поверхности конструкции (1) позволяет рассматривать композицию как пологую оболочку переменной кривизны k_1 , которая в силу выбора функции $\vec{r}(\theta, \phi)$ является кусочно-непрерывной функцией [1].

На основании обобщенного вектора положения любой точки срединной поверхности композиции из оболочек вращения методами теории поверхностей определяются обобщенные *параметры Ламе и главные кривизны*

$$\begin{aligned}\sqrt{G_{11}} &= R\langle \sin \theta + [\frac{1}{\sin^2 \theta} - \sin \theta]H(\theta - \theta_1) \rangle; \\ \sqrt{G_{22}} &= 0; \quad k_1 = -\frac{1}{R}; \quad k_2 = 0.\end{aligned}\quad (2)$$

Проверка выполнения условий Кодацци–Гаусса приведена в работе [2], что позволяет использовать известные формулы теории оболочек. Под гладким сопряжением в данном контексте понимаем случай равенства нулю коэффициентов и их первых производных при функции Хевисайда, в точках где они определены, но ограничены.

На основании вышеизложенного функция Лагранжа указанной конструкции, нагретой до температуры θ с линейно изменяющимся по толщине полем температуры, с учетом гипотез Франца-Неймана и осевой симметрии оболочечной конструкции запишется в виде

$$I = \frac{1}{2} \iiint \sigma^{ij} e_{ij} \sqrt{G_{11}G_{22}} (1 + \frac{z}{R_1})(1 + \frac{z}{R_2}) d\alpha^1 d\alpha^2 dz. \quad (3)$$

Уравнения равновесия несвязной термоупругости получим из дифференциального вариационного принципа Лагранжа. Вычисляя частные вариации $\delta_{(u)} \tilde{I}$ $\delta_{(w)} \tilde{I}$ с учетом осевой симметрии конструкции и приравнивая их к нулю, получим систему двух неоднородных дифференциальных уравнений относительно перемещений u и w :

$$\begin{aligned}a_{12}u_{,11} + b_{12}w_{,11} + a_{11}u_{,1} + b_{11}w_{,1} + a_{10}u + b_{10}w &= d_{11}(\alpha\theta_0)_{,1} + f_{10}\frac{\alpha\theta_1}{h}; \\ a_{24}w_{,1111} + a_{23}w_{,111} + a_{22}w_{,11} + a_{21}w_{,1} + a_{20}w + b_2u_{,11} + b_{21}u_{,1} + b_{20}u &= \\ = d + d_{20}\alpha\theta_0 + d_{21}(\alpha\theta_0)_{,1} + d_{22}(\alpha\theta_0)_{,11} + f_{20}\frac{\alpha\theta_1}{h} + f_{21}\frac{\alpha\theta_1}{h,1} + f_{22}\frac{\alpha\theta_1}{h,11}.\end{aligned}\quad (4)$$

Коэффициенты в случае композиции «цилиндр–пластина» зависят от параметров Ламе и главных кривизн. Рассмотрим следующие алгебра-

ические и дифференциальные комбинации этих величин, используемые для нахождения коэффициентов в формуле (4) :

$$\sqrt{\frac{G_{11}}{G_{22}}} = \frac{\sin^2 \theta}{R(\sin^3 \theta + [1 - \sin^3 \theta]H(\theta - \theta_1))};$$

$$\left(\sqrt{\frac{G_{11}}{G_{22}}}\right)_{,1} = \frac{\sin 2\theta}{R(\sin^3 \theta + [1 - \sin^3 \theta]H(\theta - \theta_1))} - \frac{3 \sin^4 \theta (1 - H(\theta - \theta_1))}{R(\sin^6 \theta + [1 - \sin^6 \theta]H(\theta - \theta_1))};$$

$$(\sqrt{G_{22}})_{,1} = k_{2,1} = 0; \quad k_2^2 = \frac{1 - H(\theta - \theta_1)}{R^2};$$

$$\frac{\sqrt{G_{22}}}{\sqrt{G_{11}^3}} = \frac{\sin^6 \theta}{R^3(\sin^9 \theta + [1 - \sin^9 \theta]H(\theta - \theta_1))};$$

$$\left(\frac{\sqrt{G_{22}}}{\sqrt{G_{11}^3}}\right)_{,1} = \frac{2 \sin^8 \theta \cos \theta (H(\theta - \theta_1) - 3 \sin^9 \theta)}{R^3(\sin^9 \theta + [1 - \sin^9 \theta]H(\theta - \theta_1))};$$

$$\left(\frac{\sqrt{G_{22}(G_{11})_{,1}}}{G_{11}^2}\right)_{,1} = \frac{(1 - H(\theta - \theta_1))[-\sin^{21} \theta - 12 \sin^{19} \theta \cos^2 \theta]}{\sin^{24} \theta + [1 - \sin^{24} \theta]H(\theta - \theta_1)} + \frac{8 \sin^{19} \theta \cos \theta + 2 \sin^{19} \theta - 10 \sin^{16} \theta \cos \theta}{\sin^{24} \theta + [1 - \sin^{24} \theta]H(\theta - \theta_1)};$$

$$\frac{G_{22} \sqrt{(G_{11})_{,1}}}{G_{11}^2} k_1 = \frac{\sin^4 \theta \cos \theta}{R(\sin^6 \theta + [1 - \sin^6 \theta]H(\theta - \theta_1))}.$$

Таким образом, были изучены основные уравнения осесимметричной термоупругости из оболочек вращения с термочувствительной толщиной в компонентах поля перемещений, полученные при помощи вариационного метода, и на примере композиции из двух элементов цилиндр – пластина определены сингулярные коэффициенты в уравнениях

теплопроводности и термоупругости.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Белосточный Г. Н., Рассудов В. М. Композиции из пологих цилиндрических оболочек и пластин со скачкообразно изменяющейся толщиной в двух направлениях/ Саратов. политехн. ин-т. Саратов, 1984 г. 4 с. Деп. в ВИНТИ 24.10.84, № 6881–84.
2. Мылъцина О. А. Термоупругость геометрически нерегулярных пластин и оболочек под действием быстропеременных температурных и силовых воздействий. Саратов. : Изд-во Саратов. ун-та, 2017. 198 с.

УДК 519.6,532

Ю. А. Блинков, И. А. Панкратов, К. Р. Симонова

РАСЧЕТ ОБТЕКАНИЯ ШАРА С ПОМОЩЬЮ СТАНДАРТНЫХ РЕШАТЕЛЕЙ OpenFOAM

Поступила в редакцию 29.05.2018 г.

1. Постановка задачи

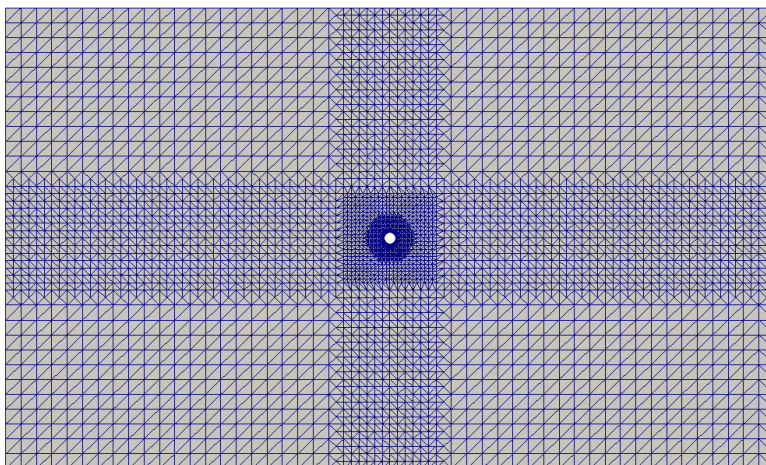
Задача обтекания неподвижного твердого тела формулируется в рамках модели вязкой несжимаемой жидкости. Такой процесс описывается нестационарной системой уравнений Навье-Стокса. В настоящей работе в отличие от [1, 2] для расчёта параметров течения вязкой несжимаемой жидкости применен пакет OpenFOAM, в котором реализован метод конечных объёмов.

Необходимо произвести численное моделирование обтекания шара потоком вязкой несжимаемой жидкости для разных чисел Рейнольдса методом конечных объёмов. Полученные коэффициенты лобового сопротивления шара нужно сравнить с экспериментальными значениями. Отметим, что ранее с помощью пакета OpenFOAM в работе [3] было проведено математическое моделирование одномерных течений несжимаемой жидкости. Установлено, что результаты численных экспериментов согласуются с известными точными решениями для течений Куэтта и Пуазейля.

В качестве расчетной области был выбран прямоугольный параллелепипед, длины ребер которого равны 1 м, 0.6 м и 0.4 м соответственно. Центр шара, диаметр которого равен 1.5 см, располагается в начале системы координат и совмещается с центром параллелепипеда.

Фоновая сетка (домен), состоящая из $50 \times 31 \times 21$ ячеек создается с помощью утилиты blockMesh. Для построения более мелкой сетки в области, окружающей обтекаемое тело, была использована утилита

snappyHexMesh. Геометрия обтекаемого тела хранится в STL-файле. Для более тонкой настройки сетки задается несколько ограничивающих обтекаемое тело регионов. Для каждого региона задаются параметры построения сетки, отличные от параметров для всей поверхности. Построенная сетка показана на рисунке.



Расчетная область для шара

Необходимо отметить, что в ходе ряда вычислительных экспериментов по определению полного сопротивления шара в зависимости от числа Рейнольдса были сделаны следующие выводы относительно параметров сетки: размер домена, позволяющий получить адекватные результаты, должен быть не менее чем в 5 раз больше радиуса шара в каждом из направлений; при номинальном размере ячейки домена $100 \times 100 \times 100$ мм оптимальный уровень улучшения сетки вокруг тела с помощью утилиты snappyHexMesh равен 3. Большее измельчение сетки приводит к значительному увеличению расчетного времени, при этом точность вычислений меняется незначительно.

Граничные условия формулируются следующим образом. На поверхности шара для скорости ставится условие прилипания, для давления – равенство нулю нормального градиента. На входе в расчетную область задается равномерный горизонтальный поток с фиксированной скоростью V_x м/с на достаточно большом удалении от тела. На боковых границах расчетной области формулируется условие проскальзывания. Такое условие предполагает, что на боковых границах поток уже является практически невозмущенным. На выходе из расчетной области ставятся «мягкие» граничные условия, соответствующие равенству нулю нормального градиента скорости. Для давления условие равенства нулю нормального градиента формулируется по всей границе расчетной обла-

сти, за исключением выхода из расчетной области, где задается фиксированное значение $p = 0 \text{ м}^2/\text{с}^2$.

2. Сравнение работы решателей

Сравнение работы решателей производилось для задачи обтекания шара ламинарным потоком вязкой несжимаемой жидкости. Для моделирования ламинарного режима течения число Рейнольдса выбиралось исходя из условия $Re < 400$. Для решения систем линейных алгебраических уравнений использовались солверы GAMG и PBiCGStab – итерационные солверы, использующие многосеточный метод и стабилизированный метод бисопряжённых градиентов. В качестве метода сглаживания для солвера GAMG был выбран метод GaussSeidel. В качестве предобуславливателя для солвера PBiCGStab был выбран DILU – предобуславливатель, основанный на упрощенной неполной LU факторизации.

Данные экспериментов по обтеканию шара, полученные другими авторами, сведены в табл. 1.

Таблица 1

Коэффициент лобового сопротивления шара (другие авторы)

Re	Clift R. [4]	Tabata M. [5]	Shirayama S. [6]	Малюга В. С. [7]
100	1.096	1.09	1.104	1.092
200	0.772	0.772	0.784	0.775

В табл. 2 приведены значения коэффициента сопротивления для шара, полученные в данной работе.

Таблица 2

Коэффициент лобового сопротивления шара (OpenFOAM)

Re	simpleFoam	pisoFoam	pimpleFoam	icoFoam
100	1.0907	1.0907	1.089	1.1025
200	0.7828	0.7828	0.7829	0.842

Следовательно, можно сделать вывод о том, что для выбранного диапазона чисел Рейнольдса $100 \leq Re \leq 200$ данные численных и натуральных экспериментов хорошо согласуются между собой. Решатели simpleFoam, pisoFoam, pimpleFoam дают совпадение значений коэффициента лобового сопротивления, по крайней мере, до второго знака после запятой включительно при достаточно быстрой сходимости к решению. Но они имеют различия в скорости работы. Если для simpleFoam время поиска решения составляло порядка 10 минут, то для pisoFoam и pimpleFoam от 10 до 20 минут. Решатель icoFoam показал худший результат как по точности вычислений, так

и по скорости сходимости и по скорости работы (от 1.5 часов и выше).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Панкратов И. А.* Численная аппроксимация линий тока методом Галёркина // *Juvenis scientia*. 2016. № 2. Р. 4–6.
2. *Панкратов И. А.* Изчисляване на линията на тока по време на циркуляция, предизвикана от ветрове // *Парадигма*. 2016. Т. 1, № 1. С. 115–119.
3. *Панкратов И. А.* Математическое моделирование некоторых нестационарных течений жидкости средствами пакета OpenFOAM // *Моделирование. Фундаментальные исследования, теория, методы и средства : материалы 17-й Междунар. молодеж. науч.-практ. конф.* Новочеркасск : Лик, 2017. С. 63–67.
4. *Clift R., Grace J. R., Weber M. E.* Bubbles, Drops and Particles. N. Y. : Academic Press, 1978. 380 p.
5. *Tabata M., Itakura K. A.* Precise computation of drag coefficients of a sphere // *Intern. J. Comput. Fluid Dynam.* 1998. № 9. Р. 303–311.
6. *Shirayama S.* Flow past a sphere: Topological transitions of the vorticity field // *AIAA Journal*. 1992. Vol. 30, № 2. Р. 349–358.
7. *Малюга В. С.* Численное моделирование обтекания сферы потоком вязкой несжимаемой жидкости // *Прикладна гідромеханіка*. 2013. № 3. С. 43–67.

УДК 532.526.2

В. С. Кожанов, А. С. Мыльцина

ТЕМПЕРАТУРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ ВБЛИЗИ ПЕРЕДНЕЙ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ЗАТУПЛЕННОГО ТЕЛА С ПРОНИЦАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Поступила в редакцию 24.05.2018 г.

В работе в автомодельной постановке рассмотрена задача о течении в пограничном слое, возникающем вблизи поверхности затупленного пористого тела при его обтекании потоком степенной неньютоновской жидкости с нелинейной теплопроводностью. Учтено действие вязкой диссипации. Исследовано влияние параметра, характеризующего вдув или всасывание жидкости через поверхность тела.

Наиболее близкой к данной работе по охвату учитываемых эффектов является работа [1], в которой рассматривается обтекание плоской пористой пластины. В большинстве других исследований задача поставлена менее широко (см., например, обзор источников в [1]).

1. Пусть на затупленное пористое тело набегают поток вязкой несжимаемой степенной неньютоновской жидкости с нелинейной теплопроводностью. Пусть $U_\infty(x) = ax$ ($a = \text{const}$) – скорость потока, а $T_\infty = \text{const}$ –

температура потока. Пусть на поверхности тела поддерживается переменная температура $T_w(x) = T_\infty + a^2 x^2 / c$, c – теплоемкость. Через пронизываемую поверхность тела вдувается или всасывается жидкость со скоростью $v_w(x) = Ax^\alpha$ ($A = \text{const}$, $\alpha = \text{const}$). Вдуваемая жидкость обладает теми же параметрами, что и параметры набегающего потока. Вследствие действия сил вязкости вблизи поверхности тела образуется пограничный слой.

2. Чтобы описать установившееся автомодельное течение жидкости в пограничном слое вблизи передней критической точки затупленного тела с учётом тепла, которое выделяется вследствие работы сил вязкости, необходимо решить краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) :

$$|\varphi''|^{n-1} \varphi''' + 2n\varphi\varphi''/(n+1) - (\varphi')^2 + 1 = 0, \quad (1)$$

$$|\vartheta'|^{\frac{2(n-1)}{n+3}} \vartheta'' + \text{Pr}^* \left[2n\varphi\vartheta'/(n+1) - 2\vartheta\varphi' + k|\varphi''|^{n-1} (\varphi'')^2/n \right] = 0, \quad (2)$$

с граничными условиями на поверхности тела при $\eta = 0$

$$\varphi(0) = C, \quad \varphi'(0) = 0, \quad \varphi''(0) = a_1, \quad \vartheta(0) = 1, \quad \vartheta'(0) = a_2 \quad (3)$$

и вдали от тела при $\eta \rightarrow +\infty$

$$\varphi'|_{\eta \rightarrow +\infty} \rightarrow 1, \quad \vartheta|_{\eta \rightarrow +\infty} \rightarrow 0. \quad (4)$$

Здесь $\varphi = \varphi(\eta)$, $\vartheta = \vartheta(\eta)$ – автомодельные представители функции тока ψ и температуры T соответственно, η – независимая автомодельная переменная, n – показатель степени в реологической модели степенной неньютоновской жидкости Оствальда, Pr^* – обобщенное число Прандтля, k – переключатель ($k = 1$ при учете вязкой диссипации, в противном случае $k = 0$). Параметр C характеризует скорость вдува ($C < 0$) или всасывания ($C > 0$) жидкости через поверхность тела. Через a_1 , a_2 обозначены неизвестные начальные условия. Штрихами обозначены производные соответствующего порядка по независимой переменной.

Размерные и безразмерные автомодельные величины связаны соотношениями

$$u = ax\varphi', \quad v = \left(\frac{\mu^* na^{2n-1}}{\rho x^{1-n}} \right)^{\frac{1}{n+1}} \cdot f, \quad f = \frac{(n-1)\eta\varphi' - 2n\varphi}{1+n},$$

$$T = T_\infty + \frac{a^2 x^2}{c} \vartheta, \quad \eta = y \left(\frac{\mu^* na^{n-2}}{\rho x^{1-n}} \right)^{-\frac{1}{n+1}},$$

где x, y – координаты, u и v – продольная и поперечная составляющие скорости частиц жидкости в системе координат Oxy , связанной с поверхностью тела, ρ – плотность, μ^* – реологический параметр, характеризующий степенную неньютоновскую жидкость.

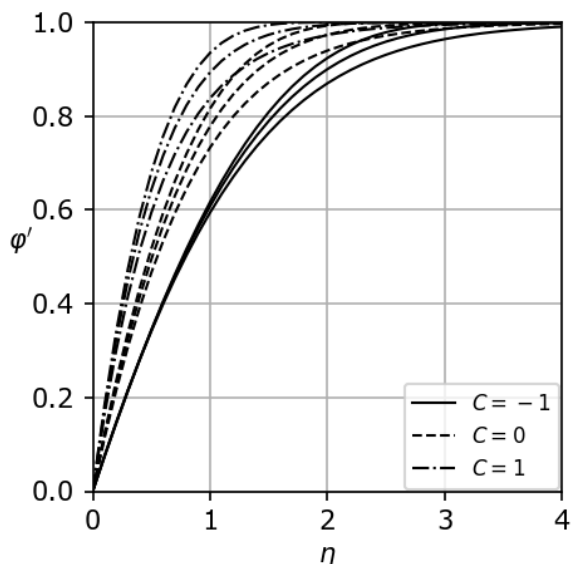


Рис. 1

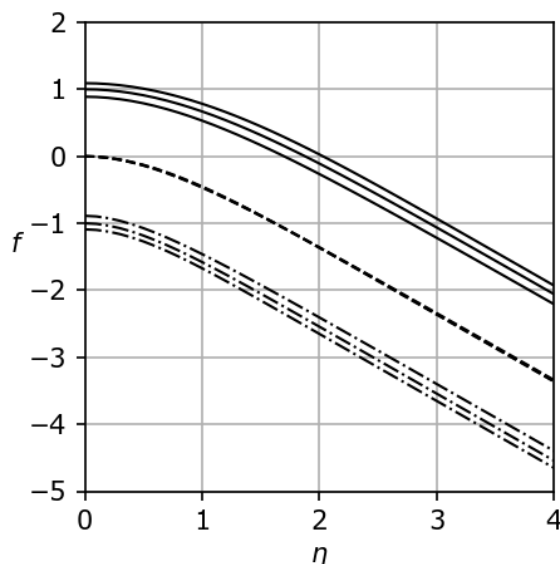


Рис. 2

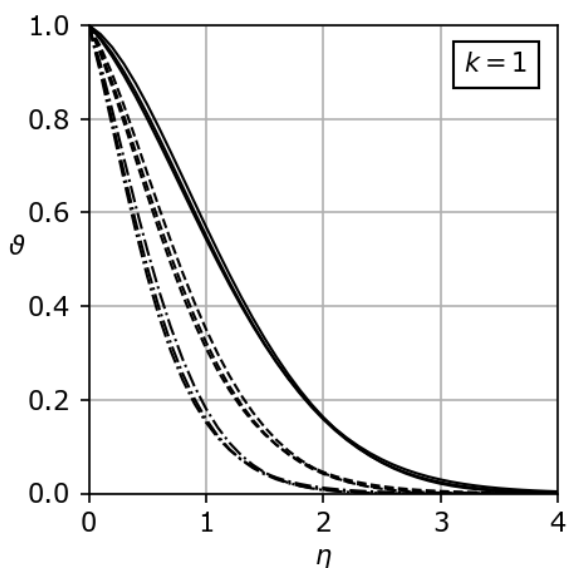


Рис. 3

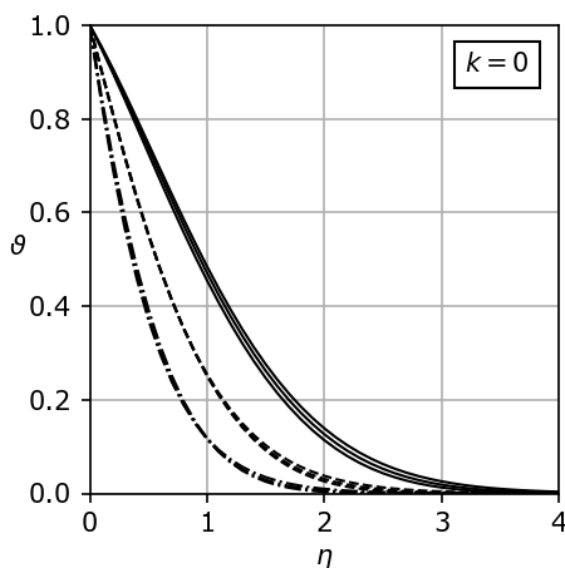


Рис. 4

3. Как и в [2], для численного решения краевой задачи (1)–(4) был применён метод пристрелки, представляющий собой комбинацию метода Ньютона и метода Рунге–Кутты 4-го порядка. Решение задачи демонстрируется для $Pr^* = 1$. На рис. 1 и 2 показаны распределения безразмерных представителей продольных и поперечных составляющих скоростей соответственно при различных значениях параметров n и C . На рис. 3

и 4 представлены изменения безразмерного представителя температуры при различных значениях параметров n и C .

Параметр C заметно влияет на толщины динамического и температурного слоев: при вдуве ($C < 0$) толщина увеличивается, при всасывании ($C > 0$) – уменьшается. От степени n толщины слоев зависят слабо: при уменьшении n они незначительно увеличиваются. Действие вязкой диссипации влияет на распределение температуры внутри пограничного слоя, а не на его толщину. Качественно результаты совпадают с [1].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Махмуд М. А. А., Меджсаед А. М.* Эффекты вязкой диссипации и тепловыделения (поглощения) в тепловом пограничном слое неньютоновской жидкости на движущейся проницаемой плоской пластине // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 5. С. 107–114.
2. *Кожанов В. С., Устужкин Е. С.* Применение метода преобразования к решению автомодельной задачи о слое смешения // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2016. Вып. 18. С. 107–110.

УДК 531.38:629

В. С. Кожанов, Г. Д. Севостьянов

РАСЧЕТ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ РЕЖИМОВ ВРАЩЕНИЯ СВОБОДНОГО ТЕЛА

Поступила в редакцию 24.05.2018 г.

Даны расчеты определения наклона летательного аппарата (ЛА) при движении в вертикальной плоскости для экстремальных случаев (петля Нестерова, «кобра» Пугачева) на основе новой математической модели авторов (3-го порядка) в кинематике тела с неподвижной точкой. Кинематические линейные уравнения ЛА (аналогичные линейным уравнениям Эйлера) дают затруднения для этих режимов, другие модели имеют более высокий порядок.

В [1] нелинейные кинематические уравнения Эйлера приведены к уравнению второго порядка для угла нутации, конечному уравнению для угла собственного вращения и квадратуре для угла прецессии. В [2] такое упрощение сделано для вращения ЛА и качки корабля. В [3,4] приведены более ранние системы уравнений кинематики тела с неподвижной точкой.

Кинематические уравнения вращения ЛА, разрешенные относительно производных, имеют вид [5, с. 24]:

$$\begin{aligned}\dot{\vartheta} &= \omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma, & \dot{\Psi} &= \frac{1}{\cos \vartheta} (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma), \\ \dot{\gamma} &= \omega_x - \operatorname{tg} \vartheta \cdot (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma),\end{aligned}\quad (1)$$

где ([5], с. 17) ϑ – угол тангажа, Ψ – угол рыскания, γ – угол крена; $\bar{\omega}(t)$ ($\omega_x, \omega_y, \omega_z$) – известная мгновенная угловая скорость ЛА и её координаты на оси связанной системы $X_k Y_k Z_k$. Основная система $X_g Y_g Z_g$.

В [6] получена альтернативная (1) система 3-го порядка для функций $\vartheta, \mu, \gamma, \Psi$:

$$\begin{aligned}\dot{\vartheta} &= \Omega \sin \mu, & \dot{\mu} &= -\Omega (\operatorname{tg} \vartheta \cos \mu - \sigma), \\ \gamma &= -\chi + \mu + \frac{\pi}{2}, & \dot{\Psi} &= \Omega \frac{\cos \mu}{\cos \vartheta},\end{aligned}\quad (2)$$

где Ω, σ, χ – известные функции:

$$\Omega = \sqrt{\omega_y^2 + \omega_z^2}, \quad \sigma = \frac{\omega_x}{\Omega} - \frac{\dot{\omega}_y \omega_z - \omega_y \dot{\omega}_z}{\Omega^3}, \quad \chi = -\operatorname{arctg} \frac{\omega_y}{\omega_z}. \quad (3)$$

Два первых уравнения (для ϑ и μ) можно решать отдельно. Начальные условия для (1):

$$t = t_0 : \quad \vartheta = \vartheta_0, \quad \gamma = \gamma_0, \quad \Psi = \Psi_0$$

переходят в следующие:

$$t = t_0 : \quad \vartheta = \vartheta_0, \quad \mu_0 = \arcsin \frac{\omega_{y0} \sin \gamma_0 + \omega_{z0} \cos \gamma_0}{\Omega_0}, \quad \gamma = \gamma_0, \quad \Psi = \Psi_0.$$

Для функции $s(\tau) = \sin \vartheta$ имеем [2] уравнение 2-го порядка:

$$s^2 + s'^2 + \left(\frac{s'' + s}{\sigma} \right)^2 = 1, \quad (4)$$

где

$$\tau = \int_{t_0}^t \Omega(t) dt, \quad s' = \frac{ds}{d\tau} = \frac{\dot{s}}{\Omega},$$

τ – интегральное время.

При дифференцировании (4) распадается на два линейных уравнения.

Уравнение (4) имеет бесконечный класс частных аналитических решений (задав $s(\tau)$, определяем $\sigma(\tau)$). При $\sigma = 0$ для s имеем уравнение $s'' + s = 0$, тогда

$$\vartheta = \pm \int_{t_0}^t \Omega t dt + \vartheta_0, \quad \mu = \pm \frac{\pi}{2}. \quad (5)$$

При полёте ЛА в вертикальной плоскости $\sigma \equiv 0$ ($\omega_x = \omega_y = 0$, $\omega_z = \omega_z(t)$, $\gamma = 0, \pi$, $\Psi = \Psi_0 \pm \pi$). Тогда $\dot{\vartheta} = \omega_z(t)$.

На рис. 1–2 представлены расчёты углов вращения ЛА при некоторых манёврах в вертикальной плоскости. На рис. 1 демонстрируется изменение углов при выполнении ЛА петли Нестерова с постоянной угловой скоростью $\omega_z = \pi/30$. На рис. 2 показано изменение углов при выполнении ЛА начальной стадии «кобры» Пугачева, причем угол тангажа изменяется соответственно

$$\omega_z(t) = ae^{-b(t-t_0)}$$

при $a = 0.2$, $b = 0.1146$.

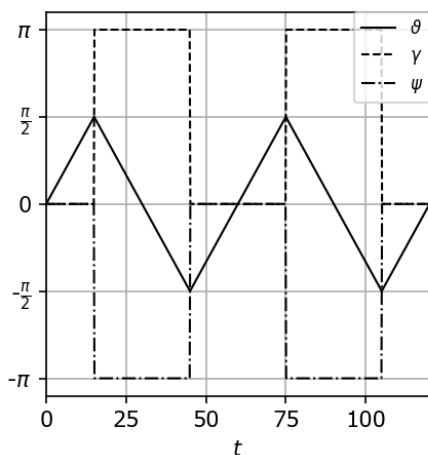


Рис. 1

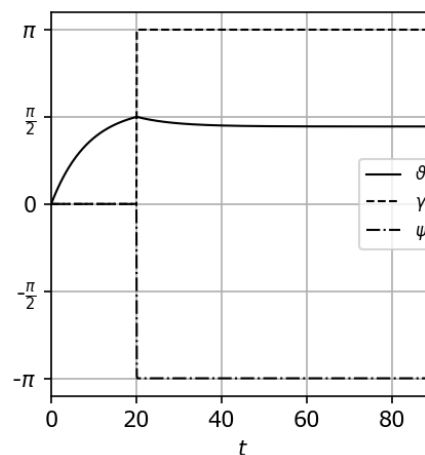


Рис. 2

Результаты расчетов совпадают с соответствующими результатами, полученными при использовании классической модели (1) на основе самолетных углов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Севостьянов Г. Д. О линейности кинематической задачи Дарбу для тела с неподвижной точкой // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 195–198.
2. Севостьянов Г. Д. К кинематике тела с неподвижной точкой // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2009. Вып. 11. С. 141–144.
3. Лурье А. И. Аналитическая механика. М. : Физматгиз, 1961. 824 с.
4. Кузнецов Е. Б. Об одном подходе к интегрированию кинематических уравнений Эйлера // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 1998. Т. 38, № 11. С. 1806–1813.
5. Аэромеханика самолёта: Динамика полёта : учебник для авиац. вузов / А. Ф. Бочкарёв, В. В. Андреевский, В. М. Белоконов [и др.]; под ред. А. Ф. Бочкарёва и В. В. Андреевского. 2-е изд., перераб. и доп. М. : Машиностроение, 1985. 360 с.
6. Кожанов В. С., Севостьянов Г. Д. Новая математическая модель определения наклона при вращении свободного тела // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2017. Вып. 19. С. 121–125.

Д. В. Кондратов, А. Ю. Ребрина,
О. В. Елистратова, Е. В. Попова

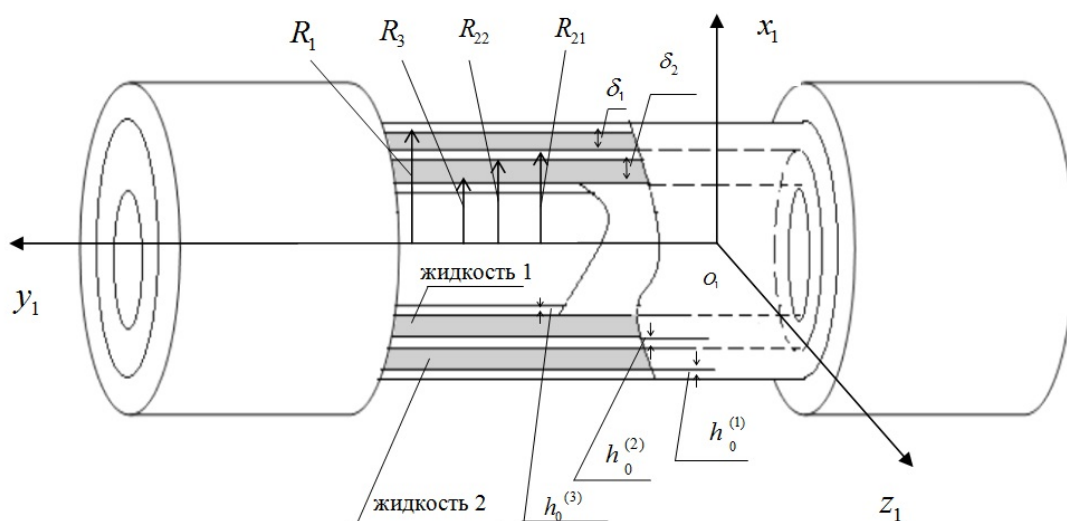
ДИНАМИКА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТРЕХ СООСНЫХ ОБОЛОЧЕК, СВОБОДНО ОПЕРТЫХ НА КОНЦАХ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С ДВУМЯ СЛОЯМИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В УСЛОВИЯХ ВИБРАЦИИ

Поступила в редакцию 30.05.2018 г.

Машиностроение – ведущая отрасль мировой промышленности, занимает первое место среди всех отраслей по числу занятых и по стоимости продукции. Тонкостенные конструкции, взаимодействующие с вязкой несжимаемой жидкостью, занимают значимые позиции в современной высокотехнологичной машинотехнической продукции, которая используется как в ракетно-космической отрасли, так и в железнодорожном транспорте, сельхозмашиностроении, топливно-энергетическом комплексе и в автомобиле-, двигателе- и агрегатостроении [1–7]. Примерами таких механических систем могут являться телескопические системы, плунжерные пары, системы подачи топлива и многие другие. Так с их помощью решается множество проблем: нужная прочность при уменьшении веса и габаритов деталей, снижение и выравнивание динамических воздействий и уровня вибраций, уменьшение трения и изнашивания, охлаждения. Таким образом, уже на начальном этапе необходимо проводить оценку поведения совместного взаимодействия упругости тонкостенных элементов конструкций и вязкой несжимаемой жидкостью. Решение задач взаимодействия вязкой жидкости с упругими элементами конструкции является достаточно трудоемкой задачей, так как необходимо не только решать уравнения гидродинамики совместно с уравнениями упругости, но и учитывать инерцию движения жидкости, внешние вибрации и многое другое. В данной работе предложен подход для решения такой сложной задачи, как взаимодействие трех соосных цилиндрических оболочек с сдвливаемыми слоями вязкой несжимаемой жидкости.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из трех соосных упругих цилиндрических оболочек конечной длины, свободно опертых на концах (рисунок). Между оболочками находятся вязкие несжимаемые жидкости. Радиус внутренней оболочки значительно больше ширины каждого цилиндрического зазора между оболочками. Система является термостабилизированной. На систему действует переносная сила виброускорения.

Математическая модель указанной механической системы представляет собой связанную систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных Навье–Стокса и уравнение неразрывности для описания движение каждой вязкой несжимаемой жидкости, уравнений в частных производных для описания динамики каждой из трех упругих соосных цилиндрических оболочек, основанных на гипотезах Кирхгофа–Лява, и соответствующих граничных условий для жидкостей и оболочек.



Механическая система

Для решения задачи гидроупругости будем решать методом возмущений [2,4–7]. В качестве малых параметров задачи выбираются относительные прогибы каждого из трех оболочек и относительные размеры слоев жидкости. Применение методов возмущений позволяет линеаризовать уравнения гидродинамики. Для решения получившейся линейной задачи определяется частное решение неоднородных линейных уравнений в виде гармонических функций по времени с коэффициентами, зависящими от координат.

Линеаризованные уравнения гидродинамики решаются в предположении гармонического закона вибрации и неизвестности выражений для перемещений упругих оболочек, поэтому решение представляется в интегральном виде. Для решения уравнений динамики оболочек применяется метод Бубнова–Галеркина. В качестве вида выражений для упругих перемещений оболочек выбираются тригонометрические ряды с коэффициентами, зависящими от продольной координаты. В результате решения уравнений динамики упругих оболочек получим выражения для упругих перемещений оболочек, в том числе и выражения для прогибов оболочек.

Из прогибов оболочек находим распределенные амплитудно-частотные характеристики прогибов оболочек, которые позволят исследовать степень на них влияния вибрации и размеров механической системы.

Таким образом, предложен метод исследования гидроупругости трех соосных цилиндрических оболочек со свободным опиранием на концах при наличии внешнего источника вибрации, что позволит найти нужную прочность при уменьшении веса и габаритов деталей, снизить динамическое воздействие и уровень вибрации, трения и изнашивания.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 16-01-00175-а и 18-01-00127-а) и гранта Президента РФ (МД-756.2018.8.).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Могилевич Л. И., Попова А. А., Попов В. С.* Динамика взаимодействия упругой цилиндрической оболочки с ламинарным потоком жидкости внутри нее применительно к трубопроводному транспорту // Наука и техника транспорта. 2007. № 2. С. 64–72
2. *Кондратов Д. В., Могилевич Л. И.* Математическое моделирование процессов взаимодействия двух цилиндрических оболочек со слоем жидкости между ними при отсутствии торцевого истечения в условия вибрации // Вестн. Саратов. гос. техн. ун-та. 2007. Т. 3, № 2. С. 15
3. *Баица Т. М.* Машиностроительная гидравлика. М. : Машгиз, 1963. 696 с.
4. *Kondratov D.V., Kondratova J.N., Mogilevich L.I., Rabinsky L.N., Kuznetsova E.L.* Mathematical model of elastic ribbed shell dynamics interaction with viscous liquid pulsating layer // Applied Mathematical Sciences. 2015. Vol. 9, № 69–72. P. 3525–3531.
5. *Кондратов Д. В., Кондратова Ю. Н., Могилевич Л. И., Плаксина И. В.* Гидроупругость трубы кольцевого профиля при воздействии вибрации при различных ее закреплениях // Вестн. Саратов. гос. техн. ун-та. 2011. Т. 4, № 1 (59). С. 29–37.
6. *Елистратова О. В., Кондратов Д. В.* Моделирование динамики трех упругих соосных оболочек свободно опертых на концах, взаимодействующих с двумя пульсирующими слоями жидкости, находящихся между ними при пульсации давления // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2016. № 1. С. 11–15.
7. *Кондратов Д. В.* Гидроупругость силового цилиндра с полым плунжером при свободном истечении жидкости // Аграрный научный журн. 2008. № 1. С. 38–43.

А. Д. Лунёва, Н. С. Анофрикова

**АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ
ДВУМЕРНОЙ БЕЗМОМЕНТНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ
В НАСЛЕДСТВЕННО-УПРУГОЙ ОБОЛОЧКЕ
ПРИ УДАРНОМ ПРОДОЛЬНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ
НА ЕЁ ТОРЕЦ**

Поступила в редакцию 21.05.2018 г.

В статье методом асимптотического интегрирования выводятся двумерные уравнения для безмоментной составляющей в случае тонкостенной наследственно-упругой оболочки. Уравнения состояния взяты в интегральной форме, в качестве ядра интегрального оператора используется ядро Ржаницына. Полученные уравнения решаются для частного случая с помощью метода интегрального преобразования Лапласа.

Рассматривается наследственно-упругая тонкостенная полубесконечная оболочка, подверженная ударному продольному воздействию тангенциального типа на её торец. Предполагается, что лицевые поверхности оболочки свободны от напряжений, а также что оболочка находилась в покое до момента приложения нагрузки. Трёхмерная математическая модель, описывающая поведение данной оболочки, включает: уравнения движения [1], уравнения состояния [2], граничные и начальные условия [1]. В уравнениях состояния в качестве ядра интегрального оператора Γ^* рассматривается ядро Ржаницына, имеющее вид [3]

$$\frac{Be^{-\beta t}}{t^{1-\gamma}}, \quad (1)$$

где t — время, $\beta > 0$, $0 < \gamma \leq 1$, $0 \leq B < \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)}$ — параметры материала, $\Gamma(\gamma)$ — гамма функция [4]. Далее в работе рассматривается случай $\gamma = \frac{1}{2}$.

При продольном воздействии тангенциального типа на торце имеем ненулевое значение продольного нормального усилия. В этом случае граничные условия на торце можно взять в виде

$$\sigma_{11} = IH(t)f(\alpha_2), v_2 = v_3 = 0(\alpha_1 = 0), \quad (2)$$

где σ_{11} — компонента тензора напряжения, α_1, α_2 — параметры линии кривизны на срединной поверхности, v_2, v_3 — компоненты вектора перемещений, I — амплитуда нагрузки, $H(t)$ — функция Хевисайда [4].

Уравнения безмоментной двумерной составляющей выводятся из трёхмерных уравнений наследственной упругости методом асимптотического интегрирования, основанном на малости геометрического параметра $\eta = \frac{h}{R}$, где h — полутолщина оболочки, R — характерное значение радиусов кривизны срединной поверхности оболочки. В уравнениях вводятся безразмерные переменные и искомые функции согласно [1]. Обезразмеривание параметров материала производится по формулам:

$$\beta = c_2 R^{-1} \eta^b \beta_*, B = (c_2^{-1} R)^{-\frac{1}{2}} \eta^d B_*, \quad (3)$$

где $c_2 = \left(\frac{E}{2(1+\nu)\rho} \right)^{\frac{1}{2}}$ — мгновенная скорость волны сдвига, E — мгновенное значение модуля Юнга, ν — мгновенное значение коэффициента Пуассона, ρ — плотность материала оболочки, b, d — показатели интенсивности параметров материала.

Считается, что действие интегрального оператора на функцию не меняет её асимптотического порядка. Далее в уравнениях вводятся асимптотики НДС [1] и строятся приближённые уравнения с точностью $O(\eta^{2-2q})$, где q — показатель изменяемости по пространственным координатам α_1, α_2 .

После разделения полученных уравнений на чётные и нечётные части относительно нормальной координаты и отбрасывания асимптотически малых членов уравнений в соответствии с выбранной точностью, производится асимптотическое интегрирование уравнений, позволяющее установить зависимость искомых функций от нормальной координаты и перейти к двумерным уравнениям для асимптотически главных компонент НДС [1].

В результате приходим к уравнениям (4), описывающим решение для безмоментной двумерной составляющей :

$$2Eh(1 - \Gamma^*) \left(\frac{1}{A_i} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_j + \frac{w}{R_i} \right) = T_i - \left(\nu + \frac{1 - 2\nu}{2} \Gamma^* \right) T_j,$$

$$2Eh(1 - \Gamma^*) \left(\frac{1}{A_i} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_j + \frac{w}{R_i} \right) = T_i - \left(\nu + \frac{1 - 2\nu}{2} \Gamma^* \right) S_{ij}, \quad (4)$$

$$\frac{1}{A_i} \frac{\partial T_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_j} \frac{\partial S_{ij}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (T_i - T_j) + 2 \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} S_{ij} -$$

$$-2\rho h \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0, \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} - 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

где A_i — коэффициенты первой квадратичной формы, R_i — главные радиусы кривизны, T_i — нормальные усилия, S_{ij} — касательные усилия, u_i, w — перемещения ($i, j=1, 2$).

Уравнения (4) были решены методом интегрального преобразования Лапласа [5] для цилиндрической оболочки в предположении, что нагрузка, приложенная на торец оболочки, является осесимметричной. При обращении изображения оно было разложено в ряд по отрицательным степеням параметра интегрального преобразования. Полученный ряд был обращён почленно с помощью таблиц интегрального преобразования Лапласа и теоремы о сдвиге [5]. В результате получено решение для нормального продольного усилия, выражающееся через кратные интегралы вероятностей [4]. Асимптотически главная часть решения имеет вид

$$T_1^* = I^* e^{-D_2 \xi} H(\tau - \xi) \times \\ \times \left(i^0 \operatorname{erfc} \left(\frac{D_1 \xi}{2\sqrt{\tau - \xi}} \right) - 2D_3 \xi i^1 \operatorname{erfc} \left(\frac{D_1 \xi}{2\sqrt{\tau - \xi}} \right) \sqrt{\tau - \xi} \right), \quad (5)$$

где $i^n \operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \frac{(\tau-x)^n}{n!} e^{-\tau^2} d\tau$,

$$D_1 = \frac{G_1}{2}, D_2 = \frac{G_1^2}{8} + \frac{G_2}{2}, D_3 = \frac{G_3}{2} - \frac{G_1 G_2}{4} + \frac{G_1^3}{16}, G_1 = \frac{B_1 \sqrt{\pi} (\nu^2 - \nu + 1)}{1 - \nu^2}, \\ G_2 = \frac{4B_1^2 \pi (\nu^2 - \nu + 1) - B_1 \sqrt{\pi} (1 - 2\nu)^2}{4(1 - \nu^2)}, \\ G_3 = \frac{4B_1^3 \pi \sqrt{\pi} (\nu^2 - \nu + 1) + B_1^2 \pi (1 - \nu^2) - 2B_1 \sqrt{\pi} \beta_1 (\nu^2 - \nu + 1)}{4(1 - \nu^2)}, B_1 = (c_3^{-1} R)^{-\frac{1}{2}} B, \\ \beta_1 = c_3^{-1} R \beta, c_3 = \left(\frac{E}{(1 - \nu^2) \rho} \right)^{\frac{1}{2}}, \xi = \frac{\alpha_1}{R}, \tau = \frac{tc_3}{R}, T_i = \frac{2Eh}{1 - \nu^2} T_i^*, I^* = \frac{I(1 - \nu^2)}{E}.$$

Численные расчёты, проведённые на основе формулы (5), позволяют выявить влияние параметров интегрального оператора на поведение решения в зависимости от продольной координаты, а также исследовать характер решения в различные моменты времени.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бажанова Н. С., Коссович Л. Ю., Сухоловская М. С. Нестационарные волны в вязкоупругих оболочках : модель Максвелла // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2000. Вып. 2. С. 17–24.
2. Анофрикова Н. С., Коссович Л. Ю., Черненко В. П. Асимптотическое интегрирование трёхмерных уравнений наследственно-упругой среды в случае тонкостенной оболочки // Проблемы механики твёрдых деформируемых тел и горных пород : сб. ст. к 75-летию Е. И. Шемякина / под ред. Д. Д. Ивлева, Н. Ф. Морозова. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. С. 67–73.
3. Адамов А. А., Матвеев В. П., Труфанов Н. А., Шардаков И. Н. Методы прикладной вязкоупругости. Екатеринбург : УрО РАН, 2003.

4. *Абрамович М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М. : Наука, 1979. 832 с.

5. *Штокало И. З.* Операционное исчисление. Киев : Наук. думка, 1972. 304 с.

УДК 539.58

М. М. Мазепа, А. С. Колесникова

МОДУЛЬ ЮНГА КОЛОННОГО ГРАФЕНА НА ОСНОВЕ ZIGZAG-УНТ

Поступила в редакцию 14.05.2018

В последнее время актуальной темой развития нанoeлектроники является поиск новых пригодных материалов. Один из наиболее перспективных материалов – колонный графен: графен с присоединенными к нему, вертикально ориентированными углеродными нанотрубками (УНТ) (рис. 1).



Рис.1. Модель колонного графена на основе zigzag-УНТ

Колонный графен в отличие от УНТ, которые уже используются в автoэмиссионной электронике [1–3], обладает рядом преимуществ, за счет того, что все УНТ синтезируются вертикально, не переплетаясь между собой. Благодаря ковалентной связи между графеном и УНТ трубки не отрываются от подложки и не разрушаются в процессе эмиссии, создавая эмиссионное поле.

Одним из важнейших свойств материала, участвующего в эмиссии, является механическая прочность. Во-первых, материал должен быть достаточно прочным, чтобы выдержать эмиссионное поле. Это связано с тем, что под действием внешнего электрического поля на структуры действуют пондермоторные силы. Во-вторых, повышенная механическая прочность прямо пропорциональна проводящим характеристикам [4]. В

связи с этим целью данной работы является определение модуля Юнга колонного графена на основе zigzag-УНТ.

Объектом исследования в данной работы выступил конечно-размерный колонный графен двух форм: квадратный и ленточный (рис. 2). Исследовались композиты, в состав которых вошли УНТ диаметром 5 А, расстояния между УНТ составили 13 А. В пределах каждого композита длина УНТ оставалась постоянной. Исследовались серия композитов. В серии менялись длины УНТ (от 3.28 А до 31.3 А) и размеры графенового полотна в соответствии с изменением количества УНТ в композите (таблица).

Геометрические размеры исследуемого колонного графена

Количество УНТ	Ленточный колонный графен				Квадратный колонный графен		
	1x2	1x4	1x6	1x8	2x2	4x4	6x6
Длина графенового полотна вдоль торца zigzag	16.4 А				34 А	69.2 А	104.5 А
Длина графенового полотна вдоль торца armchair	33.5 А	68.5 А	103.5 А	138.5 А	33.5 А	68.5 А	103.5 А

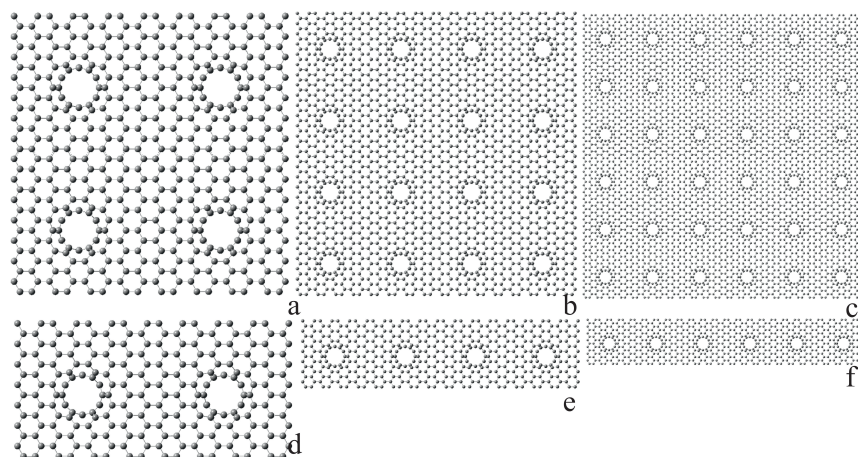


Рис. 2. Внешний вид исследуемых композитов:

a-c – квадратные композиты, *d-f* – ленточные композиты

Проведено исследование зависимости модуля Юнга от длин zigzag-УНТ композита, а также формы и размеров графенового полотна композита. Исследование проведено методом UFF в программном пакете Gaussian'09. Исследование проведено с учетом влияния подложки. Определение величины модуля Юнга проведено методом, указанным в статье [5]. Результаты исследования представлены на рис. 3.

Модуль Юнга увеличивается с увеличением длин УНТ, входящих в состав композита. Из графиков можно сделать вывод о том, что модуль Юнга квадратного колонного графена перестает изменяться с увеличением размеров графенового полотна до 68 А и длин УНТ 32 А и принимает постоянное значение примерно 190 ГПа. Можно сделать вывод

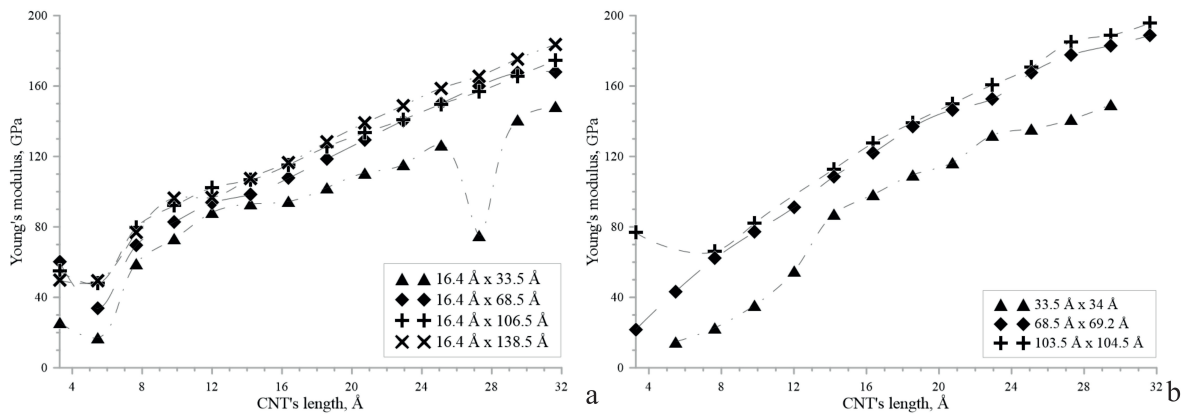


Рис. 3. Результаты исследования зависимости величины модуля Юнга от длин УНТ композита: *a* – ленточный композит; *б* – квадратный композит

о том, что модуль Юнга конечно-размерного композита не зависит от формы листов.

Полученные результаты хорошо согласуются с предыдущими исследованиями в этой области: с конечно-размерным колонным графеном на основе armchair-УНТ [6], протяженным колонным графеном на основе armchair-УНТ [7, 8], многослойным колонным графеном [9].

Наиболее перспективным для эмиссионной электроники можно считать квадратный колонный графен с размером графенового полотна 103.5 Å x 104.5 Å, в состав которого вошли 36 УНТ, его модуль Юнга составил 190 ГПа.

Работа выполнена при финансовой поддержке Президентской стипендии 2016–2018 (проект № СП-2502.2016.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Kang J. S., Hong J. H., Park K. C. High-performance carbon-nanotube-based cold cathode electron beam with low thermal-expansion gate electrode // J. Vac. Sci. Technol. B. 2018. Vol. 36, № 2. P. 1–8.
2. Zhang Q., Wang X.-J., Meng P., Yue H.-X., Zheng R.-T., Wu X.-L., Cheng G. -A. High current density and low emission field of carbon nanotube array microbundle // Appl. Phys. Lett. 2018. Vol. 112. P. 013101-1 – 013101-5.
3. Kumara S., Nehraab M., Kediab D., Dilbaghia N., Tankeshwarac N., Kimd K.-H. Carbon nanotubes: A potential material for energy conversion and storage // Progress in Energy and Combustion Science. 2018. Vol. 64. P. 219–253.
4. Глухова О. Е., Терентьев О. А. Теоретическое изучение зависимостей модулей Юнга и кручения тонких однослойных углеродных нанотрубок типа zigzag и armchair от геометрических параметров // ФТТ. 2006. Т. 48, вып. 7. С. 1329–1335.
5. Глухова О. Е., Колесникова А. С., Торгашов Г. В., Буянова З. И. Упругие и электростатические свойства бамбукоподобных углеродных нанотрубок // ФТТ. 2010. Т. 52, вып. 6. С. 1240–1244.

6. Колесникова А. С., Мазепа М. М. Управление прочностными свойствами углеродных композитов // Совр. проблемы МСС : сб. науч. тр. Саратов, 2016. С. 21–24.

7. Kolesnikova A. S., Mazepa M. M. Management the strength properties of carbon composites // Progress in Biomedical Optics and Imaging. Proceed. of SPIE 9 : Reporters, Markers, Dyes, Nanoparticles, and Molecular Probes for Biomedical Applications IX. 2017. Vol. 100790. P. 100790R.

8. Колесникова А. С., Мазепа М. М. Модуль Юнга и коэффициент Пуассона двумерно протяженного колонного графена // ФТТ. 2018. Т. 60, вып. 9. С. 1781–1784.

9. Колесникова А. С., Сафонов Р. А., Мазепа М. М. Прогнозирование модуля упругости и коэффициента Пуассона углеродного нанокompозита // Нано- и биомедицинские технологии. Управление качеством. Проблемы и перспективы : сб. науч. тр. Саратов, 2016. С. 41–47.

УДК 519.6,629.78

И. А. Панкратов

ЭВОЛЮЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ ОПТИМИЗАЦИИ МЕЖОРБИТАЛЬНЫХ ПЕРЕЛЕТОВ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С РАЗРЫВНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Поступила в редакцию 25.05.2018 г.

1. Постановка задачи

Предположим, что вектор ускорения \mathbf{u} от тяги реактивного двигателя во все время управляемого движения КА направлен ортогонально плоскости его орбиты. Рассмотрим следующую задачу: пусть необходимо перевести круговую орбиту КА, движение центра масс которого описывается безразмерными уравнениями [3]:

$$2\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}^b, \quad \boldsymbol{\omega}^b = Nu^b \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 1,$$

из заданного начального состояния

$$t = t_0 = 0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \boldsymbol{\lambda}(0) = \boldsymbol{\lambda}^{(0)} = \boldsymbol{\Lambda}^0 \circ \left(\cos \frac{\varphi_0}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi_0}{2} \right) \quad (1)$$

в конечное состояние, принадлежащее многообразию

$$t = t^* = ?, \quad \varphi(t^*) = \varphi^*, \quad \text{vect} \left[\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(t^*) \circ \boldsymbol{\Lambda}^* \circ \left(\cos \frac{\varphi^*}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi^*}{2} \right) \right] = \mathbf{0}, \quad (2)$$

с помощью кусочно-постоянного управления

$$\mathbf{u}(t) = (-1)^k \cdot \mathbf{u}_{st}, \quad \text{если } t_{2k} \leq t \leq t_{2k+1} \quad (k = 0, 1, \dots, \text{INT}(0.5 \cdot (M - 1)));$$

$$u(t) = 0, \text{ если } t_{2k-1} \leq t \leq t_{2k} (k = 1, \dots, \text{INT}(0.5 \cdot M)).$$

При этом количество участков активного движения КА M полагается заданным. Известно, что при минимизации затрат характеристической скорости оптимальное управление, найденное с помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина, имеет именно такой вид.

Здесь λ – нормированный кватернион ориентации орбитальной системы координат (СК) в инерциальной СК X ; \circ – символ кватернионного умножения, N – характерный безразмерный параметр задачи; u^b – проекция вектора ускорения \mathbf{u} на направление вектора момента скорости центра масс КА; $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ – векторные мнимые единицы Гамильтона; φ – истинная аномалия; Λ – кватернион ориентации орбиты КА; $u_{st} \in \{-1, 1\}$ – значение управления на первом участке активного движения КА; $\Delta_k = t_k - t_{k-1}$ – искомые величины (длительности участков активного движения КА); INT – целая часть числа.

2. Алгоритм решения задачи

Опишем основные этапы эволюционного алгоритма решения поставленной задачи, следуя книге [4].

Вначале нужно случайным образом сгенерировать популяцию из N_{\max} пробных решений (особей). Особь – это набор из M вещественных чисел. При этом вместо вещественного числа Δ_k в памяти хранится целое число (ген).

На втором шаге алгоритма для каждой особи находится по известной формуле [5] значение кватерниона ориентации орбитальной СК при $t = t^* = t_M$ с начальными условиями (1) (управление задаётся выбранной хромосомой). В качестве значения функции приспособленности (целевой функции) берётся модуль левой части соотношения (2). Если на этом шаге для некоторой особи значение целевой функции меньше наперёд заданного малого числа ε , то выполнение алгоритма заканчивается, а управление, соответствующее данной особи, – это решение задачи.

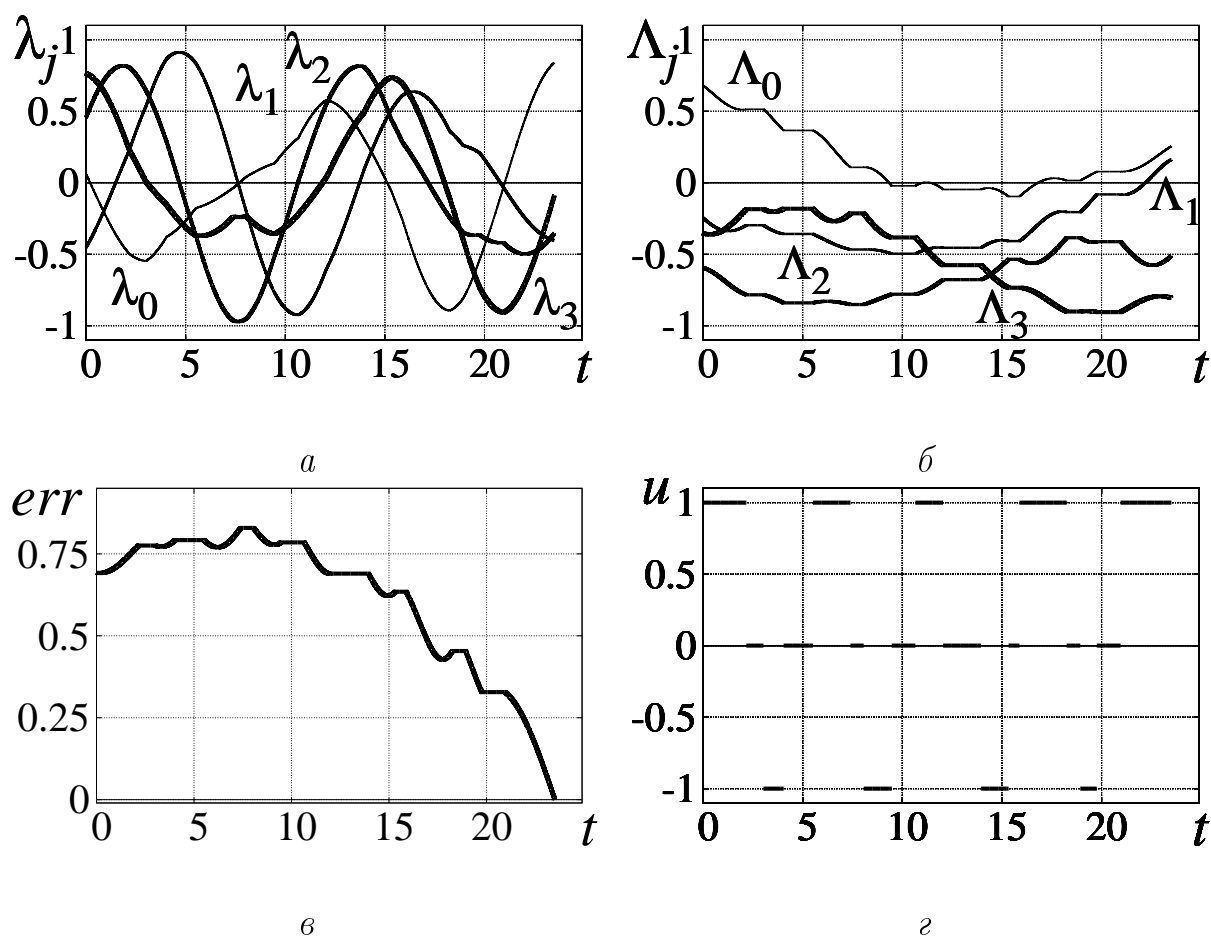
На третьем шаге алгоритма отбрасывается половина особей, имеющих наибольшие (худшие) значения целевой функции (N_{\max} – чётное число). Затем методом промежуточной рекомбинации [4] производится скрещивание особи с наименьшим значением целевой функции со всеми остальными, в том числе и с самой собой.

На четвёртом шаге алгоритма вычисляется среднее значение целевой функции для популяции, полученной на третьем шаге. Если оно больше, чем среднее значение целевой функции, вычисленное на втором шаге, то производится мутация особей в популяции. Для этого гены всех особей записываются в двоичном виде (на каждый ген отводится ровно L бит)

и с вероятностью $p_{mut} \in (0; 1]$ производится инвертирование случайным образом выбранного бита каждого гена. Затем осуществляется возврат ко второму шагу алгоритма.

Отметим, что описанный алгоритм нужно применять неоднократно для разных начальных популяций. При этом будет получено несколько решений, из которых выбирается то, которое соответствует переориентации орбиты с меньшими затратами характеристической скорости.

На рисунке приведены результаты решения задачи оптимальной переориентации круговой орбиты КА для случая, когда кватернион конечной ориентации орбиты КА соответствует ориентации орбиты одного из спутников отечественной орбитальной группировки ГЛОНАСС (отличие ориентаций орбит по угловым переменным составляет десятки градусов).



Круговая орбита, ГЛОНАСС : *а* – компоненты кватерниона ориентации орбитальной СК; *б* – компоненты кватерниона ориентации орбиты КА; *в* – отклонение ориентации орбиты от требуемой; *г* – оптимальное управление

Параметры генетического алгоритма полагались равными: $L = 40$, $N_{max} = 10000$, $p_{mut} = 0.9$.

В дальнейшем предполагается оптимальное количество участков активного движения КА определять в ходе решения задачи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Решение задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата с использованием кватернионных уравнений ориентации орбитальной системы координат // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 1. С. 84–92.
2. Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Численное исследование задачи переориентации орбиты космического аппарата с использованием орбитальной системы координат // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2012. Вып. 14. С. 132–136.
3. Челноков Ю. Н., Панкратов И. А. Переориентация круговой орбиты космического аппарата с тремя точками переключения управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 1. С. 70–73.
4. Панченко Т. В. Генетические алгоритмы. Астрахань : Астраханский университет, 2007. 87 с.
5. Панкратов И. А., Челноков Ю. Н. Аналитическое решение дифференциальных уравнений ориентации круговой орбиты космического аппарата // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, вып. 1. С. 84–89.

УДК 519.6,532

И. А. Панкратов, А. В. Шаров

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Поступила в редакцию 25.05.2018 г.

1. Постановка задачи

Рассматривается течение мелкой воды в закрытом водоеме при наличии ветра. Такой процесс описывается следующей системой дифференциальных уравнений в частных производных [3]:

$$\begin{cases} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \frac{\partial(\rho H)}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{q_1^2}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{q_1 q_2}{H} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} (N_{11} - N_p) + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_2} + B_1, \\ \frac{\partial q_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{q_1 q_2}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{q_2^2}{H} \right) = \frac{\partial}{\partial x_2} (N_{22} - N_p) + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_2} + B_2. \end{cases}$$

Здесь q_i – компоненты потока количества жидкости; ρ – плотность жидкости; $H = h + \eta$, h – расстояние от координатной плоскости Ox_1x_2 до дна, а η – возвышение свободной поверхности; N_{ij} , N_p , B_i – сложные выражения.

Для данного двумерного случая требуется найти численное решение указанной системы дифференциальных уравнений с помощью метода конечных элементов (МКЭ). Программа должна работать с любой произвольно заданной областью. В качестве примеров таких областей были взяты как искусственно вырытые пруды, так и реальные озера. Заметим, что ранее в работе [4] был применён метод взвешенных невязок к решению одномерных нестационарных уравнений мелкой воды.

2. Метод конечных элементов

В рассматриваемой системе можно пренебречь силой Кориолиса и конвективными членами. Затем необходимо представить функции $q_1(x_1, x_2, t)$, $q_2(x_1, x_2, t)$, $H(x_1, x_2, t)$ в виде линейных комбинаций базисных функций (линейные на треугольнике базисные функции одни и те же для всех трёх переменных):

$$q_1(x_1, x_2, t) = \sum_{m=1}^M a_m(t) N_m(x, y), \quad q_2(x_1, x_2, t) = \sum_{m=1}^M a_{m+k}(t) N_m(x, y);$$

$$H(x_1, x_2, t) = \sum_{m=1}^M a_{2 \cdot m+k}(t) N_m(x, y).$$

После этого нужно подставить полученные разложения в исходную систему уравнений. Затем каждое из уравнений необходимо умножить на весовую функцию $W_l(x_1, x_2) = N_l(x_1, x_2)$ (метод Галёркина) и проинтегрировать его по треугольнику. Также каждое из уравнений необходимо разрешить относительно производной, чтобы получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$A \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt} + B \cdot \mathbf{a} + \dots = f.$$

Важно заметить, что каждое из трех исходных уравнений в частных производных дало по M обыкновенных дифференциальных уравнений, и в конечном итоге задача сводится к решению задачи Коши для системы из $3 \cdot M$ обыкновенных дифференциальных уравнений.

3. Пример численного решения задачи

Для численного решения задачи была написана программа на языке Python. Заметим, что реализация МКЭ в данной работе является многопоточной. В первую очередь это удалось сделать благодаря самому МКЭ, который позволяет обходить элементы в сетке независимо друг от друга. Для решения этой задачи был написан пул потоков, который позволяет в один и тот же момент времени обходить от 128 до 256 элементов. Цифры могут меняться, так как параметр является

конфигурируемым и максимальное значение одновременно обсчитываемых конечных элементов зависит только от компьютера, на котором производятся вычисления.

Так как при использовании потоков Python не может задействовать все ядра процессора для выполнения нескольких потоков одновременно, то вместо них в реализации задачи были использованы процессы из библиотеки multiprocessing.

Помимо этого все модули приложения вместе с внешними зависимостями были упакованы в Docker контейнер, который позволяет очень просто переносить приложение на любую систему, которая поддерживает данную технологию.

Такая упаковка позволила производить вычисления не на личном стационарном компьютере, а на удаленном сервере, который имеет намного большие вычислительные мощности и позволяет быстрее получить результат.

Заметим также, что вычислительная область была разбита на конечные элементы (треугольники) с помощью алгоритмов Рапперта (J. Ruppert) и Чу (L. Paul Chew) [5, 6].

В качестве реального водоема, у которого нет островов, было выбрано озеро Эльтон – солёное бессточное самосадочное озеро на севере Прикаспийской низменности. Данное озеро имеет площадь равную 152 кв. км и наибольшую глубину до 1.5 м. В среднем глубина данного озера составляет 0.05 – 0.07 м, а это значит, что для данного озера будут справедливыми уравнения мелкой воды. На рис.1 показана сетка, использованная при решении задачи. На рис. 2 показаны линии тока.

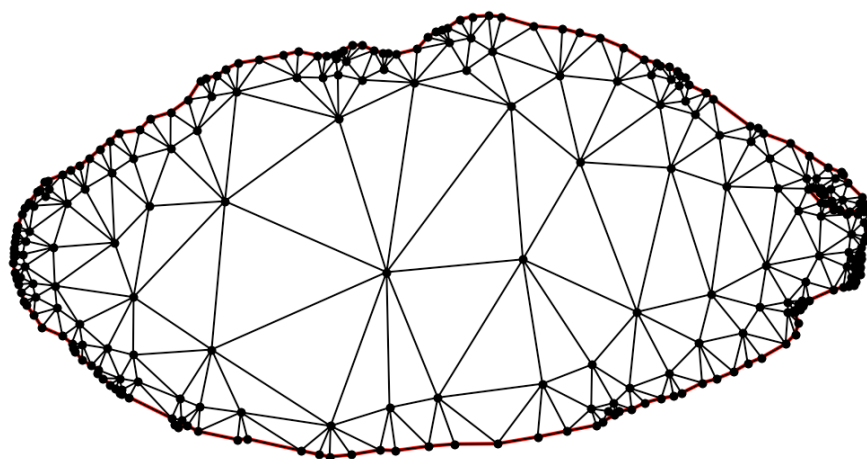


Рис.1. Триангуляция озера Эльтон

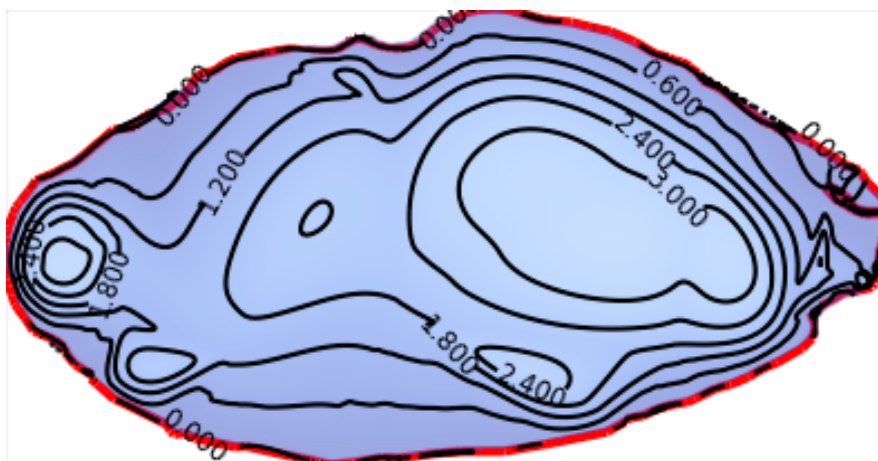


Рис. 2. Линии тока

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Панкратов И. А. Численная аппроксимация линий тока методом Галёркина // *Juvenis scientia*. 2016. № 2. Р. 4–6.
2. Панкратов И. А. Изчисляване на линията на тока по време на циркуляция, предизвикана от ветрове // *Парадигма*. 2016. Т. 1, № 1. С. 115–119.
3. Коннор Дж., Бреббиа К. Метод конечных элементов в механике жидкости. Л.: Судостроение, 1979. 264 с.
4. Панкратов И. А., Рымчук Д. С. Расчёт течений мелкой воды // *Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та*, 2014. Вып. 16. С. 120–124.
5. Ruppert J. A Delaunay Refinement Algorithm for Quality 2-Dimensional Mesh Generation // *Journal of Algorithms*. 1995. Vol. 18, № 3. Р. 548–585.
6. Rand A. Where and How Chew's Second Delaunay Refinement Algorithm Works. URL: <http://2011.cccg.ca/PDFschedule/papers/paper91.pdf> (дата обращения: 20.03.2018).

УДК 534.121.1

Я. А. Парфенова, А. В. Ротарь

НЕСТАЦИОНАРНАЯ КРАЕВАЯ ИЗГИБНАЯ ВОЛНА В ТОНКОЙ ПЛАСТИНЕ

Поступила в редакцию 14.05.2018 г.

Изгибная краевая волна в свободной тонкой полубесконечной изотропной пластине впервые была исследована Ю. К. Коненковым в работе [1]. Одним из важнейших свойств волны Коненкова является ее дисперсия, то есть зависимость скорости волны от собственных частот колебаний пластины. В данной статье решается задача о распространении нестационарной краевой изгибной волны в тонкой пластине.

Рассмотрим полубесконечную изотропную пластину толщины $2h$. С серединной плоскостью пластины свяжем декартову систему координат

$0 \leq x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$. Согласно теории изгиба тонких пластин Кирхгофа уравнение, описывающее прогиб W , имеет вид

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + \frac{2\rho h}{D} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где ρ – плотность материала пластины, D – изгибная жесткость.

Пусть на краю $x = 0$ действует перерезывающая сила. Тогда граничные условия при $x = 0$ примут вид

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0, \\ \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (1 - \nu) \frac{\partial^2 W}{\partial y^2 \partial x} = \frac{N_0}{D}, \end{cases} \quad (2)$$

где $N_0 = I_0 h f(t) H(y)$ – обобщенная перерезывающая сила, E – модуль Юнга материала пластины, ν – коэффициент Пуассона, I_0 – амплитуда нагрузки, $f(t)$ – заданная функция времени, $H(y)$ – функция Хевисайда. В начальный момент времени пластина находится в состоянии покоя.

Применим к уравнению (1) преобразование Лапласа по временной переменной t и Фурье по пространственной переменной y . Параметры преобразований обозначены $i\omega$ и χ соответственно. Уравнение (1) в изображениях примет вид

$$\frac{d^4 W^{LF}}{dx^4} - 2\chi^2 \frac{d^4 W^{LF}}{dx^2} + (\chi^4 - \omega^2 \lambda^2) W^{LF} = 0, \quad (3)$$

где $\lambda^2 = \frac{2\rho h}{D}$.

Решение уравнения (3) запишем для изображения угла поворота вертикального сечения пластины Θ^{LF} относительно оси Oy при $x = 0$ ($\Theta = \frac{\partial W}{\partial x}$)

$$\Theta^{LF} = \frac{N_0^{LF} (\sqrt{\chi^4 - \omega^2 \lambda^2} + \nu \chi^2)}{D(\omega^2 \lambda^2 - (1 - \nu^2)\chi^4 - 2(1 - \nu)\chi^2 \sqrt{\chi^4 - \omega^2 \lambda^2})}. \quad (4)$$

Вычисление интеграла при обращении преобразования Фурье было проведено с использованием леммы Жордана и теоремы о вычетах. Отметим, что простые полюсы в решении (4) соответствуют решению для волны Коненкова [2]. Изображение решения по Лапласу имеет вид

$$\Theta^L = e^{-i\chi_k y} \frac{I_0 f^L(\omega) \left(\chi_k^4 - \omega^2 \lambda^2 + \nu \chi_k^2 \sqrt{\chi_k^4 - \omega^2 \lambda^2} \right)}{4D(1 - \nu) \left(\omega^2 \lambda^2 - 2\chi_k^4 - (1 - \nu)\chi_k^2 \sqrt{\chi_k^4 - \omega^2 \lambda^2} \right)}, \quad (5)$$

где $\chi_k^2 = \omega \lambda / c_k^2$, $c_k^4 = (1 - \nu)(3\nu - 1 + 2\sqrt{2\nu^2 - 2\nu + 1})$, c_k – скорость волны Коненкова.

Оригинал решения для угла поворота на крае $x = 0$ получим в виде интеграла

$$\Theta(y, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta^L \exp(i\omega t) d\omega. \quad (6)$$

Интеграл (6) после несложных преобразований был вычислен в математической системе Mathcad 14.0. Числовые расчеты проводились для пластины из алюминия $h = 0.05$ м, $\nu = 0,33$, $\rho = 2740$ кг/м³, $E = 6,9 \cdot 10^{10}$ Па, $I_0 = 1$. Зависимость обобщенной перерезывающей силы N_0 от времени задавалась функцией

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin \omega_0 t \left(1 - \cos \frac{\omega_0 t}{N_c} \right), & t \in \left[0, \frac{2\pi N_c}{\omega_0} \right]; \\ 0, & t \notin \left[0, \frac{2\pi N_c}{\omega_0} \right]. \end{cases}$$

График функции $f(t)$ при $N_c = 5$, $\omega_0 = 100 \pi \cdot 10^3$ приведен на рис. 1.

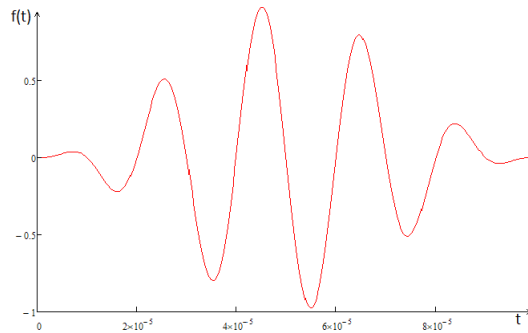


Рис. 1. Функция $f(t)$

Графики зависимости угла поворота от времени приведены на рис. 2 и 3.

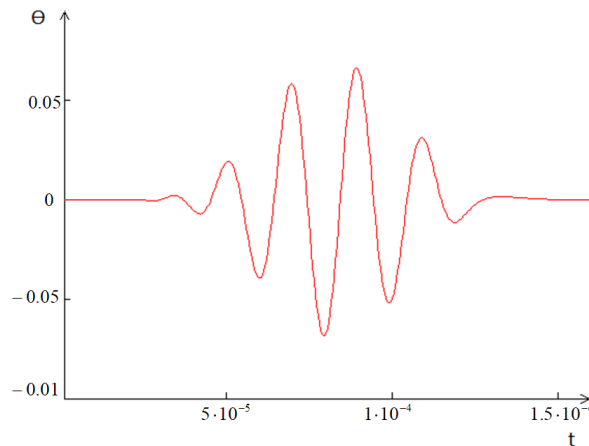


Рис. 2. График зависимости угла поворота Θ от времени в сечении $y = 0.1$

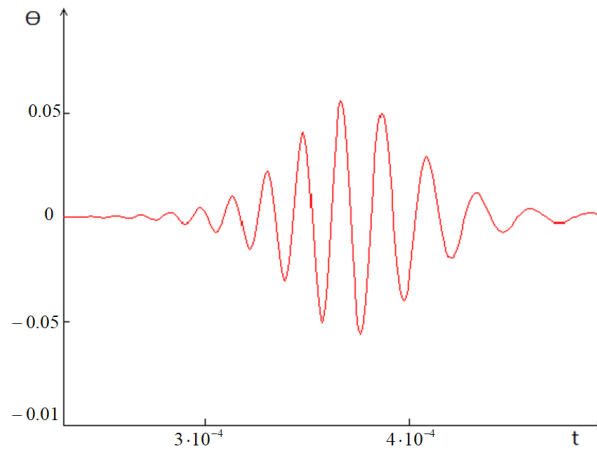


Рис. 3. График зависимости угла поворота Θ от времени в сечении $y = 1$

На представленных графиках показано распространение нестационарной краевой волны, вызванной приложением нагрузки типа перерезывающей силы, вдоль свободного края пластины. Сравнение графиков показывает, что дисперсия приводит к изменению формы сигнала в зависимости от точки наблюдения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Коненков Ю. К. Об изгибной волне «рэлеевского» типа // Акустический журн. 1960. Т. 6, вып. 1. С. 124–126.
2. Каплунов Ю. Д., Коссович Е. Л., Мухомодьяров Р. Р., Сорокина О. В. Явные модели распространения изгибных краевых интерфейсных волн // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 1. С. 56–63.

УДК [53:57:61+004](082)

Е. А. Родионов, А. А. Голядкина

КОНЕЧНО–ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МИОКАРДА ЛЕВОГО ЖЕЛУДОЧКА СЕРДЦА

Поступила в редакцию 11.05.2018 г.

Последние 15 лет заболевания сердечно-сосудистой системы остаются ведущими причинами инвалидизации и смерти людей трудоспособного возраста во всем мире [1]. Разработка корректных методов лечения данных заболеваний основывается на применении биомеханического

моделирования, которое успешно применяется в настоящее время [2-4]. Актуальным становится создание 3D модели левого желудочка сердца, наиболее приближенной к реальности.

Построение 3D модели миокарда левого желудочка (ЛЖ) сердца человека проводилось в системе автоматизированного проектирования SolidWorks [5]. Модель представляет собой средний слой стенки ЛЖ сердца — миокард, который состоит из соединительного слоя и 3 слоев разнонаправленных миокардиальных волокон: внутренний, средний и внешний. Численный анализ проводился в конечно-элементном пакете ANSYS [6]. В данной работе построена осесимметричная модель миокарда ЛЖ, поэтому для простоты расчетов рассмотрена только 1/4 часть модели.

Материал миокарда ЛЖ предполагался однородным, изотропным и идеально-упругим с параметрами: для соединительного слоя плотность $\rho_1 = 850 \text{ кг/м}^3$, модуль Юнга $4 \cdot 10^6 \text{ Па}$ и коэффициент Пуассона 0.49; для волокон плотность $\rho_2 = 900 \text{ кг/м}^3$, модуль Юнга $4.5 \cdot 10^6 \text{ Па}$ и коэффициент Пуассона 0.49. Движение стенки описывалось в виде:

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \vec{F} + (\lambda + \mu) \text{grad } \Theta + \mu \Delta \vec{u}$$

где ρ - плотность стенки, $\vec{u}(u, v, w)$ - вектор перемещения, \vec{F} - вектор объемных сил, $\lambda = \frac{\nu \cdot E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$, $\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$ - коэффициенты Ламе, θ - объемное расширение, ν - коэффициент Пуассона, E - модуль Юнга.

В качестве граничных условий предполагалось, что узлы, принадлежащие элементам зоны торцевой поверхности модели миокарда ЛЖ, жестко закреплены, т.е. наложено ограничение по степеням свободы $UX=0$, $UY=0$, $UZ=0$. В качестве начальных условий было приложено давление на внутреннюю поверхность модели по зонам (рисунок 1). В зону «В» прикладывалось давление в 10000 Па, в зону «С» – 15000 Па, в зону «D» – 20000 Па.

На основе результатов конечно-элементного моделирования проведен анализ распределения значений эквивалентных напряжений и деформации для тканей элементов модели миокарда ЛЖ. Выявлено, что максимальные значения эквивалентных напряжений достигаются в $75 \cdot 10^5 \text{ Па}$. Причем в соединительном слое, в волокнах внутреннего и внешнего слоев оно достигается в верхушке модели, там, где прикладывалось давление в 20000 Па. В среднем слое волокон максимальное значение напряжения достигается в зоне, где прикладывалось давление в 10000 Па.

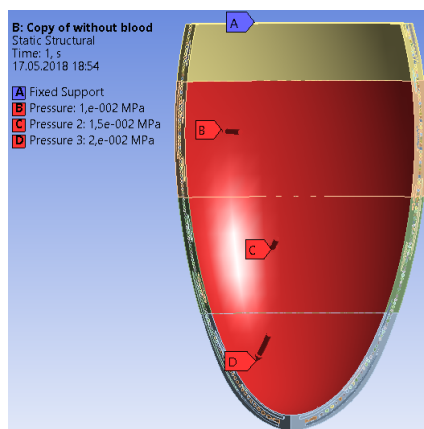


Рис.1. Начальные условия:
приложения давления по зонам

Также проведено сравнение значений эквивалентных напряжений и деформации со значениями. Было выявлено, что по сравнению с моделью ЛЖ без учета миокардиальных волокон, в модели ЛЖ с учетом миокардиальных волокон максимальные значения напряжения возросли со значения $1.345 \cdot 10^5$ Па до $75 \cdot 10^5$ Па, а максимальные значения перемещения со значения $4.974 \cdot 10^{-1}$ мм до $9 \cdot 10^{-1}$ мм (рисунок 2). Этот факт объясняется за счет внедрения разнонаправленных волокон в модель миокарда ЛЖ.

На рисунке 2 левый столбик - это значения напряжения и перемещения для модели без учета миокардиальных волокон, правый столбик - значения для модели с учетом миокардиальных волокон.

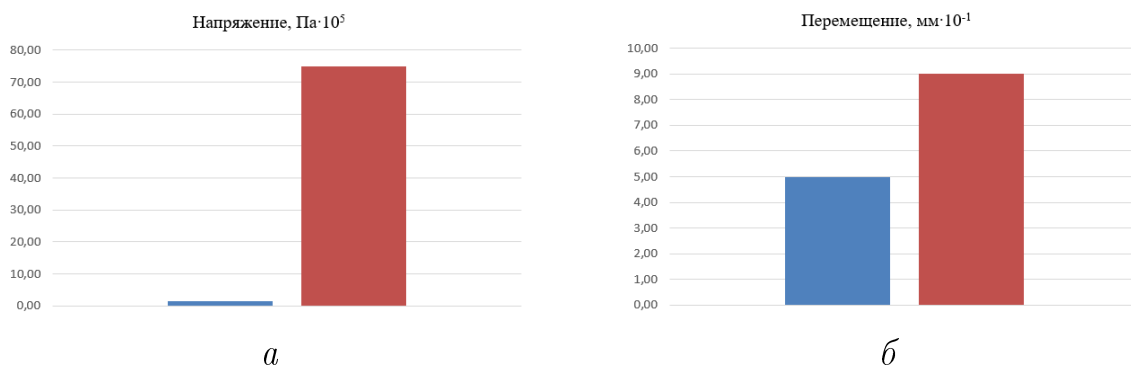


Рис. 2. Гистограмма значений: а- напряжения, б- перемещения

Таким образом, можно заключить, что при биомеханическом моделировании целесообразно рассматривать миокард левого желудочка сердца как неоднородную структуру путем внедрения разнонаправленных волокон с целью повышения точности результатов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Всемирная организация здравоохранения. URL: <http://www.who.int.ru> (дата обращения: 08.05.2018).
2. Кошелев А. А., Бажутина А. Е., Правдин С. Ф., Ушенин К. С., Канцельсон Л. Б., Соловьева О. Э. Модифицированная математическая модель анатомии левого желудочка сердца // Биофизика. 2017. Т. 61, № 5. С. 986–995.
3. Голядкина А. А., Челнокова О. В., Полиенко А. В. Персонифицированное конечно-элементное моделирование желудочков сердца человека // Практическая биомеханика : материалы докладов Всерос. конф. молодых ученых с междунар. участием / под ред. проф. Л. Ю. Коссовича. Саратов, 2016. С. 139–142.
4. Соловьева О. Э. Персонифицированные биомеханические модели в кардиологии // Биомеханика – 2018 : материалы докл. XIII Всерос. (с междунар. участием) конф. Ростов н/Д, 2018. 85 с.
5. Голядкина А. А., Иванов Д. В., Каменский А. В., Кириллова И. В., Сальковский Ю. Е., Сафонов Р. А., Щучкина О. А. Практическое применение системы автоматизированного проектирования Solidworks : учеб. пособие для студентов естественных дисциплин. Саратов, 2011. С. 148.
6. Голядкина А. А., Иванов И. В., Доль А. В., Полиенко А. В. Практические задания по применению пакета Ansys Mechanical APDL к задачам биомеханики сердечно-сосудистой системы : учеб.-метод. пособие. Саратов, 2015. С. 56.

УДК 519.257

Г. П. Шиндяпин, А. А. Матутин, М. С. Шахрай

К РАСЧЕТУ ПАРАМЕТРОВ РЕФРАКЦИИ УДАРНЫХ ВОЛН ПРИ ИХ ПАДЕНИИ НА ПОВЕРХНОСТЬ ОКЕАНА

Поступила в редакцию 30.05.2018 г.

Методами нелинейной теории взаимодействий ударных волн (УВ) в газожидкостных средах (ГЖС) [1] рассчитаны основные параметры рефракции режима RW, возникающего при падении УВ (AB) со стороны

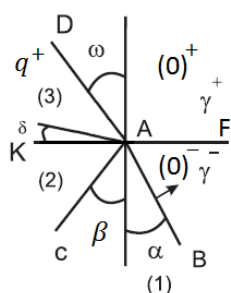


Рис. 1. Режим RW с отраженной УВ

жидкости при возникновении отраженной УВ (AC) и преломленной УВ (AD) в воздухе (рис. 1). Расчеты уточняют и расширяют результаты теории коротких волн.

1. При падении УВ (AB) относительно малой интенсивности $\varepsilon = \frac{p_1 - p_0}{p_0}$, ($\varepsilon \sim 10^{-2}$) под углом α к вертикали на свободную поверхность AF океана, разделяющую воздух и воду с газосодержаниями γ^+ , γ^- , возникают различные режимы рефракции [2, 3] : RR—регулярной; NR — нерегулярной с волной разрежения; RW — рефракции с отраженной УВ, TNR — twin Neumann ref. — с двойной отраженной ударной волной, BPR — bound precursor ref. — когда преломленная УВ в т. А вертикальна ($\omega = 0$) (Рис. 2).

Особый интерес представляет режим RW, когда интенсивность преломленной УВ AD

$$q^+ = \frac{p_3 - p_0}{p_1 - p_0}$$

может превышать интенсивность падающей УВ АВ в зависимости от $\varepsilon, \alpha, \gamma$.

Относительное газосодержание водной среды [1] $\gamma = \gamma^- = \frac{m_{II}}{m_I}$ (m_{II} — масса пузырьков газа, m_I — масса жидкости, $0 \leq \gamma \leq 10^{-4}$). При использовании модели гомогенной локально равновесной пузырьковой среды с газосодержаниями γ^- для жидкости и $\gamma^+ = \infty$ для газа были установлены [1] основные параметры для относительно слабых УВ (ρ_0 — плотность, c_0 — скорость звука покоящейся среды) :

$$\bar{\varepsilon} \ll 1, \bar{\varepsilon} = L_0(\gamma)\varepsilon = R_0(\gamma)P_{10}, P_{10} = \frac{p_1 - p_0}{B_0(\gamma)};$$

$$B_0(\gamma) = \rho_0(\gamma)c_0^2(\gamma), L_0(\gamma) = \frac{P_0 R_0(\gamma)}{B_0(\gamma)}. \quad (1)$$

Здесь B_0 — масштаб давления, $P_{10} \ll 1$ — относительная интенсивность падающей УВ.

Используемые теоретические построения позволяют исследовать процесс рефракции УВ при произвольных углах падения α , обобщая теорию коротких волн [1], пригодную для малых углов α .

2. Для анализа режима рефракции RW (когда УВ пересекаются в точке А на свободной поверхности) используем точные соотношения на фронтах УВ (АВ, АС, AD) [1, 6]. Для элемента фронта УВ в автомодельных переменных $\xi = \frac{x}{c_0 t}, \eta = \frac{y}{c_0 t}$, описываемого уравнением $\xi = \xi(\eta)$ ($\xi' = \frac{d\xi}{d\eta}$) интенсивности $P_{ji} = \frac{p_j - p_i}{B_0^\pm}$ (i — значение перед фронтом, j — за фронтом), имеем условия динамической совместности:

$$\frac{\rho_i}{\rho_0} \cdot \frac{\left[(\xi - \eta\xi') - \left(\frac{u_i}{c_0} - \xi' \frac{v_i}{c_0} \right) \right]^2}{1 + \xi'^2} = N(P_{ji}); \quad \frac{\rho_i}{\rho_j} = \frac{N(P_{ji}) - P_{ji}}{N(P_{ji})},$$

$$P_{ji} = \frac{\rho_i}{\rho_0} \left[(\xi - \eta\xi') - \left(\frac{u_i}{c_0} - \xi' \frac{v_i}{c_0} \right) \right] \cdot \left(\frac{u_j}{c_0} - \frac{u_i}{c_0} \right), \quad (2)$$

$$\xi' \left(\frac{u_j}{c_0} - \frac{u_i}{c_0} \right) = \frac{v_i}{c_0} - \frac{v_j}{c_0}; \quad N(P_{ji}) = \frac{1 + 2a}{2} \cdot \frac{(d_1 + P_{ji})(d_2 + P_{ji})}{d_3 + P_{ji}}.$$

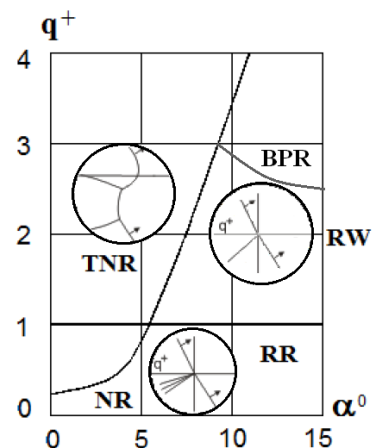


Рис. 2. Режимы рефракции УВ при $\varepsilon = 0.01$

Условие совместности течений на свободной поверхности АК (в верхней и нижней областях) в точке А ($\eta_A^+ = \eta_A^- = 0$, $\frac{x_A}{t} = c_0\xi$) приводят [7] к установлению двух инвариантов (см. рис. 1) (при $p_3 = p_2$, $u_{3n} = u_{2n} = u_n$, u_n –геометрическая составляющая):

$$(I) : \quad c_0^+ \xi_A^+ = c_0^- \xi_A^-, \quad \text{или} \quad \frac{c_0^+ N^{1/2}(P_{30})}{\cos \omega} = \frac{c_0^- N^{1/2}(P_{10})}{\cos \alpha}, \quad (3)$$

$$(II) : \quad \frac{v^+ - c_0^+ \eta_A^+}{u^+ - c_0^+ \xi_A^+} = \frac{v^- - c_0^- \eta_A^-}{u^- - c_0^- \xi_A^-} = \frac{1}{\xi'}, \quad \left(-\frac{1}{\xi'} = \tan \delta \right).$$

Из (II) инварианта ($u^- = u_2$, $v^- = v_2$; $u^+ = u_3$, $v^+ = v_3$) имеем

$$c_0^- \xi_A^- = \frac{v_3 u_2 - v_2 u_3}{v_3 - v_2}, \quad \tan \delta = \frac{v_2}{c_0^- \xi_A^- - u_2}. \quad (4)$$

3. Упрощение условий на фронтах УВ. Для относительно слабой падающей УВ АВ при $\gamma = \gamma^- \sim 10^{-6}$ и стандартных условиях [1, табл. с. 29] имеем оценки параметров ($B_0 = \rho_0 c_0^2 \sim 10^9 \div 10^8$, $\rho_0 \sim \rho^* \sim 10^3$):

$$P_{10} = \frac{p_0}{B_0} \cdot \varepsilon \sim 10^{-6} \div 10^{-5}; \quad P_{21} = \frac{p_0}{B_0} \cdot (q^+ - 1) \sim 10^{-6} \div 10^{-5}; \quad (5)$$

$$P_{30} = q^+ \bar{B} P_{10} \sim 10^{-3} \div 10^{-2}; \quad \bar{\varepsilon} = L_0(\gamma) \varepsilon \sim 10^{-2} \div 10^{-1}, \quad \bar{B} = \frac{\rho_0^- c_0^{-2}}{\rho_0^+ c_0^{+2}} \sim 10^3.$$

При записи выражений для $N(P_{ji})$ согласно (2) имеем для фронтов АВ, АС и АД упрощения согласно порядков (5) (D_0 – скорость УВ):

$$N(P_{10}) = \left(\frac{D_0}{c_0} \right)^2 = 1 + R_0(\gamma) P_{10}, \quad R_0(\gamma) = \frac{B_0}{p_0} - \frac{B_0}{k + p_0} \left(\frac{B_0}{p_0} - 1 \right);$$

$$N(P_{21}) = 1 + (2R_0(\gamma) - 1) P_{10} + R_0(\gamma) P_{21}; \quad \frac{\rho_0}{\rho^*} = \left(\frac{k + p_0}{k} \right)^2 \left(1 - \frac{p_0}{B_0} \right);$$

$$N(P_{30}) = 1 + R_0^+(\gamma^+) P_{30} = 1 + q^+ L_0^+(\gamma^+) \varepsilon = 1 + \frac{q^+}{\bar{L}} \bar{\varepsilon}, \quad \bar{L} = \frac{L_0^-}{L_0^+}. \quad (6)$$

$$\left(R_0^+ = \frac{\kappa + 1}{2}, \quad L_0^+ = \frac{\kappa + 1}{2\kappa}, \quad \kappa = C_{pII}/C_{vII} \right).$$

Используя точные выражения (2) на фронтах УВ для u_2, v_2, u_3, v_3 , получим при упрощениях (5), (6) выражения для угла β и ξ_A^-

$$\tan \beta = \tan \alpha \left(1 - \frac{1}{2 \sin^2 \alpha} \cdot q^+ \bar{\varepsilon} \right); \quad \xi_A^- = \frac{(1 + \bar{\varepsilon})^{1/2}}{\cos \alpha}. \quad (7)$$

4. Уравнения для ω и δ . Используя выражения для скоростей за фронтами АС, АД согласно (2), получим из (4) для (II) инварианта выражение для $\tan \omega$:

$$\tan \omega = \frac{\left(2 - q^+ + \frac{q^+ - 1}{2 \sin^2 \alpha} q^+ \bar{\varepsilon}\right) [\bar{c}^2(1 + \bar{\varepsilon}) - \cos^2 \alpha P_{30}] P_{10}}{[(1 + \bar{\varepsilon}) - \cos^2 \alpha \cdot q^+ \cdot P_{10}] P_{30}} \cdot \tan \alpha. \quad (8)$$

После упрощений согласно (5), (6) для ω и δ имеем

$$\tan \omega = \frac{\rho_0^+}{\rho_0^-} \left(\frac{2 - q^+}{q^+} + \frac{q^+ - 1}{2 \sin^2 \alpha} \bar{\varepsilon} \right) \cdot \tan \alpha; \quad \tan \delta = \frac{\sin \omega \cdot \cos \omega}{\left(1 + \frac{q^+}{L} \bar{\varepsilon}\right)} \cdot \frac{q^+ p_0}{B_0^+} \cdot \frac{\bar{\varepsilon}}{L_0^-}. \quad (9)$$

5. Уравнение для q^+ получим, исключая $\tan \omega$ из выражений для (I) и (II) инвариантов (3) в переменных $\alpha^\nu = \frac{\tan \alpha}{\bar{\varepsilon}^{1/2}}$, $c_\gamma = \frac{1 - \frac{1}{\bar{\varepsilon}}}{\bar{\varepsilon}}$:

$$2c_\gamma + \alpha^{\nu 2} - \frac{q^+}{L} + 1 = 0. \quad (10)$$

6. Расчеты. В точке пересечения границ области RW (см. рис. 2) $q^+ = 1$ и левой границы $\alpha^{\nu 2} = \frac{\tan^2 \alpha}{\bar{\varepsilon}} = \frac{q^+}{2 \left(\frac{q^+ - 2}{q^+ - 1} \right) - q^+ \bar{\varepsilon}}$ можно определить предельные значения $\gamma^* \leq \gamma$ и $\alpha^{o*} \leq \alpha^o$ (подставляя $q^+ = 1$ в (10)). Так при $\varepsilon = 0$ имеем [4] $\bar{c} = 1$, т.е. $c_0^-(\gamma) = c_0^+$, и $\gamma^* = 0.965 \cdot 10^{-6}$, $\alpha^{o*} = 0$ при $\varepsilon = 0.041$, $\gamma^* = 1.000 \cdot 10^{-6}$, $\alpha^{o*} = 11.8$.

Для вычисления параметра $q^+ = \frac{(p_3 - p_0)}{(p_1 - p_0)}$ используем (10) в виде

$$q^+ = \frac{1}{L_0^+ \varepsilon} \left[2 \left(1 - \frac{c_0^+}{c_0^-(\gamma)} \right) + \tan^2 \alpha + L_0^-(\gamma) \varepsilon \right]$$

График $q^+/\varepsilon, \alpha, \gamma$ на рис. 3 дает наглядно информацию: q^+ — растет (до границы $\omega = 0$) с ростом α^o при фиксированных ε, γ ; с убыванием γ при фиксированных α, ε ; с убыванием ε при фиксированных α, γ .

На рис. 4, 5 представлены результаты расчета углов ω, δ, β в пространстве параметров $\varepsilon, \alpha, \gamma$ по формулам (9), (7). Углы ω, δ — малы.

В целом углы ω возрастают при удалении от верхней границы ($\omega = 0$) и приближении к границе $q^+ = 1$; углы δ при удалении от верхней границы ведут себя не монотонно. С ростом газосодержания γ и интенсивности ε также отмечаются возрастания углов ω и δ .

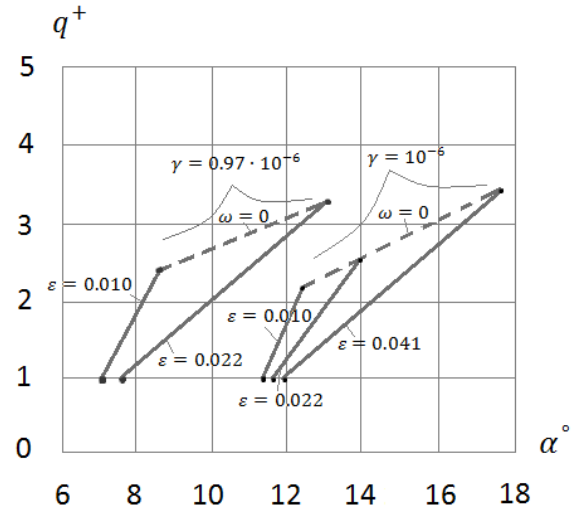


Рис. 3. $q^+/\varepsilon, \alpha, \gamma$

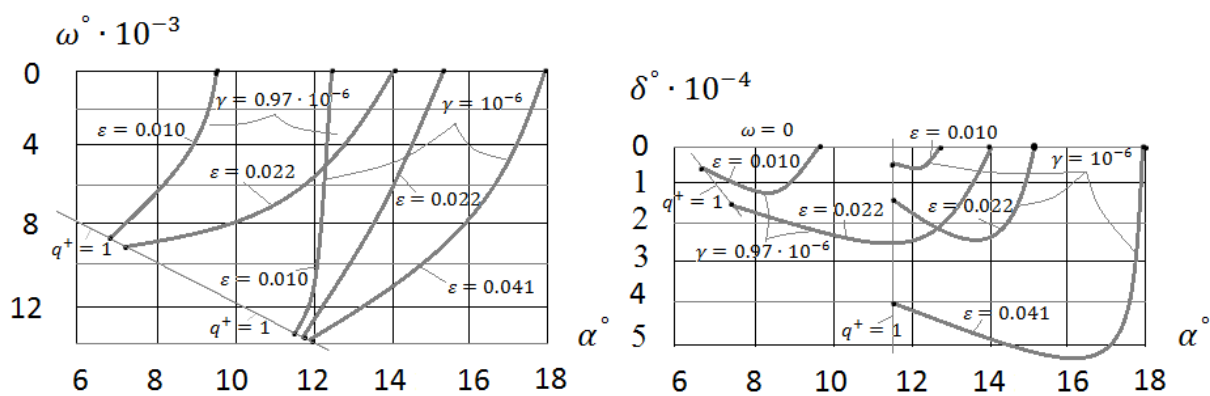


Рис. 4. $\omega/\varepsilon, \alpha, \gamma$; $\delta/\varepsilon, \alpha, \gamma$

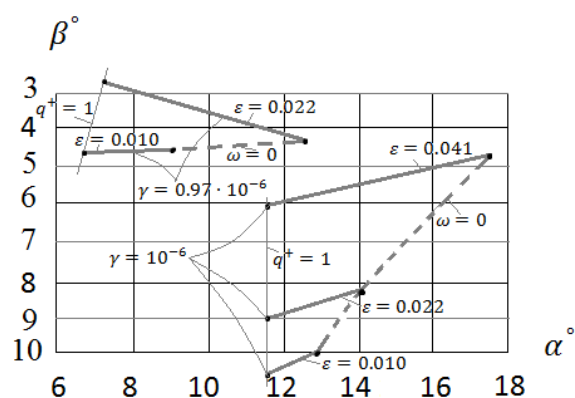


Рис. 5. Углы $2\beta/\varepsilon, \alpha, \gamma$

Зависимость углов отражения β от $\varepsilon, \alpha, \gamma$ на рис. 5 свидетельствует об их возрастании с ростом газосодержания γ и убыванием с ростом интенсивности ε .

Результаты расчета параметров режима рефракции RW представляют практический интерес, особенно для оценки ударных воздействий преломленной ударной волны в воздухе.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шиндяпин Г. П. Нелинейные взаимодействия ударных волн в газах и газожидкостных средах. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1997. 104 с.
2. Henderson L. F., Ma J., Sakurai A., Takayama K. Refraction of shock wave at an air—water interface // Fluid Dynamic Research. 1990. № 5. P. 337–350.
3. Шиндяпин Г. П., Матутин А. А. Возникновение невырожденной ударной волны в воздухе при рефракции ударной волны в океане // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2013. Вып. 15. С. 136–141.
4. Шиндяпин Г. П., Матутин А. А., Баранова Ю. Д. Влияние газосодержания водной среды на границы режимов рефракции ударных волн на поверхности океана // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2015. Вып. 17. С. 141–146.
5. Кутателадзе С. С., Накоряков А. В. Теплообмен и волны в газожидкостных системах. Новосибирск : Наука, 1984. 304 с.
6. Шиндяпин Г. П., Ковалев В. Е. Математическое моделирование в задачах динамики многофазных сред : в 2 ч. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1988. Ч. I. 75 с.
7. Шиндяпин Г. П., Матутин А. А. О законах подобия рефракции ударных волн в газовых и газожидкостных средах // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 146–150.

СОДЕРЖАНИЕ

СЕКЦИЯ МАТЕМАТИКИ

АБРАМОВА В. В., ДУДОВ С. И. О калибре сильно выпуклого множества	3
БОНДАРЕНКО Н. П., ЕФРЕМОВА Л. С. Задача Хохштадта – Либермана для оператора Дирака с интегральным запаздыванием	6
БРЕДИХИН Д. А. Об одном классе группоидов бинарных отношений	9
БУКУШЕВА А. В. О проективных преобразованиях продолженных субри- мановых структур	12
БУТЕРИН С. А. Обратная спектральная задача для интегродифферен- циального оператора Штурма–Лиувилля с условиями Робена	15
ГАЛАЕВ С. В. SQS-многообразия с обобщенной связностью Схоутена–ван Кампена	18
ГУДОШНИКОВА Е. В. Аппроксимативные свойства производных операто- ров Саса–Миракьяна	20
ГУРЕЕВ В. С., РЫХЛОВ В. С. О двукратной полноте корневых функций одного сильно нерегулярного пучка дифференциальных операторов 5-го порядка	23
ДУДОВ С. И., ОСИПЦЕВ М. А. О кольце минимальной площади, содержа- щем границу двумерного компакта	27
ЗАЛЕТАЕВА А. О., КРИВОБОК В. В. Численная реализация аппроксима- ций Паде	30
ЗАЛЕТАЕВА Е. В., НЕБАЛУЕВ С. И., СЕЦИНСКАЯ Е. В. Персистентные гомологии и толерантные пространства	33
КОРНЕВ В. В., ХРОМОВ А. П. Классические решения смешанных задач для волнового уравнения	36
КОРОБЧЕНКО Е. В., КРИВОБОК В. В., НЕБАЛУЕВ С. И. Спектральные последовательности толерантных расслоений	40
КУЗНЕЦОВА И. А. Иерархические игры с конечно-определенным прави- лом выбора и неполной информацией первого игрока о выборе второго	43
МОЛЧАНОВ В. А. О представлении топологических полугрупп преобразо- ваниями	47
МОЛЧАНОВ В. А., ФАРАХУТДИНОВ Р. А. О конкретной характеристике полугрупп эндоморфизмов бесконечных графов	50
НОВИКОВ В. Е. Свойства решётки концептов однозначного минимального контекста	53
ПОЛИКАРПОВ С. И., БАЛАНОВ И. А. Представление конечных детерми- нированных автоматов конечными рядами Фурье–Уолша	56
ПОПЛАВСКИЙ В. Б. Экстремальные идемпотенты упорядоченных моноидов	60

РАЗУМОВСКАЯ Е. В., ТИМОФЕЕВ В. Г. Об одном обобщении неравенства Адамара	64
РОЗЕН В. В. Выпуклое продолжение порядка на множество вероятностных мер	67
РОМАКИНА Л. Н. Координаты середин непараболических отрезков гиперболической плоскости положительной кривизны в каноническом репере первого типа	70
РЫХЛОВ В. С. О кратной полноте корневых функций одного класса сильно нерегулярных пучков дифференциальных операторов	73
ТИМОФЕЕВ В. Г. Об интегральном представлении решения эллиптического уравнения в трёхмерном слое	76
ХРОМОВА Г. В. Об одном представлении степеней оператора Стеклова	79
ЮРКО В. А. Об обратных задачах для дифференциальных операторов высших порядков с условиями разрыва внутри интервала	81

СЕКЦИЯ МЕХАНИКИ

АНОФРИКОВА Н. С., СИНЕЛЬНИКОВА С. Г. Применение метода асимптотически эквивалентных функций к решению задачи о распространении нестационарных волн в вязкоупругих стержнях	85
БОДРИЛОВ П. А., КОЖАНОВ В. С. Моделирование течения в ячейке с движущейся верхней стенкой и с твердым телом внутри с применением OpenFOAM	88
ВУ Х. А., САФОНОВ Р. А. Некоторые задачи изгиба конструкций из тонких пластин и цилиндрических оболочек с учетом температурного поля.	91
БЛИНКОВ Ю. А., ПАНКРАТОВ И. А., СИМОНОВА К. Р. Расчет обтекания шара с помощью стандартных решателей OpenFOAM	94
КОЖАНОВ В. С., МЫЛЬЦИНА А. С. Температурный пограничный слой вблизи передней критической точки затупленного тела с проницаемой поверхностью	97
КОЖАНОВ В. С., СЕВОСТЬЯНОВ Г. Д. Расчет экстремальных режимов вращения свободного тела	100
КОНДРАТОВ Д. В., РЕБРИНА А. Ю., ЕЛИСТРАТОВА О. В., ПОПОВА Е. В. Динамика взаимодействия трех соосных оболочек, свободно открытых на концах, взаимодействующих с двумя слоями вязкой жидкости в условиях вибрации	103
ЛУНЁВА А. Д., АНОФРИКОВА Н. С. Асимптотический метод определения двумерной безмоментной составляющей в наследственно-упругой оболочке при ударном продольном воздействии на её торец	106
МАЗЕПА М. М., КОЛЕСНИКОВА А. С. Модуль Юнга колонного графена на основе zigzag-УНТ	109
ПАНКРАТОВ И. А. Эволюционный алгоритм оптимизации межорбитальных перелетов космического аппарата с разрывным управлением	112
ПАНКРАТОВ И. А., ШАРОВ А. В. Математическое моделирование течений мелкой воды методом конечных элементов	115
ПАРФЕНОВА Я. А., РОТАРЬ А. В. Нестационарная краевая изгибная волна в тонкой пластине	118
РОДИОНОВ Е. А., ГОЛЯДКИНА А. А. Конечно-элементное моделирование миокарда левого желудочка сердца	121
ШИНДЯПИН Г. П., МАТУТИН А. А., ШАХРАЙ М. С. К расчету параметров рефракции ударных волн при их падении на поверхность океана.	124

Научное издание

МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА

Сборник научных трудов

ВЫПУСК 20

Ответственный за выпуск *Ю. В. Матвеева*
Технический редактор *Т. А. Трубникова*
Корректор *Е. Б. Крылова*
Оригинал-макет подготовила *Е. Д. Киреева*

Подписано в печать 27.12.2018.
Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 7.07 (8.25). Тираж 100 экз. Заказ 8-Т.

Издательство Саратовского университета. 410012, Саратов, Астраханская, 83.
Типография Саратовского университета. 410012, Саратов, Б. Казачья, 112А.