

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА

Сборник научных трудов

ВЫПУСК 17

Саратов

Издательство Саратовского университета

2015

УДК [51+531]
ББК (22.1+22.2)я43
М34

Математика. Механика : сб. науч. тр. – Саратов : Изд-во Сарат.
М34 ун-та, 2015. – Вып. 17. – 152 с. : ил.

Сборник содержит статьи сотрудников и аспирантов механико-математического факультета Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского. Представлены исследования по алгебре, геометрии, дискретной математике, математическому анализу, спектральной теории операторов, теории приближений, математической экономике, биомеханике, механике деформируемого твёрдого тела, оптимальному управлению движением космического аппарата, механике жидкости и газа и их приложениям.

Для научных работников, аспирантов и специалистов в области математики и механики.

Р е д а к ц и о н н а я к о л л е г и я :

Г. В. Хромова, доктор физ.-мат. наук (отв. редактор),
Г. П. Шиндяпин, доктор физ.-мат. наук (зам. отв. редактора),
Д. В. Прохоров, доктор физ.-мат. наук,
А. П. Хромов, доктор физ.-мат. наук,
П. Ф. Недорезов, доктор техн. наук,
Л. В. Бессонов (отв. секретарь)

УДК [51+531]
ББК (22.1+22.2)я43

Работа издана в авторской редакции

ISSN 1609-4751

© Саратовский университет, 2015

УДК 517.518.32

В. В. Абрамова

О СИСТЕМЕ ФАБЕРА—ШАУДЕРА НА ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Классическая система Фабера—Шаудера была определена на отрезке $[0,1]$ Фабером в 1910 году. Шаудер переоткрыл ее в 1927 году и до 70-х годов она называлась системой Шаудера. Работу Фабера вспомнили в 70-х годах и систему стали называть системой Фабера—Шаудера. Эта система является простейшим базисом пространства $C[0,1]$. Её свойства можно найти в [1]. В работе Аубакирова и Бокаева [2] рассмотрена обобщенная система Фабера—Шаудера, построенная по произвольной последовательности (p_n) натуральных чисел. Во всех этих работах система Фабера—Шаудера определялась на отрезке $[0,1]$.

В настоящей статье мы рассмотрим систему Фабера—Шаудера на равностороннем треугольнике со стороной длины 1. Укажем на плоскости явный вид системы. Докажем теорему о приближении частичными суммами Фабера—Шаудера. Покажем, что из системы Фабера—Шаудера можно выбросить любую из первых трех функций, и система останется замкнутой в L_p .

Функции Фабера—Шаудера на треугольнике.

Рассмотрим равносторонний треугольник $A_1A_2A_3$ со стороной длины 1. Такой случай является аналогичным для одномерного, только здесь будет представлена двумерная функция Фабера—Шаудера, состоящая из плоскостей. Для удобства будем задавать точки треугольника в барицентрических координатах x_1, x_2, x_3 , уравнение плоскости имеет вид

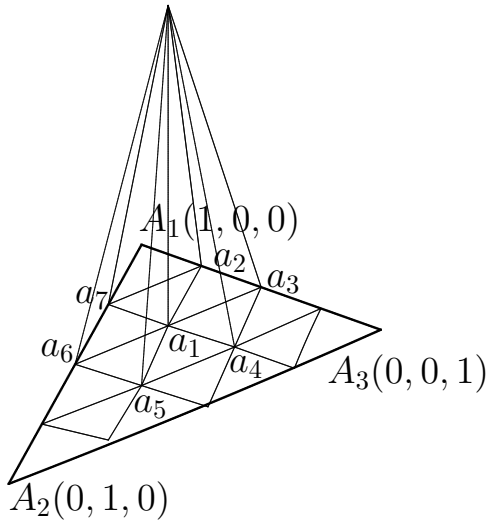
$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3,$$

где A, B, C – коэффициенты.

На 0-м шаге строим функции $\varphi_{i_1, i_2, i_3}^{(0)}$. Чтобы найти коэффициенты A, B, C , надо решить системы и получить 3 уравнения. В точке A_1 функция равна 1 (образуется прямой угол), а в точках A_2, A_3 равна 0. Получаем

$$\begin{cases} \varphi(1, 0, 0) = 1 \\ \varphi(0, 1, 0) = 0 \\ \varphi(0, 0, 1) = 0 \end{cases}$$

Решая систему, получаем уравнение плоскости: $\varphi_{1,0,0}^{(0)}(x_1, x_2, x_3) = x_1$. Для точек A_2 и A_3 рассуждения аналогичные.



На n -м шаге при произвольном $\varphi_{i_1, i_2, i_3}^{(n)}(x_1, x_2, x_3)$, где $i_1 + i_2 + i_3 = 2^n$, строим функции следующим образом: $\varphi_{i_1, i_2, i_3}^{(n)}(x_1, x_2, x_3)$ в точке $M(\frac{i_1}{2^n}, \frac{i_2}{2^n}, \frac{i_3}{2^n})$ будет равна 1, а дальнейшее построение будет зависеть от того, где лежит точка: на левой стороне ($\frac{i_3}{2^n} = 0$), на правой стороне ($\frac{i_2}{2^n} = 0$), на нижней ($\frac{i_1}{2^n} = 0$) или в середине (не на границе). В случае 1, 2 и 3 точка является вершиной у трех треугольников, а в 4 случае точка является вершиной для 6 треугольников. Рассмотрим общий случай 4, т. е. когда точка не лежит ни на одной из сторон. На рисунке треугольник вершина в точке $(\frac{i_1}{2^n}, \frac{i_2}{2^n}, \frac{i_3}{2^n})$ образует пирамиду, линейную на шести треугольниках, где точки

$$a_1 = (\frac{i_1}{2^n}, \frac{i_2}{2^n}, \frac{i_3}{2^n}), a_2 = (\frac{i_1 + 1}{2^n}, \frac{i_2 - 1}{2^n}, \frac{i_3}{2^n}), a_3 = (\frac{i_1}{2^n}, \frac{i_2 - 1}{2^n}, \frac{i_3 + 1}{2^n}),$$

$$a_4 = (\frac{i_1 - 1}{2^n}, \frac{i_2}{2^n}, \frac{i_3 + 1}{2^n}), a_5 = (\frac{i_1 - 1}{2^n}, \frac{i_2 + 1}{2^n}, \frac{i_3}{2^n}),$$

$$a_6 = (\frac{i_1}{2^n}, \frac{i_2 + 1}{2^n}, \frac{i_3 - 1}{2^n}), a_7 = (\frac{i_1 + 1}{2^n}, \frac{i_2}{2^n}, \frac{i_3 - 1}{2^n}).$$

Решаем систему как и на 0-м шаге, получаем коэффициенты и подставляем в уравнение поверхности. Тогда для каждого из треугольников уравнения примут вид:

$$\varphi_{i_1, i_2, i_3}^{(n)}(x_1, x_2, x_3) = 2^n \frac{i_2 + 1}{i_1 + i_2 + i_3} x_1 + 2^n \frac{1 - i_1 - i_3}{i_1 + i_2 + i_3} x_2 + 2^n \frac{i_2 + 1}{i_1 + i_2 + i_3} x_3;$$

$$\varphi_{i_1, i_2, i_3}^{(n)}(x_1, x_2, x_3) = 2^n \frac{1 - i_3}{i_1 + i_2 + i_3} x_1 + 2^n \frac{1 - i_3}{i_1 + i_2 + i_3} x_2 + 2^n \frac{i_1 + i_2 + 1}{i_1 + i_2 + i_3} x_3;$$

$$\varphi_{i_1, i_2, i_3}^{(n)}(x_1, x_2, x_3) = 2^n \frac{1 - i_2 - i_3}{i_1 + i_2 + i_3} x_1 + 2^n \frac{i_1 + 1}{i_1 + i_2 + i_3} x_2 + 2^n \frac{i_1 + 1}{i_1 + i_2 + i_3} x_3;$$

$$\varphi_{i_1, i_2, i_3}^{(n)}(x_1, x_2, x_3) = 2^n \frac{1 - i_2}{i_1 + i_2 + i_3} x_1 + 2^n \frac{i_1 + i_3 + 1}{i_1 + i_2 + i_3} x_2 + 2^n \frac{1 - i_2}{i_1 + i_2 + i_3} x_3;$$

$$\varphi_{i_1, i_2, i_3}^{(n)}(x_1, x_2, x_3) = 2^n \frac{i_3 + 1}{i_1 + i_2 - i_3} x_1 + 2^n \frac{i_3 + 1}{i_1 + i_2 - i_3} x_2 + 2^n \frac{1 - i_1 - i_2}{i_1 + i_2 - i_3} x_3;$$

$$\varphi_{i_1, i_2, i_3}^{(n)}(x_1, x_2, x_3) = 2^n \frac{i_2 + i_3 + 1}{i_1 + i_2 + i_3} x_1 + 2^n \frac{1 - i_1}{i_1 + i_2 + i_3} x_2 + 2^n \frac{1 - i_1}{i_1 + i_2 + i_3} x_3.$$

Частичные суммы вычисляются по формуле

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i_1 + i_2 + i_3 = 2^n} \sum_{k=1}^n c_{i_1, i_2, i_3}^{(k)} \varphi_{i_1, i_2, i_3}^{(k)}(x_1, x_2, x_3),$$

коэффициенты $c_{i_1, i_2, i_3}^{(k)}$ имеют вид

$$c_{0,1,0}^{(0)} = f(0, 1, 0), c_{1,0,0}^{(0)} = f(1, 0, 0), c_{0,0,1}^{(0)} = f(0, 0, 1) \text{ и т.д.}$$

Если $i_1 = 1$, i_1 – нечетные, то

$$c_{i_1, i_2, 0}^{(k)} = f\left(\frac{i_1}{2^n}, \frac{i_2}{2^n}, 0\right) - \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{i_1 + 1}{2^n}, \frac{i_2 - 1}{2^n}, 0\right) + f\left(\frac{i_1 - 1}{2^n}, \frac{i_2 + 1}{2^n}, 0\right) \right).$$

Если $i_1 = 1$, i_1 – нечетные, то

$$c_{i_1, 0, i_3}^{(k)} = f\left(\frac{i_1}{2^n}, 0, \frac{i_3}{2^n}\right) - \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{i_1 + 1}{2^n}, 0, \frac{i_3 - 1}{2^n}\right) + f\left(\frac{i_1 - 1}{2^n}, 0, \frac{i_3 + 1}{2^n}\right) \right).$$

Если $i_2 = 1$, i_2 – нечетные, то

$$c_{0, i_2, i_3}^{(k)} = f\left(0, \frac{i_2}{2^n}, \frac{i_3}{2^n}\right) - \frac{1}{2} \left(f\left(0, \frac{i_2 + 1}{2^n}, \frac{i_3 - 1}{2^n}\right) + f\left(0, \frac{i_2 - 1}{2^n}, \frac{i_3 + 1}{2^n}\right) \right).$$

Если i_1, i_2, i_3 все не равны 0, хоть одна из координат нечетная, $i_1 + i_2 + i_3 = 2^n$, то

$$c_{i_1, i_2, i_3}^{(k)} = f\left(\frac{i_1}{2^n}, \frac{i_2}{2^n}, \frac{i_3}{2^n}\right) - \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{i_1+1}{2^n}, \frac{i_2-1}{2^n}, \frac{i_3}{2^n}\right) + f\left(\frac{i_1-1}{2^n}, \frac{i_2+1}{2^n}, \frac{i_3}{2^n}\right)\right).$$

Частичные суммы кусочно-линейны на треугольниках, вершины которых лежат на поверхности. Если функция на треугольнике непрерывна, то частичные суммы сходятся равномерно, что доказывает теорема 1.

Теорема 1. Пусть $f(x_1, x_2, x_3)$ определена в треугольнике $A_1A_2A_3$, где каждая сторона равна 1, и непрерывна. И пусть $(\Delta_n)_{n=1}^\infty$ – равномерная треугольная сетка со сторонами $\frac{1}{2^n}$. Пусть далее $P_n(x_1, x_2, x_3)$ – интерполяционный многочлен первой степени, совпадающий с $f(x_1, x_2, x_3)$ в узлах сетки Δ_n . Тогда $\forall (x_1, x_2, x_3) \in \Delta$

$$|f(x_1, x_2, x_3) - P_n(x_1, x_2, x_3)| \leq 5\omega_{\frac{1}{2^n}}(f),$$

где модуль непрерывности

$$\omega_\delta(f) = \sup_{\|(x'_1, x'_2, x'_3) - (x_1, x_2, x_3)\|_2 \leq \delta} |f(x_1, x_2, x_3) - f(x'_1, x'_2, x'_3)|.$$

Теорема 2. Любую функцию нулевого ранга из трех, т. е. $\varphi_{1,0,0}^{(0)}$, $\varphi_{0,1,0}^{(0)}$ или $\varphi_{0,0,1}^{(0)}$, можно приблизить по норме пространства $L_p(\Delta^{(0)})$ сколь угодно близко функциями Фабера–Шаудера ранга больше 0, при этом остальные две функции нулевого ранга не участвуют в приближении.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М. : АФЦ, 1999. 560 с.
2. Аубакиров Т. У., Бокаев Н. А. О новом классе систем функций типа Фабера–Шаудера // Мат. заметки. 2007. Т. 82, вып. 5. С. 643–651.

УДК 514.764

А. В. Букушева

НЕЛИНЕЙНЫЕ СВЯЗНОСТИ И ВНУТРЕННИЕ ПОЛУПУЛЬВЕРИЗАЦИИ НА РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПОЧТИ КОНТАКТНОЙ МЕТРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

На распределении почти контактной метрической структуры вводятся понятия нелинейной связности и внутренней полупульверизации. Изучаются связи между полученными структурами.

Пусть D – распределение почти контактной метрической структуры $(D, \eta, D^\perp, \vec{\xi}, d)$. Являясь подмногообразием тотального пространства касательного расслоения, распределение D наследует многие из его дифференциально-геометрических свойств. В то же время, возможности для аналогий ограничены, так как в отличие от размерности TX размерность D – нечетна. В предлагаемой работе вводятся в рассмотрение аналоги структур, занимающих важное место в геометрии касательных расслоений.

Одной из самых известных структур, возникающих на касательном расслоении, является касательная структура J . В канонических координатах $(x^\alpha, x^{n+\beta})$ касательная структура получает следующее координатное представление: $J = \frac{\partial}{\partial x^{n+\alpha}} \otimes dx^\alpha$. Для определения аналога касательной структуры для контактного случая введем канонические координаты на распределении D .

Карту $K(x^\alpha)$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n, a, b, c, e = 1, \dots, n-1$) на многообразии X будем называть *адаптированной к неголономному многообразию* D , если $D^\perp = \text{span}(\frac{\partial}{\partial x^n})$ [1]. Пусть $P : TX \rightarrow D$ – проектор, определяемый разложением $TX = D \oplus D^\perp$, и $K(x^\alpha)$ – адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают систему D : $D = \text{span}(\vec{e}_a)$. Таким образом, мы имеем на многообразии X неголономное поле базисов $\vec{e}_\alpha = (\vec{e}_a, \partial_n)$ и соответствующее ему поле кобазисов $(dx^a, \theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a)$. Непосредственно проверяется, что $[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = M_{ab}^n \partial_n$, где компоненты M_{ab}^n образуют так называемый тензор неголономности [2]. Если потребовать, чтобы во всех используемых адаптированных картах выполнялось равенство $\vec{\xi} = \partial_n$, то, в частности, окажется справедливым равенство $[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = 2\omega_{ba} \partial_n$, где $\omega = d\eta$. *Адаптированным* будем называть также базис $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ как базис, определяемый адаптированной картой. Заметим, что имеет место равенство $\partial_n \Gamma_a^n = 0$. Пусть $K(x^\alpha)$ и $K(x^{\alpha'})$ – адаптированные карты, тогда при условии, что $\vec{\xi} = \partial_n$, получаем следующие формулы преобразования координат: $x^a = x^a(x^{\alpha'})$, $x^n = x^{n'} + x^n(x^{\alpha'})$.

Введем на D структуру гладкого многообразия, поставив в соответствие каждой адаптированной карте $K(x^\alpha)$ на многообразии X сверхкарту $\tilde{K}(x^\alpha, x^{n+a})$ на многообразии D , где (x^{n+a}) – координаты допустимого вектора в базисе $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$. Построенную сверхкарту будем называть *канонической*. Определим тензорное поле J типа $(1,1)$ на многообразии D , полагая, что в канонических координатах $J = \frac{\partial}{\partial x^{n+a}} \otimes dx^a$. Легко проверить, что определение поля J не зависит от выбора канонических координат. Как и в классическом случае, будем называть J

касательной структурой. Будем называть векторное поле \vec{S} внутренней полупульверизацией, если оно удовлетворяет двум условиям:

1. Векторное поле \vec{S} проецируемо и $\pi_*\vec{S} \in D$;
2. $J(\vec{S}) = \vec{C}$, где $\vec{C} = x^{n+a} \frac{\partial}{\partial x^{n+a}}$ – поле Лиувилля.

В канонических координатах $\vec{S} = x^{n+a} \frac{\partial}{\partial x^a} - 2G^b \frac{\partial}{\partial x^{n+b}}$. Будем говорить, что над распределением D задана нелинейная связность, если распределение $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, где $\pi : D \rightarrow X$ – естественная проекция, разбивается в прямую сумму вида $\tilde{D} = HD \oplus VD$, где VD – вертикальное распределение на тотальном пространстве D . Векторные поля $(\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - G_a^b \partial_{n+b}, \vec{u} = \partial_n, \partial_{n+a})$ определяют на D неголономное (адаптированное) поле базисов, а формы $(dx^a, \theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a, \theta^{n+a} = dx^{n+a} + G_b^a dx^b)$ – соответствующее поле кобазисов. Проводя необходимые вычисления, получаем следующие структурные уравнения: $[\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b] = 2\omega_{ba} \vec{u} + R_{ba}^c \partial_{n+c}$, $[\vec{\varepsilon}_a, \vec{u}] = x^{n+d} \partial_n G_a^c \partial_{n+c}$.

Теорема 1. *Всякая нелинейная связность, заданная на распределении D , определяет внутреннюю полупульверизацию.*

Доказательство. Не трудно проверить, что векторное поле $\vec{S} = x^{n+a} \vec{\varepsilon}_a$ является полупульверизацией, если положить $G^b = \frac{1}{2} x^{n+a} G_a^b$.

Теорема доказана.

Назовем внутренней полупульверизацию внутренней пульверизацией, если выполняется равенство $[\vec{C}, \vec{S}] = \vec{S}$.

Теорема 2. *Пусть \vec{S} – внутренняя пульверизация, тогда векторные поля $\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - G_a^b \partial_{n+b}$, где $G_a^b = \frac{\partial G^b}{\partial x^{n+a}}$, определяют нелинейную связность, заданную на распределении D .*

Доказательство. Достаточно воспользоваться теоремой Эйлера об однородных функциях и показать, что векторные поля $\vec{\varepsilon}_a$ линейно независимы в каждой точке и определяемое ими распределение трансверсально вертикальному распределению.

Теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Галаев С. В. Внутренняя геометрия метрических почти контактных многообразий // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 1. С. 16–22.
2. Вагнер В. В. Геометрия $(n - 1)$ -мерного неголономного многообразия в n -мерном пространстве // Труды семинара по векторному и тензорному анализу, 1941. Вып. 5. С. 173–255.

**ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА
ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ
С УСЛОВИЕМ РАЗРЫВА**

Пусть $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ – спектр краевой задачи $L = L(H, h, \alpha)$ вида

$$\ell y := iy' + \int_0^x H(x-t)y(t) dt = \lambda y, \quad x \in (0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi), \quad (1)$$

$$y(\pi/2 + 0) = \alpha y(\pi/2 - 0), \quad (2)$$

$$hy(0) = y(\pi), \quad (3)$$

где $H(x)$ – комплекснозначная функция, $(\pi - x)H(x) \in L_2(0, \pi)$, $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $\alpha \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Известным методом (см., напр., [1]) доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Собственные значения задачи L имеют вид*

$$\lambda_k = 2k + \omega + \kappa_k, \quad \{\kappa_k\} \in l_2. \quad (4)$$

При этом $\omega = (i\pi)^{-1}(\ln \alpha - \ln h)$.

В работе исследуется следующая обратная задача: по заданному спектру $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ и параметру α найти функцию $H(x)$ и коэффициент h . Наиболее полные результаты в теории обратных спектральных задач получены для дифференциальных операторов (см. обзор в [1]). В частности, обратная задача для оператора Штурма—Лиувилля с условиями разрыва изучалась в [2, 3]. Некоторые аспекты обратных задач для интегро-дифференциальных операторов без разрыва исследовались в [4–9] и других работах. Результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $\alpha \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Тогда для произвольной последовательности комплексных чисел $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ вида (4) существует единственная (с точностью до значений на множестве нулевой меры) функция $H(x)$, $(\pi - x)H(x) \in L_2(0, \pi)$, и единственное число $h \neq 0$, такие что $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ является спектром краевой задачи $L(H, h, \alpha)$.*

Доказательство. Пусть $e(x, \lambda)$, $e_1(x, \lambda)$ – решения уравнения (1) с начальным условием $e(0, \lambda) = e_1(0, \lambda) = 1$, и пусть функция $e_1(x, \lambda)$ удовлетворяет также условию разрыва (2). Тогда собственные значения задачи L совпадают с нулями ее характеристической функции $\Delta(\lambda) :=$

$= h - e_1(\pi, \lambda)$. Легко проверить, что справедливо следующее представление:

$$e_1(x, \lambda) = \begin{cases} e(x, \lambda), & 0 \leq x < \pi/2, \\ (\alpha - 1)e(\pi/2, \lambda)e(x - \pi/2, \lambda) + e(x, \lambda), & \pi/2 < x \leq \pi. \end{cases} \quad (5)$$

Таким образом, получаем

$$\Delta(\lambda) = h - (\alpha - 1)e^2(\pi/2, \lambda) - e(\pi, \lambda). \quad (6)$$

Также имеет место представление (см. [5])

$$e(x, \lambda) = \exp(-i\lambda x) + \int_0^x P(x, t) \exp(-i\rho(x - t)) dt, \quad (7)$$

где

$$P(x, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} i^{\nu} \frac{(x - t)^{\nu}}{\nu!} H^{*\nu}(t), \quad (8)$$

$$H^{*1}(x) = H(x), \quad H^{*(\nu+1)}(x) = H * H^{*\nu}(x) = \int_0^x H(x - t) H^{*\nu}(t) dt.$$

Согласно (6–8) будем иметь

$$\Delta(\lambda) = h(1 - \exp(i(\omega - \lambda)\pi)) + \int_0^{\pi} w(x) \exp(-i\lambda x) dx, \quad (9)$$

где $w(x) \in L_2(0, \pi)$. При этом

$$-w(\pi - x) =$$

$$= w_1(x) + (\alpha - 1) \begin{cases} 2w_2(x) + w_2^{*2}(x), & x \in (0, \pi/2), \\ \int_{x-\pi/2}^{\pi/2} w_2(x - t)w_2(t) dt, & x \in (\pi/2, \pi), \end{cases} \quad (10)$$

где

$$w_1(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} i^{\nu} \frac{(\pi - x)^{\nu}}{\nu!} H^{*\nu}(x), \quad w_2(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} i^{\nu} \frac{(\pi/2 - x)^{\nu}}{\nu!} H^{*\nu}(x).$$

На соотношение (10) можно смотреть как на нелинейное уравнение относительно функции $H(x)$, которое назовем основным уравнением обратной задачи. Аналогично теореме 2.1 в [10] доказывается, что для всякой функции $w(x) \in L_2(0, \pi)$ уравнение (10) имеет единственное решение $H(x)$, $(\pi - x)H(x) \in L_2(0, \pi)$. Далее, поскольку число α задано априори,

известным методом (см., напр., [1]), можно показать, что функция $\Delta(\lambda)$ определяется своими нулями однозначно по формуле

$$\Delta(\lambda) = h(1 - \exp(i\omega\pi)) \exp\left(\frac{i\lambda\pi \exp(i\omega\pi)}{1 - \exp(i\omega\pi)}\right) \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_k - \lambda}{\lambda_k^0} \exp\left(\frac{\lambda}{\lambda_k^0}\right), \quad (11)$$

где $\lambda_k^0 = 2k + \omega$ (случай $\omega/2 \in \mathbb{Z}$ вносит незначительные изменения).

Итак, по заданным числам λ_k , $k \in \mathbb{Z}$, вида (4) и известному α находим $h = \alpha \exp(-i\pi\omega)$ и строим функцию $\Delta(\lambda)$ по формуле (11). Аналогично соответствующему утверждению в [10] можно показать, что построенная таким образом функция $\Delta(\lambda)$ будет иметь вид (9) с некоторой функцией $w(x) \in L_2(0, \pi)$. Пусть $H(x)$ – решение основного уравнения (10) с этой функцией $w(x)$. Нетрудно увидеть, что заданная последовательность $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ является спектром построенной краевой задачи $L(H, h, \alpha)$ вида (1–3). Единственность следует из единственности решения основного уравнения (10).

Теорема доказана.

Замечание. Доказательство конструктивно и дает алгоритм решения обратной задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 15-01-04864, № 13-01-00134) и Минобрнауки РФ (проект № 1.1436.2014К).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Юрко В. А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : Физматлит, 2007. 384 с.
2. Юрко В. А. О краевых задачах с условиями разрыва внутри интервала // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36, вып. 8. С. 1139–1140.
3. Freiling G., Yurko V. A. Inverse spectral problems for singular non-selfadjoint differential operators with discontinuities in an interior point // Inverse Problems. 2002. Vol. 18. P. 757–773.
4. Юрко В. А. Обратная задача для интегро-дифференциальных операторов // Мат. заметки. 1991. Т. 50, вып. 5. С. 134–146.
5. Buterin S. A. On an inverse spectral problem for a convolution integro-differential operator // Results in Math. 2007. Vol. 50, № 3-4. P. 173–181.
6. Курьшова Ю. В. Обратная спектральная задача для интегро-дифференциальных операторов // Мат. заметки. 2007. Т. 81, вып. 6. С. 855–866.
7. Бутерин С. А. О восстановлении сверточного возмущения оператора Штурма—Лиувилля по спектру // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, вып. 1. С. 146–149.
8. Yurko V. A. An inverse spectral problems for integro-differential operators // Far East J. Math. Sci. 2014. Vol. 92, № 2. P. 247–261.
9. Buterin S. A., Choque Rivero A. E. On inverse problem for a convolution integro-differential operator with Robin boundary conditions // Appl. Math. Lett. 2015. Vol. 48. P. 150–155.

10. Бутерин С. А. Обратная спектральная задача восстановления оператора свертки, возмущенного одномерным оператором // Мат. заметки. 2006. Т. 80, вып. 5. С. 668–682.

УДК 514.764

С. В. Галаев

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ N -ПРОДОЛЖЕННЫХ СВЯЗНОСТЕЙ

Пусть X – гладкое многообразие нечетной размерности $n = 2m + 1$ с заданной на нем почти контактной метрической структурой $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$ [1]. Пусть, далее, ∇ – внутренняя связность на X [1]. Продолженная связность [2] определяется внутренней связностью и эндоморфизмом $N : D \rightarrow D$. В настоящей работе рассматриваются два случая построения продолженной связности. В первом случае мы рассматриваем продолженные связности, совместимые с допустимой симплектической структурой. Во втором – определяем вид эндоморфизма N для связности, возникающей на многообразии Кенмоцу.

Внутренняя линейная связность может быть определена заданием горизонтального распределения над пространством некоторого векторного расслоения. В случае внутренней связности в качестве такого расслоения выступает распределение D . Говорят, что над распределением D задана связность, если распределение $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, где $\pi : D \rightarrow X$ – естественная проекция, разбивается в прямую сумму вида $\tilde{D} = HD \oplus VD$, где VD – вертикальное распределение на тотальном пространстве D .

Пусть ∇ – внутренняя линейная связность, определяемая горизонтальным распределением HD , и $N : D \rightarrow D$ – поле допустимого тензора типа $(1,1)$. N -продолженной связностью назовем связность в векторном расслоении (D, π, X) , определяемую разложением $TD = \widetilde{HD} \oplus VD$, такую, что $\widetilde{HD} = HD \oplus \text{Span}(\vec{u})$, где $\vec{u}_{\vec{x}} = \vec{\varepsilon} - (N\vec{x})^v$, $\vec{\varepsilon} = \partial_n$, $\vec{x} \in D$, $(N\vec{x})^v$ – вертикальный лифт. Относительно базиса $(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n, \partial_{n+a})$ [2] поле \vec{u} получает следующее координатное представление: $\vec{u} = \partial_n - N_b^a x^{n+b} \partial_{n+a}$. Будем использовать следующее обозначение для N -продолженной связности: $\nabla^N = (\nabla, N)$. В двух частных случаях, когда $N = 0$ и $N = id_D$, будем писать соответственно $\nabla^1 = (\nabla, 0)$ и $\nabla^{\vec{v}} = (\nabla, \vec{v})$, где \vec{v} – поле Лиувилля: $\vec{v} = x^{n+a} \partial_{n+a}$.

Пусть ω – допустимая симплектическая структура [3]. Внутреннюю линейную связность ∇ будем называть *внутренней симплектической*

связностью, если $\nabla_{\vec{x}}\omega(\vec{y}, \vec{z}) = 0$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma D$. N -продолженную симметричную связность $\nabla^N = (\nabla, N)$ будем называть N -продолженной симплектической связностью, если $\nabla^N\omega = 0$. Последнее равенство сводится к двум равенствам: $\nabla_{\vec{x}}^N\omega(\vec{y}, \vec{z}) = \nabla_{\vec{x}}\omega(\vec{y}, \vec{z}) = 0$, $\nabla_{\vec{\xi}}^N\omega(\vec{y}, \vec{z}) = 0$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma D$. Таким образом, N -продолженная симплектическая связность получается из внутренней симплектической связности добавлением эндоморфизма N такого, что выполняется $\nabla_{\vec{\xi}}^N\omega(\vec{y}, \vec{z}) = 0$.

Теорема 1. Пусть ∇^N – произвольная N -продолженная связность без кручения. Рассмотрим тензоры N_1 и N_2 , определяемые соответственно равенствами

$$\nabla_{\vec{x}}^N\omega(\vec{y}, \vec{z}) = \omega(N_1(\vec{x}, \vec{y}), \vec{z}), \quad \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma D;$$

$$\nabla_{\vec{x}}^N\omega(\vec{y}, \vec{z}) = \omega(N_2\vec{y}, \vec{z}).$$

Тогда связность ∇^{N_2} , определяемая условиями

$$\nabla_{\vec{x}}^{N_2}\vec{y} = \nabla_{\vec{x}}^N\vec{y} + \frac{1}{3}N_1(\vec{x}, \vec{y}) + \frac{1}{3}N_1(\vec{y}, \vec{x}), \quad (1)$$

$$\nabla_{\vec{\xi}}^{N_2}\vec{y} = \nabla_{\vec{\xi}}^N\vec{y} + \frac{1}{2}N_2\vec{y}, \quad \vec{x}, \vec{y} \in \Gamma D, \quad (2)$$

является N -продолженной симплектической связностью.

Доказательство. Легко проверить, что ∇^{N_2} – симметричная связность. Равенство $\nabla_{\vec{\xi}}^{N_2}\omega(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ можно проверить, используя (1) и следуя доказательству аналогичного утверждения для симплектических связностей (см., напр., [4]). Используя (2), докажем равенство $\nabla_{\vec{\xi}}^{N_2}\omega(\vec{x}, \vec{y}) = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{\xi}}^{N_2}\omega(\vec{x}, \vec{y}) &= \vec{\xi}\omega(\vec{x}, \vec{y}) - \omega(\nabla_{\vec{\xi}}^{N_2}\vec{x}, \vec{y}) - \omega(\vec{x}, \nabla_{\vec{\xi}}^{N_2}\vec{y}) = \\ &= \nabla_{\vec{\xi}}^N\omega(\vec{x}, \vec{y}) - \frac{1}{2}\omega(N_2\vec{x}, \vec{y}) - \frac{1}{2}\omega(\vec{x}, N_2\vec{y}) = \\ &= \nabla_{\vec{\xi}}^N\omega(\vec{x}, \vec{y}) - \frac{1}{2}\omega(N_2\vec{x}, \vec{y}) + \frac{1}{2}\omega(N_2\vec{y}, \vec{x}) = \\ &= \nabla_{\vec{\xi}}^N\omega(\vec{x}, \vec{y}) - \frac{1}{2}\nabla_{\vec{\xi}}^N\omega(\vec{x}, \vec{y}) + \frac{1}{2}\nabla_{\vec{\xi}}^N\omega(\vec{y}, \vec{x}) = 0, \end{aligned}$$

что и доказывает теорему.

Теорема доказана.

Существует бесконечно много N -продолженных симплектических связностей. Покажем, что каждую внутреннюю симплектическую связность можно продолжить бесчисленным множеством способов до N -продолженной симплектической связности. Действительно, пусть $\nabla_{\vec{\xi}}^N$ –

произвольная N -продолженная симплектическая связность. Легко убедиться, что связность $\nabla_{\vec{\xi}}^{N_1}$ такая, что $\nabla_{\vec{\xi}}^{N_1}\vec{x} = \nabla_{\vec{\xi}}^N\vec{x} + N_2\vec{x}$, где $\omega(N_2\vec{x}, \vec{y}) = \omega(N_2\vec{y}, \vec{x})$, является N -продолженной симплектической связностью. Причем, $N_1 = N + N_2$.

Оснащение почти контактного метрического многообразия богатым набором тензорных структур влечет рассмотрение наряду со связностью Леви—Чивиты других примечательных связностей. Мы остановимся здесь лишь на работе Бежанку [5], который определяет связность ∇^B на многообразии Сасаки с помощью формулы

$$\nabla_{\vec{x}}^B = \tilde{\nabla}_{\vec{x}\vec{y}} - \eta(\vec{x})\tilde{\nabla}_{\vec{y}}\vec{\xi} - \eta(\vec{y})\tilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{\xi} + (\omega + c)(\vec{x}, \vec{y})\vec{\xi}.$$

В адаптированных координатах отличными от нуля компонентами $\Gamma_{\beta\gamma}^{B\alpha}$ связности ∇^B являются $\Gamma_{bc}^{Ba} = \Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$. Построенная Бежанку связность, вообще говоря, не является метрической в более общем случае почти контактной метрической структурой, чем структура Сасаки. Действительно, так как $\nabla_n^B g_{ab} = \partial_n g_{ab}$, то метричность связности Бежанку эквивалентна (почти) K -контактности почти контактной метрической структуры. Определим на многообразии с почти контактной метрической структурой связность ∇^N с помощью равенства $\nabla_{\vec{x}}^N = \nabla_{\vec{x}}^B\vec{y} + \eta(\vec{x})N\vec{y}$, где N – эндоморфизм из теоремы 2. Назовем введенную связность N -связностью. Отличными от нуля компонентами N -связности, самое большее, будут $\Gamma_{bc}^{Na} = \Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$, $\Gamma_{nc}^{Na} = N_c^a$. Кручение N -связности определяется равенством $S^N(\vec{x}, \vec{y}) = 2\omega(\vec{x}, \vec{y})\vec{\xi} + \eta(\vec{x})N\vec{y} - \eta(\vec{y})N\vec{x}$. Непосредственными вычислениями в адаптированных координатах проверяется справедливость следующего утверждения: N -связность, определяемая N -продолженной метрической связностью, является метрической связностью.

Теорема 2. *Допустимая дифференциальная 2-форма максимального ранга ω является допустимой симплектической формой тогда и только тогда, когда существует совместимая с ней симметричная связность Бежанку.*

Доказательство. Если ω – допустимая симплектическая форма, то достаточно положить в карте Дарбу коэффициенты искомой связности равными нулю. Пусть теперь $\nabla^1 = (\nabla, 0)$ – симметричная связность Бежанку, сохраняющая форму ω . Условие $d\omega_{nab} = \frac{1}{3}\partial_n\omega_{ab}$ выполняется, так как $N = 0$. Далее, проводя циклическую перестановку индексов в равенстве $\vec{e}_a\omega_{bc} = \Gamma_{ab}^d\omega_{dc} + \Gamma_{ac}^d\omega_{bd}$ и складывая затем полученные равенства, получаем $\vec{e}_a\omega_{bc} + \vec{e}_b\omega_{ca} + \vec{e}_c\omega_{ab} = 0$, что и доказывает теорему.

Теорема доказана.

Почти контактное метрическое пространство называется *многообразием Кенмоцу* [6], если выполняются условия $d\eta = 0$, $d\Omega = 2\eta \wedge \Omega$. Известно (см. [6]), что почти контактное метрическое пространство является многообразием Кенмоцу тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$(\nabla_{\vec{x}}\varphi)\vec{y} = -\eta(\vec{y})\varphi\vec{x} - g(\vec{x}, \varphi\vec{y})\vec{\xi}. \quad (3)$$

Равенство (3) влечет следующее равенство (см. [6]): $L_{\vec{\xi}}g = 2(g - \eta \otimes \eta)$. Отсюда следует, что для многообразия Кенмоцу $L_{\vec{\xi}}g(\vec{x}, \vec{y}) = 2g(\vec{x}, \vec{y})$, $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma D$. Имеет место

Теорема 3. *Если ∇_n^N – метрическая N -связность многообразия Кенмоцу, то $g(\vec{x}, \vec{y}) = g(N\vec{x}, \vec{y})$, $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma D$.*

Таким образом, для метрической N -связности многообразия Кенмоцу эндоморфизм N совпадает с тождественным оператором: $\nabla^N = (\nabla, \vec{v})$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Галаев С. В. Внутренняя геометрия метрических почти контактных многообразий // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 1. С. 16–22.
2. Букушева А. В., Галаев С. В. Связности над распределением и геодезические пульверизации // Изв. вузов. Сер. Математика. 2013. № 4. С. 1–9.
3. Галаев С. В., Гохман А. В. Внутренняя связность, ассоциированная с вполне интегрируемым лежандровым слоением // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2014. Вып. 16. С. 22–25.
4. Gelfand I., Retakh V., Shubin M. Fedosov Manifolds // Advances in Mathematics. 1998. Vol. 136, № 1. P. 104–140.
5. Bejancu A. Kähler contact distributions // J. of Geometry and Physics. 2010. Vol. 60. P. 1958–1967.
6. Pitis G. Geometry of Kenmotsu manifolds. Publishing House of Transilvania University of Brasov, Brasov, 2007. 160 p.

УДК 514.764

С. В. Галаев, А. В. Гохман

О ЛАГРАНЖЕВЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С НЕИНТЕГРИРУЕМОЙ ЛИНЕЙНОЙ СВЯЗЬЮ

На основе использования геометрической структуры распределения контактного метрического многообразия определяются дифференциальные операторы, которые приводят к уравнениям Лагранжа механической системы с неинтегрируемой линейной связью. Среди механических систем с неинтегрируемой линейной связью выделяются регулярные механические системы, для которых фундаментальная форма определяет

допустимую симплектическую форму распределения продолженной почти контактной метрической структуры. Вводится понятие динамической системы. Формулируются теоремы, утверждающие, что динамическая система, соответствующая механической системе, является полупульверизацией, а также, что динамическая система механической системы с однородной кинетической энергией совпадает с пульверизацией.

Пусть X – гладкое многообразие нечетной размерности n , TX – $C^\infty(X)$ модуль гладких векторных полей на X . Все многообразия, тензорные поля и другие геометрические объекты предполагаются гладкими класса C^∞ . Предположим, что на многообразии X задана контактная метрическая структура $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$.

Карту $K(x^\alpha)$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n, a, b, c, e = 1, \dots, n-1$) многообразия X будем называть *адаптированной к распределению D* , если $D^\perp = \text{span}(\frac{\partial}{\partial x^n})$ [1, 2]. Пусть $P : TX \rightarrow D$ – проектор, определяемый разложением $TX = D \oplus D^\perp$, и $K(x^\alpha)$ – адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают систему D : $D = \text{span}(\vec{e}_a)$.

Тензорное поле t типа (p, q) , заданное на почти контактном метрическом многообразии, назовем *допустимым (к распределению D)*, если t – полилинейное отображение $t : \Gamma(D)^p \otimes \Gamma(D^*)^q \rightarrow F(X)$, где $F(X)$ – кольцо гладких функций на X .

Говорят, что над распределением D задана связность, если распределение $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, где $\pi : D \rightarrow X$ – естественная проекция, разбивается в прямую сумму вида $\tilde{D} = HD \oplus VD$, где VD – вертикальное распределение на тотальном пространстве D . Введем на D структуру гладкого многообразия, поставив в соответствие каждой адаптированной карте $K(x^\alpha)$ на многообразии X сверхкарту $\tilde{K}(x^\alpha, x^{n+a})$ на многообразии D , где (x^{n+a}) – координаты допустимого вектора в базисе $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$. Построенную сверхкарту также будем называть *адаптированной*. Задание связности над распределением эквивалентно заданию объекта $G_b^a(x^a, x^{n+a})$ такого, что $HD = \text{Span}(\vec{\varepsilon}_a)$, где $\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - G_b^a \partial_{n+b}$. Связность над распределением определяется внутренней линейной связностью следующим образом $G_b^a(x^a, x^{n+a}) = \Gamma_{bc}^a(x^a)x^{n+c}$.

Введем понятие N -продолженной связности. Зададим векторное поле \vec{u} на многообразии D , имеющее следующее координатное представление $\vec{u} = \partial_n - N_b^a x^{n+b} \partial_{n+a}$, где эндоморфизм $N : D \rightarrow D$ может быть выбран произвольно. N -продолженная связность осуществляет параллельный перенос допустимого вектора вдоль произвольных кривых многообразия X и может быть применима к любому допустимому тензорному полю. В частности, применение N -продолженной связности к (до-

пустимому) метрическому тензору g допускает следующее координатное описание: $\nabla_a g_{bc} = \vec{e}_a g_{bc} - \Gamma_{ab}^d g_{dc} - \Gamma_{ac}^d g_{bd}$, $\nabla_n g_{bc} = \partial_a g_{bc} - N_b^d g_{dc} - \Gamma_c^d g_{bd}$.

Пусть, далее, Ω – допустимая замкнутая внешняя 2-форма максимального ранга, например, – фундаментальная форма структуры. В общем случае $\Omega \neq \omega$. Будем называть Ω допустимой симплектической структурой. Под контактным гамильтоновым векторным полем, ассоциированным с функцией f , в [3] понималось единственное векторное поле \vec{u} , удовлетворяющее равенствам $i_{\vec{u}}\eta = f$, $i_{\vec{u}}\omega = (\vec{\xi}f)\eta - df$. Рассмотрим более общий случай, заменяя форму $\omega = d\eta$ на произвольную допустимую симплектическую структуру Ω .

Теорема 1. Пусть Ω – допустимая симплектическая структура, f – гладкая функция на многообразии X . Тогда существует единственное векторное поле $\vec{u} = u^a \vec{e}_a + u^n \partial_n$ такое, что 1. $i_{\vec{u}}\eta = f$, 2. $i_{\vec{u}}\Omega = (\vec{\xi}f)\eta - df$.

Искомое векторное поле однозначно определяется равенством

$$\vec{u} = \Omega^{ac}(\vec{e}_c f)\vec{e}_a + f\partial_n. \quad (1)$$

Векторное поле \vec{u} назовем *обобщенной гамильтоновой системой*, а первое слагаемое в правой части (1) – *допустимой обобщенной гамильтоновой системой с гамильтонианом f* . Векторное поле $\vec{S} \in \Gamma\tilde{D}$ на многообразии назовем *полульверизацией на многообразии X* , если выполняется условие $\pi_*(\vec{S}_{\vec{v}}) = \vec{v}$, $\vec{v} \in D$.

Полульверизацию \vec{S} будем называть *пульверизацией*, если она удовлетворяет дополнительному условию $[\vec{C}, \vec{S}] = \vec{S}$, где $\vec{C} = x^{n+a}\partial_{n+a}$ – поле Лиувилля на D . Имеет место

Теорема 2. Внутренняя связность определяет пульверизацию \vec{S} , координатное представление которой имеет вид: $\vec{S} = x^{n+a}\vec{\epsilon}_a$, где $\vec{\epsilon}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - \Gamma_{ab}^c x^{n+b} \partial_{n+c}$.

Для определения необходимых в дальнейшем операторов, действующих на многообразии D , воспользуемся N -продолженной метрической связностью, автоматически возникающей на многообразии с почти контактной метрической структурой. В этом случае на многообразии D возникает поле базисов $(\vec{\epsilon}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - \Gamma_{ac}^b x^{n+c} \partial_{n+b}, \vec{u} = \partial_n - N_b^a x^{n+b} \partial_{n+a}, \partial_{n+a})$, которому соответствует поле кобазисов $(dx^a, \Theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a, \Theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma_{bc}^a x^{n+c} dx^b + N_b^a x^{n+b} dx^n)$. Вертикальный эндоморфизм $V : TD \rightarrow TD$ определим следующим образом: $V(\vec{\epsilon}_a) = \partial_{n+a}$, $V(\partial_{n+a}) = V(\vec{u}) = \vec{0}$. Вертикальное дифференцирование i_V алгебры дифференциальных форм локально определяется формулами $i_V f = 0$, $i_V(dx^a) = i_V(\Theta^n) = 0$, $i_V(\Theta^{n+a}) = dx^a$.

Коммутатор $d_V = [i_V, d]$ является антидифференцированием степени 1 и называется *вертикальным антидифференцированием*.

Механической системой с нулевой внешней силой будем называть пару $M = (X, T)$, где X – многообразие с контактной метрической структурой, T – гладкая функция на распределении D . Будем называть X *конфигурационным многообразием*, D – *фазовым пространством*, а T – *кинетической энергией*. Замкнутая форма $\Omega = dd_V T$ называется *фундаментальной формой механической системы M* . Механическая система M называется *регулярной*, если ограничение фундаментальной формы на распределении \tilde{D} является допустимой симплектической формой. Векторное поле \vec{x} назовем *динамической системой*, соответствующей механической системе M , если \vec{x} – допустимая обобщенная гамильтонова система с гамильтонианом $T - \vec{C}T$. Справедливость следующей теоремы проверяется непосредственными вычислениями.

Теорема 3. *Динамическая система, соответствующая механической системе M , является полупульверизацией на X .*

На многообразии X с контактной метрической структурой $(D, \varphi, \vec{\xi}, \eta, g, X)$ определяется механическая система с кинетической энергией $T = \frac{1}{2}g_{ab}x^{n+a}x^{n+b}$. Такую механическую систему будем называть *контактной метрической механической системой*.

Теорема 4. *Динамическая система контактной метрической механической системы $M = (X, T)$ совпадает с пульверизацией.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Галаев С. В.* Внутренняя геометрия метрических почти контактных многообразий // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 1. С. 16–22.
2. *Вагнер В. В.* Геометрия $(n - 1)$ -мерного неголономного многообразия в n -мерном пространстве // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. 1941. Вып. 5. С. 173–255.
3. *Pitis G.* Hamiltonian Fields and Energy in Contact Manifolds // International Journal of Geom. Methods in Modern Physics. 2008. Vol. 5, iss. 1. P. 63–77.

ПОЧТИ КОНТАКТНЫЕ КЭЛЕРОВЫ ПРОСТРАНСТВА, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТЬЮ НАД РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

На распределении контактной структуры с помощью продолженной симплектической связности определяется (продолженная) почти контактная метрическая структура. Находятся условия, при которых полученная структура является почти контактной кэлеровой структурой.

Почти контактное метрическое пространство называется *почти контактным кэлеровым пространством* [1], если его фундаментальная форма замкнута и выполняется условие почти нормальности:

$$N_\varphi + 2(d\eta \circ \varphi) \otimes \vec{\xi} = 0. \quad (1)$$

Пусть теперь D – гладкое распределение контактной структуры (X, η, D) . Дифференциальная 2-форма $\omega = d\eta$ определяет на многообразии X допустимую симплектическую структуру [2].

В адаптированных координатах (см. [2]) ненулевые компоненты ее внешнего дифференциала имеют следующий вид: $d\omega_{abc} = \frac{1}{3}(\vec{e}_a\omega_{bc} + \vec{e}_b\omega_{ca} + \vec{e}_c\omega_{ab})$, $d\omega_{nab} = \frac{1}{3}\partial_n\omega_{ab}$.

Внутреннюю линейную связность ∇ (см. [1]) будем называть *внутренней симплектической связностью*, если $\nabla_{\vec{x}}\omega(\vec{y}, \vec{z}) = 0$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma D$. N -продолженную симметричную связность $\nabla^N = (\nabla, N)$ будем называть *N -продолженной симплектической связностью*, если $\nabla^N\omega = 0$. Последнее равенство сводится к двум равенствам: $\nabla_{\vec{x}}^N\omega(\vec{y}, \vec{z}) = \nabla_{\vec{x}}\omega(\vec{y}, \vec{z}) = 0$, $\nabla_{\vec{\xi}}^N\omega(\vec{y}, \vec{z}) = 0$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma D$. Таким образом, N -продолженная симплектическая связность получается из внутренней симплектической связности добавлением эндоморфизма N такого, что выполняется $\nabla_{\vec{\xi}}^N\omega(\vec{y}, \vec{z}) = 0$.

Теорема 1. Пусть ∇^N – произвольная N -продолженная связность без кручения. Рассмотрим тензоры N_1 и N_2 ,

$$\nabla_{\vec{x}}^N\omega(\vec{y}, \vec{z}) = \omega(N_1(\vec{x}, \vec{y}), \vec{z}), \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma D,$$

$$\nabla_{\vec{x}}^N\omega(\vec{y}, \vec{z}) = \omega(N_2\vec{y}, \vec{z}).$$

Тогда связность ∇^{N_2} , определяемая условиями

$$\nabla_{\vec{x}}^{N_2}\vec{y} = \nabla_{\vec{x}}^N\vec{y} + \frac{1}{3}N_1(\vec{x}, \vec{y}) + \frac{1}{3}N_1(\vec{y}, \vec{x}), \quad (2)$$

$$\nabla_{\vec{\xi}}^{N_2} \vec{y} = \nabla_{\vec{\xi}}^N \vec{y} + \frac{1}{2} N_2 \vec{y}, \quad \vec{x}, \vec{y} \in \Gamma D, \quad (3)$$

является N -продолженной симплектической связностью.

Доказательство. Легко проверить, что ∇^{N_2} – симметричная связность. Равенство $\nabla_{\vec{\xi}}^{N_2} \omega(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ можно проверить, используя (2). Используя (3), докажем равенство $\nabla_{\vec{\xi}}^{N_2} \omega(\vec{x}, \vec{y}) = 0$. Имеем:

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{\xi}}^{N_2} \omega(\vec{x}, \vec{y}) &= \vec{\xi} \omega(\vec{x}, \vec{y}) - \omega(\nabla_{\vec{\xi}}^{N_2} \vec{x}, \vec{y}) - \omega(\vec{x}, \nabla_{\vec{\xi}}^N \vec{y}) = \\ &= \nabla_{\vec{\xi}}^N \omega(\vec{x}, \vec{y}) - \frac{1}{2} \omega(N_2 \vec{x}, \vec{y}) - \frac{1}{2} \omega(\vec{x}, N_2 \vec{y}) = \\ &= \nabla_{\vec{\xi}}^N \omega(\vec{x}, \vec{y}) - \frac{1}{2} \omega(N_2 \vec{x}, \vec{y}) + \frac{1}{2} \omega(N_2 \vec{y}, \vec{x}) = \\ &= \nabla_{\vec{\xi}}^N \omega(\vec{x}, \vec{y}) - \frac{1}{2} \nabla_{\vec{\xi}}^N \omega(\vec{x}, \vec{y}) + \frac{1}{2} \nabla_{\vec{\xi}}^N \omega(\vec{y}, \vec{x}) = 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Будем считать, что на гладком многообразии X задана контактная структура $(D, \eta, D^\perp, \vec{\xi})$ и внутренняя симметричная связность, совместимая с формой $\omega = d\eta$. На тотальном пространстве D векторного расслоения (D, π, X) определим почти контактную метрическую структуру $(\tilde{D}, \tilde{g}, J, \tilde{\eta}, D)$, где $\tilde{\eta} = \eta \circ \pi_*$, $J(\vec{\varepsilon}_a) = \partial_{n+a}$, $J(\partial_{n+a}) = -\vec{\varepsilon}_a$, $J(\partial_n) = 0$, $\tilde{g} = \omega_{ab} dx^a \otimes \Theta^{n+b} - \omega_{ab} \Theta^{n+a} \otimes dx^b + \Theta^n \otimes \Theta^n$, $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, $\tilde{D} = HD \oplus VD$, VD – вертикальное распределение на тотальном пространстве D , а HD – горизонтальное распределение, определяемое внутренней линейной связностью. Поле Рибба для почти контактной метрической структуры $(\tilde{D}, \tilde{g}, J, \tilde{\eta}, D)$ является поле $\vec{u} = \partial_n$.

Теорема 2. Почти контактная метрическая структура $(\tilde{D}, \tilde{g}, J, \tilde{\eta}, D)$ почти нормальна тогда и только тогда, когда распределение D является распределением нулевой кривизны.

Доказательство. Перепишем равенство (1) в новых обозначениях.

$$N_J + 2(d\tilde{\eta} \circ J) \otimes \vec{u} = 0.$$

В работе [2] было доказано, почти контактная структура является почти нормальной тогда и только тогда, когда $\tilde{P} \circ N_J = 0$, где $\tilde{P} : TD \rightarrow \tilde{D}$ – проектор.

Проводя непосредственные вычисления, получаем следующие выражения для компонент тензора Нейенхейса аффинора J :

$$N_J(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b) = -R_{abc}^e x^{n+c} \partial_{n+e},$$

$$\begin{aligned}
N_J(\partial_{n+a}, \partial_{n+b}) &= 2\omega_{ba}\partial_n + R_{abc}^e x^{n+c}\partial_{n+e}, \\
N_J(\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}) &= 0, \\
N_J(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n) &= N_J(\partial_{n+a}, \partial_n) = -x^{n+c}P_{ac}^b\partial_{n+b}.
\end{aligned}$$

Таким образом, почти контактная метрическая структура $(\tilde{D}, \tilde{g}, J, \tilde{\eta}, D)$ почти нормальна тогда и только тогда, когда обращаются в нуль тензор кривизны Схоутена [2]:

$$R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = \nabla_{\vec{x}}\nabla_{\vec{y}}\vec{z} - \nabla_{\vec{y}}\nabla_{\vec{x}}\vec{z} - \nabla_{P[\vec{x}, \vec{y}]} \vec{z} - P[Q[\vec{x}, \vec{y}]]\vec{z} = 0.$$

Пусть теперь $\Omega(\vec{x}, \vec{y}) = \tilde{g}(\vec{x}, J\vec{y})$ – фундаментальная форма структуры $(\tilde{D}, \tilde{g}, J, \tilde{\eta}, D)$. Вычислим ее внешний дифференциал.

Проводя необходимые вычисления, убеждаемся в справедливости следующего утверждения: $d\Omega = 0 \leftrightarrow d\omega = 0$. Таким образом, теорема 2 допускает следующее уточнение.

Теорема 3. *Почти контактная метрическая структура $(\tilde{D}, \tilde{g}, J, \tilde{\eta}, D)$ является почти контактной кэлеровой структурой тогда и только тогда, когда распределение D является распределением нулевой кривизны.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Галаев С. В. Почти контактные кэлеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны // Изв. вузов. Сер. Математика. 2014. № 8. С. 42–52.
2. Галаев С. В. Внутренняя геометрия метрических почти контактных многообразий // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 1. С. 16–22.

УДК 517.51

Е. В. Гудошникова

ОЦЕНКИ ПОРЯДКА ПРИБЛИЖЕНИЯ И ТЕОРЕМЫ НАСЫЩЕНИЯ ДЛЯ КЛАССА ОПЕРАТОРОВ

Рассмотрим класс линейных положительных операторов с простым условием сходимости последовательности операторов к тождественному.

Определение 1. *Будем говорить, что последовательность линейных положительных операторов принадлежит классу W , если выполнены условия*

$$L_n(1; x) = 1 \text{ и } \frac{d}{dx} L_n(f(t); x) = nW(x) L_n((t-x)f(t); x), \quad (1)$$

где $W(x)$ – аналитическая положительная функция.

Примерами операторов класса W могут служить операторы Бернштейна, Вейерштрасса, Саса—Миракьяна, Баскакова.

Теорема 1. Пусть $L_n(f; x)$ – линейные положительные операторы класса W . Если $f \in C[a; b]$, то

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq 2\omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \left(1 + \sqrt{v(x)}\right). \quad (2)$$

Если $f \in C^1[a; b]$, то

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq \omega\left(f'; \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \frac{v(x) + \sqrt{v(x)}}{\sqrt{n}}. \quad (3)$$

Если $f \in C^2[a; b]$, то

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq \omega\left(f''; \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \frac{V(x)}{n} + \frac{\|f''\|v(x)}{2n}, \quad (4)$$

где $V(x)$ – некоторая аналитическая функция, выражаемая через $v(x)$.

Если $f \in C^2[a; b]$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(L_n(f; x) - f(x)) = \frac{1}{2}f''(x)v(x). \quad (5)$$

Доказательство. Взяв $f(x) \equiv 1$, из (1) получим $L_n(t; x) = x$. Аналогично, взяв $f(t) = t$, получим $L_n(t^2; x) = x^2 + \frac{1}{nW(x)}$. Таким образом, L_n удовлетворяет теореме Коровкина, из которой следует утверждение (2).

Для $f \in C^1[0, 1]$, применяя формулу Лагранжа, неравенство Коши—Буняковского и свойства оператора L_n , получим

$$\begin{aligned} |L_n(f(t); x) - f(x)| &\leq L_n(|f'(\xi) - f'(x)| |t - x|; x) \leq \\ &\leq L_n((1 + \sqrt{n}|t - x|)|t - x|; x) \omega\left(f'; \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \\ &= \omega\left(f'; \frac{1}{\sqrt{n}}\right) [L_n(|t - x|; x) + \sqrt{n}L_n((t - x)^2; x)] \leq \\ &\leq \omega\left(f'; \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \left[\sqrt{L_n((t - x)^2; x)L_n(1; x)} + \sqrt{n}L_n((t - x)^2; x)\right] = \\ &= \omega\left(f'; \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \frac{\sqrt{v(x)} + v(x)}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

и (3) доказано.

Для $f \in C^2[0, 1]$, применяя формулу Тейлора и проводя аналогичные рассуждения, получим утверждение (4) и неравенство

$$\begin{aligned} & \left| L_n(f(t); x) - f(x) - \frac{f''(x)v(x)}{2n} \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{n} \omega\left(f''; \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \left(\frac{v(x)}{2} + \frac{\sqrt{v(x)}}{2} \sqrt{3v^2(x) + \frac{v(x)v'^2(x) + v^2(x)v''(x)}{n}} \right). \end{aligned}$$

Умножив последнее неравенство на n , замечаем, что правая часть стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, значит, и левая часть стремится к нулю, откуда и следует последнее утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Как видно из неравенств (2)–(4) порядок приближения для дифференцируемых функций лучше, чем для непрерывных, а для дважды дифференцируемых – чем для дифференцируемых. А из соотношения (5), которое является аналогом теоремы Вороновской, следует, что при дальнейшем повышении гладкости функций порядок приближения уже не улучшается.

Поэтому возникает идея, используя линейные положительные операторы, построить последовательности, дающие более высокий порядок приближения для m раз дифференцируемых функций, чем исходные операторы. Ниже будет рассмотрена одна из таких конструкций.

Определение 2. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $f \in C^m[a; b]$. $L_n(f; x)$ – последовательность операторов класса W . Положим

$$M_{n,1}(f; x) = M_{n,2}(f; x) = L_n(f; x),$$

для $m > 2$

$$M_{n,m}(f; x) = L_n(f; x) - \sum_{k=2}^{m-1} \frac{1}{k!} L_n((t-x)^k; x) M_{n,m-k}(f^{(k)}; x).$$

(Для частного случая, когда L_n это операторы Бернштейна, указанная последовательность операторов была построена Виденским [1].)

Теорема 2. Для $f \in C^{m-1}[a; b]$, $m \in \mathbb{N}$

$$|M_{n,m}(f; x) - f(x)| \leq \frac{1}{n^{\frac{m-1}{2}}} A_m(x) \omega\left(f^{(m-1)}; \frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

где $A_m(x)$ – аналитическая функция, заданная следующим образом:

$$A_1(x) = 2(1 + \sqrt{v(x)}), \quad A_2(x) = 2(v(x) + \sqrt{v(x)}),$$

для $m \geq 3$

$$A_m(x) = \sum_{k=2}^{m-1} \frac{V_k(x)A_{m-k}(x)}{k! n^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor - \frac{k}{2}}} + \frac{V_{m-1}^*(x) + V_m^*(x)}{(m-1)!},$$

$$V_1(x) = 0, V_2(x) = v(x),$$

так же для $m \geq 3$

$$V_m(x) = v(x) \left(n^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{d}{dx} V_{m-1}(x) + (m-1)V_{m-2}(x) \right),$$

$$V_m^*(x) = \begin{cases} V_m(x), & \text{если } m \text{ четное,} \\ \sqrt{V_{2m-2}(x)v(x)}, & \text{если } m \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Доказательство. Из условий (1), применяя бином Ньютона к выражению $(t-x)^k$, получаем

$$L_n((t-x)^{m+1}; x) = \frac{v(x)}{n} \left[\frac{d}{dx} L_n((t-x)^m; x) + mL_n((t-x)^{m-1}; x) \right].$$

Применяя метод математической индукции для $m \geq 2$, получим оценку

$$L_n((t-x)^m; x) = \frac{V_m(x)}{n^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor}}.$$

Откуда, применяя неравенство Коши—Буняковского, получим для $m \geq 2$

$$L_n(|t-x|^m; x) \leq \frac{V_m^*(x)}{n^{\frac{m}{2}}}.$$

Обозначим $R_{n,m}(f; x) = \frac{1}{m!} L_n((f^{(m)}(\xi) - f^{(m)}(x))(t-x)^m; x)$, где ξ лежит между t и x . Тогда с учетом полученных выше неравенств несложно получить

$$|R_{n,m}(f; x)| \leq \frac{1}{n^{\frac{m}{2}} m!} (V_m^*(x) + V_{m+1}^*(x)) \omega(f^{(m)}; \frac{1}{\sqrt{n}}).$$

Применяя к разложению функции $f(x)$ по формуле Тейлора оператор L_n , получим

$$M_{n,3}(f; x) - f(x) = \frac{1}{2} [f''(x) - L_n(f''; x)] L_n((t-x)^2; x) + R_{n,2}(f; x),$$

$$M_{n,4}(f; x) - f(x) = \frac{1}{2} [f''(x) - L_n(f''; x)] L_n((t-x)^2; x) +$$

$$+\frac{1}{3!}\left[f'''(x) - L_n(f'''; x)\right]L_n((t-x)^3; x) + R_{n,3}(f; x)$$

и, проводя соответствующие оценки и подстановки, получим утверждение теоремы для $m = 3$ и $m = 4$. Завершение доказательства проводится по индукции.

Теорема доказана.

Теорема 3. Для $f \in C^m[a; b]$, $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor} \left(M_{n,m}(f; x) - f(x) \right) = \frac{f^{(m)}(x)V_m(x)}{m!},$$

(то есть порядок приближения операторами $M_{n,m}(f; x)$ не лучше, чем $\frac{1}{n^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor}}$.)

Доказательство. Из определения оператора $M_{n,m}$ и формулы Тейлора непосредственно следует, что

$$\begin{aligned} & M_{n,m}(f; x) - f(x) - \frac{f^{(m)}(x)}{m!}L_n((t-x)^m; x) = \\ &= \sum_{k=2}^{m-1} \frac{1}{k!}L_n((t-x)^k; x) \left[f^{(k)}(x) - M_{n,m-k}(f^{(k)}; x) \right] + R_{n,m}(f; x). \end{aligned} \quad (6)$$

С учетом доказательства теоремы 2

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=2}^{m-1} \frac{1}{k!}L_n((t-x)^k; x) \left[f^{(k)}(x) - M_{n,m-k}(f^{(k)}; x) \right] + R_{n,m}(f; x) \right| \leq \\ & \leq \sum_{k=2}^{m-1} \frac{1}{k!} \frac{|V_k(x)|}{n^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}} \frac{A_{m-k}(x)}{n^{\frac{m-k-1}{2}}} \omega \left(f^{(m-1)}; \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \\ & \quad + \frac{V_m^*(x) + V_{m+1}^*(x)}{n^{\frac{m}{2}} m!} \omega \left(f^{(m)}; \frac{1}{\sqrt{n}} \right), \end{aligned}$$

что стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, и правая часть равенства (6) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, то есть

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor} \left(M_{n,m}(f; x) - f(x) \right) = \\ &= n^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor} \frac{f^{(m)}(x)}{m!}L_n((t-x)^m; x) = \frac{f^{(m)}(x)V_m(x)}{m!}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Виденский В. С. Многочлены Бернштейна. Л. : Изд-во Ленингр. пед. ин-та, 1990. 64 с.

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР С ЯДРОМ, ИМЕЮЩИМ СКАЧКИ НА СТОРОНАХ КВАДРАТА, ВПИСАННОГО В ЕДИНИЧНЫЙ КВАДРАТ

В настоящей работе изучается равносходимость разложений в тригонометрические ряды Фурье и по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) интегрального оператора, ядро которого терпит скачки на сторонах квадрата, вписанного в единичный квадрат. Частный случай такого оператора впервые рассматривался в [1]. Рассмотрим оператор

$$y = Af = \int_0^1 A(x, t) f(t) dt. \quad (1)$$

Обозначим:

$$A_1(x, t) = A(x, t), \quad \text{если } \{0 \leq t \leq 1/2 - x, 0 \leq x \leq 1/2\},$$

$$A_2(x, t) = A(x, t), \quad \text{если } \{1/2 + x \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1/2\},$$

$$A_3(x, t) = A(x, t), \quad \text{если } \{0 \leq t \leq -1/2 + x, 1/2 \leq x \leq 1\},$$

$$A_4(x, t) = A(x, t), \quad \text{если } \{3/2 - x \leq t \leq 1, 1/2 \leq x \leq 1\},$$

$$A_5(x, t) = A(x, t), \quad \text{если } \{1/2 - x \leq t \leq 1/2 + x, 0 \leq x \leq 1/2\} \text{ и} \\ \{-1/2 + x \leq t \leq 3/2 - x, 1/2 \leq x \leq 1\}.$$

Предположим, что $\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial t^l} A_i(x, t)$ ($i = 1, \dots, 5$) непрерывны в своих областях ($k + l \leq 2$, причем, если $k + l = 2$, то $k = l = 1$). $\frac{\partial}{\partial x} A_i(x, t)$ ($i = 1, \dots, 5$) непрерывно дифференцируемы в своих областях, причем

$$A_5(x, \frac{1}{2} - x + 0) - A_1(x, \frac{1}{2} - x - 0) = a,$$

$$A_5(x, \frac{1}{2} + x - 0) - A_2(x, \frac{1}{2} + x + 0) = b,$$

$$A_5(x, -\frac{1}{2} + x + 0) - A_3(x, -\frac{1}{2} + x - 0) = c,$$

$$A_5(x, \frac{3}{2} - x - 0) - A_4(x, \frac{3}{2} - x + 0) = d,$$

где a, b, c, d – постоянные.

Рассмотрим следующий оператор:

$$z = Bg = \int_0^{\frac{1}{2}} B(x, t)g(t)dt, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} z(x) &= (z_1(x), z_2(x), z_3(x), z_4(x))^T, \\ g(x) &= (g_1(x), g_2(x), g_3(x), g_4(x))^T, \\ B(x, t) &= \begin{pmatrix} 0 & A(x, \frac{1}{2} - t) & A(x, \frac{1}{2} + t) & 0 \\ A(\frac{1}{2} - x, t) & 0 & 0 & A(\frac{1}{2} - x, 1 - t) \\ A(\frac{1}{2} + x, t) & 0 & 0 & A(\frac{1}{2} + x, 1 - t) \\ 0 & A(1 - x, \frac{1}{2} - t) & A(1 - x, \frac{1}{2} + t) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Если $y = Af$, то $z = Bg$, где

$$z_1(x) = y(x), \quad z_2(x) = y(1/2 - x), \quad z_3(x) = y(1/2 + x), \quad z_4(x) = y(1 - x);$$

$$g_1(x) = f(x), \quad g_2(x) = f(1/2 - x), \quad g_3(x) = f(1/2 + x), \quad g_4(x) = f(1 - x).$$

Обратно: если $z = Bg$ и $g_1(x) = g_2(1/2 - x)$, $g_3(x) = g_4(1/2 - x)$, то $z_1(x) = z_2(1/2 - x)$, $z_3(x) = z_4(1/2 - x)$ и $y = Af$, где

$$f(x) = g_1(x) \text{ при } x \in [0, 1/2];$$

$$f(x) = g_3(-1/2 + x) \text{ при } x \in [1/2, 1]$$

и

$$y(x) = z_1(x) \text{ при } x \in [0, 1/2];$$

$$y(x) = z_3(-1/2 + x) \text{ при } x \in [1/2, 1].$$

Замечание. Представление типа (2) не единственно. Наше представление хорошо тем, что компоненты матрицы $B(x, t)$ терпят разрывы лишь на линии $t = x$.

Обозначим

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & a & b & 0 \\ -a & 0 & 0 & -b \\ -c & 0 & 0 & -d \\ 0 & c & d & 0 \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что Q обратима, т. е. требуем, чтобы $bc - ad \neq 0$. Обозначим $\tilde{B}(x, t) = Q^{-1}B_x(x, t)$. Пусть $D = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$ – матрица, подобная матрице Q , а Γ – матрица, осуществляющая преобразование подобия.

Представим оператор \tilde{B} в пространстве $L_2^2[0, \frac{1}{2}]$ в виде $\tilde{B} = W + V$, где $\|W\| < 1$, а V – конечномерный, т. е. $Vg(x) = \sum_{k=1}^m (g, \psi_k) \varphi_k(x)$, где $\{\psi_k\}_{k=1}^m, \{\varphi_k\}_{k=1}^m$ – линейно независимые системы в пространстве вектор-функций размерности 4, причём $\varphi_k(x)$ достаточно гладкие. Тогда можно доказать следующую лемму.

Лемма 1. *Оператор B^{-1} существует тогда и только тогда, когда $\text{rang } M = m$, где*

$$M = \begin{pmatrix} E + (\tilde{\varphi}, \psi)^T \\ \int_0^{\frac{1}{2}} \tilde{B}(0, t) \tilde{\psi}^T(t) dt \end{pmatrix},$$

здесь E – единичная матрица $m \times m$, $(\tilde{\varphi}, \psi) = (\tilde{\varphi}_j, \psi_k)_{j,k=1}^m$, $\tilde{\varphi}_k = (E + W)^{-1} \varphi_k$, $\tilde{\varphi}^T = (\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_m)$.

Имеет место теорема.

Теорема 2. *Для оператора B^{-1} справедливо представление*

$$B^{-1}z(x) = Pz'(x) + a_1(x)z(0) + a_2(x)z\left(\frac{1}{2}\right) + a_3(x)z(x) + \int_0^{\frac{1}{2}} a(x, t)z(t)dt,$$

$$Sz(0) + Tz\left(\frac{1}{2}\right) + \int_0^{\frac{1}{2}} a(t)z(t)dt = 0,$$

где $a_i(x)$, $i = \overline{1, 3}$, $a'_3(x)$, $a(x)$ – непрерывные матрицы-функции, каждая компонента матрицы $a(x, t)$ имеет такой же характер гладкости, что и компоненты $B_x(x, t)$, S, T – некоторые постоянные матрицы 4×4 .

Получим интегро-дифференциальную систему для резольвенты $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1}A$ оператора A .

Пусть $z = (E - \lambda B)^{-1}Bg$. Тогда $z - \lambda Bz = Bg$. Отсюда по теореме 2 получаем

$$Pz'(x) + a_1(x)z(0) + a_2(x)z\left(\frac{1}{2}\right) + a_3(x)z(x) + \tilde{N}z - \lambda z(x) = g(x), \quad (3)$$

$$Sz(0) + Tz\left(\frac{1}{2}\right) + \int_0^{\frac{1}{2}} a(t)z(t)dt = 0, \quad (4)$$

где $\tilde{N}z = \int_0^{\frac{1}{2}} a(x, t)z(t)dt$.

Теорема 3. *Если R_λ существует, то $R_\lambda f = v(x)$, где*

$$v(x) = z_1(x) \quad \text{при } x \in [0, \frac{1}{2}], \quad (5)$$

$$v(x) = z_3 \left(x - \frac{1}{2} \right) \quad \text{при } x \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right],$$

z_1, z_3 – первая и третья компоненты вектора $z(x)$, удовлетворяющего системе (3), (4). Обратно, если λ таково, что однородная краевая задача для (3), (4) имеет только нулевое решение, то R_λ существует и определяется по формуле (5).

Теперь можем сформулировать основной результат статьи.

Теорема 4. Пусть существует A^{-1} , ядро $A(x, t)$ удовлетворяет условиям из леммы 3. Тогда в S_δ для любой $f(x) \in L[0, 1]$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|S_r(f, x) - \sum_{j=1}^4 \gamma_{1j} \sigma_{r|\omega_j|}(\varphi_j, x)\|_{[\varepsilon, \frac{1}{2}-\varepsilon]} = 0,$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|S_r(f, x) - \sum_{j=1}^4 \gamma_{3j} \sigma_{r|\omega_j|} \left(\varphi_j, x - \frac{1}{2} \right)\|_{[\frac{1}{2}+\varepsilon, 1-\varepsilon]} = 0,$$

где $S_r(f, x)$ – частичная сумма ряда Фурье по с.п.ф. оператора A для тех характеристических чисел λ_k , для которых $|\lambda_k| < r$, $\sigma_r(f, x)$ – частичная сумма тригонометрического ряда Фурье на $[0, \frac{1}{2}]$ по системе $\{e^{4k\pi i x}\}$ для тех k , для которых $|4k\pi| < r$, $\gamma_{ij} (\delta_{ij})$ – компоненты матрицы $\Gamma(\Gamma^{-1})$, $\varphi_j(x) = \delta_{j1}f(x) + \delta_{j2}f(\frac{1}{2} - x) + \delta_{j3}f(\frac{1}{2} + x) + \delta_{j4}f(1 - x)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромов А. П. Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях // Мат. сб. 2006. №11. С. 115–142.

УДК 519.2

И. А. Кузнецова

ИЕРАРХИЧЕСКИЕ ИГРЫ С НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ ПЕРВОГО ИГРОКА О ВЫБОРЕ ВТОРОГО

Данная работа относится к теории иерархических игр [1–4]. Основная особенность таких игр состоит в том, что первый игрок обладает правом первого хода и возможностью организовывать обмен информацией между игроками. Оптимальный способ обмена информации при точном знании первым игроком выбора второго рассмотрен в [5]. В настоящей работе предполагается наличие ограничений на информированность первого игрока о выборе второго и найден оптимальный способ организации обмена информации при данном предположении.

Определение 1. Иерархической игрой называется система $\Gamma = (X, Y, F, \mu)$, где X – множество стратегий первого игрока, Y – множество стратегий второго игрока, $F : X * Y \rightarrow R$ – функция выигрыша первого игрока, μ – правила выбора, то есть отображение 2^{X*Y} в 2^{X*Y} такое, что при любом $T \subset X * Y$ $\mu(T) \neq \emptyset$ и $\mu(T) \subset T$.

С помощью правила выбора задаётся информированность первого игрока об интересах второго. Первый игрок знает, что если второму игроку предоставить возможность выбирать исходы из множества T , то выбранный исход будет обязательно находиться в $\mu(T)$.

Для упрощения изложения считаем, что множество стратегий игроков конечно.

Определение 2. Пусть $\Gamma = (X, Y, F, \mu)$ – иерархическая игра. Наибольший гарантированный результат первого игрока в данной игре обозначается $\gamma(\Gamma)$ и определяется равенством

$$\gamma(\Gamma) = \max_{x \in X} \min_{y: (x,y) \in \mu(\{x\} * Y)} F(x, y).$$

Организация первым игроком обмена информации между игроками формализуется с помощью понятия квазиинформационного расширения.

Определение 3. Пусть $\Gamma = (X, Y, F, \mu)$ – иерархическая игра. Квазиинформационным расширением данной игры называется игра $\bar{\Gamma} = (\bar{X}, \bar{Y}, \bar{F}, \bar{\mu})$ такая, что существует отображение

$$\pi : \bar{X} * \bar{Y} \longrightarrow X * Y,$$

удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} \forall x \in X \exists \bar{x} \in \bar{X} \forall \bar{y} \in \bar{Y} pr_1 \pi(\bar{x}, \bar{y}) = x, \\ \forall y \in Y \exists \bar{y} \in \bar{Y} \forall \bar{x} \in \bar{X} pr_2 \pi(\bar{x}, \bar{y}) = y, \\ \forall \bar{x} \in \bar{X} \forall \bar{y} \in \bar{Y} \bar{F}(\bar{x}, \bar{y}) = F(\pi(\bar{x}, \bar{y})), \\ \forall \bar{T} \subset \bar{X} * \bar{Y} \pi(\bar{\mu}(\bar{T})) = \mu(\pi(\bar{T})). \end{aligned}$$

Первые два условия означают сохранение в расширении исходных стратегий. Следующие два условия показывают связь интересов игроков в расширении и в исходной игре.

Теорема 1. Справедливо равенство

$$\gamma(\bar{\Gamma}) = \max_{\bar{T} \in \tau_{\bar{X}}} \min_{(x,y) \in T_{\bar{x}}} F(x, y).$$

Определение 4. *Расширение $\bar{\Gamma}_0$ называется оптимальным в некотором классе расширений, если для всех расширений $\bar{\Gamma}$ из данного класса верно неравенство $\gamma(\bar{\Gamma}) \leq \gamma(\bar{\Gamma}_0)$.*

В [5] описано расширение, оптимальное в классе всех квазиинформационных расширений.

Определение 5. *Будем говорить, что в расширении $\bar{\Gamma}$ игры Γ первый игрок не имеет самостоятельной информации о выборе y , если выполняется условие*

$$\forall \bar{x} \in \bar{X} \exists x \in X \forall y \in Y \exists \bar{y} \in \bar{Y} \pi(\bar{x}, \bar{y}) = (x, y).$$

Это условие отражает отсутствие у первого игрока возможности реагировать в своих стратегиях на выбор y .

Определение 6. *Положим $\bar{\Gamma}_{\tau_1} = (\tau_1, \varphi, \bar{F}, \bar{\mu})$, где τ_1 – семейство подмножеств $T \subset X * Y$, удовлетворяющих условию*

$$\exists x \in X \exists y \in Y (x, y) \in T,$$

φ – семейство отображений $\varphi : 2^{X*Y} \rightarrow X*Y$, обладающих свойством $\forall T \subset X * Y \varphi(T) \in T$, отображение $\pi : \tau_1 * \Phi \leftarrow X * Y$ задаётся равенством $\pi(T, \varphi) = \varphi(T)$.

Теорема 2. *Игра $\bar{\Gamma}_{\tau_1}$ является квазиинформационным расширением игры, в котором первый игрок не имеет самостоятельной информации о выборе y .*

Лемма. *Пусть $\bar{\Gamma}_1 = (\bar{X}_1, \bar{Y}_1, \bar{F}_1, \bar{\mu}_1)$ и $\bar{\Gamma}_2 = (\bar{X}_2, \bar{Y}_2, \bar{F}_2, \bar{\mu}_2)$ – два квазиинформационных расширения игры $\Gamma = (X, Y, F, \mu)$. Тогда включение $\tau_{\bar{X}_1} \subset \tau_{\bar{X}_2}$ влечёт за собой неравенство $\gamma(\bar{\Gamma}_1) \leq \gamma(\bar{\Gamma}_2)$.*

Доказательство. Имеем

$$\gamma(\bar{\Gamma}_1) = \max_{T \in \tau_{\bar{X}_1}} \min_{(x,y) \in \mu(T)} F(x, y) \leq \max_{T \in \tau_{\bar{X}_2}} \min_{(x,y) \in \mu(T)} F(x, y) = \gamma(\bar{\Gamma}_2),$$

что и требовалось доказать.

Лемма доказана.

Теорема 3. *Для любого квазиинформационного расширения $\bar{\Gamma}$ игры Γ , в котором первый игрок не имеет самостоятельной информации о выборе y , справедливо неравенство $\gamma(\bar{\Gamma}) \leq \gamma(\bar{\Gamma}_{\tau_1})$.*

Доказательство. Для доказательства утверждения теоремы достаточно показать, что для любого квазиинформационного расширения $\bar{\Gamma}$ игры Γ , в котором первый игрок не имеет самостоятельной информации о выборе y , справедливо включение $\tau_{\bar{X}} \subset \tau_1$. Возьмём некоторое такое расширение $\bar{\Gamma}$ и стратегию $\bar{x} \in \bar{X}$ в нём. Справедливо соотношение $\exists x \in X \forall y \in Y \exists \bar{y} \in \bar{Y} \pi(\bar{x}, \bar{y}) = (x, y)$, равносильное с учётом

определения $T_{\bar{x}}$ условию $\exists x \in X \forall y \in Y(x, y) \in T_{\bar{x}}$, которое и означает принадлежность $T_{\bar{x}}$ к τ_1 . Таким образом, действительно $\tau_{\bar{X}} \subset \tau_1$, что и требовалось доказать.

Теорема доказана.

Итак, \bar{F}_{τ_1} является оптимальным в классе всех расширений, в которых первый игрок не имеет самостоятельной информации о выборе y . Эквивалентной формой игры $\bar{\Gamma}_{\tau_1}$ является, например, игра $\bar{\Gamma}_{\tau_1'} = ((2^X)^Y * X, Y * \Psi \cup Y, \bar{F}, \bar{\mu})$, где Ψ – множество отображений $\psi : 2^X \rightarrow X$, удовлетворяющих условию $\forall T \subset X \psi(T) \in T$, $\pi_1'((T(y), x(y)), (y, \psi)) = (\psi(T(y)), y)$, $\pi_1'((T(y), x(y)), y) = (x(y), y)$. Здесь первый игрок предоставляет второму игроку возможность, выбрав y , выбрать так же и x в указанных первым игроком пределах. Если же второй игрок не хочет использовать эту возможность, то он выбирает просто y , делая тем самым исход игры равным (x, y) . Таким образом, первый игрок использует интересы второго игрока, точно их не зная.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Гермейер Ю. Б.* Игры с противоположными интересами. М. : Наука, 1976. 326 с.
2. *Кукушкин Н. С., Морозов В. В.* Теория неантагонистических игр М. : Изд-во Моск. ун-та, 1977. 104 с.
3. *Родюков А. В., Тараканов А. Ф.* О решении иерархической игры при неопределённости с суммарным риском игроков // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2007. № 5. С. 11–17.
4. *Кузнецова И. А.* Иерархические игры с неопределёнными факторами // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2013. Вып. 15. С. 21–24.
5. *Шолпо И. А.* Исследование операций. Теория игр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1983. 42 с.

УДК 517.96; 517.984

В. П. Курдюмов, А. П. Хромов

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА ФУРЬЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ МИНИМАЛЬНЫХ ТРЕБОВАНИЯХ НА ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

В настоящей работе методом контурного интегрирования резольвенты оператора, порожденного спектральной задачей, соответствующей смешанной задаче для волнового уравнения с комплексным потенциалом и закрепленными концами дается обоснование метода Фурье при ненулевых начальных функциях и минимальных требованиях на их гладкость

для существования классического решения. При этом существенно используется прием А. Н. Крылова ускорения сходимости рядов Фурье [1].

В [2] использованием метода контурного интегрирования получено классическое решение задачи

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - q(x)u(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad t \in (-\infty, \infty), \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = 0,$$

где $q(x) \in C[0, 1]$, комплекснозначна и

$$\varphi(x) \in C^2[0, 1], \quad \varphi(0) = \varphi(1) = \varphi''(0) = \varphi''(1) = 0. \quad (2)$$

Сейчас рассмотрим такую задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - q(x)u(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad t \in (-\infty, \infty), \quad (3)$$

$$u(0, 0) = u(1, 0) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \psi(x),$$

где, как и в задаче (1), $q(x) \in C[0, 1]$, комплекснозначна и

$$\psi(x) \in C^1[0, 1], \quad \psi(0) = \psi(1) = 0. \quad (4)$$

Отметим, что условия (2) являются минимальными для существования классического решения задачи (1), а условия (4) – для задачи (3).

Метод Фурье связан со спектральной задачей для оператора L :

$$Ly = -y''(x) + q(x)y(x), \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Известно, (см., напр., [3]), что собственные значения оператора L , достаточно большие по модулю, простые, и для них имеют место асимптотические формулы

$$\lambda_n = \rho_n^2, \quad \rho_n = n\pi + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (n = n_0, n_0 + 1, \dots).$$

Обозначим $\gamma_n = \{\rho \mid |\rho - n\pi| = \delta\}$, где $\delta > 0$ и достаточно мало, а $n \geq n_0$ и n_0 таково, что при всех $n \geq n_0$ граница γ_n не содержит ни одного из ρ_m и внутрь γ_n попадает лишь одно из них. Пусть $\tilde{\gamma}_n$ – образ γ_n в λ -плоскости ($\lambda = \rho^2$, $Re \rho \geq 0$). Обозначим через R_λ резольвенту оператора L , то есть $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$, где E – единичный оператор, λ –

спектральный параметр. Тогда формальное решение задачи (3) можно представить в виде

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\tilde{\gamma}_n} \right) (R_\lambda \psi) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda, \quad (5)$$

где $r > 0$ фиксировано и взято таким, что все собственные значения меньшие по модулю r имеют номера, меньшие n_0 ; на контуре $|\lambda| = r$ нет собственных значений. Нам потребуется легко получаемое из (5) следующее представление для $u(x, t)$:

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t), \quad (6)$$

где

$$u_0(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\tilde{\gamma}_n} \right) (R_\lambda^0 \psi) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda,$$

$$u_1(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\tilde{\gamma}_n} \right) (R_\lambda \psi - R_\lambda^0 \psi) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda,$$

$R_\lambda^0 = (L_0 - \lambda E)^{-1}$ – резольвента оператора L_0 , который есть L при $q(x) \equiv 0$.

Обозначим через $z_1(z, \rho)$ и $z_2(z, \rho)$ решения уравнения $y'' - q(x)y + \rho^2 y = 0$ с начальными условиями

$$z_1(0, \rho) = 1, \quad z_1'(0, \rho) = 0, \quad z_2(0, \rho) = 0, \quad z_2'(0, \rho) = 1.$$

Тогда $z_j(x, \rho)$ целые по ρ и даже по λ , где $\lambda = \rho^2$.

Теорема 1. *Имеет место формула*

$$R_\lambda f = z_2(x, \rho)(f, z_1) - v(x, \rho)(f, z_2) - (M_\rho f)(x), \quad (7)$$

где $v(x, \lambda) = \frac{z_2(x, \rho)z_1(1, \rho)}{z_2(1, \rho)}$, $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$, $M_\rho f = \int_0^x M(x, t, \rho)f(t)dt$,

$$M(x, t, \rho) = \begin{vmatrix} z_1(t, \rho) & z_2(t, \rho) \\ z_1(x, \rho) & z_2(x, \rho) \end{vmatrix}.$$

Для R_λ^0 имеет место (7), если вместо $v(x, \rho)$, $z_1(x, \rho)$, $z_2(x, \rho)$, M_ρ взять аналогичные $v^0(x, \rho)$, $z_1^0(x, \rho)$, $z_2^0(x, \rho)$, M_ρ^0 для оператора L_0 .

Лемма 1. *Имеет место формула*

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\tilde{\gamma}_n} \right) v^0(x, \rho)(\psi, z_2^0) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda.$$

Отсюда по теореме вычетов

$$u_0(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} (\psi(\xi), \sin n\pi\xi) \sin n\pi x \sin n\pi t.$$

Теорема 2. *Имеет место формула*

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{\psi}(\tau) d\tau,$$

где $\tilde{\psi}(\tau) \in C^1(-\infty, \infty)$, нечетна, $\tilde{\psi}(x+2) = \tilde{\psi}(x)$ и $\tilde{\psi}(x) = \psi(x)$ при $x \in [0, 1]$.

По теореме 1 нетрудно получается следующее представление для $u_1(x, t)$

$$u_1(x, t) = v_0(x, t) + \sum_{i=1}^2 v_i(x, t), \quad (8)$$

где

$$v_0(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\tilde{\gamma}_n} \right) v^0(x, \rho)(\psi, z_2 - z_2^0) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda,$$

$$v_1(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} [v(x, \rho) - v^0(x, \rho)] (\psi, z_2) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda,$$

$$v_2(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \geq n_0} \int_{\tilde{\gamma}_n} [v(x, \rho) - v^0(x, \rho)] (\psi, z_2) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda.$$

Нам потребуется следующая формула (оператор преобразования) (см. [4], с.17, 23):

$$z_2(x, \rho) = \frac{\sin \rho x}{\rho} + \int_0^x K(x, t) \frac{\sin \rho t}{\rho} dt,$$

где $K(x, t)$ непрерывно дифференцируема по x и t и $K(x, 0) = 0$.

Теорема 3. *Имеет место формула*

$$v_0(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \widetilde{\psi}_1(\tau) d\tau,$$

где $\widetilde{\psi}_1(\tau) \in C^1(-\infty, \infty)$, нечетна, $\widetilde{\psi}_1(x) = \widetilde{\psi}_1(x+2)$, $\widetilde{\psi}_1(x) = \psi_1(x)$, $x \in [0, 1]$, $\psi_1(x) = \int_0^1 K(\xi, x)\psi(\xi) d\xi$, $x \in [0, 1]$.

Теорема 4. Ряд $v_2(x, t)$ допускает почленное дифференцирование дважды по x и t при $x \in [0, 1]$ и $t \in (-\infty, \infty)$.

Из (6) и (8) с помощью теорем 2–4 получается следующая теорема.

Теорема 5. Формальное решение (5) есть классическое решение задачи (3) при условиях (4) на $\psi(x)$.

Теперь из теоремы 3 из [2] и теоремы 5 получается основной результат.

Теорема 6. Формальное решение

$$w(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\widetilde{\gamma}_n} \right) (R_\lambda \varphi) \cos \rho t d\lambda -$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\widetilde{\gamma}_n} \right) (R_\lambda \psi) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda$$

есть классическое решение задачи

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - q(x)u(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad t \in (-\infty, \infty),$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x)$$

при минимальных условиях (2) и (4) на $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00238)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Крылов А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. Л. : ГИТТЛ, 1950. 368 с.
2. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Резольвентный подход в методе Фурье // Докл. АН. 2014. Т. 458, № 2. С. 138–140.
3. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. 526 с.
4. Марченко В. А. Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения. Киев. : Наук. думка, 1977. 340 с.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ АФФИННАЯ СИСТЕМА ТИПА УОЛША

Пусть $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ – классическая система Уолша в нумерации Пэли и $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ – тригонометрическая аффинная система функций типа Уолша, порожденная функцией

$$u(t) = \frac{\pi}{2} \sin(2\pi t).$$

Теорема. *Тригонометрическая аффинная система функций типа Уолша $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ образует базис Рисса в пространстве $L^2(0, 1)$.*

Аффинные системы функций типа Уолша введены в [1]. Напомним их определение.

Пусть H – гильбертово пространство, состоящее из всех функций $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям:

$$f(t+1) = f(t), \quad f \in L^2(0, 1), \quad \int_0^1 f(t) dt = 0.$$

Определим изометрические операторы $W_0, W_1 : H \rightarrow H$ равенствами

$$W_0 f(t) = f(2t), \quad W_1 f(t) = r(t)f(2t),$$

где $r(t)$ – периодическая функция Хаара–Радемахера–Уолша.

Операторы W_0 и W_1 образуют структуру *мультидвига* в H (см. [2]). Для каждого натурального числа $n = \sum_{\nu=0}^{k-1} \alpha_{\nu} 2^{\nu} + 2^k$ положим

$$f_n(t) = W_{\alpha_0} \dots W_{\alpha_{k-1}} f(t) = f(2^k t) \prod_{\nu=0}^{k-1} r_{\nu}^{\alpha_{\nu}}(t),$$

где $\{r_k\}_{k=0}^{\infty}$ – система Радемахера. Кроме того, пусть $f_0(t) \equiv 1$. Система $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется *аффинной системой функций типа Уолша*, порожденной функцией f . В частности, если $f = r$, то мы получаем систему Уолша $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ в нумерации Пэли. Нас интересует случай $f = u$, т. е. тригонометрическая аффинная система типа Уолша $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Лемма. *Для коэффициентов Фурье–Уолша функции $u(t)$ имеем*

$$U_k = \left(\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} |(u, w_n)|^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} 2^k \sin^2 \frac{\pi}{2^{k+1}}, \quad k \geq 2.$$

Кроме того, имеем $U_0 = (u, w) = 1$ и $U_1 = 0$.

Доказательство теоремы. Докажем оценку

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} c_n(u_n - w_n) \right\| \leq q \left(\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \right)^{1/2}$$

с постоянной $0 < q < 1$, из которой базисность по Риссу системы $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ будет следовать стандартным образом. Для этого рассмотрим произведения операторов $W^\alpha = W_{\alpha_0} \dots W_{\alpha_{k-1}}$, где $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1})$ – произвольный конечный набор нулей и единиц длины $|\alpha| = k \geq 0$, которому сопоставим натуральное число $n = \sum_{\nu=0}^{k-1} \alpha_\nu 2^\nu + 2^k$. Из определения аффинной системы функций типа Уолша и с учетом леммы получим

$$u_n - w_n = W^\alpha(u - w) = W^\alpha \sum_{|\beta| \geq 2} (u, W^\beta w) W^\beta w.$$

Отсюда находим

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(u_n - w_n) = \sum_{\alpha} c_\alpha W^\alpha(u - w) = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{\alpha} \sum_{|\beta|=k} c_\alpha (u, W^\beta w) W^\alpha W^\beta w.$$

При каждом фиксированном k семейство $\{W^\alpha W^\beta w : |\alpha| \geq 0, |\beta| = k\}$ ортонормированное. Поэтому

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} c_n(u_n - w_n) \right\| &\leq \sum_{k=2}^{\infty} \left\| \sum_{\alpha} \sum_{|\beta|=k} c_\alpha (u, W^\beta w) W^\alpha W^\beta w \right\| = \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \left(\sum_{\alpha} |c_\alpha|^2 \sum_{|\beta|=k} |(u, W^\beta w)|^2 \right)^{1/2} = \sum_{k=2}^{\infty} U_k \left(\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Осталось заметить, что в силу леммы

$$q = \sum_{k=2}^{\infty} U_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=2}^{\infty} 2^k \sin^2 \frac{\pi}{2^{k+1}} < \frac{\pi^2}{8\sqrt{2}} < 1.$$

Теорема доказана.

Замечание. В работе [3] доказана минимальность аффинной системы функций типа Уолша $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ в пространстве $L^2(0, 1)$, порожденной произвольной ненулевой функцией $f \in H$. В частности, из результатов [3] следует существование биортонормально сопряженной системы $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ к тригонометрической аффинной системе типа Уолша $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$. При этом функции v_n являются полиномами порядка n по

системе Уолша, коэффициенты которых подлежат определению по коэффициентам Фурье—Уолша (u, w_n) с помощью явно выписанных в [3] рекуррентных соотношений. Таким образом, в силу теоремы биортонормальное разложение

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} (f, v_n) u_n$$

безусловно сходится для любой функции $f \in L^2(0, 1)$ и его частные суммы

$$S_N f = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} (f, v_n) u_n$$

подлежат эффективному вычислению по входным данным в виде набора коэффициентов Фурье—Уолша (f, w_n) , $n = 0, \dots, 2^N - 1$. Заметим, что частная сумма $S_N f$ является непрерывной кусочно-синусоидальной функцией (тригонометрическим сплайном простейшего вида) с узлами в двоично-рациональных точках. Установленная нами теорема показывает, что аппроксимация в среднем квадратическом функции f посредством частных сумм $S_N f$ обладает свойством устойчивости по отношению к заданию приближаемой функции с погрешностью.

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 1.1520.2014/К).

Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00102).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Терехин П. А. Аффинные системы функций типа Уолша. Ортогонализация и пополнение // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 4, ч. 1. С. 395–400.
2. Терехин П. А. Мультисдвиг в гильбертовом пространстве // Функц. анализ и его прил. 2005. Т. 39, вып. 1. С. 69–81.
3. Миронов В. А., Терехин П. А. Минимальность аффинных систем функций типа Уолша // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2014. Вып. 16. С. 42–44.

О СТРОЕНИИ МОРФИЗМОВ КАТЕГОРИИ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ПЛАНАРНЫХ АВТОМАТОВ

В работе рассматриваются автоматы над категорией конечных проективных плоскостей.

Под автоматом [1] понимается алгебраическая система $\mathbf{A} = (Q, S, B, \delta, \lambda)$, состоящая из множества состояний Q , полугруппы входных символов S , множества выходных символов B , функции переходов $\delta : S \times Q \rightarrow Q$ и функции выходов $\lambda : S \times Q \rightarrow B$, для которых при любых значениях $q \in Q$, $s_1, s_2 \in S$ выполняются равенства: $\delta(q, s_1 s_2) = \delta(\delta(q, s_1), s_2)$, $\lambda(q, s_1 s_2) = \lambda(\delta(q, s_1), s_2)$. Для каждого входного символа $s \in S$ определяются функция переходов $\delta_s : Q \rightarrow Q$ и функция выходов $\lambda_s : Q \rightarrow B$ по формулам: $\delta_s(x) = \delta(x, s)$ и $\lambda_s(x) = \lambda(x, s)$, где $x \in Q$.

Под *проективной плоскостью* [2] понимается система вида $\Pi = (X, L)$, где X – непустое множество точек и L – семейство его подмножеств, именуемых прямыми, удовлетворяющее следующим аксиомам: (A_1) через любые две точки проходит одна и только одна прямая; (A_2) каждая прямая содержит по крайней мере три точки; (A_3) в множестве X есть три точки, не лежащие на одной прямой; (A_4) любые две прямые имеют общую точку. Плоскость Π называется *конечной*, если конечно ее множество точек.

Пусть $\Pi = (X, L)$, $\Pi' = (X', L')$ – проективные плоскости. Отображение $\varphi : X \rightarrow X'$ называется *гомоморфизмом* Π в Π' и обозначается $\varphi : \Pi \rightarrow \Pi'$, если оно прямые плоскости Π отображает в прямые плоскости Π' . При этом гомоморфизм φ называется *эпиморфизмом* (соответственно *изоморфизмом*) *плоскости* Π *на плоскость* Π' , если $\varphi(\Pi) = \Pi'$ (соответственно, если φ – биекция X на X' , которая сохраняет прямые этих плоскостей). Множество всех гомоморфизмов Π в Π' обозначим $\text{Hom}(\Pi, \Pi')$.

Множество всех конечных проективных плоскостей образует категорию $\mathbf{P1}$, морфизмами которой являются гомоморфизмы таких плоскостей [3].

Следуя [1], автомат $\mathbf{A} = (Q, S, B, \delta, \lambda)$ называется *автоматом над категорией* $\mathbf{P1}$, если его множество состояний Q и множество выходных сигналов B наделены такими структурами плоскостей $\Pi_Q = (Q, L_Q)$, $\Pi_B = (B, L_B)$, что Π_Q, Π_B являются объектами категории $\mathbf{P1}$

и все отображения δ_s, λ_s ($s \in S$) являются морфизмами категории **Р1**. Такой автомат будем называть также *планарным автоматом* и символически обозначать $\mathbf{A} = (\Pi_Q, S, \Pi_B, \delta, \lambda)$.

Гомоморфизмом планарного автомата $\mathbf{A} = (\Pi_Q, S, \Pi_B, \delta, \lambda)$ в планарный автомат $\mathbf{A}' = (\Pi_{Q'}, S', \Pi_{B'}, \delta', \lambda')$ называется упорядоченная тройка $\gamma = (f, \pi, g)$, состоящая из гомоморфизмов $f : \Pi_Q \rightarrow \Pi_{Q'}$, $\pi : S \rightarrow S'$, $g : \Pi_B \rightarrow \Pi_{B'}$, для которых при любых значениях $q \in Q, s \in S$ выполняются равенства: $f(\delta(q, s)) = \delta'(f(q), \pi(s))$, $g(\lambda(q, s)) = \lambda'(f(q), \pi(s))$. Гомоморфизм $\gamma = (f, \pi, g)$ называется *эпиморфизмом (соответственно изоморфизмом) автомата \mathbf{A} на автомат \mathbf{A}'* , если все гомоморфизмы f, π, g являются эпиморфизмами (соответственно изоморфизмами).

Гомоморфизм проективной плоскости Π в себя называется ее *эндоморфизмом*. Множество всех эндоморфизмов Π с композицией образует полугруппу $\text{End } \Pi$. Для проективных плоскостей Π, Π' обозначим $S(\Pi, \Pi')$ полугруппу с основным множеством $\text{End } \Pi \times \text{Hom}(\Pi, \Pi')$ и операцией умножения (см. [1]) $(\varphi, \psi) \cdot (\varphi_1, \psi_1) = (\varphi\varphi_1, \varphi\psi_1)$, где $\varphi, \varphi_1 \in \text{End } \Pi$ и $\psi, \psi_1 \in \text{Hom}(\Pi, \Pi')$.

Для любых проективных плоскостей $\Pi_Q = (Q, L_Q), \Pi_B = (B, L_B)$ автомат $\mathbf{A} = (\Pi_Q, S(\Pi_Q, \Pi_B), \Pi_B, \delta, \lambda)$ с полугруппой входных сигналов $S(\Pi_Q, \Pi_B)$, функцией переходов $\delta(q, s) = \varphi(q)$ и выходной функцией $\lambda(q, s) = \psi(q)$ (здесь $q \in Q$ и $s = (\varphi, \psi) \in S(\Pi_Q, \Pi_B)$) является *планарным автоматом* и обозначается $\text{Atm}(\Pi_Q, \Pi_B)$. Такие автоматы называются *универсальными планарными автоматами* (см. [1]), так как их подавтоматы охватывают гомоморфные образы всех планарных автоматов. Основной результат работы [4] показывает, что универсальные планарные автоматы полностью определяются (с точностью до изоморфизма) своими полугруппами входных сигналов.

Класс универсальных планарных автоматов образует категорию **К_{Р1}**, морфизмами которой являются гомоморфизмы таких автоматов. Важность изучения таких морфизмов определяется тем, что гомоморфизмы автоматов играют важную роль в задачах моделирования автоматов, минимизации автоматов, факторизации автоматов и многих других.

Объекты категории **К_{Р1}** являются алгебраическими системами вида $\text{Atm}(\Pi_Q, \Pi_B)$, которые определяются парой объектов Π_Q, Π_B категории проективных плоскостей **Р1** и одним объектом $S(\Pi_Q, \Pi_B)$ категории полугрупп **Sg**, морфизмами которой являются гомоморфизмы таких полугрупп. Морфизмами категории **К_{Р1}** являются упорядоченные тройки отображений $\gamma = (f, \pi, g) : \text{Atm}(\Pi_Q, \Pi_B) \rightarrow \text{Atm}(\Pi_{Q'}, \Pi_{B'})$, которые состоят из

гомоморфизмов проективных плоскостей $f : \Pi_Q \rightarrow \Pi_{Q'}$, $g : \Pi_B \rightarrow \Pi_{B'}$ и гомоморфизма полугрупп $\pi : S(\Pi_Q, \Pi_B) \rightarrow S(\Pi_{Q'}, \Pi_{B'})$. Легко видеть, что соответствие

$$F : \text{Atm}(\Pi_Q, \Pi_B) \mapsto S(\Pi_Q, \Pi_B), \quad \gamma = (f, \pi, g) \mapsto \pi$$

определяет ковариантный функтор (см. [3]) категории универсальных планарных автоматов $\mathbf{K}_{\mathbf{P1}}$ в категорию полугрупп \mathbf{Sg} . Этот функтор позволяет исследовать свойства категории $\mathbf{K}_{\mathbf{P1}}$ с помощью изучения категории \mathbf{Sg} . Так, основной результат работы [4] дает описание строения изоморфизмов категории $\mathbf{K}_{\mathbf{P1}}$ и показывает, что функтор F устанавливает взаимно однозначное соответствие между изоморфизмами универсальных планарных автоматов и изоморфизмами полугрупп входных сигналов таких автоматов. В настоящей работе исследуется строение эпиморфизмов категории $\mathbf{K}_{\mathbf{P1}}$, устанавливается взаимосвязь между эпиморфизмами универсальных планарных автоматов и морфизмами полугрупп входных сигналов таких автоматов и доказывается, что все такие эпиморфизмы являются изоморфизмами.

Теорема 1. Пусть $\Pi_Q, \Pi_B, \Pi_{Q'}, \Pi_{B'}$ – конечные проективные плоскости и S, S' – полугруппы входных сигналов универсальных планарных автоматов $\text{Atm}(\Pi_Q, \Pi_B), \text{Atm}(\Pi_{Q'}, \Pi_{B'})$ над плоскостями Π_Q, Π_B и $\Pi_{Q'}, \Pi_{B'}$ соответственно. Тогда отображение $\pi : S \rightarrow S'$ в том и только том случае будет эпиморфизмом полугруппы S на полугруппу S' , если найдутся такие изоморфизмы $f : \Pi_Q \rightarrow \Pi_{Q'}$ и $g : \Pi_B \rightarrow \Pi_{B'}$, что для каждого входного символа $s = (\varphi, \psi) \in S$ значение $\pi(s)$ определяется по формуле: $\pi(s) = \pi(\varphi, \psi) = (f^{-1} \varphi f, f^{-1} \psi g)$.

Доказательство этой теоремы опирается на технику работы [4] и следующий результат.

Теорема 2. Пусть $\Pi = (X, L)$, $\Pi' = (X', L')$ – конечные проективные плоскости. Тогда любой эпиморфизмом плоскости Π на плоскость Π' является изоморфизмом этих плоскостей.

С помощью этих теорем доказывается основной результат настоящей работы.

Теорема 3. Пусть $\Pi_Q, \Pi_B, \Pi_{Q'}, \Pi_{B'}$ – конечные проективные плоскости, $\text{Atm}(\Pi_Q, \Pi_B), \text{Atm}(\Pi_{Q'}, \Pi_{B'})$ – универсальные планарные автоматы над плоскостями Π_Q, Π_B и $\Pi_{Q'}, \Pi_{B'}$ соответственно и $\gamma = (f, \pi, g)$ – эпиморфизм автомата $\text{Atm}(\Pi_Q, \Pi_B)$ на автомат $\text{Atm}(\Pi_{Q'}, \Pi_{B'})$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) отображения $f : \Pi_Q \rightarrow \Pi_{Q'}$, $g : \Pi_B \rightarrow \Pi_{B'}$ являются изоморфизмами проективных плоскостей и отображение $\pi : S(\Pi_Q, \Pi_B) \rightarrow$

$\rightarrow S(\Pi_{Q'}, \Pi_{B'})$ является изоморфизмом полугрупп, для которого при любых $(\varphi, \psi) \in S(\Pi_Q, \Pi_B)$ выполняется равенство: $\pi(\varphi, \psi) = (f^{-1} \varphi f, f^{-1} \psi g)$;

- 2) упорядоченная тройка отображений $\gamma = (f, \pi, g)$ является изоморфизмом автомата $\text{Atm}(\Pi_Q, \Pi_B)$ на автомат $\text{Atm}(\Pi_{Q'}, \Pi_{B'})$.

Следствие. Все эпиморфизмы категории $\mathbf{K}_{\mathbf{P}1}$ являются изоморфизмами.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А. Элементы алгебраической теории автоматов. М. : Высш. шк., 1994. 191 с.
2. Картези Ф. Введение в конечные геометрии. М. : Наука, 1980. 320 с.
3. Кон П. Универсальная алгебра. М. : Мир, 1968. 359 с.
4. Molchanov V. A. A universal planar automaton is determined by its semigroup of input symbols // Semigroup Forum. 2011. Vol. 82. P. 1–9.

УДК 519.7

В. Е. Новиков

ВЫЧИСЛЕНИЕ МНОЖЕСТВА ОПТИМАЛЬНЫХ КОНЦЕПТОВ В КОНТЕКСТЕ С УПОРЯДОЧЕННЫМИ МНОЖЕСТВАМИ АТТРИБУТОВ

В работе представлен алгоритм вычисления множества оптимальных концептов однозначного контекста с линейно упорядоченными множествами атрибутов.

Пусть задан однозначный контекст $\mathbb{K} = (G, (M_i), \rho)$, где G – конечное множество объектов $|G| \geq 2$, (M_i) – семейство конечных линейно упорядоченных множеств атрибутов $|M_i| \geq 2$, $1 \leq i \leq n$, с порядками \leq_i , и ρ – некоторое $(n + 1)$ -арное отношение. Тогда любое $M_{\bar{j}_k}$ ($\bar{j}_k \subseteq \bar{n}$) можно рассматривать как упорядоченное множество с порядком $\leq_{\bar{j}_k}$, для которого:

$$a_{\bar{j}_k} = (a_{j_1}, \dots, a_{j_k}) \leq_{\bar{j}_k} b_{\bar{j}_k} = (b_{j_1}, \dots, b_{j_k}) \Leftrightarrow a_{j_1} \leq_{j_1} b_{j_1} \wedge \dots \wedge a_{j_k} \leq_{j_k} b_{j_k}.$$

Ясно, что порядок $\leq_{\bar{j}_k}$ в общем случае не является линейным. Этот порядок естественным образом индуцирует изоморфный порядок на множестве концептов G/\bar{j}_k :

$$\widehat{\rho}_0(a_{\bar{j}_k}) \leq_{\bar{j}_k} \widehat{\rho}_0(b_{\bar{j}_k}) \Leftrightarrow a_{\bar{j}_k} \leq_{\bar{j}_k} b_{\bar{j}_k}.$$

В [1] были установлены некоторые связи между решёткой концептов, упорядоченных отношением теоретико-множественного включения, и множеством концептов G/\bar{j}_k , упорядоченных отношением $\leq_{\bar{j}_k}$.

Концепт X называется *оптимальным* по отношению $\leq_{\bar{j}_k}$, если в этом контексте не существует никакого другого концепта Y с условием $X \leq_{\bar{j}_k} Y$.

Зафиксируем $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, пусть $\pi_{n \setminus i}(\rho)$ – проекция отношения ρ на все множества M_j , $1 \leq j \leq n$, $j \neq i$, кроме множества M_i .

Для любого $y \in \pi_{n \setminus i}(\rho)$ множество $X_y = \widehat{\rho}_0(\{y\})$ является некоторым концептом контекста \mathbb{K} . В [2] показано, что $G/\bar{n \setminus i} = \{X_y\}_{y \in \pi_{n \setminus i}(\rho)}$ является разбиением множества объектов на концепты по атрибуту $M_{n \setminus i}$. Обозначим $\rho_y = \sigma_{\{y\}}(\rho)$ выборку из отношения ρ по значению y . И рассмотрим контекст $\mathbb{K} = (X_y, (M_i), \rho_y)$. Ясно, что $\rho_y \subset \rho$, и, следовательно, это также однозначный контекст. В силу однозначности $\widehat{\rho}_{y_i}: X_y/i \rightarrow M_i$ будет взаимно однозначным отображением, при этом для концептов $A, B \in X_y/i$ условие

$$A \leq_i B \Leftrightarrow \widehat{\rho}_{y_i}(A) \leq_i \widehat{\rho}_{y_i}(B)$$

будет определять линейный порядок на X_y/i .

Обозначим

$$X'_y = \max_{\leq_i} \{A \in X_y/i\},$$

и множество этих концептов $X_i = \{X'_y | y \in \pi_{n \setminus i}(\rho)\}$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема. *Множество*

$$X = \bigcap_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} X_i$$

является множеством оптимальных концептов по отношению $\leq_{\bar{n}}$ в контексте \mathbb{K} .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Новиков В. Е. Однозначный контекст с упорядоченными множествами атрибутов // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2014. Вып. 16. С. 48–49.
2. Новиков В. Е. Решётка концептов в однозначном контексте // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2010. Вып. 12. С. 53–56.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОНЕЧНОГО АВТОМАТА РЯДОМ ПО СИСТЕМЕ ФУНКЦИЙ УОЛША

Традиционными способами задания автоматов явно выделяются только начальные фрагменты возможных вариантов функционирования. Для того чтобы заменить рекурсивное задание законов функционирования автомата их явным заданием, в работе [1] В. А. Твердохлебовым введено понятие геометрического образа автомата в специальной дискретной словарной геометрии и исследованы его свойства геометрических образов.

В данной работе исследуются периодические геометрические образы конечных детерминированных автоматов. Для этого элементы автоматного отображения $\rho_s : X^* \rightarrow Y^*$, соответствующего инициальному автомату $A = (S, X, Y, \delta, \lambda, s_0)$, систематизируются в геометрический образ по предложенным в работе [1] правилам. Представление периодического геометрического образа рядом по системе функций Уолша осуществляется на основе разложения его периода.

Функции Уолша можно определить через функции Радемахера. Функция Радемахера i -го порядка определяется следующим образом [2]:

$$r_i(x) = (-1)^{x_i} = \cos \pi x_i,$$

где $x_i = 0, 1$ есть i -й разряд двоичного представления переменной x .

Функции Уолша в форме Пэли – это действительные функции, определяемые как произведение степеней функций Радемахера:

$$pal(p, x) = [r_1(x)]^{p_n} [r_2(x)]^{p_{n-1}} \dots [r_n(x)]^{p_1},$$

где p_i – разрядные коэффициенты в двоичном представлении числа p ; тогда

$$pal(0, x) = 1,$$

$$pal(1, x) = r_1(x),$$

$$pal(2, x) = r_2(x),$$

$$pal(3, x) = r_1(x)r_2(x),$$

$$pal(4, x) = r_3(x),$$

$$\begin{aligned} pal(5, x) &= r_1(x)r_3(x), \\ pal(6, x) &= r_2(x)r_3(x), \\ pal(7, x) &= r_1(x)r_2(x)r_3(x). \end{aligned}$$

Функции Уолша обладают следующими свойствами

1. В функции Уолша переменные p и x входят симметрично.
2. Функции Уолша – периодические с периодом $N = 2^n$.
3. Функции Уолша имеют нулевое среднее значение на множестве точек

$$x = 0, 1, 2, \dots, N - 1.$$

4. Система функций Уолша является ортогональной на множестве точек

$$x = 0, 1, 2, \dots, N - 1 :$$

$$\sum_{x=0}^{N-1} pal(a, x)pal(b, x) = \begin{cases} 0, & \text{если } a \neq b, \\ N, & \text{если } a = b. \end{cases}$$

5. Поскольку на интервале определения $N = 2^n$ в систему функций Уолша входит N ортогональных функций, то она является полной.

Предлагается структура конечного автомата, получаемая композицией базовых автоматов, соответствующих компонентам разложения геометрического образа исходного автомата в конечный ряд по системе функций Уолша.

Геометрический образ исходного автомата заменяется его разложением в ряд по системе функций Уолша:

$$f(x) = \sum_{p=0}^{N-1} c_p pal(p, x),$$

при этом значения суммы ряда в точках $0, 1, \dots, N - 1$ точно совпадают со значениями геометрического образа, а коэффициенты c_p можно подсчитать, используя свойство ортогональности функций Уолша.

Полученный конечный ряд является математической моделью автомата (A, s_0) , явно задающей все варианты его возможного функционирования. Каждой функции $pal(p, x)$ сопоставляется базовый автомат A_p , а автомату A соответствует композиция базовых автоматов. Каждый базовый автомат A_p соответствует функции $pal(p, x)$, график которой рассматривается в качестве геометрического образа данного автомата.

В геометрическом образе автомата функциональная зависимость представлена как автоматное отображение, то есть отображение с изменяющимся параметром (изменяющимся состоянием). Это позволяет

каждую функцию $pal(p, x)$ преобразовывать в автомат A_p с конкретным множеством состояний. Следовательно, в рассматриваемой композиции все компоненты – автоматы, и результат композиции – автомат.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Твердохлебов В. А.* Основные свойства геометрических образов автоматов // Проблемы точной механики и управления : сб. науч. тр. ИПТМУ РАН. Саратов, 2004. 183 с.
2. *Трахтман А. М., Трахтман В. А.* Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М. : Советское радио, 1975. 208 с.
3. *Поликарпов С. И.* Представление автомата рядом Фурье в задачах диагностирования и управления // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2013. Вып. 15. С. 64–66.

УДК 501.1

А. В. Попович

О МНОГООБРАЗИЯХ ПОЛУГРУПП БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ С ОПЕРАЦИЯМИ ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ И РЕФЛЕКСИВНОЙ ДВОЙНОЙ ЦИЛИНДРОФИКАЦИИ

Множество бинарных отношений Φ , замкнутое относительно некоторой совокупности Ω операций над ними, образует алгебру (Φ, Ω) , называемую *алгеброй отношений*. Всякая такая алгебра может быть рассмотрена как упорядоченная (Φ, Ω, \subset) отношением теоретико-множественного включения \subset . Одной из важнейших операций над отношениями является операция умножения \circ . Алгебры отношений вида (Φ, \circ) и (Φ, \circ, \subset) образует соответственно полугруппу и упорядоченную полугруппу отношений, и всякая полугруппа изоморфна некоторой полугруппе отношений. Вместе с операцией умножения отношений могут быть также рассмотрены и другие операции, несущие дополнительную информацию об этой полугруппе.

Сосредоточим свое внимание на операциях умножения отношений \circ , идентификации неподвижной точки ∇_1 и рефлексивной двойной цилиндрификации ∇_2 . Операции ∇_1 и ∇_2 определяются следующим образом:

$$\nabla_1(\rho) = \{(x, x) : (\exists y)(y, y) \in \rho\}, \quad \nabla_2(\rho) = \{(x, y) : (\exists z)(z, z) \in \rho\}.$$

Для заданного множества Ω операций над бинарными отношениями обозначим через $R\{\Omega\}$ класс алгебр, изоморфных алгебрам отношений с операциями из Ω . Пусть $Var\{\Omega\}$ – многообразие, порожденное классом $R\{\Omega\}$.

При рассмотрении многообразий, порожденных классами алгебр отношений с операциями умножения отношений, идентификации неподвижной точки и двойной рефлексивной цилиндрификации, возникают следующие проблемы.

Проблема 1. Нахождение базисов тождеств для многообразий $Var\{\circ, \nabla_1\}$, $Var\{\circ, \nabla_1, \subset\}$, $Var\{\circ, \nabla_2\}$, $Var\{\circ, \nabla_2, \subset\}$, $Var\{\circ, \nabla_1, \nabla_2\}$, $Var\{\circ, \nabla_1, \nabla_2, \subset\}$, порожденных соответствующими классами алгебр отношений.

Проблема 2. Являются ли эти многообразия конечно базлируемыми.

Следующие шесть теорем дают решение первой проблемы для соответствующих многообразий.

Теорема 1[4]. Алгебра $(A, \cdot, *)$ типа $(2, 1)$ принадлежит многообразию $Var\{\circ, \nabla_1\}$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим тождествам:

- 1) $(xy)z = x(yz)$, 2) $(x^*)^2 = x^*$, 3) $xy^* = y^*x$, 4) $(xy)^* = (yx)^*$,
5) $(xy^*)^* = x^*y^*$, 6) $x^*(x^p)^* = x^*$ для любого простого числа p .

Теорема 2[5]. Алгебра $(A, \cdot, *)$ типа $(2, 1)$ принадлежит многообразию $Var\{\circ, \nabla_1\}$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождествам 1)-5) из теоремы 1 и следующим двум тождествам:

- 7) $xy^* \leq x$, 8) $x^* \leq (x^p)^*$ для любого простого числа p .

Теорема 3[6]. Алгебра $(A, \cdot, *)$ типа $(2, 1)$ принадлежит многообразию $Var\{\circ, \nabla_2\}$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим тождествам:

- 1) $(xy)z = x(yz)$, 9) $(x^*)^2 = x^*$, 10) $x^*xx^* = x^*$, 11) $(x^*y)^2 = x^*y$,
12) $(xy^*)^2 = xy^*$, 13) $(xy)^* = (yx)^*$, 14) $x^*yz^* = z^*yx^*$,
15) $(xy^*z)^* = y^*zxy^*$, 16) $x^*yx^*zx^* = x^*zx^*yx^*$,
17) $x^*(x^p)^* = x^*$ для любого простого числа p .

Теорема 4. Частично упорядоченная алгебра $(A, \cdot, *, \leq)$ типа $(2, 1)$ принадлежит многообразию $Var\{\circ, \nabla_2, \subset\}$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождествам 1), 10)-16) и следующим трем тождествам:

- 18) $xy^* \leq y^*$, 19) $x^*y \leq x^*$, 20) $x^* \leq (x^p)^*$ для любого простого числа p .

Теорема 5. Алгебра $(A, \cdot, *, *)$ типа $(2, 1, 1)$ принадлежит многообразию $Var\{\circ, \nabla_1, \nabla_2\}$ если, и только если она удовлетворяет тождествам 1)-5), 9)-17) и следующим тождествам:

$$21) x^{**} = x^*, \quad 22) x^{**} = x^*, \quad 23) (xy^*)^* = x^*y^*, \quad 24) (x^*y^*)^* = x^*y^*,$$

$$25) (x^*yz^*)^* = x^*(yz^*)^*, \quad 26) (xy^*z)^* = (xy^*)^*(y^*z)^*.$$

Теорема 6. Алгебра $(A, \cdot, *, *, \leq)$ типа $(2, 1, 1)$ принадлежит многообразию $Var\{\circ, \nabla_1, \nabla_2, \subset\}$ если, и только если она удовлетворяет тождествам 1)-5), 7), 10)-16), 18)-26).

Следующая теорема дает ответ на вторую проблему.

Теорема 7. Многообразия $Var\{\circ, \nabla_1\}$, $Var\{\circ, \nabla_1, \subset\}$, $Var\{\circ, \nabla_2\}$, $Var\{\circ, \nabla_2, \subset\}$, $Var\{\circ, \nabla_1, \nabla_2\}$ и $Var\{\circ, \nabla_1, \nabla_2, \subset\}$ не являются конечно базлируемыми.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бредихин Д. А. О квазитождествах алгебр отношений с диофантовыми операциями // Сиб. мат. журн. 1997. № 1. С. 29–41.
2. Бредихин Д. А. Об алгебрах отношений с диофантовыми операциями // Докл. РАН. 1998. Т. 360. С. 594–595.
3. Böner F., Pöschel F. R. Clones of operations on binary relations // Contributions to general algebras. 1991. Vol. 7. P. 50–70.
4. Бредихин Д. А. Об алгебрах отношений с операцией идентификации неподвижной точки // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : межвуз. сб. науч. тр. Саратов, 2010. С. 90–98.
5. Бредихин Д. А., Попович А. В. Об частично упорядоченных полугруппах отношений с операцией идентификации неподвижной точки // Вестн. Сарат. гос. техн. ун-та. 2011. Вып. 1, № 4. С. 53–56.
6. Бредихин Д. А., Попович А. В. Тождества полугрупп отношений с операцией двойной рефлексивной цилиндрификации // Изв. вузов. Сер. Математика. 2014. № 8. С. 90–96.

УДК 519.4, 519.8

В. В. Розен

ВЛОЖЕНИЯ УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ В УПОРЯДОЧЕННЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

В данной работе рассмотрена проблема вложимости произвольного (в общем случае – бесконечного) частично упорядоченного множества в

упорядоченное векторное пространство. Используемый здесь метод «погружения» упорядоченного множества в упорядоченное векторное пространство состоит из двух этапов: первый этап – вложение упорядоченного множества в упорядоченное множество вероятностных мер, определенных на специальном образом подобранной σ -алгебре, и второй – расширение множества вероятностных мер до векторного пространства счетно-аддитивных функций с продолжением упорядоченности, построенной на множестве вероятностных мер, до упорядоченности этого векторного пространства. При этом используется следующий критерий продолжимости упорядоченности, заданной на выпуклом подмножестве векторного пространства, до упорядоченности всего векторного пространства [1].

Лемма 1. Пусть ρ – отношение порядка, заданное на выпуклом подмножестве C векторного пространства V . Для того чтобы порядок ρ был продолжимым до конического порядка на все пространство V , необходимо и достаточно, чтобы для него выполнялись следующие аксиомы.

(S1) При любых $x, y, z \in C, \alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$ имеет место равносильность:

$$x \leq^\rho y \Leftrightarrow (\alpha x + \beta z) \leq^\rho (\alpha y + \beta z). \quad (1)$$

(S2) При любых $x, y, z \in C, \alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$ из условий

$$\begin{cases} x_1 \leq^\rho y_1, \\ x_2 \leq^\rho y_2, \\ \alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha y_1 + \beta y_2 \end{cases} \quad (2)$$

следует $x_1 = y_1, x_2 = y_2$.

Вероятностные меры на бесконечном упорядоченном множестве $\langle A, \omega \rangle$ вводятся следующим образом. Вначале необходимо зафиксировать некоторую σ -алгебру $\sum_\omega(A)$ измеримых подмножеств, на которых определяются вероятностные меры. В качестве $\sum_\omega(A)$ здесь берется наименьшая σ -алгебра, содержащая все мажорантно стабильные подмножества упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$. Это условие обеспечивает, во-первых, при любом $a \in A$ включение $\{a\} \in \sum_\omega(A)$ и, во-вторых, измеримость относительно указанной σ -алгебры любой функции, являющейся изотонным отображением упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$ в числовую прямую.

Определение 1. Под вероятностной мерой на упорядоченном множестве $\langle A, \omega \rangle$ будем понимать неотрицательную счетно-аддитивную нормированную функцию множества, определенную на σ -алгебре

$\Sigma_\omega(A)$, порожденной семейством мажорантно стабильных в $\langle A, \omega \rangle$ подмножеств.

Множество вероятностных мер на $\langle A, \omega \rangle$ обозначается далее через $P_\omega(A)$.

Определение 2. Вырожденная вероятностная мера, сосредоточенная в точке $a \in A$, есть вероятностная мера δ_a , которая определяется следующим образом. Для произвольного подмножества $B \in \Sigma_\omega(A)$ полагаем:

$$\delta_a(B) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \in B; \\ 0, & \text{если } a \notin B. \end{cases} \quad (3)$$

При отождествлении вырожденной вероятностной меры δ_a , сосредоточенной в точке a , с элементом a множество A можно рассматривать как подмножество множества $P_\omega(A)$.

Лемма 2. Пусть $C_0(\omega)$ – множество всех изотонных отображений упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$ в действительную прямую R . Для любой функции $\varphi \in C_0(\omega)$ и вероятностной меры $\mu \in P_\omega(A)$ существует интеграл $\int_A \varphi d\mu$ по множеству A .

Далее полагаем $\bar{\varphi}(\mu) = \int_A \varphi d\mu$. Поставим в соответствие каждому подмножеству $S \subseteq C_0(\omega)$ отношение квазипорядка ω^S на $P_\omega(A)$, полагая

$$\mu_1 \leq^{\omega^S} \mu_2 \Leftrightarrow (\forall \varphi \in S) \bar{\varphi}(\mu_1) \leq \bar{\varphi}(\mu_2) (\mu_1, \mu_2 \in P_\omega(A)). \quad (4)$$

Для квазипорядков вида ω^S , где $S \subseteq C_0(\omega)$, существует наименьший – им является квазипорядок $\omega^{C_0(\omega)}$. Так как множество изотонных отображений $C_0(\omega)$ аппроксимирует квазипорядок ω , то расширение $\omega^{C_0(\omega)}$ будет продолжением порядка ω ; будем называть его *каноническим продолжением порядка ω на множество вероятностных мер* и обозначать через $\tilde{\omega}$. Можно показать, что каноническое продолжение порядка на множество вероятностных мер является отношением порядка. Основной результат данной работы представляет следующая теорема.

Теорема 1. *Всякое упорядоченное множество может быть изоморфно вложено в некоторое упорядоченное векторное пространство.*

Доказательство. Пусть $\langle A, \omega \rangle$ – произвольное упорядоченное множество. В качестве искомого векторного пространства возьмем векторное пространство $V_\omega(A)$, элементами которого являются действительные счетно-аддитивные функции, определенные на σ -алгебре $\Sigma_\omega(A)$, порожденной семейством мажорантно стабильных подмножеств упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$. Множество вероятностных мер $P_\omega(A)$ представляет собой выпуклое подмножество векторного пространства $V_\omega(A)$. Сле-

дующий шаг в доказательстве данной теоремы состоит в продолжении порядка $\tilde{\omega}$ на все векторное пространство $V_{\omega}(A)$. Для этого используется лемма 1: непосредственно проверяется, что каноническое продолжение $\tilde{\omega}$ удовлетворяет условиям (1) и (2) леммы 1. Таким образом, согласно лемме 1 порядок $\tilde{\omega}$ продолжается до конического порядка $\bar{\omega}$ на векторном пространстве $V_{\omega}(A)$. Искомое изоморфное вложение упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$ в упорядоченное векторное пространство $\langle V_{\omega}(A), \bar{\omega} \rangle$ осуществляет отображение, которое каждому $a \in A$ ставит в соответствие вырожденную вероятностную меру δ_a .

Теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Розен В. В. Упорядоченные векторные пространства и их приложения. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2014. 216 с.

УДК 514.133

Л. Н. Ромакина

АНАЛОГИ ФОРМУЛЫ ГЕРОНА ДЛЯ ТРЕХРЕБЕРНИКОВ ТИПОВ $eee(I)$, $eee(III)$ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

По типу ребер, типу углов и типу расположения на абсолюте несобственных точек сторон все трехвершинники гиперболической плоскости \hat{H} положительной кривизны можно отнести к 22 типам [1], инвариантным относительно фундаментальной группы G данной плоскости. Трехвершинники десяти типов обладают внутренностью и по этому свойству названы трехреберниками. В статье [2] доказана формула

$$S = \rho^2(A + B + C - i\pi) \quad (1)$$

выражения площади трехреберника плоскости \hat{H} через величины A , B , C его внутренних углов, справедливая, в частности, и для трехреберников с неизмеримыми углами. В данной работе, применяя тригонометрические соотношения плоскости \hat{H} (см. [1]), получим формулы выражения площадей трехреберников с тремя эллиптическими ребрами через длины ребер.

Трехреберники с тремя эллиптическими ребрами относятся к двум типам: $eee(I)$ и $eee(III)$. Трехреберник типа $eee(I)$ содержит один внутренний эллиптический псевдоугол и два внутренних эллиптических угла. Все внутренние углы трехреберника типа $eee(III)$ являются эллиптическими псевдоуглами. Трехреберники различных типов рассмотрим отдельно.

1. Пусть ABC – трехреберник типа $eee(I)$ с мерой \bar{A} внутреннего эллиптического псевдугла при вершине A . Величину внешнего эллиптического угла при вершине A обозначим тем же символом A (см. п. 5.4.1 из [1]). Тогда $A + \bar{A} = i\pi$. По формулам (5.4), (5.5) из [1], учитывая, что меры эллиптических углов положительные и $\cosh \bar{A} = -\cosh A$, найдем значения $\Theta_A, \Theta_B, \Theta_C$ гиперболических косинусов эллиптических углов при вершинах A, B, C соответственно:

$$\Theta_A = \frac{\cos \frac{\tilde{b}}{\rho} \cos \frac{\tilde{c}}{\rho} - \cos \frac{\bar{a}}{\rho}}{\sin \frac{\tilde{b}}{\rho} \sin \frac{\tilde{c}}{\rho}}, \quad \Theta_B = \frac{\cos \frac{\tilde{b}}{\rho} - \cos \frac{\bar{a}}{\rho} \cos \frac{\tilde{c}}{\rho}}{\sin \frac{\bar{a}}{\rho} \sin \frac{\tilde{c}}{\rho}},$$

$$\Theta_C = \frac{\cos \frac{\tilde{c}}{\rho} - \cos \frac{\bar{a}}{\rho} \cos \frac{\tilde{b}}{\rho}}{\sin \frac{\bar{a}}{\rho} \sin \frac{\tilde{b}}{\rho}}. \quad (2)$$

Согласно принятым в книге [1] обозначениям в трехребернике ABC типа $eee(I)$ символом \bar{a} обозначаем длину ребра, противоположного внутреннему эллиптическому псевдуглу при вершине A , а символом \tilde{b} (\tilde{c}) – длину ребра, противоположного внутреннему эллиптическому углу при вершине B (C).

Используя формулу $x = \ln \left(\cosh x + \sqrt{\cosh^2 x - 1} \right)$, меры A, B, C эллиптических углов при вершинах трехреберника можно записать в виде

$$Q = \ln \left(\Theta_Q + \sqrt{\Theta_Q^2 - 1} \right), \quad Q = A, B, C, \quad (3)$$

где величины $\Theta_A, \Theta_B, \Theta_C$ определены выражениями (2).

Применяя к трехребернику ABC формулу (1), находим

$$S = \rho^2(\bar{A} + B + C - i\pi) = \rho^2(i\pi - A + B + C - i\pi) = \rho^2(B + C - A). \quad (4)$$

Подставляя в (4) выражения величин A, B, C из (2), (3), получаем формулу площади трехреберника типа $eee(I)$:

$$S = \rho^2 \left[\ln \left(\cos \frac{\tilde{b}}{\rho} - \cos \frac{\bar{a}}{\rho} \cos \frac{\tilde{c}}{\rho} + \sqrt{\left(\cos \frac{\tilde{b}}{\rho} - \cos \frac{\bar{a}-\tilde{c}}{\rho} \right) \left(\cos \frac{\tilde{b}}{\rho} - \cos \frac{\bar{a}+\tilde{c}}{\rho} \right)} \right) + \right. \\ \left. + \ln \left(\cos \frac{\tilde{c}}{\rho} - \cos \frac{\bar{a}}{\rho} \cos \frac{\tilde{b}}{\rho} + \sqrt{\left(\cos \frac{\tilde{c}}{\rho} - \cos \frac{\bar{a}-\tilde{b}}{\rho} \right) \left(\cos \frac{\tilde{c}}{\rho} - \cos \frac{\bar{a}+\tilde{b}}{\rho} \right)} \right) - \right. \\ \left. - \ln \left(\sin^2 \frac{\bar{a}}{\rho} \left(\cos \frac{\tilde{b}}{\rho} \cos \frac{\tilde{c}}{\rho} - \cos \frac{\bar{a}}{\rho} + \sqrt{\left(\cos \frac{\bar{a}}{\rho} - \cos \frac{\tilde{b}-\tilde{c}}{\rho} \right) \left(\cos \frac{\bar{a}}{\rho} - \cos \frac{\tilde{b}+\tilde{c}}{\rho} \right)} \right) \right) \right].$$

Пусть p – полупериметр трехреберника ABC : $2p = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$. По теореме 5.4.5 из [1] в трехребернике типа $eee(I)$ длина ребра, противолежащего эллиптическому псевдоуглу, больше суммы длин двух других ребер: $\bar{a} > \bar{b} + \bar{c}$, а по теореме 5.4.7 из [1] $p < \pi\rho$. Преобразуя с учетом данных неравенств подкоренные выражения в полученной формуле площади, запишем аналог формулы Герона для трехреберника типа $eee(I)$ плоскости \widehat{H} :

$$S = \rho^2 \ln \frac{\left(\cos \frac{\bar{b}}{\rho} - \cos \frac{\bar{a}}{\rho} \cos \frac{\bar{c}}{\rho} + \Psi \right) \left(\cos \frac{\bar{c}}{\rho} - \cos \frac{\bar{a}}{\rho} \cos \frac{\bar{b}}{\rho} + \Psi \right)}{\sin^2 \frac{\bar{a}}{\rho} \left(\cos \frac{\bar{b}}{\rho} \cos \frac{\bar{c}}{\rho} - \cos \frac{\bar{a}}{\rho} + \Psi \right)},$$

где вещественная положительная величина Ψ определена равенством

$$\Psi = 2\sqrt{\sin \frac{p}{\rho} \sin \frac{\bar{a}-p}{\rho} \sin \frac{p-\bar{b}}{\rho} \sin \frac{p-\bar{c}}{\rho}}.$$

2. В трехребернике ABC типа $eee(III)$ с эллиптическими ребрами \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} все внутренние углы с мерами \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} – эллиптические псевдоуглы (см. п. 5.4.1 из [1]). Меры соответственно A , B , C смежных с ними эллиптических углов – вещественные положительные числа. Применяя формулу (1), находим

$$S = \rho^2 (2i\pi - A - B - C). \quad (5)$$

Таким образом, величина площади трехреберника типа $eee(III)$ – комплексное число с мнимой частью $2\pi\rho^2$. Это объяснимо тем, что трехреберник типа $eee(III)$ содержит внутри себя всю идеальную область плоскости \widehat{H} .

Учитывая формулы (3), (5) и (5.34) из [1], получаем

$$\begin{aligned} \frac{S}{\rho^2} = & 2i\pi - \ln \frac{\cos \frac{\bar{b}}{\rho} \cos \frac{\bar{c}}{\rho} - \cos \frac{\bar{a}}{\rho} + \sqrt{\left(\cos \frac{\bar{a}}{\rho} - \cos \frac{\bar{b}-\bar{c}}{\rho} \right) \left(\cos \frac{\bar{a}}{\rho} - \cos \frac{\bar{b}+\bar{c}}{\rho} \right)}}{\sin \frac{\bar{b}}{\rho} \sin \frac{\bar{c}}{\rho}} - \\ & - \ln \frac{\cos \frac{\bar{a}}{\rho} \cos \frac{\bar{c}}{\rho} - \cos \frac{\bar{b}}{\rho} + \sqrt{\left(\cos \frac{\bar{b}}{\rho} - \cos \frac{\bar{a}-\bar{c}}{\rho} \right) \left(\cos \frac{\bar{b}}{\rho} - \cos \frac{\bar{a}+\bar{c}}{\rho} \right)}}{\sin \frac{\bar{a}}{\rho} \sin \frac{\bar{c}}{\rho}} - \\ & - \ln \frac{\cos \frac{\bar{a}}{\rho} \cos \frac{\bar{b}}{\rho} - \cos \frac{\bar{c}}{\rho} + \sqrt{\left(\cos \frac{\bar{c}}{\rho} - \cos \frac{\bar{a}-\bar{b}}{\rho} \right) \left(\cos \frac{\bar{c}}{\rho} - \cos \frac{\bar{a}+\bar{b}}{\rho} \right)}}{\sin \frac{\bar{a}}{\rho} \sin \frac{\bar{b}}{\rho}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Пусть p – полупериметр трехреберника ABC . Тогда $p < 3\pi\rho/2$, а по теореме 5.4.8 из [1] $p > \pi\rho$. По теореме 5.4.6 из [1] в трехребернике типа $eee(III)$ сумма длин любых двух ребер больше длины третьего ребра. Следовательно, $p - \bar{a} > 0$, $p - \bar{b} > 0$, $p - \bar{c} > 0$. Допустим, что $p - \bar{a} \geq \pi\rho$. Тогда $\bar{b} + \bar{c} \geq 2\pi\rho + \bar{a}$. Длина ребра трехреберника меньше длины содержащей его эллиптической прямой. Значит, $\bar{b} < \pi\rho$ и $\bar{c} < \pi\rho$. Пришли к противоречию, которое доказывает, что $p - \bar{a} < \pi\rho$. Аналогично можно показать, что $p - \bar{b} < \pi\rho$ и $p - \bar{c} < \pi\rho$. Вследствие доказанных неравенств $\sin \frac{p}{\rho} < 0$, $\sin \frac{p-\bar{a}}{\rho} > 0$, $\sin \frac{p-\bar{b}}{\rho} > 0$, $\sin \frac{p-\bar{c}}{\rho} > 0$. Преобразуя с учетом полученных оценок подкоренные выражения в формуле (6), находим аналог формулы Герона для трехреберника типа $eee(III)$ плоскости \widehat{H} :

$$S = \rho^2 \left[2i\pi - \ln \frac{\Psi_a \Psi_b \Psi_c}{\sin^2 \frac{\bar{a}}{\rho} \sin^2 \frac{\bar{b}}{\rho} \sin^2 \frac{\bar{c}}{\rho}} \right],$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_a &= \cos \frac{\bar{b}}{\rho} \cos \frac{\bar{c}}{\rho} - \cos \frac{\bar{a}}{\rho} + \Psi, & \Psi_b &= \cos \frac{\bar{a}}{\rho} \cos \frac{\bar{c}}{\rho} - \cos \frac{\bar{b}}{\rho} + \Psi, \\ \Psi_c &= \cos \frac{\bar{a}}{\rho} \cos \frac{\bar{b}}{\rho} - \cos \frac{\bar{c}}{\rho} + \Psi, & \Psi &= 2\sqrt{-\sin \frac{p}{\rho} \sin \frac{p-\bar{a}}{\rho} \sin \frac{p-\bar{b}}{\rho} \sin \frac{p-\bar{c}}{\rho}}. \end{aligned}$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ромакина Л. Н. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны : в 4 ч. Ч. 1 : Тригонометрия. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2013. 244 с.
2. Ромакина Л. Н. О площади трехреберника на гиперболической плоскости положительной кривизны // Мат. тр. 2014. Т. 17, вып. 2. С. 184–206.
3. Romakina L. N. On the area of a trihedral on a hyperbolic plane of positive curvature // Siberian Advances in Mathematics. 2015. Vol. 25, iss. 2. P. 138–153. DOI 10.3103/S1055134415020042.

Л. Н. Ромакина, В. О. Чурилова

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ОРИЦИКЛИЧЕСКИЕ N -РЕБЕРНИКИ ПЛОСКОСТИ \hat{H}

Получено соотношение между длинами ребер вписанного в орицикл трехреберника типа $eee(I)$ гиперболической плоскости \hat{H} положительной кривизны и его обобщение на случай произвольного орициклического n -реберника.

Все трехреберники плоскости \hat{H} относятся к десяти инвариантным относительно группы G типам. Трехреберник типа $eee(I)$ содержит три эллиптических ребра, два эллиптических угла и один эллиптический псевдоугол [1]. Ребро, противолежащее эллиптическому углу трехреберника типа $eee(I)$, назовем *основанием*, а два других ребра – *боковыми ребрами* данного трехреберника. Доказано, что длина основания трехреберника типа $eee(I)$ больше суммы длин его боковых ребер [1, теорема 5.4.5].

Циклом плоскости \hat{H} называем траекторию точки в некотором движении фундаментальной группы G данной плоскости [2]. К циклам плоскости \hat{H} относятся ее собственные овальные линии четырех типов: орициклы, гиперциклы, гиперболические и эллиптические циклы. Траекторией точки при сдвиге вдоль параболической прямой является *орицикл*, овальная линия, имеющая четыре совпавшие общие точки и четыре совпавшие общие касательные с абсолютной овальной линией γ плоскости \hat{H} . Общую точку (касательную) орицикла и абсолюта называем *центром* (*базой*) данного орицикла.

Трехреберник плоскости \hat{H} назовем *орициклическим*, если существует описанный около него орицикл, и все ребра данного трехреберника являются внутренними хордами этого орицикла.

Согласно теореме 2.4.21 из [2] серединный перпендикуляр хорды орицикла содержит центр этого орицикла. Поэтому для орициклического трехреберника существует единственный описанный около него орицикл, и центр описанного орицикла является пересечением серединных перпендикуляров к ребрам данного трехреберника.

Следующая теорема устанавливает связь между длинами ребер орициклического трехреберника типа $eee(I)$ плоскости \hat{H} .

Теорема 1. *На плоскости \hat{H} радиуса кривизны ρ длина \bar{a} основания и длины \bar{b} , \bar{c} боковых ребер орициклического трехреберника типа $eee(I)$*

связаны соотношением

$$\sin \frac{\bar{a}}{2\rho} = \sin \frac{\tilde{b}}{2\rho} + \sin \frac{\tilde{c}}{2\rho}. \quad (1)$$

Доказательство. Пусть на плоскости \hat{H} трехреберник ABC типа $eee(I)$ вписан в орицикл ω , причем его основание BC и боковые ребра AB, AC являются внутренними хордами данного орицикла (рис. 1, а).

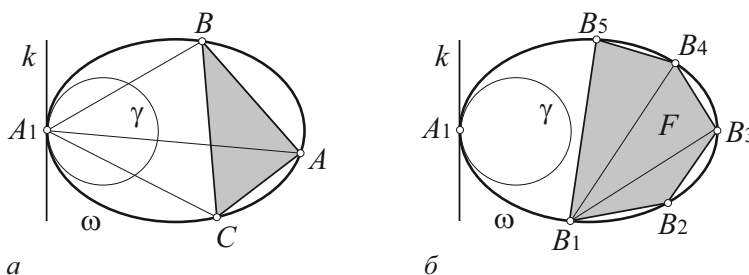


Рис. 1. Орициклический трехреберник ABC типа $eee(I)$ плоскости \hat{H} , вписанный в орицикл ω с центром A_1 и базой k (а).

Орициклический 5-реберник F (б)

Выберем канонический репер $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ второго типа [1, п. 4.1.2] плоскости \hat{H} так, чтобы его вершина A_1 совпала с центром орицикла ω , вершина A_2 лежала на прямой AA_1 , а единичная точка E принадлежала прямой BA_1 . Репер R данными требованиями определен однозначно. Вершины трехреберника в R можно задать координатами: $A(-a : 1 : 0)$, $B(1 - a : 1 : 1)$, $C(1 - ac^2 : c^2 : c)$, где $a \in \mathbb{R}_+$, $c \in \mathbb{R}$, а орицикл ω – уравнением

$$ax_1^2 + x_1x_2 - x_3^2 = 0. \quad (2)$$

По условию вершина A трехреберника ABC противолежит основанию, поэтому прямая A_1A разделяет с базой k орицикла ω (см. [2]) прямые A_1B и A_1C : $((A_1A)k(A_1B)(A_1C)) < 0$. Записывая это неравенство в координатах прямых $A_1A(0 : 0 : 1)$, $k(0 : 1 : 0)$, $A_1B(0 : 1 : -1)$, $A_1C(0 : 1 : -c)$, получим

$$c < 0. \quad (3)$$

Поляра $p_A(1 : -a : 0)$ точки A относительно абсолюта пересекает прямую $AB(1 : a : -1)$ в точке $A_B(a : 1 : 2a)$, а прямую $AC(c : ac : -1)$ – в точке $A_C(a : 1 : 2ac)$. Точка A_B (A_C) удалена от точки A на прямой AB (AC) на расстояние $\pi\rho/2$. Общая точка B_0 (C_0) прямой AB (AC) и базы k орицикла ω имеет в R координаты $B_0(1 : 0 : 1)$ ($C_0(1 : 0 : c)$). Поскольку ребро AB (AC) – внутренняя хорда орицикла ω , а точка B_0 (C_0) как точка базы лежит во внешней относительно ω области,

то ребро AB (AC) является коротким [1, пп. 4.2.2, 4.4.1] тогда и только тогда, когда ему не принадлежит точка A_B (A_C), т. е. тогда и только тогда, когда

$$(ABB_0A_B) = \frac{2a-1}{2a} > 0, \quad \left((ACC_0A_C) = \frac{2ac^2-1}{2ac^2} > 0 \right). \quad (4)$$

При условии (4), характеризующем короткий отрезок AB (AC), по первой формуле (4.32) из [1] находим выражение длины \tilde{c} (\tilde{b}) ребра AB (AC):

$$\cos \frac{\tilde{c}}{\rho} = \frac{2a-1}{2a}, \quad \left(\cos \frac{\tilde{b}}{\rho} = \frac{2ac^2-1}{2ac^2} \right). \quad (5)$$

Прямая BC ($c : 1+ac : -1-c$) пересекает прямую k в точке $N(1+c : 0 : c)$, а полярю $p_B(1 : 1-a : -2)$ точки B относительно абсолюта – в точке $T(1+a-c+3ac : 1-c : 1-c+2ac)$. Ребро BC является коротким тогда и только тогда, когда не содержит точку T , т. е. тогда и только тогда, когда

$$(BCNT) = \frac{2ac^2 - (c-1)^2}{2ac^2} > 0. \quad (6)$$

При условии (6) для короткого отрезка BC по первой формуле (4.32) из [1] получаем выражение длины \bar{a} основания BC данного трехреберника:

$$\cos \frac{\bar{a}}{\rho} = \frac{2ac^2 - (c-1)^2}{2ac^2}. \quad (7)$$

Исключая из выражений (5), (7) при условии (3) параметры a и c , получаем формулу (1).

Теорема доказана.

Выпуклый вписанный в орицикл плоскости \hat{H} n -реберник, все ребра которого эллиптические и являются внутренними хордами описанного орицикла, назовем *эллиптическим орициклическим*. На рис. 1, б изображен эллиптический орициклический 5-реберник F , вписанный в орицикл ω плоскости \hat{H} .

Одно ребро эллиптического орициклического n -реберника прилежит к двум его внутренним эллиптическим углам. Назовем это ребро *основанием* n -реберника. Внутренние углы эллиптического орициклического n -реберника, не прилежащие к основанию, являются эллиптическими псевдоуглами.

Пусть в эллиптическом орициклическом n -ребернике $F = B_1 \dots B_n$ плоскости \hat{H} B_1 – вершина основания. Соединим B_1 с остальными вершинами n -реберника F . Применяя последовательно теорему 1 к трехребер-

никам $B_1 B_2 B_3, \dots, B_1 B_{n-1} B_n$ типа $eee(I)$, докажем следующее свойство эллиптического орициклического n -реберника.

Теорема 2. *В эллиптическом орициклическом n -ребернике плоскости \widehat{H} длина a основания и длины b_1, b_2, \dots, b_{n-1} остальных ребер связаны соотношением*

$$\sin \frac{a}{2\rho} = \sum_{i=1}^{n-1} \sin \frac{b_i}{2\rho}.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ромакина Л. Н.* Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны : в 4 ч. Ч. 1 : Тригонометрия. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2013. 244 с.
2. *Ромакина Л. Н.* Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны : в 4 ч. Ч. 2 : Преобразования и простые разбиения. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2013. 274 с.

УДК 517.927.25

В. С. Рыхлов

N -КРАТНАЯ ПОЛНОТА КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ N -ГО ПОРЯДКА

В пространстве $L_2[0, 1]$ рассмотрим пучок $L(\lambda)$,

$$\ell(y, \lambda) := \sum_{j+s \leq n} p_{js} \lambda^s y^{(j)}, \quad p_{js} \in \mathbb{C}, \quad p_{n0} \neq 0, \quad (1)$$

$$\sum_{j+s \leq \varkappa_{i0}} \alpha_{ijs} \lambda^s y^{(j)}(0) = 0, \quad i = \overline{1, l}, \quad (2)$$

$$\sum_{j+s \leq \varkappa_{i0}} \alpha_{ijs} \lambda^s y^{(j)}(0) + \sum_{j+s \leq \varkappa_{i1}} \beta_{ijs} \lambda^s y^{(j)}(1) = 0, \quad i = \overline{l+1, n}, \quad (3)$$

где $\lambda, \alpha_{ijs}, \beta_{ijs} \in \mathbb{C}$, $\varkappa_{i0}, \varkappa_{i1} \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $0 \leq l \leq n-1$.

Далее используем, не повторяя в данном тексте, известные определения собственных и присоединенных функций или, кратко, корневых функций (к.ф.), n -кратной полноты к.ф. из [1, 2].

Решается задача о нахождении условий на параметры пучка $L(\lambda)$, при которых имеет место n -кратная полнота к.ф. этого пучка в $L_2[0, 1]$.

Основополагающей по этой проблеме является работа [3], в которой была сформулирована теорема об n -кратной полноте к.ф. пучка $L(\lambda)$, порожденного дифференциальным выражением (д.в.) со специальной главной частью

$$\ell(y, \lambda) := y^{(n)} + \lambda^n y + \{\text{возмущение}\}$$

и распадающимися краевыми условиями. Эта теорема была доказана в [4] в случае аналитических коэффициентов д.в. и в [5] в случае суммируемых коэффициентов. Случай произвольной главной части д.в. был рассмотрен в [6, 7]. Детальное исследование вопроса об n - и m -кратной полноте к.ф. пучка $L(\lambda)$, д.в. которого имеет постоянные коэффициенты, а краевые условия – полураспадающиеся, проведено в [8].

Предположим, что корни $\omega_\alpha = r_\alpha \exp i\psi_\alpha$, $\alpha = \overline{1, n}$, характеристического уравнения $\sum_{j+s=n} p_{js} \omega^j = 0$ д.в. (1) простые, отличны от нуля и лежат на η лучах ($1 \leq \eta \leq n$), исходящих из начала. Будем считать при $\nu_0 = l$, $\nu_\eta = n$

$$0 \leq \psi_{\nu_0+1} = \dots = \psi_{\nu_1} < \dots < \psi_{\nu_{\eta-1}+1} = \dots = \psi_{\nu_\eta} < 2\pi. \quad (4)$$

Для пучка (1–3) с условием (4) не выполняются, вообще говоря, основные предположения [8], а именно, что существует прямая d , проходящая через начало, не содержащая ω -корней и делящая комплексную плоскость на две полуплоскости, внутри каждой из которых число этих корней не меньше $n - l$, а также, что краевые условия являются полураспадающимися.

Пусть $\alpha \in [0, 2\pi)$ есть любое число, для которого существуют перестановка $\sigma (= \sigma(\alpha)) = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ множества $\{1, 2, \dots, n\}$ и число $h (= h(\alpha)) \in \{0, 1, \dots, n\}$ такие, что

$$\Re(e^{i\alpha} \omega_{\sigma_1}) < \dots < \Re(e^{i\alpha} \omega_{\sigma_h}) < 0 < \Re(e^{i\alpha} \omega_{\sigma_{h+1}}) < \dots < \Re(e^{i\alpha} \omega_{\sigma_n}).$$

Множество таких α обозначим через S (это все числа из $[0, 2\pi)$ за исключением решений уравнений $\Re(e^{i\alpha} \omega_i) = \Re(e^{i\alpha} \omega_j)$, $i \neq j$ и $\Re(e^{i\alpha} \omega_j) = 0$, $j = \overline{1, n}$). Таких точек конечное число и между ними перестановок σ и число h не меняются.

Пусть краевые условия (3) упорядочены таким образом, что при $s_0 = l$, $s_{r+1} = n$ справедливы соотношения:

$$\chi_{s_0+1} = \dots = \chi_{s_1} < \chi_{s_1+1} = \dots = \chi_{s_2} < \dots < \chi_{s_r+1} = \dots = \chi_{s_{r+1}},$$

где обозначено $\chi_i = \varkappa_{i1} - \varkappa_{i0}$, $i = \overline{1, n}$.

Для $\alpha \in S$ пусть $\gamma(= \gamma(\alpha))$, $\delta(= \delta(\alpha))$ есть такие индексы, что

$$s_\gamma + 1 \leq h + 1 \leq s_{\gamma+1}, \quad s_\delta + 1 \leq n - h + 1 \leq s_{\delta+1}.$$

Считаем, что $\gamma = 0$, $\delta = r + 1$ при $h = 0$ и $\gamma = r + 1$, $\delta = 0$ при $h = n$.

Обозначим $[s]_+ = \max\{s, 0\}$ и положим для того же α , $j = \overline{1, n}$ и $i = \overline{1, n}$ или $i = \overline{l + 1, n}$

$$a_{ij} = \sum_{\nu+s=\varkappa_{i0}} \alpha_{i\nu s} \omega_{\sigma_j}^\nu, \quad b_{ij} = \sum_{\nu+s=\varkappa_{i1}} \beta_{i\nu s} \omega_{\sigma_j}^\nu; \quad \varkappa_i = \min\{\varkappa_{i0}, \varkappa_{i1}\};$$

$$a_1 = \det(a_{ij})_{i=\overline{1, l}}^{j=\overline{1, l}}, \quad a_2 = \det(a_{ij})_{i=\overline{1, l}}^{j=\overline{n-l+1, n}},$$

$$b_1 = \det(a_{ij})_{i=\overline{l+1, n}}^{j=\overline{l+1, n}}, \quad b_2 = \det(a_{ij})_{i=\overline{l+1, n}}^{j=\overline{1, n-l}},$$

$$A = \begin{vmatrix} (a_{ij})_{i=\overline{1, s_\gamma}}^{j=\overline{1, h}} & (0)_{i=\overline{1, s_\gamma}}^{j=\overline{h+1, n}} \\ (a_{ij})_{i=\overline{s_\gamma+1, n}}^{j=\overline{1, h}} & (b_{ij})_{i=\overline{s_\gamma+1, n}}^{j=\overline{h+1, n}} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} (0)_{i=\overline{1, s_\delta}}^{j=\overline{1, h}} & (a_{ij})_{i=\overline{1, s_\delta}}^{j=\overline{h+1, n}} \\ (b_{ij})_{i=\overline{s_\delta+1, n}}^{j=\overline{1, h}} & (a_{ij})_{i=\overline{s_\delta+1, n}}^{j=\overline{h+1, n}} \end{vmatrix}.$$

Введем для того же α условие:

$$\begin{aligned} a) \quad & a_1 \neq 0, \quad b_1 \neq 0 \quad \text{при } h < l; & b) \quad & A \neq 0 \quad \text{при } h \geq l; \\ c) \quad & a_2 \neq 0, \quad b_2 \neq 0 \quad \text{при } h > n - l; & d) \quad & B \neq 0 \quad \text{при } h \leq n - l. \end{aligned} \quad (4)$$

В случае $1 \leq l \leq n - 1$ обозначим

$$c_{ij}(\lambda) = \sum_{\beta+s \leq \varkappa_{i0}} \lambda^{s+\beta} \alpha_{i\beta s} \omega_j^\beta, \quad i = \overline{1, l}, \quad j = \overline{1, n},$$

и рассмотрим линейную алгебраическую систему

$$\sum_{j=1}^n c_{ij}(\lambda) d_j = 0, \quad i = \overline{1, l}, \quad (5)$$

относительно вектора $(d_1, \dots, d_n)^T$.

Пусть $(d_{s1}(\lambda), d_{s2}(\lambda), \dots, d_{sn}(\lambda))^T$, $s = \overline{1, n-l}$, – базис пространства решений системы (5). Не нарушая общности, считаем $d_{sj}(\lambda)$ многочленами по λ .

Составим матрицы

$$D_j(\lambda) = \begin{pmatrix} d_{1, \nu_{j-1}+1}(\lambda) & \dots & d_{1, \nu_j}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{n-l, \nu_{j-1}+1}(\lambda) & \dots & d_{n-l, \nu_j}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, \eta}.$$

Теорема 1. Пусть либо $l = 0$, либо $1 \leq l \leq n - 1$ и $\text{rank } D_j = \nu_j - \nu_{j-1}$, $j = \overline{1, n}$. Если для пучка $L(\lambda)$ вида (1-3) при некотором $\alpha \in S$ выполняется условие (4), то система к.ф. этого пучка n -кратно полна в $L_2[0, 1]$ с возможным конечным дефектом, не превышающим числа $\sum_{i=1}^n [n - 1 - \kappa_i]_+$ в случае, если выполняется неравенство $\max\{\kappa_{i_0}, \kappa_{i_1}\} \geq n$ хотя бы для одного $i = \overline{1, n}$, и с нулевым дефектом в противном случае.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00238).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Келдыш М. В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26, № 4. С. 15–41.
2. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. 528 с.
3. Келдыш М. В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77, № 1. С. 11–14.
4. Хромов А. П. Конечномерные возмущения вольтерровых операторов : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск, 1973. 242 с.
5. Шкаликов А. А. О полноте собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с нерегулярными краевыми условиями // Функци. анализ. 1976. Т. 10, № 4. С. 69–80.
6. Freiling G. Zur Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen und Hauptfunktionen irregulärer Operator-büschel // Math. Z. 1984. Vol. 188. P. 55–68.
7. Тихомиров С. А. Конечномерные возмущения интегральных вольтерровых операторов в пространстве вектор-функций : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 1987. 126 с.
8. Вагабов А. И. Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. Ростов н/Д : Изд-во Рост. ун-та, 1994. 160 с.

УДК 517.51

С. П. Сидоров

ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ФОРМОСОХРАНЯЮЩИХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Условия сходимости последовательностей линейных положительных операторов $\{K_n\}_{n \geq 1}$ к тождественному оператору в пространстве непрерывных функций были найдены П. П. Коровкиным [1, 2]. Количественные результаты об оценке скорости сходимости $K_n f$ к f были получены в работе [3]. Развивая идеи и результаты работ [4–6], в настоящей статье мы получаем некоторые количественные результаты по оценке скорости сходимости для последовательностей формосохраняющих операторов.

Пусть X есть компактное подмножество \mathbb{R} , \mathbb{R}^X есть пространство всех действительнзначных функций, определенных на X . Пусть B есть подмножество \mathbb{R}^X , A есть подпространство $C(X)$, $A \subset B$. Пусть $L : B \rightarrow \mathbb{R}^X$ есть линейный оператор такой, что $L(A) \subset C(X)$.

Пусть $P = \{f \in B : Lf \geq 0\}$ есть конус в A . Пусть $U = \text{span} \{u_i\}_{i \in I}$ есть подпространство A , удовлетворяющее следующим свойствам:

- 1) найдется $u \in U$ такая, что $Lu(t) = 1$ для всех $t \in X$;
- 2) существуют такие действительнзначные функции $\{a_i\}_{i \in I}$, определенные на X , что для всех $t, x \in X$ будет $Lg_x(t) \geq cLh_x(t)$, $Lg_x(x) = 0$, где $g_x := \sum_{i \in I} a_i(x)u_i$, c есть положительное число, не зависящее от x и t , и h_x такова, что $Lh_x(t) = (t - x)^2$.

Теорема 1. Пусть $\{K_n\}_{n \geq 1}$, $K_n : A \rightarrow B$, есть последовательность линейных операторов, удовлетворяющих свойству $K_n(P) \subset P$ для всех $n \geq 1$. Тогда для любой $f \in A$ и любого $n = 1, 2, \dots$ будет

$$\begin{aligned} |(Lf - L(K_n f))(x)| &\leq \\ &\leq |Lf(x)| \cdot |(L(K_n u) - Lu)(x)| + |(L(K_n u) + Lu)(x)| \cdot \omega(Lf, \mu_n), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\|\cdot\|$ означает равномерную норму в $C(X)$, ω есть модуль непрерывности и

$$\mu_n = \left(\frac{1}{c} \sup_{x \in X} |L(K_n g_x)(x)| \right)^{1/2}.$$

Доказательство. Пусть $x, t \in X$ и пусть $\delta > 0$. Если $|t - x| > \delta$, тогда

$$\begin{aligned} |Lf(t) - Lf(x)| &\leq \omega(Lf, |t - x|) = \omega(Lf, |t - x|\delta^{-1}\delta) \leq \\ &\leq (1 + |t - x|\delta^{-1})\omega(Lf, \delta) \leq (1 + c^{-1}Lg_x(t)\delta^{-2})\omega(Lf, \delta). \end{aligned} \quad (2)$$

Неравенство

$$|Lf(t) - Lf(x)| \leq (1 + c^{-1}Lg_x(t)\delta^{-2})\omega(Lf, \delta) \quad (3)$$

справедливо также и в случае $|t - x| \leq \delta$.

Из соотношения (3) следует, что функции

$$\pm(f - uf(x)) + (u + c^{-1}g_x)\delta^{-2})\omega(Lf, \delta)$$

принадлежат P . Так как по условию теоремы $K_n(P) \subset P$ для $n \geq 1$, образы этих функций при отображении K_n также принадлежат P для

всех $n \geq 1$. Значит, для любого $n \in \mathbb{N}$ будет

$$\begin{aligned} |L(K_n f)(x) - L(K_n u)(x)Lf(x)| &\leq \\ &\leq \omega(Lf, \delta)(L(K_n u)(x) + c^{-1}\delta^{-2}L(K_n g_x)(x)) \leq \\ &\leq \omega(Lf, \delta)(L(K_n u)(x) + \mu_n^2\delta^{-2}). \end{aligned} \quad (4)$$

Если $\mu_n > 0$, то положим $\delta = \mu_n$ и получим

$$|L(K_n f)(x) - L(K_n u)(x)Lf(x)| \leq \omega(Lf, \mu_n)|(L(K_n u) + Lu)(x)|, \quad (5)$$

$$|-Lf(x) + L(K_n u)(x)Lf(x)| \leq |Lf(x)| \cdot |(L(K_n u) - Lu)(x)|. \quad (6)$$

Тогда (1) следует из (5) и (6). Если $\mu_n = 0$, то

$$|(Lf - L(K_n f))(x)| \leq |Lf(x)| \cdot |(L(K_n u) - Lu)(x)|,$$

и неравенство (1) тем более выполнено.

Теорема доказана.

Говорят, что функция $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ является k -выпуклой, $k \geq 1$, на $[0, 1]$, если для произвольно выбранных $k + 1$ различных точек t_0, \dots, t_k из $[0, 1]$, имеет место неравенство

$$[t_0, \dots, t_k]f \geq 0,$$

где $[t_0, \dots, t_k]f$ означает разделенную разность порядка k функции f по узлам $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_k \leq 1$. Функция f является 0-выпуклой, если $f(t_0) \geq 0$ для произвольного $t_0 \in [0, 1]$.

Обозначим $C^k[0, 1]$, $k \geq 0$, пространство всех действительныхзначных k раз непрерывно дифференцируемых функций, определенных на $[0, 1]$. Обозначим Δ^k конус всех k -выпуклых функций, определенных на $X = [0, 1]$. Обозначим $e_i(x) = x^i$, $i = 1, 2, \dots$. Следующее утверждение впервые было приведено в работе [5].

Следствие 1. Пусть $L_n : C^k[0, 1] \rightarrow C^k[0, 1]$, $n \geq 1$, есть последовательность линейных операторов таких, что $L_n(\Delta^k) \subset \Delta^k$. Тогда для всякой $f \in C^k(X)$ и для любых $x \in (0, 1)$, $\delta_n > 0$, справедливо неравенство

$$\begin{aligned} |D^k f(x) - D^k L_n f(x)| &\leq \frac{1}{k!} |D^k f(x)| |D^k e_k(x) - D^k L_n e_k(x)| + \\ &+ \left(\frac{1}{k!} D^k L_n e_k(x) + \delta_n^{-2} \beta_n^2(x) \right) \omega(D^k f, \delta_n), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\beta_n^2(x) = D^k L_n \left(\frac{2}{(k+2)!} e_{k+2} - \frac{2}{(k+1)!} x e_{k+1} + \frac{1}{k!} x^2 e_k \right) (x).$$

Доказательство. Пусть $L = D^k$ будет оператором дифференцирования порядка k , т.е. $D^k f(x) = \frac{d^k f(x)}{dx^k}$, $A = B = C^k[0, 1]$, $U = \text{span}\{e_k, e_{k+1}, e_{k+2}\}$, $P = \Delta^k$. Утверждение следует из теоремы 1.

Следствие доказано.

Пусть $k, n \in \mathbb{N}$, $n \geq k + 2$, $z_j = j/n$, $j = 0, 1, \dots, n$, и определим линейный оператор $\Lambda_{k,n} : C^k[0, 1] \rightarrow C^k[0, 1]$ по шагам слева направо следующим образом [7]:

$$\Lambda_{k,n} f(x) = \sum_{l=0}^k \frac{D^l f(0)}{l!} x^l + \frac{n x^{k+1}}{(k+1)!} [D^k f(z_1) - D^k f(0)], \quad x \in [0, z_1], \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{k,n} f(x) &= \sum_{l=0}^k \frac{D^l \Lambda_{k,n} f(z_j)}{l!} (x - z_j)^l + \\ &\quad \frac{n (x - z_j)^{k+1}}{(k+1)!} [D^k f(z_{j+1}) - D^k f(z_j)], \\ &\quad x \in (z_j, z_{j+1}], \quad j = 1, \dots, n-1. \quad (9) \end{aligned}$$

Утверждение. Пусть $\Lambda_{k,n} : C^k[0, 1] \rightarrow C^k[0, 1]$ есть непрерывный линейный оператор конечного ранга $n + 1$, определенный соотношениями (8-9). Тогда $\Lambda_{k,n}(\Delta^k) \subset \Delta^k$ и для всякой $f \in C^k(X)$ и для любого $x \in (0, 1)$ справедливо неравенство

$$|D^k f(x) - D^k(\Lambda_{k,n} f)(x)| \leq \frac{1}{2} \omega(D^k f, n^{-1}), \quad (10)$$

Доказательство. Так как $D^k(\Lambda_{k,n} f)$ есть кусочно-линейная функция на $[0, 1]$ с точками перелома $\{(z_j, D^k f(z_j))\}_{j=0, \dots, n}$, то для всякой $f \in C^k[0, 1]$ такой, что $D^k f \geq 0$, будет выполнено неравенство $D^k(\Lambda_{k,n} f) \geq 0$, т. е. $\Lambda_{k,n}(\Delta^k) \subset \Delta^k$.

Обозначим $e_i(x) = x^i$, $i = 0, 1, \dots$. Легко проверить, что $\Lambda_{k,n} e_p = e_p$ для всех $p = 0, 1, \dots, k + 1$, и если $x \in [z_j, z_{j+1})$ для некоторого $0 \leq j \leq n - 1$, то

$$(D^k(\Lambda_{k,n} e_{k+2}) - D^k e_{k+2})(x) = (k+2)! (z_{j+1} - x)(x - z_j) / 2.$$

Теперь (10) есть результат применения следствия 1.

Утверждение доказано.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00238).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Korovkin P. P.* Linear Operators and Approximation Theory. Delhi : Hind. Publ. Comp., 1960. 222 p.
2. *Коровкин П. П.* О сходимости линейных положительных операторов в пространстве непрерывных функций // Докл. АН СССР. 1953. Т. 90, № 5. С. 961–964.
3. *Shisha O., Mond B.* The degree of convergence of linear positive operators // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 1968. Vol. 60. P. 1196–1200.
4. *Gonska H. H.* Quantitative Korovkin type theorems on simultaneous approximation // Math. Z. 1984. Vol. 186. P. 419–433.
5. *Knoo H. B., Pottinger P.* Ein satz vom Korovkin-typ fur C^k raume // Math. Z. 1976. Vol. 148. P. 23–32.
6. *Muñoz-Delgado F. J., Ramírez-González V., Cárdenas-Morales D.* Qualitative Korovkin-Type Results on Conservative Approximation // J. of Approx. Theory. 1998. Vol. 94. P. 144–159.
7. *Sidorov S. P.* On the order of approximation by linear shape-preserving operators of finite rank // East J. on Approx. 2001. Vol. 7, № 1. P. 1–8.

УДК 519.8

Д. С. Смирнова

РАНЖИРОВАНИЕ АЛЬТЕРНАТИВ В ЗАДАЧАХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С КАЧЕСТВЕННЫМИ КРИТЕРИЯМИ

Будем рассматривать задачу многокритериальной оптимизации по качественным критериям в виде

$$G = \langle A, (q_j)_{j \in J} \rangle, \quad (1)$$

где A – непустое множество допустимых альтернатив, $(q_j)_{j \in J}$ – критерии оценки этих альтернатив. Качественный критерий q_j характеризуется тем, что шкалой для его измерения служит некоторое линейно упорядоченное множество (цепь) $\langle C_j, \leq^j \rangle$; формально q_j представляет собой отображение $q_j : A \rightarrow C_j$. Каждой альтернативе $a \in A$ сопоставляется вектор $q(a) = (q_j(a))_{j \in J}$, называемый *векторной оценкой альтернативы a* и содержащий всю информацию об этой альтернативе; при этом в теоретическом анализе сравнение альтернатив заменяется сравнением их векторных оценок.

Иногда на отображение $q : A \rightarrow \prod_{j \in J} C_j$ накладывают дополнительное условие:

$$(\forall j \in J) q_j(a_1) = q_j(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2. \quad (2)$$

Заметим, что условие (2) позволяет отождествить альтернативу с ее векторной оценкой.

Обозначим через K класс моделей многокритериальной оптимизации вида (1) с дополнительным условием (2).

Существуют две основные проблемы для задач класса K . Первая проблема состоит во введении понятия оптимальной альтернативы и изучении свойств множества оптимальных альтернатив. Вторая проблема это ранжирование множества альтернатив от наихудшей к наилучшей. Под ранжированием объектов обычно понимают их расположение в цепочку по возрастанию их ценности, важности, пригодности и т.п. – от самого «плохого» к самому «хорошему». Ранжирование допускает наличие одинаковых по ценности объектов.

В данной статье рассматривается вторая проблема.

Рассмотрим задачу ранжирования при условии, что на множестве A задано отношение предпочтения между объектами в форме произвольного рефлексивного бинарного отношения. Нас будут интересовать ранжирования, согласованные с имеющимся отношением предпочтения.

Основная задача, как определить согласованность ранжирования с критериями. Для этого сначала необходимо на множестве A ввести отношение предпочтения ρ . Будем предполагать, что структура предпочтения $\langle A, \rho \rangle$ нетривиальна, то есть содержит хотя бы одну пару элементов, для которых выполнено $a_1 <^\rho a_2$.

Определение 1. Ранжированием элементов множества A , согласованным с предпочтением ρ , будем называть изотонное отображение φ структуры предпочтений $\langle A, \rho \rangle$ в некоторую цепь натуральных чисел $C = \{1 < 2 < \dots < p\}$, т.е. отображение $\varphi : A \rightarrow C$, удовлетворяющее условию:

$$a \lesssim^\rho a' \Rightarrow \varphi(a) \leq \varphi(a'). \quad (3)$$

Из определения 1 следует импликация

$$a \sim^\rho a' \Rightarrow \varphi(a) = \varphi(a'). \quad (4)$$

Ранжирования могут быть нескольких типов.

Определение 2. Ранжирование φ называется *собственным*, если функция φ отлична от константы.

Определение 3. Ранжирование φ называется строгим, если выполнена следующая импликация: $a <^{\rho} a' \Rightarrow \varphi(a) < \varphi(a')$.

Определение 4. Ранжирование φ называется взаимно однозначным, если отображение φ является взаимно однозначным.

Замечание 1.

1. Строгое ранжирование является собственным.
2. Взаимно однозначное ранжирование является строгим.

Докажем второе утверждение.

Доказательство. Рассмотрим два элемента $a, a' \in A$, для которых выполнено $a <^{\rho} a'$. По определению (3) выполнено $\varphi(a) \leq \varphi(a')$. В силу инъективности отображения φ , $\varphi(a) = \varphi(a')$ влечет $a = a'$, а это противоречит тому, что $a <^{\rho} a'$. Таким образом, получаем, что $\varphi(a) < \varphi(a')$. Что и требовалось доказать.

Определение 4. Структура предпочтений $\langle A, \rho \rangle$ называется ациклической, если для любого натурального $n = 2, 3, \dots$ и любых $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ выполняется импликация

$$a_1 \lesssim^{\rho} a_2 \lesssim^{\rho} \dots \lesssim^{\rho} a_n \lesssim^{\rho} a_1 \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n.$$

Это условие означает отсутствие в графе отношения предпочтения циклов длины $n \geq 2$.

Определение 5. Структура предпочтений $\langle A, \rho \rangle$ называется слабо ациклической, если для любого натурального $n = 2, 3, \dots$ и любых $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ выполняется импликация

$$a_1 \lesssim^{\rho} a_2 \lesssim^{\rho} \dots \lesssim^{\rho} a_n \lesssim^{\rho} a_1 \Rightarrow a_1 \sim a_2 \sim \dots \sim a_n.$$

На языке теории графов это условие означает, что в графе такой структуры предпочтения все циклы являются циклами безразличий.

Возникает вопрос, каким должно быть отношение предпочтения для того чтобы оно допускало собственное, строгое или взаимно однозначное ранжирование. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\langle A, \rho \rangle$ нетривиальная структура предпочтений, заданная на конечном множестве A .

1. Для того чтобы структура предпочтений $\langle A, \rho \rangle$ допускала собственное ранжирование, необходимо и достаточно, чтобы она не сводилась к единственному циклу.

2. Для того чтобы структура предпочтений $\langle A, \rho \rangle$ допускала строгое ранжирование, необходимо и достаточно, чтобы она была слабо ациклической.

3. Для того чтобы структура предпочтений $\langle A, \rho \rangle$ допускала взаимно однозначное ранжирование, необходимо и достаточно, чтобы она была ациклической.

Докажем утверждение 3.

Доказательство. Достаточность. Пусть $\langle A, \rho \rangle$ – ациклическая структура предпочтений. Отношение достижимости ζ_ρ является отношением порядка, которое содержит отношение ρ . По теореме Шпильрайна всякий порядок можно продолжить до линейного. Пусть δ – это линейное продолжение порядка ζ_ρ , тогда выполняется следующее включение $\rho \subseteq \delta$, это значит, что для любых $a, a' \in A$, выполняется импликация $a \leq^\rho a' \Rightarrow a \leq^\delta a'$. Известно, что всякое конечное линейно упорядоченное множество изоморфно цепи натуральных чисел, поэтому существует изоморфизм φ линейно упорядоченного множества $\langle A, \rho \rangle$ в цепь натуральных чисел $\{1 < \dots < p\}$, где $p = |A|$. Имеет место следующая импликация

$$a \leq^\rho a' \Rightarrow \varphi(a) \leq \varphi(a'),$$

следовательно, отображение φ устанавливает ранжирование структуры предпочтений $\langle A, \rho \rangle$. А так как отображение φ инъективно, то получаем доказательство достаточности теоремы.

Необходимость. Пусть $\langle A, \rho \rangle$ – структура предпочтений, функция φ взаимно однозначное ранжирование. Рассмотрим цикл

$$a_1 \lesssim^\rho a_2 \lesssim^\rho \dots \lesssim^\rho a_n \lesssim^\rho a_1.$$

Тогда по определению (3) получаем

$$\varphi(a_1) \leq \varphi(a_2) \leq \dots \leq \varphi(a_n) \leq \varphi(a_1),$$

отсюда получаем

$$\varphi(a_1) = \varphi(a_2) = \dots = \varphi(a_n) = \varphi(a_1),$$

а так как по условию функция φ инъективна, то $a_1 = a_2 = \dots = a_n$, то есть структура предпочтений $\langle A, \rho \rangle$ является ациклической.

Теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Скорняков Л. А. Элементы теории структур. М. : Наука, 1970. 148 с.
2. Розен В. В. Принятие решений по качественным критериям. Математические модели. Saarbrücken : Palmarium Academic Publishing, 2013. 284 с.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ КОНФОРМНОГО СКЛЕИВАНИЯ

Обозначим через $E = \{z : |z| < 1\}$ – единичный круг и $E^* = \{z : |z| > 1\}$ – внешность единичного круга. Для заданной замкнутой кривой γ через $f : E \rightarrow D$ обозначим отображение E на ограниченную область D с границей γ , а через $F : E^* \rightarrow D$ обозначим отображение E^* на дополнение области D , имеющее ту же границу γ . Тогда композиция $F^{-1} \circ f$ определяет гомеоморфизм единичной окружности, который называют *конформным склеиванием*. Впервые задача конформного склеивания была сформулирована и решена М. А. Лаврентьевым [1], были получены и другие теоремы склеивания [2, 3], сыгравшие важную роль в теории римановых поверхностей. В настоящей работе рассматривается теорема склеивания для случая квадрата с центром в нуле и сторонами, параллельными осям координат.

Теорема. Пусть между точками z_0 и w_0 единичной окружности и квадрата с центром в нуле и сторонами, параллельными вещественной и мнимой осям, имеется следующее гомеоморфное соответствие:

$$w_0 = w(z_0) = 1.5\sqrt{2}i \frac{{}_2F_1(-0.5; 0.25; 1.25; -1)\sqrt{\pi}}{2\Gamma(1.25)} \int_0^{\varphi_0} (\cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}} d\varphi -$$

$$-i \frac{\sqrt{2} {}_2F_1(-0.5; 0.25; 1.25; -1)\sqrt{\pi}}{2\Gamma(1.25)} \sqrt{\cos 2\varphi_0} \sin 2\varphi_0 +$$

$$+ 2F_1(-0.5; 0.25; 1.25; -1),$$

где ${}_2F_1(a; b; c; d)$ – гипергеометрическая функция, $\Gamma(\rho)$ – гамма-функция. Тогда существует однолистное конформное склеивание для области, ограниченной данным квадратом.

Доказательство. Рассмотрим в качестве γ квадрат с центром в $z = 0$ и сторонами, параллельными осям координат. Используя формулу Кристоффеля–Шварца [4], найдем g – отображение внутренности единичного круга на внутренность квадрата, определив постоянные в интеграле из условий нормировки $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$. Получим отображение следующего вида:

$$g(z) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{z^4 + 1}}.$$

Сторона квадрата равна $\frac{4\Gamma^2(1.25)}{\sqrt{\pi}}$. Теперь получим F – отображение внешности единичного круга на внешность квадрата, так же нормируя $F(0) = 0, F'(0) = 1$:

$$F(z) = \int_0^z \sqrt{z^4 + 1} dz.$$

При таком отображении единичная окружность перейдет в квадрат требуемой ориентации со стороной $2F_1(-0.5; 0.25; 1.25; -1)\sqrt{\pi}$.

Рассмотрим отображение

$$h(z) = \frac{2F_1(-0.5; 0.25; 1.25; -1)\sqrt{\pi}}{2\Gamma(1.25)} z$$

и образуем $f(z) = h(g(z))$. Получим требуемое конформное склеивание $F^{-1} \circ f$, которое к тому же является однолиственным, причем точке $z_0 = |z_0|e^{i\varphi_0}$ единичной окружности соответствует следующая точка квадрата γ :

$$\begin{aligned} w_0 = w(z_0) = & 1.5\sqrt{2i} \frac{2F_1(-0.5; 0.25; 1.25; -1)\sqrt{\pi}}{2\Gamma(1.25)} \int_0^{\varphi_0} (\cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}} d\varphi - \\ & - i \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{2F_1(-0.5; 0.25; 1.25; -1)\sqrt{\pi}}{2\Gamma(1.25)} \sqrt{\cos 2\varphi_0} \sin 2\varphi_0 + \\ & + 2F_1(-0.5; 0.25; 1.25; -1). \end{aligned}$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Лаврентьев М. А.* Sur une classe representation continues // Мат. сб. 1935. Т. 42, № 4. С. 407–424.
2. *Волковьский Л. И.* К проблеме типа односвязных римановых поверхностей // Мат. сб. 1946. Т. 18, № 2. С. 185–218.
3. *Schaeffer A. C., Spencer D. C.* A Variational Method in Conformal Mapping // Duke Math. J. 1947. Vol. 14, № 14. P. 949–966.
4. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М. : Наука. 1951. 736 с.

**О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ
УЗЛОВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА
ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ С ПОТЕНЦИАЛОМ $q \in L_p[0, \pi]$**

Достаточно полный обзор результатов, полученных в области изучения обратных задач Штурма—Лиувилля, можно найти в известных монографиях [1–3].

В работе [4] получены некоторые дифференциальные соотношения в терминах дифференциалов Гато для узловых точек регулярной задачи Штурма—Лиувилля с произвольными краевыми условиями третьего рода.

Теорема 1 [4]. Пусть $q, w \in L[0, \pi]$, тогда дифференциал Гато функционала $x_{k,n}[q]$ ($n \in \mathbb{N}$ и $0 \leq k \leq n$) при приращении w удовлетворяет соотношению

$$Dx_{k,n}[q, w] = \frac{1}{[\hat{y}'(x_{k,n}, q, \lambda_n)]^2} \int_0^\pi w(\tau) \hat{y}^2(\tau, q, \lambda_n) \beta_{k,n}(\tau) d\tau, \quad (1)$$

где

$$\beta_{k,n}(\tau) = \begin{cases} 1 - \alpha_{k,n}, & \text{если } \tau \in [0, x_{k,n}], \\ -\alpha_{k,n}, & \text{если } \tau \in (x_{k,n}, \pi), \end{cases} \quad \alpha_{k,n} = \int_0^{x_{k,n}} \hat{y}^2(\tau, q, \lambda_n) d\tau.$$

Замечание. В случае, когда хотя бы одно краевое условие принимает вид условий Дирихле: $\alpha = 2\pi l$, или $\beta = 2\pi l$, $l \in \mathbf{Z}$, т.е. $x_{0,n}[q] \equiv 0$, или $x_{n,n}[q] \equiv \pi$, соответствующий дифференциал Гато для любых $q, w \in L[0, \pi]$

$$Dx_{0,n}[q, w] = 0 \text{ или } Dx_{n,n}[q, w] = 0.$$

С помощью этого дифференциального соотношения в работе [5] предложено решение некоторой обратной задачи Штурма—Лиувилля, позволяющее определять потенциал и краевые условия дифференциального оператора по значениям дифференциалов Гато одного из нулей $x_{k,n}[q] \in (0, \pi)$ некоторой собственной функции $\hat{y}(x, q, \lambda_n[q])$ при приращении w из множества \mathbb{W} . В качестве \mathbb{W} в [5] рассмотрены некоторые множества классических и обобщённых функций.

В настоящей работе изучаются некоторые условия единственности решения предложенной в [5] обратной узловой задачи Штурма—Лиувилля.

Пусть $q \in L_p[0, \pi]$ и $\lambda_n = \lambda_n[q]$ – n -е собственное значение задачи Штурма–Лиувилля

$$\begin{aligned} \hat{y}'' + [\lambda - q]\hat{y} &= 0, \\ \sin \alpha \hat{y}'(0) + \cos \alpha \hat{y}(0) &= 0, \\ \sin \beta \hat{y}'(\pi) + \cos \beta \hat{y}(\pi) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, а $\hat{y}(x, q, \lambda_n) \equiv \hat{y}_n(x)$ есть соответствующая ему ортонормированная собственная функция этой задачи $\|\hat{y}(\cdot, q, \lambda_n)\|_{L_p[0, \pi]} = 1$. Изменение потенциала $q \in L_p[0, \pi]$ задачи (2) на аддитивную константу $q + C$ приводит к сдвигу спектра $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ на ту же константу $\{\lambda_n + C\}_{n=1}^{\infty}$. Поэтому считаем, что выполнено условие нормировки

$$\int_0^{\pi} q(x) dx = 0. \quad (3)$$

Будем нумеровать нули функции \hat{y}_n таким образом $0 \leq x_{0,n} < x_{1,n} < \dots < x_{n,n} \leq \pi$. Зафиксируем некоторые $n \in \mathbb{N}$ и $0 \leq k \leq n, k \in \mathbb{Z}$. Обозначим через $x_{k,n}[q]$ функционал, ставящий в соответствие потенциалу q $k + 1$ -й нуль слева n -й собственной функции $\hat{y}(x, q, \lambda_n[q])$. Договоримся обозначать через

$$D\phi[q, w] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(q + tw) - \phi(q)}{t}$$

дифференциал Гато функционала $\phi : L_p[0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ при приращении $w \in L_p[0, \pi]$.

Через $\mathbb{W}_{\infty}^p[0, \pi]$ обозначим множество определённых на отрезке $[0, \pi]$ функций, непрерывно дифференцируемых и имеющих вторую производную, суммируемую с p -й степенью, на $[0, \pi]$.

Теорема 2. Пусть $1 \leq p < \infty$, \hat{y}_n и \hat{y}_m , $n, m \in \mathbb{N}$, – некоторые собственные функции двух задач Штурма–Лиувилля с потенциалами из $L_p[0, \pi]$, удовлетворяющими условиям нормировки (3), вида (2) и

$$\begin{aligned} \hat{y}'' + [\tilde{\lambda} - \tilde{q}]\hat{y} &= 0, \\ \sin \tilde{\alpha} \hat{y}'(0) + \cos \tilde{\alpha} \hat{y}(0) &= 0, \\ \sin \tilde{\beta} \hat{y}'(\pi) + \cos \tilde{\beta} \hat{y}(\pi) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

имеют общий нуль x^* , т. е. найдутся такие $0 \leq k \leq n, 0 \leq l \leq m$, $n, m \in \mathbb{N}$, что $x^* = x_{k,n} = \tilde{x}_{l,m} \in (0, \pi)$, и дифференциалы Гато этого нуля совпадают для любого приращения $w \in \mathbb{W}_{\infty}^p[0, \pi]$, т. е.

$$Dx_{k,n}[q, w] = D\tilde{x}_{l,m}[\tilde{q}, w] \text{ для любого } w \in \mathbb{W}_{\infty}^p[0, \pi]. \quad (5)$$

Тогда $\tilde{q} = q$ почти всюду на $[0, \pi]$, $\lambda_n = \tilde{\lambda}_m$ и $\tilde{\alpha} = \alpha$, $\tilde{\beta} = \beta$.

Доказательство. Пусть при некоторых $0 \leq k \leq n$, $0 \leq l \leq m$, $n, m \in \mathbb{N}$, $x^* = x_{k,n} = \tilde{x}_{l,m} \in (0, \pi)$ общий нуль рассматриваемых в теореме (2) задач Штурма—Лиувилля, тогда из теоремы (1) и (5) для любого $w \in \mathbb{W}_\infty^p[0, \pi]$ имеем равенство

$$\begin{aligned} 0 &= Dx_{k,n}[q, w] - D\tilde{x}_{l,m}[\tilde{q}, w] = \\ &= \int_0^\pi w(\tau) \left\{ \frac{1}{[\hat{y}'(x^*, q, \lambda_n)]^2} \hat{y}^2(\tau, q, \lambda_n) \beta_{k,n}(\tau) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{[\hat{y}'(x^*, \tilde{q}, \tilde{\lambda}_m)]^2} \hat{y}^2(\tau, \tilde{q}, \tilde{\lambda}_m) \tilde{\beta}_{l,m}(\tau) \right\} d\tau. \end{aligned} \quad (6)$$

В силу (1) функция

$$\frac{1}{[\hat{y}'(x^*, q, \lambda_n)]^2} \hat{y}^2(\tau, q, \lambda_n) \beta_{k,n}(\tau) - \frac{1}{[\hat{y}'(x^*, \tilde{q}, \tilde{\lambda}_m)]^2} \hat{y}^2(\tau, \tilde{q}, \tilde{\lambda}_m) \tilde{\beta}_{l,m}(\tau)$$

принадлежит множеству $\mathbb{W}_\infty^p[0, \pi]$. Взяв в качестве приращения обоих дифференциалов Гато функцию

$$w(\tau) = \frac{1}{[\hat{y}'(x^*, q, \lambda_n)]^2} \hat{y}^2(\tau, q, \lambda_n) \beta_{k,n}(\tau) - \frac{1}{[\hat{y}'(x^*, \tilde{q}, \tilde{\lambda}_m)]^2} \hat{y}^2(\tau, \tilde{q}, \tilde{\lambda}_m) \tilde{\beta}_{l,m}(\tau),$$

из (6) получим соотношение

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi \left\{ \frac{1}{[\hat{y}'(x^*, q, \lambda_n)]^2} \hat{y}^2(\tau, q, \lambda_n) \beta_{k,n}(\tau) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{[\hat{y}'(x^*, \tilde{q}, \tilde{\lambda}_m)]^2} \hat{y}^2(\tau, \tilde{q}, \tilde{\lambda}_m) \tilde{\beta}_{l,m}(\tau) \right\}^2 d\tau = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Так как подинтегральная функция неотрицательна, то в силу теоремы 1 имеем представление

$$\hat{y}(\tau, \tilde{q}, \tilde{\lambda}_m) \stackrel{\text{п.в.}}{=} \begin{cases} C_1 \hat{y}(\tau, q, \lambda_n), & \text{при } \tau \in [0, x^*], \\ C_2 \hat{y}(\tau, q, \lambda_n), & \text{при } \tau \in (x^*, \pi], \end{cases} \quad C_i \neq 0, \quad i = 1, 2. \quad (8)$$

Соотношение $C_i \neq 0$, $i = 1, 2$, следует из условия $x^* = x_{k,n} = \tilde{x}_{l,m} \in (0, \pi)$, и, значит, $\beta_{k,n}(\tau) \neq 0$, $\tilde{\beta}_{l,m}(\tau) \neq 0$. В силу того, что \hat{y} и \tilde{y} есть решения дифференциальных уравнений задачи (2) при соответствующих собственных значениях λ_n , $\tilde{\lambda}_m$ и потенциалах q и \tilde{q} , получаем

$$q(\tau) - \lambda_n \stackrel{\text{п.в.}}{=} \frac{\hat{y}''(\tau, q, \lambda_n)}{\hat{y}(\tau, q, \lambda_n)} \stackrel{\text{п.в.}}{=} \frac{\hat{y}''(\tau, \tilde{q}, \tilde{\lambda}_m)}{\hat{y}(\tau, \tilde{q}, \tilde{\lambda}_m)} \stackrel{\text{п.в.}}{=} \tilde{q}(\tau) - \tilde{\lambda}_m. \quad (9)$$

Проинтегрировав по τ полученное соотношение в пределах от 0 до π с учётом нормировки (3), получим $\lambda_n = \tilde{\lambda}_m$.

Соотношения $\tilde{\alpha} = \alpha$, $\tilde{\beta} = \beta$ также следуют из (2), (4) и (8).

Теорема доказана.

Обозначим через $C_t^2[0, \pi]$ множество функций пространства $C^1[0, \pi]$ дважды непрерывно дифференцируемых на каждом из сегментов $[0, t)$ и $(t, \pi]$. В точке $t \in [0, \pi]$ вторые производные элементов множества $C_t^2[0, \pi]$ могут иметь разрыв первого рода. Для классических решений уравнения задачи Штурма—Лиувилля (2) справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть некоторые собственные функции \hat{y}_n и \hat{y}_m , $n, m \in \mathbb{N}$, двух задач Штурма—Лиувилля с непрерывными потенциалами, удовлетворяющими условиям нормировки (3), вида (2) и (4) имеют общий нуль x^* , т. е. найдутся такие $0 \leq k \leq n$, $0 \leq l \leq m$, $n, m \in \mathbb{N}$, что $x^* = x_{k,n} = \tilde{x}_{l,m} \in (0, \pi)$, и дифференциалы Гато этого нуля совпадают для любого приращения $w \in C_{x^*}^2[0, \pi]$, т. е.

$$Dx_{k,n}[q, w] = D\tilde{x}_{l,m}[\tilde{q}, w] \text{ для любого } w \in C_{x^*}^2[0, \pi].$$

Тогда $\tilde{q} = q$ всюду на $[0, \pi]$, $\lambda_n = \tilde{\lambda}_m$ и $\tilde{\alpha} = \alpha$, $\tilde{\beta} = \beta$.

Доказательство. Для того чтобы установить истинность теоремы 3 в доказательстве теоремы 2 доопределим потенциалы q и \tilde{q} в соотношении (9) по непрерывности.

Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 1.1436.2014К).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Марченко В. А. Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения. Киев : Наук. думка, 1977. 329 с.
2. Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма—Лиувилля. М. : Наука, 1984. 240 с.
3. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Операторы Штурма—Лиувилля и Дирака. М. : Наука, 1988. 432 с.
4. Трынин А. Ю. Дифференциальные свойства нулей собственных функций задачи Штурма—Лиувилля // Уфимский математический журнал. 2011. Т. 3, вып. 4. С. 133–143.
5. Трынин А. Ю. Об одной обратной узловых задаче для оператора Штурма—Лиувилля // Уфимский математический журнал. 2013. Т. 5, вып. 4. С. 116–129.

О ПРИБЛИЖЕНИИ ПРОИЗВОДНОЙ ОТ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ

В [1] для получения равномерных приближений к непрерывному решению уравнения Абеля построен метод регуляризации на базе разрывного оператора Стеклова.

В данной работе построен метод, позволяющий получать такие приближения к производной от решения уравнения Абеля и использующий для этой цели операторы из [2].

Рассмотрим уравнение Абеля:

$$Au \equiv \int_0^x \frac{(x-t)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} u(t) dt = f(x), \quad (1)$$

в котором $u(x) \in C^1[0, 1]$, $0 < \beta < 1$, $f(x)$ задана приближением $f_\delta(x)$: $\|f_\delta(x) - f(x)\|_{L_2} \leq \delta$.

Возьмем операторы из [2]:

$$DS_\alpha^{(2)}u = \begin{cases} \alpha^{-2}[-\int_x^{x+\alpha} u(t) dt + \int_{x+\alpha}^{x+2\alpha} u(t) dt], & x \in [0, 1/2], \\ \alpha^{-2}[-\int_{x-2\alpha}^{x-\alpha} u(t) dt + \int_{x-\alpha}^x u(t) dt], & x \in [1/2, 1], \end{cases} \quad (\alpha \leq 1/4)$$

и построим по аналогии с [1] операторы $\tilde{R}_\alpha = DS_\alpha^{(2)}A^{-1}$, где, как известно,

$$A^{-1}f = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{(x-t)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} f(t) dt.$$

Теорема 1. *Операторы \tilde{R}_α являются интегральными операторами с ядрами $\tilde{R}_\alpha(x, t)$, имеющими вид*

$$\tilde{R}_\alpha(x, t) = \begin{cases} (\alpha^2 \Gamma(1-\beta))^{-1} \tilde{R}_{\alpha 2}(x, t), & x \in [0, 1/2], \\ (\alpha^2 \Gamma(1-\beta))^{-1} \tilde{R}_{\alpha 1}(x, t), & x \in [1/2, 1], \end{cases} \quad (2)$$

где

$$\tilde{R}_{\alpha 2}(x, t) = \begin{cases} (x-t)^{-\beta} - 2(x+\alpha-t)^{-\beta} + (x+2\alpha-t)^{-\beta}, & 0 \leq t < x, \\ (x+2\alpha-t)^{-\beta} - 2(x+\alpha-t)^{-\beta}, & x \leq t < x+\alpha, \\ (x+2\alpha-t)^{-\beta}, & x+\alpha \leq t \leq x+2\alpha, \\ 0, & x+2\alpha < t \leq 1, \end{cases}$$

$$\tilde{R}_{\alpha 1}(x, t) = \begin{cases} (x - 2\alpha - t)^{-\beta} - 2(x - \alpha - t)^{-\beta} + (x - t)^{-\beta}, & 0 \leq t < x - 2\alpha, \\ (x - t)^{-\beta} - 2(x - \alpha - t)^{-\beta}, & x - 2\alpha \leq t < x - \alpha, \\ (x - t)^{-\beta}, & x - \alpha \leq t \leq x, \\ 0, & x < t \leq 1 \end{cases}$$

при $\alpha \leq 1/4$.

Доказательство аналогично доказательству соответствующей теоремы из [1].

Теорема 2. *Операторы $\tilde{R}_{\alpha j}$, $j = 1, 2$, при $0 < \beta < 1/2$ являются линейными ограниченными при каждом значении α операторами, действующими из пространства $L_2[0, 1]$ в пространство $C[1/2, 1]$ при $j = 1$ и в $C[0, 1/2]$ при $j = 2$. При этом справедлива двусторонняя оценка:*

$$\begin{aligned} (1 - 2\beta)^{-1/2}(\Gamma(1 - \beta))^{-1}\alpha^{-3/2-\beta} &\leq \|\tilde{R}_{\alpha}\|_{L_2 \rightarrow L_{\infty}} \leq \\ &\leq 2\sqrt{2}(1 - 2\beta)^{-1/2}(\Gamma(1 - \beta))^{-1}\alpha^{-3/2-\beta}. \end{aligned} \quad (3)$$

Доказательство. Из теоремы 1 имеем

$$\|\tilde{R}_{\alpha 2}\|_{L_2[0,1] \rightarrow C[0,1/2]} = \max_{0 \leq x \leq 1/2} (J(x))^{1/2},$$

где $J(x) = J_1(x) + J_2(x) + J_3(x)$,

$$J_1(x) = \int_0^x [(x - t)^{-\beta} - 2(x + \alpha - t)^{-\beta} + (x + 2\alpha - t)^{-\beta}]^2 dt,$$

$$J_2(x) = \int_0^x [(x + 2\alpha - t)^{-\beta} - 2(x + \alpha - t)^{-\beta}]^2 dt,$$

$$J_3(x) = \int_{x+\alpha}^{x+2\alpha} (x + 2\alpha - t)^{-2\beta} dt.$$

При любом x справедлива оценка снизу:

$$J(x) \geq J_3(x) = (1 - 2\beta)^{-1}\alpha^{1-2\beta}.$$

Для получения оценки сверху пользуемся представлениями:

$$J_1(x) = J_{11}(x) + J_{12}(x) + 2J_{13}(x),$$

где

$$J_{11} = \int_0^x [(x - t)^{-\beta} - 2(x + \alpha - t)^{-\beta}]^2 dt,$$

$$J_{12} = \int_0^x (x + 2\alpha - t)^{-2\beta} dt,$$

$$J_{13}(x) = \int_0^x [(x - t)^{-\beta} - 2(x + \alpha - t)^{-\beta}](x + 2\alpha - t)^{-\beta} dt,$$

и

$$J_2(x) = J_{21}(x) + 4J_{22}(x) - 4J_{23}(x),$$

где

$$J_{21}(x) = \int_x^{x+\alpha} (x + 2\alpha - t)^{-2\beta} dt,$$

$$J_{22}(x) = \int_x^{x+\alpha} (x + \alpha - t)^{-2\beta} dt,$$

$$J_{23}(x) = \int_x^{x+\alpha} (x + 2\alpha - t)^{-\beta} (x + \alpha - t)^{-\beta} dt.$$

Оценивая сверху каждую из функций J_{ij} , $i = 1, 2; j = 1, 2, 3$, приходим к оценке:

$$J(x) \leq 8(1 - 2\beta)^{-1} \alpha^{1-2\beta}.$$

Отсюда получаем оценку (3) для нормы $\|R_{\alpha 2}\|_{L_2[0,1] \rightarrow C[0,1/2]}$ и аналогичными рассуждениями получаем точно такую же оценку для нормы $\|\tilde{R}_{\alpha 1}\|_{L_2[0,1] \rightarrow C[1/2,1]}$, откуда следует утверждение теоремы.

Рассмотрим величину

$$\tilde{\Delta}(\delta, \tilde{R}_\alpha, u) = \sup\{\|\tilde{R}_\alpha f_\delta - u'\|_{L_\infty[0,1]} : \|f_\delta - f\|_{L_2}\}.$$

Теорема 3. *Для сходимости $\tilde{\Delta}(\alpha, \tilde{R}_\alpha, u) \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$ необходимо и достаточно выполнения согласования $\alpha = \alpha(\delta)$, удовлетворяющего условиям:*

$$\alpha(\delta) \rightarrow 0 \text{ и } \delta(\alpha(\delta))^{(-3/2-\beta)} \rightarrow 0 \text{ при } \delta \rightarrow 0.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00238).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромова Г. В. Регуляризация уравнения Абеля с помощью разрывного оператора Стеклова // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 4, ч. 2. С. 599–603.
2. Хромов А. А. Приближение функции и её производной с помощью модифицированного оператора Стеклова // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 4, ч. 2. С. 593–599.
3. Иванов В. К. Об интегральных уравнениях Фредгольма первого рода // Дифференциальные уравнения. 1967. Т. III, № 3. С. 410–421.

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ

Рассматривается уравнение Абеля:

$$Au \equiv \pi^{-\frac{1}{2}} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} u(t) dt = f(x), \quad (1)$$

где $u(x) \in C[0, 1]$, $f(x)$ задана ее δ -приближением в $L_2[0, 1]$: $\|f_\delta - f\|_{L_2} \leq \delta$. Решается задача нахождения равномерных приближений к $u(x)$.

В [1] для операторных уравнений 1 рода был предложен метод построения регуляризирующих [2] операторов в виде $R_\alpha = T_\alpha A^{-1}$, где применительно к нашей задаче, T_α – любое семейство операторов, дающее равномерные приближения к непрерывной функции на отрезке, A^{-1} – оператор, обратный к A , который, как известно, имеет вид

$$A^{-1}f = \pi^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} f(t) dt.$$

В [3] этот метод был реализован для уравнения Абеля, в котором ядро $(x-t)$ имело степень $\beta - 1$, где $\beta \in (0, \frac{1}{2})$.

В настоящей работе на базе «разрывных» операторов Стеклова построен метод для $\beta = \frac{1}{2}$.

Рассмотрим операторы

$$S_\alpha^{(2)}u = \begin{cases} S_{\alpha_2}^2 u, & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ S_{\alpha_1}^2 u, & x \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

где

$$S_{\alpha_2}^2 u = \frac{1}{\alpha^2} \left[\int_x^{x+\alpha} (t-x)u(t)dt + \int_{x+\alpha}^{x+2\alpha} (2\alpha - (t-x))u(t)dt \right],$$

$$S_{\alpha_1}^2 u = \frac{1}{\alpha^2} \left[\int_{x-2\alpha}^{x-\alpha} (2\alpha - (x-t))u(t)dt + \int_{x-\alpha}^x (x-t)u(t)dt \right].$$

И построим семейство

$$R_\alpha f = S_\alpha^{(2)} A^{-1} f = \begin{cases} R_{\alpha_2} f, & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ R_{\alpha_1} f, & x \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \quad (2)$$

$$R_{\alpha_j} f = S_{\alpha_j}^2 A^{-1} f, j = 1, 2.$$

Поскольку функции $R_{\alpha_j} f$ являются разрывными в точке $x = \frac{1}{2}$, мы будем считать их элементами пространства $L_\infty[0, 1]$ с нормой

$$\|\cdot\|_{L_\infty} = \max(\|\cdot\|_{C[0, \frac{1}{2}]}, \|\cdot\|_{C[\frac{1}{2}, 1]}).$$

Теорема 1. *Операторы R_α являются интегральными операторами с ядрами $R_\alpha(x, t)$, имеющими вид*

$$R_\alpha(x, t) = \alpha^{-2} 2\pi^{-\frac{1}{2}} \begin{cases} R_{\alpha_2}(x, t), & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ R_{\alpha_1}(x, t), & x \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

где

$$R_{\alpha_2}(x, t) = \begin{cases} (x-t)^{\frac{1}{2}} - 2(x-t+\alpha)^{\frac{1}{2}} + (x-t+2\alpha)^{\frac{1}{2}}, & 0 \leq t \leq x, \\ (x-t+2\alpha)^{\frac{1}{2}} - 2(x-t+\alpha)^{\frac{1}{2}}, & x \leq t \leq x+\alpha, \\ (x-t+2\alpha)^{\frac{1}{2}}, & x+\alpha \leq t \leq x+2\alpha, \\ 0, & x+2\alpha \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$R_{\alpha_1}(x, t) = \begin{cases} (x-t-2\alpha)^{\frac{1}{2}} - 2(x-t-\alpha)^{\frac{1}{2}} + (x-t)^{\frac{1}{2}}, & 0 \leq t \leq x-2\alpha, \\ (x-t)^{\frac{1}{2}} - 2(x-t-\alpha)^{\frac{1}{2}}, & x-2\alpha \leq t \leq x-\alpha, \\ (x-t)^{\frac{1}{2}}, & x-\alpha \leq t \leq x, \\ 0, & x \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$0 < \alpha \leq \frac{1}{4}.$$

Доказательство проводится по схеме аналогичного доказательства в [3], но содержит принципиальные технические трудности, и поэтому является более сложным.

Теорема 2. *Операторы R_α , рассматриваемые как операторы из $L_2[0, 1]$ в $L_\infty[0, 1]$, являются регуляризирующими для уравнения (1).*

Доказательство. Согласно [2] утверждения теоремы будут справедливы, если будут установлены свойства:

- 1) $R_\alpha \in (L_2[0, 1] \rightarrow L_\infty[0, 1])$,
- 2) $\|R_\alpha A u - u\|_{L_\infty} \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$ и любой $u \in C[0, 1]$,
- 3) R_α – ограниченные операторы при каждом фиксированном α .

Свойство 1) вытекает из вида операторов R_α – для любой $f(x) \in L_2[0, 1]$ функции $R_{\alpha_j} f$ являются непрерывными: на $[0, \frac{1}{2}]$ при $j = 2$, на $[\frac{1}{2}, 1]$ при $j = 1$.

Свойство 2) вытекает из того, что $R_\alpha A = S_\alpha^{(2)}$ а $\|S_\alpha^{(2)} u - u\|_{L_\infty} \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$ и любой $u \in C[0, 1]$.

Свойство 3) следует из (2–4), если к интегралам, входящим в выражения (2), применить неравенство Буняковского.

Например, имеем

$$\left| \int_{x-\alpha}^x (x-t)^{\frac{1}{2}} f(t) dt \right| \leq \left(\int_0^\alpha \tau d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{x-\alpha}^x f^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \|f\|_{L_2}.$$

Аналогичную оценку имеют и другие интегралы.

В результате для нормы

$$\|R_\alpha\|_{L_2 \rightarrow L_\infty} = \max(\|R_{\alpha_2}\|_{L_2[0,1] \rightarrow C[0, \frac{1}{2}]}, \|R_{\alpha_1}\|_{L_2[0,1] \rightarrow C[\frac{1}{2}, 1]}),$$

получаем оценку

$$\|R_\alpha\|_{L_2 \rightarrow L_\infty} \leq C\alpha^{-1}.$$

Отсюда вытекает

Следствие. Для того чтобы метод решения уравнения (1) с помощью семейства R_α был регуляризирующим, достаточно согласовать $\alpha = \alpha(\delta)$, чтобы $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ и $\delta(\alpha(\delta))^{-1} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 1.1436.2014К)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромова Г. В. Об одном способе построения методов регуляризации уравнений первого рода // ЖВМ и МФ 2000. Т. 40, № 7. С. 997–1002.
2. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М. : Наука, 1978, 206 с.
3. Хромова Г. В. Регуляризация уравнения Абеля с помощью разрывного оператора Стеклова // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 4, ч. 2. С. 599–603.

УДК 517.968

Г. В. Хромова, А. О. Савенкова

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ НА НЕКОТОРОМ КОМПАКТНОМ КЛАССЕ

В данной работе для одного метода регуляризации получена наилучшая по порядку оценка погрешности приближенного решения.

Рассматривается уравнение Абеля:

$$Au \equiv \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} u(t) dt = f(x), \quad (1)$$

где $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, $u(x) \in C[0, 1]$, $f(x)$ задана ее δ -приближением в среднеквадратичной метрике $L_2[0, 1]$: $\|f_\delta - f\|_{L_2} \leq \delta$.

В [1] предложен метод регуляризации уравнения (1), базирующийся на семействе интегральных операторов R_h с ядрами $K_h(x, t)$ вида

$$K_h(x, t) = [2h\Gamma(1 - \alpha)]^{-1} \tilde{K}_h(x, t),$$

где

$$\tilde{K}_h(x, t) = \begin{cases} (x + h - t)^{-\alpha} - (x - h - t)^{-\alpha}, & 0 \leq t \leq x - h, \\ (x + h - t)^{-\alpha}, & x - h \leq t \leq x + h, \\ 0, & x + h \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (2)$$

при $x \in [h, 1 - h]$. При $x \in [0, h]$ $\tilde{K}_h(x, t)$ имеет вид (2) с заменой $x - h$ на $h - x$. При $x \in [1 - h, 1]$

$$\tilde{K}_h(x, t) = \begin{cases} 2(1 - t)^{-\alpha} - (x - h - t)^{-\alpha} - (2 - x - h - t)^{-\alpha}, & 0 \leq t \leq x - h, \\ 2(1 - t)^{-\alpha} - (2 - x - h - t)^{-\alpha}, & x - h \leq t \leq 2 - x - h, \\ 0, & 2 - x - h \leq t \leq 1, \end{cases}$$

и получена оценка погрешности приближенного решения уравнения (1) на классе $Lip_M 1$.

Здесь мы рассматриваем класс

$$M = \{u(x) \in C[0, 1] : \|u\|_{W_2^1} \leq 1\},$$

где $W_2^1 = W_2^1[0, 1]$ – пространство Соболева, и величины

$$\Delta(\delta, R_h, M) = \sup \|R_h f_\delta - u\|_C : u \in M, \|f_\delta - f\|_{L_2} \leq \delta,$$

$$\Delta_1(R_h A, M) = \sup \|R_h A u - u\|_C : u \in M.$$

Пользуемся известной двусторонней оценкой:

$$\frac{1}{2} \varphi(\delta, R_h, M) \leq \Delta(\delta, R_h, M) \leq \varphi(\delta, R_h, M), \quad (3)$$

где

$$\varphi(\delta, R_h, M) = \Delta_1(R_h A, M) + \|R_h\|_{L_2 \rightarrow C}.$$

Теорема 1. *Справедливо равенство, асимптотическое по h при $h \rightarrow 0$:*

$$\Delta_1(R_h A, M) = \left(\frac{h}{3}\right)^{\frac{1}{2}} + O(h^{\frac{3}{2}}).$$

Доказательство. Доказательство базируется на формулах из [2]:

$$\Delta_1(R_h A, M) = \sup \left[\int_0^1 K_h(x, t) g(x, t, h) dt - g(x, x, h) \right]^{\frac{1}{2}},$$

где

$$g(x, t, h) = \int_0^1 K_h(x, t) G(t, \xi) dt - G(t, x),$$

$$G(t, x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{ch} x \operatorname{ch}(1-t)}{\operatorname{sh} 1}, & x \leq t, \\ \frac{\operatorname{ch} t \operatorname{ch}(1-x)}{\operatorname{sh} 1}, & t \leq x, \end{cases}$$

$K_h(x, t)$ – ядро оператора $R_h A$.

По конструкции (см. [1]) операторов R_h имеем: $\Delta_1(R_h A, M) \equiv \Delta_1(\tilde{S}_h, M)$, где \tilde{S}_h – так называемый расширенный оператор Стеклова, полученный из оператора

$$S_h \varphi = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} \varphi(t) dt$$

путем продолжения функции φ за границы отрезка $[0, 1]$ четным образом.

Далее проводим вычисления по следующей схеме. Разбиваем отрезок $[0, 1]$ на 5 частей:

$$[0, 1] = \left[0, \frac{h}{2}\right] + \left[\frac{h}{2}, h\right] + [h, 1-h] + \left[1-h, 1-\frac{h}{2}\right] + \left[1-\frac{h}{2}, 1\right]$$

и на каждом из отрезков находим функцию $g(x, t, h)$ (достаточно сделать это на первых трех, для последних двух выкладки можно свести к первым двум отрезкам). На каждом из отрезков рассматриваем случаи $t \leq x$ и $x \leq t$. При этом еще дополнительно рассматриваем случаи $t \leq h-x$ и $t > h-x$: на отрезке $\left[0, \frac{h}{2}\right]$ для $x \leq t$, на отрезке $\left[\frac{h}{2}, h\right]$ – для $t \leq x$.

В полученных на каждом из отрезков выражениях для функции $g(x, t, h)$ заменяем гиперболические функции малого аргумента их разложением в ряды, в которых выделяем главные части асимптотик по h . Затем вычисляем функцию $\tilde{S}_h g - g$, убеждаемся, что максимальное значение эта функция принимает на отрезках, прилегающих к концам основного отрезка, и получаем утверждение теоремы 1.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Справедлива двусторонняя оценка:*

$$C_1 \delta^{\frac{1}{2(1+\alpha)}} \leq \Delta(R_{h(\delta)}, M) \leq C_2 \delta^{\frac{1}{2(1+\alpha)}},$$

$$h(\delta) \leq C \delta^{\frac{1}{1+\alpha}},$$

константы C, C_1, C_2 – вычислены.

Доказательство вытекает из формулы (3), теоремы 2 из [1] и проводится по схеме из [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00238).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хромова Г. В.* О приближенных решениях уравнения Абеля // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. 2001. № 3. С. 5–9.

2. *Хромова Г. В.* Об оценках погрешности приближенных решений уравнений первого рода // Докл. АН. 2001. Т. 378, № 5. С. 605–609.

УДК 517.51

Г. В. Хромова, Е. О. Янина

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ОПЕРАТОРОВ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ ЯДРАМИ

В данной работе построено семейство операторов, с помощью которых решаются задачи приближения и восстановления непрерывной функции на отрезке. Это семейство является модификацией семейства операторов T_h :

$$T_h f = -\frac{3}{4h^3} \int_{x-h}^{x+h} \left((t-x)^2 - h^2 \right) f(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

С помощью операторов T_h указанные задачи решаются лишь во внутренних точках отрезка $[a, b]$, при этом границы внутреннего отрезка зависят от параметра h (см. [1] случай $k = 1, i = 0$).

1. Построим операторы T_h^* :

$$T_h^* f = \begin{cases} C_1(x, h) \int_a^{x+h} \left((t-x)^2 - h^2 \right) f(t) dt, & x \in [a, a+h], \\ T_h, & x \in [a+h, b-h], \\ C_2(x, h) \int_{x-h}^b \left((t-x)^2 - h^2 \right) f(t) dt, & x \in [b-h, b], \end{cases} \quad (1)$$

где $C_i(x, h)$, $i = 1, 2$, определим из условия $T_h^*1 = 1$ (а для операторов T_h это условие выполняется). Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Если $T_h^*1 \equiv 1$, то*

$$C_1(x, h) = \frac{3}{(x-a) \left((x-a)^2 - 3h^2 \right) - 2h^3}, \quad x \in [a, a+h], \quad (2)$$

$$C_2(x, h) = \frac{3}{(b-x) \left((b-x)^2 - 3h^2 \right) - 2h^3}, \quad x \in [b-h, b]. \quad (3)$$

Теорема 1. *Для любой непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ выполняется сходимость: $\|T_h^*f - f\|_{C[a,b]} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.*

Доказательство вытекает из непрерывности функций T_h^*f на $[a, b]$ и оценки

$$\|T_h^*f - f\|_{C[a,b]} \leq \omega(h), \quad (4)$$

где $\omega(h)$ – модуль непрерывности функции $f(x)$.

Теорема доказана.

2. Пусть теперь $f(x)$ задана ее приближением $f_\delta(x)$: $\|f_\delta - f\|_{L_2[a,b]} \leq \delta$.

Лемма 2. *Справедлива двусторонняя оценка:*

$$3^{\frac{1}{2}} 10^{-\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} \leq \|T_h^*\|_{L_2[a,b] \rightarrow C[a,b]} \leq 2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} 5^{-\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} + O\left(h^{\frac{1}{2}}\right). \quad (5)$$

Доказательство. Имеем

$$\|T_h^*\|_{L_2 \rightarrow C} = \max_{a \leq x \leq b} \sqrt{\int_a^b K_h^2(x, t) dt},$$

где $K_h(x, t)$ – ядро оператора T_h^* , которое легко определяется из (1)–(3).

Тогда

$$\|T_h^*\|_{L_2 \rightarrow C} = \max \left\{ \max_{a \leq x \leq a+h} A_1(x, h), \max_{a+h \leq x \leq b-h} A_2(x, h), \max_{b-h \leq x \leq b} A_3(x, h) \right\},$$

где

$$A_i(x, h) = \sqrt{\int_c^d K_h^2(x, t) dt},$$

$c = a, d = x + h, x \in [a, a + h]$ для $i = 1$;

$c = x - h, d = x + h, x \in [a + h, b - h]$ для $i = 2$;

$c = x - h, d = b, x \in [b - h, b]$ для $i = 3$.

Известно [1], что $A_2(x, h) = 3^{\frac{1}{2}}5^{-\frac{1}{2}}h^{-\frac{1}{2}}$.

Рассмотрим $A_1(x, h)$. Вычислив соответствующий интеграл и сделав замену $\tilde{x} = x - a$, придем к формуле

$$A_1(x, h) = \frac{A_{11}(\tilde{x}, h)}{A_{12}(\tilde{x}, h)},$$

где

$$A_{11}(\tilde{x}, h) = \frac{3}{\sqrt{15}} \sqrt{8h^5 + 15h^4\tilde{x} - 10h^2\tilde{x}^3 + 3\tilde{x}^5},$$

$$A_{12}(\tilde{x}, h) = |\tilde{x}(\tilde{x}^2 - 3h^2) - 2h^3|.$$

Отсюда получаем оценку (5) с заменой $\|T_h^*\|_{L_2 \rightarrow C}$ на $A_1(x, h)$.

Точно такая же оценка справедлива и для $A_3(x, h)$.

Отсюда получаем утверждение леммы.

Лемма доказана.

Теорема 2. *Для того чтобы $\|T_h^* f_\delta - f\|_{C[a,b]} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$ достаточно согласовать h с δ так, чтобы:*

- а) $h(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$;
- б) $(h(\delta))^{-\frac{1}{2}} \delta \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Доказательство вытекает из оценки:

$$\|T_h^* f_\delta - f\|_C \leq \|T_h^*\|_{L_2 \rightarrow C} \delta + \|T_h^* f - f\|_C$$

и оценок (4), (5).

Теорема доказана.

Замечание. *Если мы рассматриваем вместо нормы $\|T_h^* f_\delta - f\|_{C[a,b]}$ величину $\Delta(\delta, T_h^*, f) = \sup\{\|T_h^* f_\delta - f\|_{C[a,b]} : \|f_\delta - f\|_{L_2[a,b]} \leq \delta\}$, то как известно из теории некорректно поставленных задач, условия а), б), сформулированные в теореме 2, будут не только достаточными для сходимости $\Delta(\delta, T_h^*, f) \rightarrow 0$, но и необходимыми.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00238).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромова Г. В. О дифференцировании функций, заданных с погрешностью // Дифференциальные уравнения и теория функций : межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1984. Вып. 6. С. 53–58.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПУЧКОВ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'' + (\lambda^2 + 2\lambda p(x) + q(x))y = 0, \quad x \in (0, T), \quad (1)$$

и линейные формы

$$U_j(y) := \int_0^T y(t) d\sigma_j(t), \quad j = 1, 2. \quad (2)$$

Здесь $q(x) \in L(0, T)$, $p(x) \in AC[0, T]$ – комплекснозначные функции, $\sigma_j(t)$ – комплекснозначные функции ограниченной вариации непрерывные справа при $t > 0$. Без ограничения общности считаем, что $\int_0^T p(t) dt = 0$. Существуют конечные пределы $H_j := \sigma_j(+0) - \sigma_j(0)$. Линейные формы (2) можно записать в следующем виде:

$$U_j(y) := H_j y(0) + \int_0^T y(t) d\sigma_{j0}(t), \quad j = 1, 2, \quad (3)$$

где $\sigma_{j0}(t)$ – комплекснозначные функции ограниченной вариации непрерывные справа при $t \geq 0$. Для определенности предположим, что $H_1 \neq 0$.

Краевые задачи с нелокальными условиями играют важную роль в математике и приложениях. Задачи такого типа часто возникают в физике, механике, геофизике и других областях естествознания. В данной работе исследуются обратные спектральные задачи для дифференциальных пучков второго порядка с краевыми условиями, порожденными линейными формами (2). Классические обратные спектральные задачи для уравнения (1) с двухточечными краевыми условиями достаточно полно изучены (см. [1]). Нелокальные обратные задачи, в силу их сложности, изучены весьма мало. Некоторые аспекты теории обратных задач для отдельных нелокальных операторов рассматривались в [2–7]. В данной статье мы доказываем теоремы единственности решения обратных спектральных задач для уравнения (1) с нелокальными краевыми условиями. Приведены также контрпримеры, относящиеся к постановкам обратных задач. В качестве примера рассматривается задача восстановления потенциалов пучка по трем спектрам.

2. Пусть $X_k(x, \lambda)$ и $Z_k(x, \lambda)$, $k = 1, 2$, – решения уравнения (1) при условиях

$$\begin{aligned} X_1(0, \lambda) &= X_2'(0, \lambda) = Z_1(T, \lambda) = Z_2'(T, \lambda) = 1, \\ X_1'(0, \lambda) &= X_2(0, \lambda) = Z_1'(T, \lambda) = Z_2(T, \lambda) = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим краевую задачу (КЗ) L_0 для уравнения (1) при условиях

$$U_1(y) = U_2(y) = 0.$$

Обозначим $\omega(\lambda) := \det[U_j(X_k)]_{j,k=1,2}$ и предположим, что $\omega(\lambda) \neq 0$. Функция $\omega(\lambda)$ является целой по λ , и ее нули $\Xi = \{\xi_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ совпадают с собственными значениями задачи L_0 . Функция $\omega(\lambda)$ называется *характеристической функцией* для L_0 .

Положим $V_j(y) := y^{(j-1)}(T)$, $j = 1, 2$, и рассмотрим КЗ L_j , $j = 1, 2$, для уравнения (1) с условиями $U_j(y) = V_1(y) = 0$. Собственные значения $\Lambda_j = \{\lambda_{nj}\}_{n \in \mathbf{Z}}$ задачи L_j совпадают с нулями функции $\Delta_j(\lambda) := \det[U_j(X_k), V_1(X_k)]_{k=1,2}$.

Пусть $\Phi(x, \lambda)$ – решение уравнения (1) при условиях $U_1(\Phi) = 1$, $V_1(\Phi) = 0$. Обозначим $M(\lambda) := U_2(\Phi)$. Функция $M(\lambda)$ называется *функцией Вейля*. Ясно, что

$$M(\lambda) = \Delta_2(\lambda) / \Delta_1(\lambda). \quad (4)$$

Известно (см. [1]), что для оператора Штурма–Лиувилля с классическими двухточечными распадающимися краевыми условиями задание функции Вейля однозначно определяет потенциал $q(x)$. В нашем случае это неверно (см. контрпримеры ниже).

Обратная задача 1. Пусть $\Lambda_1 \cap \Xi = \emptyset$ (условие S). Даны $M(\lambda)$ и $\omega(\lambda)$, построить потенциал $q(x)$.

Отметим, что функции $\sigma_j(t)$ известны априори, и только потенциалы $p(x), q(x)$ должны быть построены. Сформулируем теорему единственности для обратной задачи 1. Для этого наряду с p, q рассмотрим другую пару \tilde{p}, \tilde{q} и условимся, что если некоторый символ α обозначает объект, относящийся к p, q , то $\tilde{\alpha}$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к \tilde{p}, \tilde{q} .

Теорема 1. Пусть $\Lambda_1 \cap \Xi = \emptyset$. Если $M(\lambda) = \tilde{M}(\lambda)$ и $\omega(\lambda) = \tilde{\omega}(\lambda)$, то $p(x) = \tilde{p}(x)$ и $q(x) = \tilde{q}(x)$ п.в. на $(0, T)$.

Таким образом, при условии S задание $M(\lambda)$ и $\omega(\lambda)$ однозначно определяет потенциал. Отметим, что если условие S не выполняется, то задания $M(\lambda)$ и $\omega(\lambda)$ недостаточно для построения потенциалов (см. контрпримеры ниже). В этом случае надо задавать дополнительные данные.

Рассмотрим КЗ L_{11} для уравнения (1) с условиями $U_1(y) = V_2(y) = 0$. Собственные значения $\Lambda_{11} := \{\lambda_{n1}^1\}_{n \in \mathbf{Z}}$ задачи L_{11} совпадают с нулями характеристической функции $\Delta_{11}(\lambda) := \det[U_1(X_k), V_2(X_k)]_{k=1,2}$. Ясно, что $\{\lambda_{n1}\}_{n \in \mathbf{Z}} \cap \{\lambda_{n,1}^1\}_{n \in \mathbf{Z}} = \emptyset$.

Обратная задача 2. Даны $\{\lambda_{n1}, \lambda_{n1}^1\}_{n \in \mathbf{Z}}$, построить $q(x)$.

Эта обратная задача является обобщением известной обратной задачи Борга (см. [1]) и совпадает с ней в случае, когда $p(x) = 0$ и $U_1(y) = y(0)$. Отметим, что в обратной задаче 2 нет ограничений на поведение спектров.

Теорема 2. Если $\lambda_{n1} = \tilde{\lambda}_{n1}, \lambda_{n1}^1 = \tilde{\lambda}_{n1}^1, n \in \mathbf{Z}$, то $p(x) = \tilde{p}(x)$ и $q(x) = \tilde{q}(x)$ п. в. на $(0, T)$.

3. Контрпримеры. 1) Пусть $T = \pi, U_1(y) = y(0), U_2(y) = y(\pi/2), p(x) = p(x + \pi/2), q(x) = q(x + \pi/2), x \in (0, \pi/2)$, и $q(x) \not\equiv q(\pi - x), q(x) \not\equiv q(\pi - x)$. Возьмем $\tilde{p}(x) = p(\pi - x), \tilde{q}(x) = q(\pi - x), x \in (0, \pi)$. Тогда

$$\Delta_1(\lambda) = \tilde{\Delta}_1(\lambda), \Delta_2(\lambda) = \tilde{\Delta}_2(\lambda), \omega(\lambda) = \tilde{\omega}(\lambda),$$

и в силу (4) $M(\lambda) = \tilde{M}(\lambda)$. Условие S не выполняется. Задания $M(\lambda)$ и $\omega(\lambda)$ недостаточно для однозначного восстановления потенциалов p, q .

2) Пусть $T = \pi, U_1(y) = y(0), U_2(y) = y(\pi - \alpha)$, где $\alpha \in (0, \pi/2)$. Тогда

$$\Delta_1(\lambda) = X_2(\pi, \lambda), \omega(\lambda) = X_2(\pi - \alpha, \lambda),$$

$$\Delta_2(\lambda) = X_2(\pi, \lambda)X_1(\pi - \alpha, \lambda) - X_2(\pi - \alpha, \lambda)X_1(\pi, \lambda).$$

Если $\Delta_1(\lambda^*)\Delta_2(\lambda^*)\omega(\lambda^*) = 0$ при некотором λ^* , то либо $\Delta_1(\lambda^*) = \Delta_2(\lambda^*) = \omega(\lambda^*) = 0$ (т.е. λ^* – собственное значение для всех трех КЗ L_0, L_1, L_2), либо λ^* – собственное значение только одной из КЗ L_0, L_1, L_2 .

Пусть $p(x) \not\equiv p(\pi - x), q(x) \not\equiv q(\pi - x)$, и пусть $p(x) = q(x) \equiv 0$ для $x \in [0, \alpha_0] \cup [\pi - \alpha_0, \pi]$, где $\alpha_0 \in (0, \pi/2)$. Если $\alpha < \alpha_0$, то $\lambda_{n2} = \pi n / \alpha, n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. Выберем достаточно малое $\alpha < \alpha_0$ так, чтобы $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$. Ясно, что такой выбор возможен. Тогда $\Lambda_1 \cap \Xi = \emptyset$, т. е. условие S выполнено. Возьмем $\tilde{p}(x) := p(\pi - x), \tilde{q}(x) := q(\pi - x)$. Тогда $\Delta_1(\lambda) = \tilde{\Delta}_1(\lambda), \Delta_2(\lambda) = \tilde{\Delta}_2(\lambda)$, и следовательно, $M(\lambda) = \tilde{M}(\lambda)$. Итак, условие S выполнено, но задания $M(\lambda)$ недостаточно для однозначного восстановления потенциалов p, q .

4. Если условие S не выполняется, то задания $M(\lambda)$ и $\omega(\lambda)$ недостаточно для определения потенциала q . Введем дополнительные спектральные данные. Для простоты ограничимся случаем, когда все нули $\omega(\lambda)$ простые. Рассмотрим функции

$$\varphi(x, \lambda) = -\det[X_k(x, \lambda), U_1(X_k)]_{k=1,2}, \theta(x, \lambda) = \det[X_k(x, \lambda), U_2(X_k)]_{k=1,2}.$$

Тогда

$$\det[\theta^{(\nu-1)}(x, \lambda), \varphi^{(\nu-1)}(x, \lambda)]_{\nu=1,2} = \omega(\lambda).$$

Следовательно, функции $\varphi(x, \xi_n)$ и $\theta(x, \xi_n)$ являются линейно зависимыми, т. е. существуют числа A_n и B_n ($|A_n| + |B_n| > 0$) такие, что $A_n\varphi(x, \xi_n) = B_n\theta(x, \xi_n)$. Рассмотрим последовательность $D = \{d_n\}_{n \geq 1}$, где $d_n := B_n/A_n$ ($d_n := \infty$, если $A_n = 0$).

Обратная задача 3. Даны $M(\lambda), \omega(\lambda)$ и D , построить $p(x), q(x)$.

Отметим, что если условие S выполняется (т. е. $\Lambda_1 \cap \Xi = \emptyset$), то $d_n = -M^{-1}(\xi_n)$. В этом случае из соотношения $M(\lambda) = \tilde{M}(\lambda)$ вытекает, что $D = \tilde{D}$, и мы приходим к обратной задаче 1.

Теорема 3. Если $M(\lambda) = \tilde{M}(\lambda)$, $\omega(\lambda) = \tilde{\omega}(\lambda)$ и $D = \tilde{D}$, то $p = \tilde{p}$, $q = \tilde{q}$.

5. Пример (обратная задача по трем спектрам). Фиксируем $a \in (0, T)$. Рассмотрим обратную задачу 1 в частном случае, когда $U_1(y) = y(0)$, $U_2(y) = y(a)$. Тогда краевые задачи L_0, L_1, L_2 принимают вид

$$L'_0 : y(0) = y(a) = 0, \quad L'_1 : y(0) = y(T) = 0, \quad L'_2 : y(a) = y(T) = 0.$$

Пусть $\Lambda'_j = \{\lambda'_{nj}\}$ – спектры задач L'_j , и пусть $\Lambda'_0 \cap \Lambda'_1 = \emptyset$ (условие S').

Обратная задача 4. Даны три спектра Λ'_0, Λ'_1 и Λ'_2 , построить $q(x)$.

Следующая теорема является следствием теоремы 1.

Теорема 4. Пусть выполняется условие S' . Если $\Lambda'_j = \tilde{\Lambda}'_j$, $j = 0, 1, 2$, то $p = \tilde{p}$, $q = \tilde{q}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 1.1436.2014К) и РФФИ (проект № 13-01-00134).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Юрко В. А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : Физматлит, 2007. 384 с.
2. Юрко В. А. Обратная задача для интегральных операторов // Мат. заметки. 1985. Т. 37, вып. 5. С. 690–701.
3. Юрко В. А. Обратная задача для интегро-дифференциальных операторов // Мат. заметки. 1991. Т. 50, вып. 5. С. 134–146.
4. Кравченко К. В. О дифференциальных операторах с нелокальными краевыми условиями // Дифференциальные уравнения. 2000 Т. 36, № 4. С. 464–469.
5. Buterin S. A. The inverse problem of recovering the Volterra convolution operator from the incomplete spectrum of its rank-one perturbation // Inverse Problems. 2006. Vol. 22. P. 2223–2236.
6. Hryniv R., Nizhnik L. P., Albeverio S. Inverse spectral problems for nonlocal Sturm–Liouville operators // Inverse Problems. 2007. Vol. 23. P. 523–535.
7. Freiling G., Yurko V. A. Inverse problems for differential operators with a constant delay // Applied Mathematical Letters. 2012. Vol. 25. № 11. P. 1999–2004.

УДК 539.3

Н. С. Анофрикова, В. С. Белицкая

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ НОРМАЛЬНОГО ПРОДОЛЬНОГО
УСИЛИЯ В ТРЕХСЛОЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ
ПЛАСТИНЕ**

В работе описан метод решения модельной задачи об определении двумерной безмоментной составляющей в случае вязкоупругой трехслойной пластины, подверженной ударной нагрузке тангенциального типа на ее торце.

Рассмотрим полубесконечную трехслойную пластину, все слои которой выполнены из вязкоупругих материалов. Считаем, что вязкоупругое поведение материалов описывается моделью Максвелла [1]. Введем декартову систему координат x_1x_2z , совмещая плоскость Ox_1x_2 со срединной плоскостью пластины и направляя ось z по нормали к срединной плоскости. Примем следующие обозначения: l – номер слоя, $2h_l$ – толщина l -го слоя, $2h$ – толщина пластины. Будем предполагать, что наружные поверхности пластины свободны от нагрузки. Граничные условия на стыке слоев пластины – условия непрерывного контакта. Двумерные уравнения для безмоментной составляющей в указанном случае могут быть получены из трехмерных уравнений вязкоупругости методом асимптотического интегрирования. В случае симметричной по координате нагрузки последние имеют вид

$$\frac{\partial T_1}{\partial x_1} - 2\rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0, 2 \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^3 h_i E_i F_{3i} W_j W_k \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = W_1 W_2 W_3 T_1, \quad (1)$$

где T_1 – нормальное усилие, ρ – усредненная плотность, задаваемая формулой

$$\rho = \frac{h_1 \rho_1 + h_2 \rho_2 + h_3 \rho_3}{h},$$

u_1 – перемещение вдоль оси x_1 , E_l, ν_l – мгновенные значения модуля Юнга и коэффициент Пуассона материала l -го слоя, t_{1l} – характерное

время релаксации, $F_{3i} = \frac{2}{3} \frac{1+\nu_i}{t_{1i}} + \frac{\partial}{\partial t}$, $F_{4i} = -\frac{1}{3} \frac{1+\nu_i}{t_{1i}} - \nu_i \frac{\partial}{\partial t}$, $W_i = F_{3i}^2 - F_{4i}^2$, $i \neq j \neq k = \overline{1, 3}$.

Предположим, что к торцу пластины $x_1 = 0$, находящейся в состоянии покоя, в начальный момент времени прикладывается ударное продольное воздействие тангенциального типа, симметричное относительно x_2 . В этом случае граничное условие на торце $x_1 = 0$ можно взять в виде

$$T_1 = 2hIH(t). \quad (2)$$

Здесь I – амплитуда, $H(t)$ – единичная функция Хевисайда.

Таким образом, необходимо решить систему (1) при граничных условиях (2) и нулевых начальных условиях.

Перейдем в уравнениях (1), граничных условиях (2) и начальных условиях к безразмерным переменным и к безразмерным параметрам

$$\xi = \frac{x_1}{h}, \tau = \frac{ct}{h}, \tau_{1l} = \frac{ct_{1l}}{h},$$

где $c^2 = \frac{\tilde{E}}{\rho h}$, $\tilde{E} = \sum_{i=1}^3 \frac{E_i h_i}{1-\nu_i^2}$. Также введем безразмерное усилие и перемещение

$$T_1 = 2\tilde{E}T_1^*, u_1 = hu_1^*.$$

Применим к решению задачи, записанной в безразмерной форме, интегральное преобразование Лапласа по переменной τ [2]. В результате получим следующее выражение для изображения продольного усилия:

$$T_1^L = \frac{I^*}{s} e^{-\frac{s\xi}{\sqrt{A(s)}}}. \quad (3)$$

В формуле (3) введены обозначения: $I^* = \frac{Ih}{\tilde{E}}$, $A(s) = \frac{s}{\tilde{E}} \sum_{i=1}^3 \frac{E_i h_i F_{3i}^L}{W_i^L}$, $F_{3i}^L = \frac{2}{3} \frac{1+\nu_i}{\tau_{1i}} + s$, $F_{4i}^L = -\frac{1}{3} \frac{1+\nu_i}{\tau_{1i}} - \nu_i s$, $W_i^L = (F_{3i}^L)^2 - (F_{4i}^L)^2$, s – параметр интегрального преобразования, T_1^L, u_1^L – изображения по Лапласу функций T_1^*, u_1^* соответственно.

Решение в оригиналах будем искать с помощью разложения изображения (3) в ряд по отрицательным степеням параметра интегрального преобразования. Для обращения членов полученного ряда воспользуемся формулой обратного перехода [3]

$$\frac{1}{s^{n+1}} e^{-\left(\frac{s-g}{c-s}\right)\xi} \Rightarrow \left(\frac{c\tau - \xi}{cg\xi}\right)^{n/2} I_n \left(2\sqrt{\frac{g}{c}} \xi(c\tau - \xi)\right) H(c\tau - \xi),$$

где $I_n(t)$ – модифицированные функции Бесселя.

Выпишем окончательное решение, ограничиваясь первым членом ряда

$$T_1^* = I^* e^{-D_1 \xi} I_0 \left(2\sqrt{D_2 \xi (\tau - \xi)} \right) H(\tau - \xi). \quad (4)$$

Здесь $D_1 = \frac{1}{2E} \sum_{i=1}^3 \frac{E_i h_i k_i}{1-\nu_i^2}$, $D_2 = -\frac{1}{E} \sum_{i=1}^3 \frac{E_i h_i m_i}{1-\nu_i^2} + \frac{3}{2} (D_1)^2$, $k_i = -\frac{2}{3} \frac{\nu_i^2 - \nu_1 + 1}{1-\nu_i^2} n_i$, $m_i = \frac{(\nu_i - 1)(4\nu_i^2 + 7\nu_i + 5)}{9(1-\nu_i^2)^2} n_i^2$, $n_i = \frac{1+\nu_i}{\tau_{1i}}$.

На рис. 1, 2 представлены графики приведенного значения продольного усилия $\frac{T_1^*}{I^*}$ относительно координаты ξ .

Численные расчеты выполнены для пластинок, физико-механические свойства материалов слоев которых представлены в таблице [4].

Параметр	ρ_l , кг/м ³	E_l , ГПа	ν_l	τ_1 , с
Материал 1	1200	1.1	0.3	0.001
Материал 2	1200	1.1	0.3	0.00025

Рассмотрены следующие варианты пластинок полутолщины $h = 0.5$ м: случай (а) – первый слой – материал 1, $h_1 = 0.1$ м; второй слой – материал 2, $h_2 = 0.3$ м; третий слой – материал 1, $h_3 = 0.1$ м; случай (б) – первый слой – материал 2, $h_1 = 0.1$ м; второй слой – материал 1, $h_2 = 0.3$ м; третий слой – материал 2, $h_3 = 0.1$ м; случай (в) – все слои выполнены из материала 1; случай (г) – все слои выполнены из материала 2.

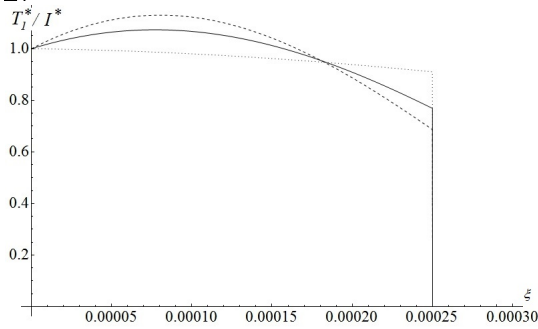


Рис. 1

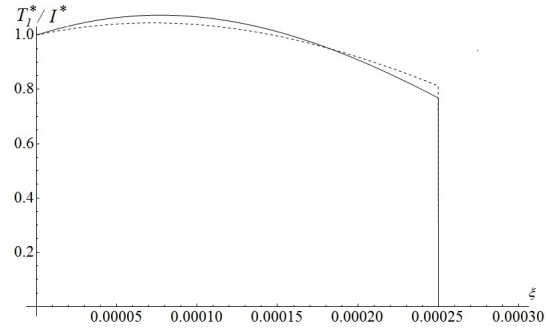


Рис. 2

На рис. 1 сплошная линия соответствует случаю (а), пунктирная – (г), точечная – (в). На рис. 2 сплошная линия соответствует случаю (а), пунктирная – (б). Анализ графиков, приведенных на рис. 1, показывает, что при увеличении времени релаксации поведение материала стремится к упругому, при этом также уменьшается максимальное значение усилия. Если слой из материала с меньшим временем релаксации расположить между двумя слоями из материала с большим временем релаксации, то это с одной стороны уменьшает максимальное значение продольного усилия, а с другой замедляет затухание решения по координате. Если сравнивать поведение трехслойных пластин, отличающихся расположением

слоев с различными значениями времен релаксации (рис. 2): то в случае (а) наблюдается достижение большего максимального значения продольного усилия с одновременным более быстрым затуханием решения по координате по сравнению со случаем (б).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бажанова Н. С., Коссович Л. Ю., Сухоловская М. С. Нестационарные волны в вязкоупругих оболочках : модель Максвелла // Изв. высш. учеб. завед. Сев. Кавк. Регион. Естеств. науки. 2000. № 2. С. 17–24.
2. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М. : Наука, 1958. 207 с.
3. Karlnov J. D., Kossovich L. Yu., Nolde E. V. Dynamics of thin walled elastic bodies. San Diego : Academic Press, 1998. 226 p.
4. Лапина П. А. Реконструкция трещиноподобных дефектов в вязкоупругой слоистой среде : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ростов н/Д, 2012.

УДК 539.3

Н. С. Анофрикова, Н. В. Сергеева

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЙ В СЛУЧАЕ НАСЛЕДСТВЕННО-УПРУГОГО ПОЛОГО ЦИЛИНДРА

В работе представлен численный анализ дисперсионных уравнений, полученных для осесимметричной задачи в случае наследственно-упругого полого цилиндра.

Постановка задачи. Для решения задачи о распространении гармонических волн в бесконечном полом круговом наследственно-упругом цилиндре в [1] были выведены дисперсионные уравнения для задач растяжения-сжатия (1) и кручения (3).

$$|C_{mj}| = 0, \quad m, j = \overline{1, 4}. \quad (1)$$

Элементы определителя в уравнении (1) с номерами $m = 1, 2, j = \overline{1, 4}$ имеют вид

$$\begin{aligned} C_{11} &= -(b^2 - \tilde{\chi}^2) J_0(as) + \frac{2a}{s} J_1(as), & C_{21} &= -2ai\tilde{\chi} J_1(as), \\ C_{12} &= -(b^2 - \tilde{\chi}^2) Y_0(as) - \frac{2a}{s} Y_1(as), & C_{22} &= -2ai\tilde{\chi} Y_1(as), \\ C_{13} &= -2bi\tilde{\chi} J_0(bs) + \frac{2i\tilde{\chi}}{s} J_1(bs), & C_{23} &= -(b^2 - \tilde{\chi}^2) J_1(bs), \\ C_{14} &= -2bi\tilde{\chi} Y_0(bs) + \frac{2i\tilde{\chi}}{s} Y_1(bs), & C_{24} &= -(b^2 - \tilde{\chi}^2) Y_1(bs), \end{aligned} \quad (2)$$

где $a^2 = k_F^2 \Omega^2 - \tilde{\chi}^2$, $b^2 = \Omega^2 - \tilde{\chi}^2$, $k_F^2 = \frac{1 - 2\nu^F}{2(1 - \nu^F)}$, $\Omega^2 = \omega^2 \frac{1 + \nu^F}{E^F(1 + \nu)}$, $i\tilde{\chi} = -\delta - i\chi$, χ – волновое число, $\delta > 0$ – коэффициент затухания, ω – частота, $E^F = 1 - \frac{k}{\beta + \sqrt{i\omega}}$, $\nu^F = \nu + \frac{1 - 2\nu}{2} \frac{k}{\beta + \sqrt{i\omega}}$, k, ν, β – параметры материала, $J_n(\bullet)$, $Y_n(\bullet)$ – функции Бесселя n -го порядка, $n = 0, 1$, $s = 1 + \eta$, $\eta = \frac{h}{R}$, h – полутолщина цилиндра, R – радиус срединной поверхности цилиндра.

Элементы C_{mj} для $m = 3, 4$, $j = \overline{1, 4}$ определяются формулами (2) при $s = 1 - \eta$.

$$|D_{mj}| = 0, \quad m, j = 1, 2, \quad (3)$$

где элементы D_{1j} , $j = 1, 2$, определяются выражениями

$$D_{11} = b^2 J_0(bs) - \frac{2b}{s} J_1(bs), \quad D_{12} = b^2 Y_0(bs) - \frac{2b}{s} Y_1(bs), \quad (4)$$

при $s = 1 + \eta$.

Элементы D_{2j} , $j = 1, 2$, определяются выражениями (4) при $s = 1 - \eta$.

Исследования проводятся для случая, когда наследственно-упругие свойства материала описываются уравнениями состояния, взятыми в интегрально-операторной форме (см. [1]). В качестве ядра интегрального оператора используется дробно-экспоненциальная функция Работнова [2].

Анализ дисперсионных уравнений и их численных решений. Формально дисперсионные уравнения (1) и (3) имеют тот же вид, что и соответствующие дисперсионные уравнения для упругого полого цилиндра [3], но, в отличие от последних, левая часть каждого из уравнений в наследственно-упругом случае является комплексно-значной функцией.

Дисперсионные уравнения (1) и (3) были решены численно методом продолжения решения по параметру [4].

На рис. 1, а, 2, а приведены проекции дисперсионных кривых на плоскость (ω, χ) для $\nu = 0.3$, $h = 0.35$ и различных значений параметров материала. Сплошная линия соответствует значениям $k = 0.5$, $\beta = 1$; пунктирная – $k = 0.05$, $\beta = 1$; штрих-пунктирная – $k = 1$, $\beta = 10$; сплошная толстая линия – $k = 0$ (упругий случай). Знак «+» над номером ветки соответствует значениям $\delta < 0$, а знак «-» – значениям $\delta > 0$. Для упругого случая $\delta = 0$.

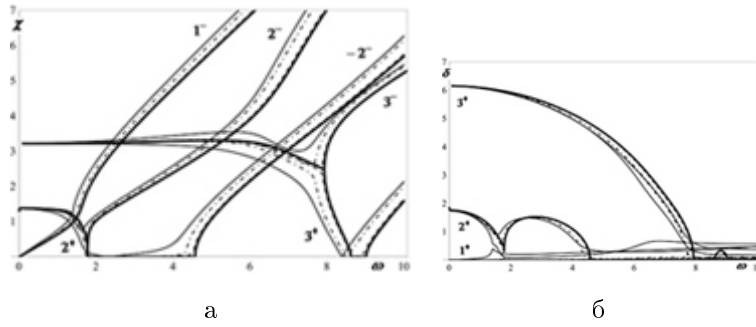


Рис. 1. Проекция дисперсионных кривых на плоскости:
 а) (ω, χ) , б) (ω, δ) (случай растяжения - сжатия)

На рисунках 1,б, 2,б приведены проекции дисперсионных кривых на плоскость (ω, δ) для тех же значений параметров материала. Знак «+» над номером ветки соответствует значениям $\chi > 0$.

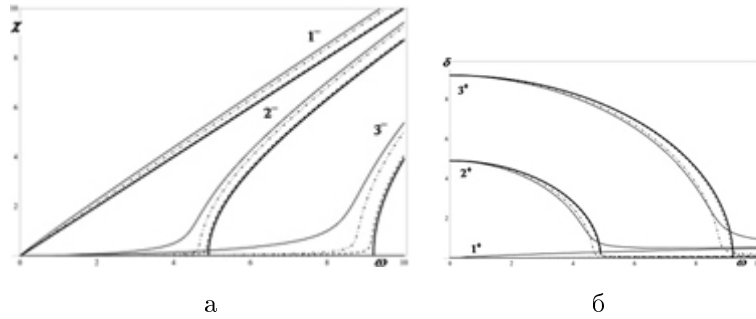


Рис. 2. Проекция дисперсионных кривых на плоскости:
 а) (ω, χ) , б) (ω, δ) (случай кручения)

Анализ дисперсионных уравнений и их численных решений позволяет сделать следующие выводы.

1. Дисперсионные кривые наследственно-упругого спектра, соответствующие действительным ветвям упругого спектра являются комплексными с положительной мнимой частью $\tilde{\chi}$, что определяет затухание решения по координате.

2. Для наследственно-упругого спектра теряет смысл понятие частоты запирания, так как $\chi = 0$ и $\omega > 0$ не являются корнями дисперсионных уравнений.

3. При увеличении значения k и (или) уменьшении значения β дисперсионные кривые с положительной и отрицательной мнимой частью $\tilde{\chi}$ начинают расходиться для более малых значений частот. В противном случае, поведение дисперсионных кривых стремиться к упругому случаю.

4. В окрестностях частот запирания упругого спектра ветви наследственно-упругого спектра имеют наибольшую кривизну. Увеличение значения k , как и уменьшение значения β , ведет к сглаживанию дисперсионных кривых в этих областях. Таким образом, упругий

спектр приближенно можно рассматривать как асимптотический для наследственно-упругого при $k \rightarrow 0$, $\beta \gg 1$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Sergeeva N. V.* The Dispersion Equations for Thin Viscoelastic Cylinder // Представляем научные достижения миру. Естественные науки : материалы V международной конференции молодых ученых «Presenting Academic Achievements to the World». Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2014. Вып. 5. С. 179–185.
2. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М. : Наука, 1977. 384 с.
3. *Березин В. Л., Каплунов Ю. Д., Коссович Ю. И.* Дисперсионные уравнения для тонкого цилиндра. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1994. 17 с.
4. *Барышев А. А., Лысункина Ю. В.* О применении метода продолжения решения по параметру к анализу дисперсионных уравнений в системе Mathematica // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2013. Вып. 15. С. 108–111.

УДК 539.3

Э. В. Антоненко

АППРОКСИМИРУЮЩИЕ ФУНКЦИИ ПРОГИБА В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ И КОЛЕБАНИЙ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

1. Устойчивость и колебания механических систем с переменными характеристиками по длине их элементов представляют большую и сложную проблему. Поведение таких неоднородных систем зависит от величины критических сил и частот собственных колебаний [1–4].

Математическое содержание проблемы сводится к определению собственных значений дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами при заданных граничных условиях. Математические модели, основанные на классической теории дифференциальных уравнений и механике тонкостенных конструкций, не позволяют получить в общем виде аналитические зависимости для критических сил и частот собственных колебаний.

Приближенные решения таких задач удается получить при использовании энергетических методов Рэлея, Тимошенко, Ритца, когда форма прогиба задается с точностью до одного неопределенного параметра. Функции прогиба должны удовлетворять граничным условиям.

Рассмотрим задачи устойчивости при осевом сжатии и собственных поперечных колебаний в пределах упругости неоднородного стержня. Жесткость $EI = D$ и погонная масса m переменны вдоль оси x .

2. Критическую силу N_* определяют из дифференциального уравнения изогнутой оси стержня (см. [3,4])

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right) + N_* \frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \quad (1)$$

где $y = y(x)$ – функции прогиба. Для стержней с постоянной жесткостью $EI = D = \text{const}$ уравнение (1) принимает вид

$$y^{IV}(x) + \alpha^2 y''(x) = 0, \quad \alpha^2 = \frac{N_*}{EI}. \quad (2)$$

Здесь и далее штрихами обозначены производные по осевой координате.

Из уравнения (2) для различных граничных условий получены классические выражения критической силы однородного стержня

$$N_{*0} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}; \quad N_{*0} = \eta \frac{EI}{l^2}; \quad \eta = \frac{\pi^2}{\mu^2}, \quad (3)$$

где l – длина стержня. Значение коэффициентов μ и η , учитывающие граничные условия, приведены в таблице.

Для неоднородных стержней уравнение (1) имеет вид

$$y^{IV}(x) + 2 \frac{D'(x)}{D(x)} y'''(x) + \left[\frac{D''(x)}{D(x)} + \frac{N_*}{D(x)} \right] y''(x) = 0. \quad (4)$$

Из уравнения (4) выражения для N_* в виде подобном (3) получить не удастся.

Относительно простые выражения для критической силы можно получить из формулы Рэлея

$$N_* = \frac{\int_0^l EI(x) [y''(x)]^2 dx}{\int_0^l [y'(x)]^2 dx}. \quad (5)$$

Входящие в (5) функции прогиба, удовлетворяющие граничным условиям, приведены в таблице. Тригонометрические аппроксимирующие функции при подстановке в (5) дают значения критической силы, совпадающие с точными решениями (3). Аппроксимирующие функции в виде полиномов дают завышенные значения (погрешности расчетов Δ отражены в таблице), что соответствует теореме Рэлея.

№	Граничные условия	Функции и коэффициенты	Параметры
1	$y(0) = y''(0) = 0$ $y(l) = y''(l) = 0$	$y(x) = A \sin \frac{n\pi x}{l};$ $y(x) = x^4 - 2lx^3 + l^3x$ $k_N = \bar{l} + \bar{D}(1 - \bar{l}) +$ $+ (\bar{D} - 1) \frac{\sin 2n\pi \bar{l}}{2n\pi}$	$\mu = 1, \eta = \pi^2,$ $\Delta = +2, 3\%$
2	$y(0) = y'(0) = 0$ $y(l) = y'(l) = 0$	$y(x) = A \sin \frac{2n\pi x}{l};$ $y(x) = x^4 - 2lx^3 + l^2x^2$ $k_N = \bar{l} + \bar{D}(1 - \bar{l}) +$ $+ (1 - \bar{D}) \frac{\sin 4n\pi \bar{l}}{4n\pi}$	$\mu = 0.5, \eta = 4\pi^2,$ $\Delta = +3, 1\%$
3	$y(0) = y'(0) = 0$ $y''(l) = y'''(l) = 0$	$y(x) = A(1 - \cos \frac{\pi x}{2l});$ $y(x) = x^4 - 4lx^3 + 6l^2x^2$ $k_N = \bar{l} + \bar{D}(1 - \bar{l}) + (1 - \bar{D}) \frac{\sin \pi \bar{l}}{\pi}$	$\mu = 2, \eta = 0.25\pi^2,$ $\Delta = +4, 3\%$

3. Дифференциальное уравнение собственных поперечных колебаний стержня можно получить из вариационного принципа Гамильтона—Остроградского. Оно имеет вид (см. [2])

$$m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] = 0. \quad (6)$$

Для однородного стержня из уравнения (6) следует (см. [2, 4])

$$y^{IV}(x) - k^4 y(x) = 0; \quad k^4 = \frac{m\omega_0^2}{EI}, \quad (7)$$

где ω_0 – круговая частота колебаний.

Из уравнения (7) следует

$$\omega_0^2 = \alpha^4 \frac{EI}{ml^4}, \quad \alpha = kl, \quad (8)$$

где α – параметр, учитывающий граничные условия. Для шарнирного закрепления краев стержня $\alpha = n\pi$, при смешанных граничных условиях $\alpha = (4n + 1)\pi/4$, если n – номер тона колебания. Значения α для первых четырех тонов приведены в [4].

Для неоднородных стержней уравнение (6) имеет вид

$$y^{IV}(x) + 2 \frac{D'(x)}{D(x)} y'''(x) + \frac{D''(x)}{D(x)} y''(x) - \frac{m(x)}{D(x)} \omega^2 y(x) = 0, \quad (9)$$

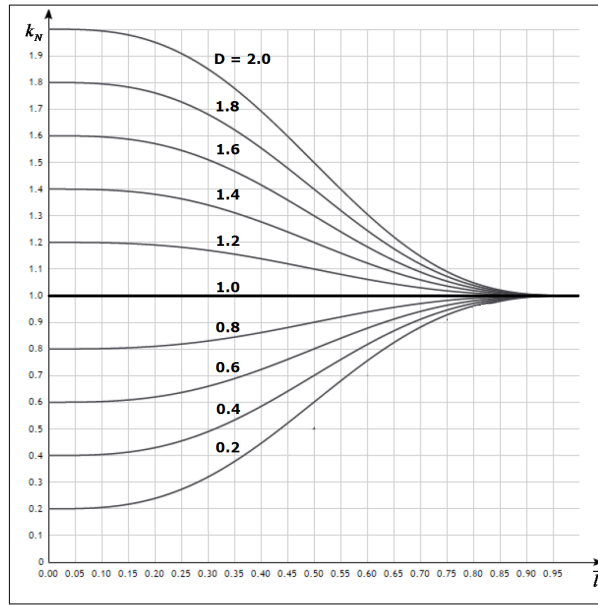
из которого искомую величину ω^2 в виде (8) получить не удастся.

Метод Рэлея позволяет получить

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l D(x) [y''(x)]^2 dx}{\int_0^l m(x) y^2(x) dx}. \quad (10)$$

В зависимости (10), как и в (5), функции прогиба $y(x)$ должны удовлетворять граничным условиям. Полиномы, приведенные в таблице, позволяют получить частоты только первого тона. Аппроксимирующие тригонометрические функции при использовании (10) дают значения ω , совпадающие с точным решением (8) для однородных стержней.

4. На основе результатов численных экспериментов и сравнения их с имеющимися для некоторых частных законов неоднородностей стержней предлагается для расчета N_* и ω использовать аппроксимирующие функции из таблицы для стержней с монотонной и дискретной по их длине неоднородностью.



Например, для шарнирно опертого стержня со ступенчато изменяющейся неоднородностью ($D = D_1$ и $m = m_1$ при $0 \leq x < l_1$; $D = D_2$, $m = m_2$ при $l_1 < x \leq l$), для которого $\bar{l} = \frac{l_1}{l}$, $\bar{D} = \frac{D_2}{D_1}$, $\bar{m} = \frac{m_2}{m_1}$, получим выражение критической силы

$$N_* = N_{*0} k_N, \quad N_{*0} = \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 D_1, \quad (11)$$

$$k_N = k_N(\bar{l}, \bar{D}) = \bar{l} + \bar{D}(1 - \bar{l}) + (\bar{D} - 1) \frac{\sin 2n\pi \bar{l}}{2n\pi},$$

N_* – критическая сила при рассматриваемых граничных условиях однородного стержня с жесткостью D_1 . Для однородных стержней $k_N = 1$. Графическая зависимость $k_N = k_N(\bar{l}, \bar{D})$ для этих граничных условий приведена на рисунке.

Частоты собственных колебаний таких неоднородных стержней удобно представить в виде, аналогичном (11):

$$\omega = \omega_0 k_\omega, \quad k_\omega = k_\omega(\bar{l}, \bar{D}, \bar{m}),$$

где ω_0 – частоты колебаний однородных стержней с жесткостью D_1 и погонной массой m_1 .

Результаты расчетов k_N и k_m для разных видов неоднородностей и граничных условий подготовлены к печати.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Антоненко Э. В., Шульга Т. Э. Модели выгоднейшего изменения толщины тонких цилиндров при осевом сжатии // Вестн. Саратов. техн. ун-та. 2014. № 4. С. 3–10.
2. Бабаков И. М. Теория колебаний. М. : Наука, 1965. 559 с.
3. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М. : Наука, 1974. 640 с.
4. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник : в 3 т. М. : Машиностроение, 1968. Т. 3. 568 с.

УДК 532

Т. А. Ильясова, И. А. Панкратов

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦИРКУЛЯЦИИ ВОДЫ В ОЗЕРЕ

1. Постановка задачи. В работе [1] была рассмотрена упрощённая модель течений в озерах, бассейнах и других водоёмах для начальной оценки циркуляции. Такие течения могут описываться линеаризованными уравнениями, получающимися из уравнений количества движения, если в них пренебречь инерционными членами и членами, зависящими от времени в уравнении неразрывности [2].

В статье [1] было показано, что решение указанной задачи сводится к уравнению Пуассона относительно функции тока ψ :

$$W = \gamma \nabla^2 \psi. \quad (1)$$

Здесь $W = \partial \tau_1|_s / \partial x_2 - \partial \tau_2|_s / \partial x_1$ – величина, зависящая от ветрового воздействия; γ – коэффициент ветрового напряжения. Величины $\tau_1|_s$, $\tau_2|_s$ обусловлены ветровыми напряжениями.

Предполагается, что составляющие напряжения трения на дне $\tau_1|_b$ и $\tau_2|_b$ прямо пропорциональны компонентам средних значений массового расхода q_1 и q_2 :

$$\tau_1|_b = \gamma q_1; \quad \tau_2|_b = \gamma q_2.$$

Граничные условия для этого уравнения имеют вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad (2)$$

на береговых границах;

$$\psi = \bar{\psi} \quad (3)$$

на входе в водоем.

Уравнение (1) вместе с граничными условиями (2) и (3) допускает вариационную формулировку и применение метода взвешенных невязок.

2. Воздействие ветра на озеро. Рассмотрим прямоугольное озеро $ABCD : \Omega = \{(x, y) | x_A \leq x \leq x_B, y_A \leq y \leq y_D\}$, которое подвержено воздействию ветра так, что W в уравнении (1) определяется как $(x = x_1, y = x_2)$

$$W/\gamma = Ax + By + C, \quad A, B, C = \text{const.}$$

Отметим, что в прямоугольнике $ABCD$ $x_A = x_D, x_B = x_C, y_A = y_B, y_C = y_D$.

Будем искать решение $\psi \approx \bar{\varphi}$ уравнения (1) в виде линейной комбинации базисных функций $\bar{\varphi} = \sum_{m=1}^M a_m N_m$, где $N_m = x^{m+1} y^{m+1}$.

Применяя метод Галёркина ($W_l = -\widetilde{W}_l = N_l$), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_m вида

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y^2} \right) W_l d\Omega + \int_{AB} \left(-\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} - 0 \right) \Big|_{y=y_A} \widetilde{W}_s dx + \\ & + \int_{BC} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} - 0 \right) \Big|_{x=x_B} \widetilde{W}_s dy + \int_{CD} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} - 0 \right) \Big|_{y=y_C} \widetilde{W}_s dx + \\ & + \int_{DA} \left(-\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} - 0 \right) \Big|_{y=y_D} \widetilde{W}_s dy = \iint_{\Omega} (Ax + By + C) W_l d\Omega. \end{aligned} \quad (4)$$

Также был рассмотрен случай, когда внутри озера $ABCD$ находится прямоугольный остров $KNEH : \Omega_{\text{остров}} = \{(x, y) | x_K \leq x \leq x_N, y_K \leq y \leq y_H\}$. В прямоугольнике $KNEH$ $x_K = x_H, x_N = x_E, y_K = y_N, y_E = y_H$. При этом в (4) добавляются интегралы по границе острова $KNEH$, а двойные интегралы берутся по области $\Omega \setminus \Omega_{\text{остров}} = \{(x, y) | (x, y) \in \Omega, (x, y) \notin \Omega_{\text{остров}}\}$.

Отметим, что интегралы, входящие в (4), берутся аналитически и задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$\mathbf{Ka} = \mathbf{f},$$

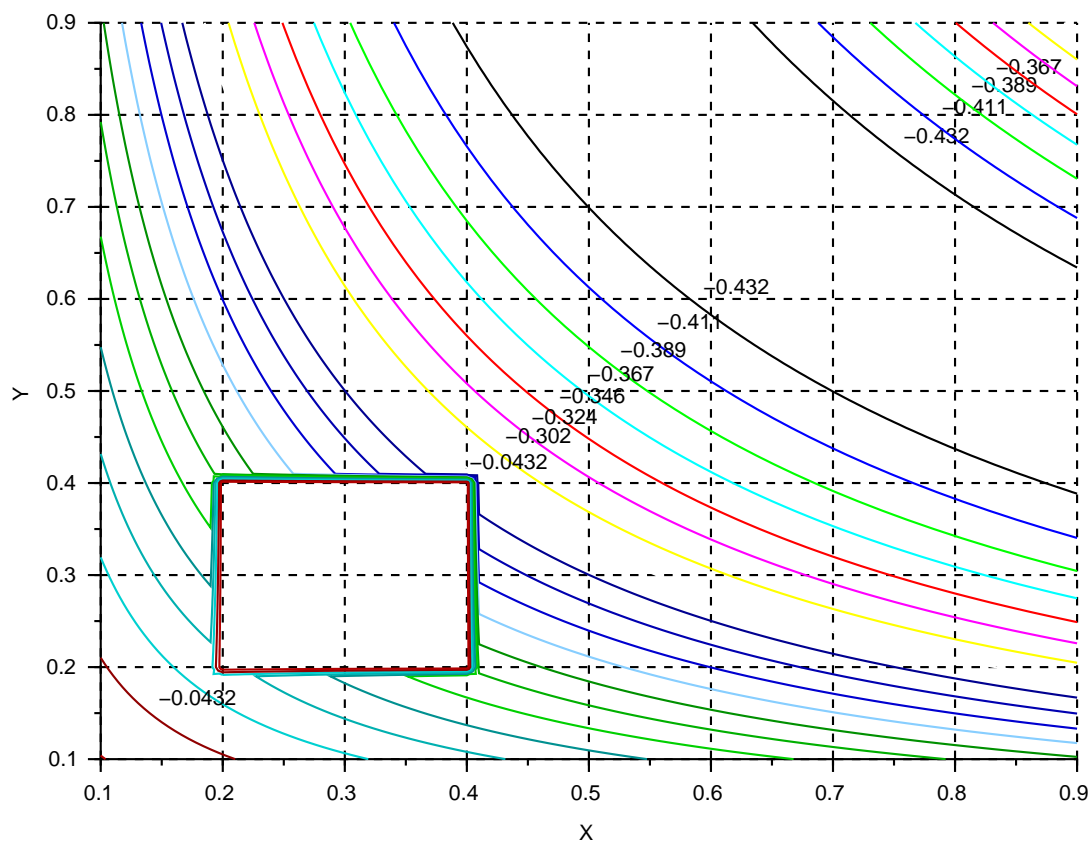
где компоненты матрицы жёсткости имеют вид ($s, m = \overline{1, M}$)

$$\begin{aligned}
K_{sm} = m(m-1) & \left(\frac{y_D^{m+s+1} - y_A^{m+s+1}}{m+s+1} \frac{x_B^{m+s-1} - x_A^{m+s+1}}{m+s-1} + \right. \\
& + \frac{y_D^{m+s-1} - y_A^{m+s-1}}{m+s-1} \frac{x_B^{m+s+1} - x_A^{m+s+1}}{m+s+1} - \frac{y_H^{m+s+1} - y_K^{m+s+1}}{m+s+1} \\
& \left. \frac{x_N^{m+s-1} - x_K^{m+s+1}}{m+s-1} - \frac{y_H^{m+s-1} - y_K^{m+s-1}}{m+s-1} \frac{x_N^{m+s+1} - x_K^{m+s+1}}{m+s+1} \right) + \\
& + my_A^{m+s-1} \frac{x_B^{m+s+1} x_A^{m+s+1}}{m+s+1} - mx_B^{m+s+1} \frac{y_C^{m+s+1} - y_B^{m+s+1}}{m+s+1} - \\
& - my_C^{m+s-1} \frac{x_D^{m+s+1} - x_C^{m+s+1}}{m+s+1} + mx_D^{m+s-1} \frac{y_A^{m+s+1} - y_D^{m+s+1}}{m+s+1} - \\
& - my_K^{m+s-1} \frac{x_N^{m+s+1} - x_K^{m+s+1}}{m+s+1} + mx_N^{m+s+1} \frac{y_E^{m+s+1} - y_N^{m+s+1}}{m+s+1} + \\
& + my_E^{m+s-1} \frac{x_H^{m+s+1} - x_E^{m+s+1}}{m+s+1} - mx_H^{m+s-1} \frac{y_K^{m+s+1} - y_H^{m+s+1}}{m+s+1};
\end{aligned}$$

а компоненты столбца свободных членов есть

$$\begin{aligned}
f_s = A & \left(\frac{y_D^{s+1} - y_A^{s+1}}{s+1} \frac{x_B^{s+2} - x_A^{s+2}}{s+2} - \frac{y_H^{s+1} - y_K^{s+1}}{s+1} \frac{x_N^{s+2} - x_K^{s+2}}{s+2} \right) + \\
& + B \left(\frac{y_D^{s+2} - y_A^{s+2}}{s+2} \frac{x_B^{s+1} - x_A^{s+1}}{s+1} - \frac{y_H^{s+2} - y_K^{s+2}}{s+2} \frac{x_N^{s+1} - x_K^{s+1}}{s+1} \right) + \\
& + C \left(\frac{y_D^{s+1} - y_A^{s+1}}{s+1} \frac{x_B^{s+1} - x_A^{s+1}}{s+1} - \frac{y_H^{s+1} - y_K^{s+1}}{(s+1)} \frac{x_N^{s+1} - x_K^{s+1}}{(s+1)} \right).
\end{aligned}$$

3. Пример численного решения задачи. Для численного решения задачи была составлена программа с помощью математического пакета Scilab. Результаты численного решения задачи о циркуляции воды в озере приведены на рисунке.



Линии тока для $A = 1.4$, $B = 1.7$, $C = 1.3$, $M = 10$

Были проведены расчёты для различных положений острова внутри озера. Установлено, что при выборе базисных функций вида $N_m = x^{m+1}y^{m+1}$ нецелесообразно помещать озеро вне области $\Omega_{\text{кв}} = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Маркелова О. И., Панкратов И. А. Расчёт циркуляции воды в озере // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2014. Вып. 16. С. 115–118.
2. Коннор Дж., Бреббиа К. Метод конечных элементов в механике жидкости. Л. : Судостроение, 1979. 264 с.

В. С. Кожанов, Г. Д. Севостьянов

ХАРАКТЕРИСТИКИ СФЕРИЧЕСКОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ В ВЯЗКОМ ГАЗЕ

Получено уравнение акустики вязкого газа неасимптотическим методом. Характеристики ранее полученного решения бегущей сферической волны в вязком газе для асимптотического уравнения акустики являются первым приближением её характеристик с помощью полученного в работе уравнения.

Уравнения Навье—Стокса для калорически и термически совершенного ньютоновского вязкого и теплопроводного газа при постоянных коэффициентах вязкости и теплопроводности (например, при малом изменении температуры) имеют вид [1, гл. X]

$$\begin{aligned} \frac{d \ln \rho}{dt} + \nabla \bar{V} = 0, \quad \rho \frac{d \bar{V}}{dt} = -\nabla p + \left(\mu' + \frac{\mu}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot \bar{V}) + \mu \nabla^2 \bar{V}, \\ \rho \frac{d}{dt} \left(h + \frac{V^2}{2} \right) = p_t + \nabla \left[\left(\mu' - \frac{2}{3} \mu \right) \bar{V} \nabla \bar{V} + \right. \\ \left. + \lambda \nabla T + \mu \nabla V^2 + \mu \bar{\Omega} \times \bar{V} \right], \quad h = c_p T. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ρ – плотность газа, $\bar{V}(u, v, w)$ – вектор скорости газовой частицы, p – давление, $\mu', \mu, \mu'' = \frac{4}{3}\mu + \mu'$ – коэффициенты объёмной, кинематической и продольной вязкости, h – энтальпия (теплосодержание), λ – коэффициент теплопроводности, T – её абсолютная температура, $\bar{\Omega}$ – вихрь.

Если течение безвихревое (например, для одномерных течений), то для потенциала скорости φ имеем

$$\bar{\Omega} \equiv 0, \quad \bar{V} = \nabla \varphi, \quad D = \frac{V^2}{2} + \varphi_t, \quad (2)$$

где D – потенциал ускорения $\left(\frac{d \bar{V}}{dt} = \nabla D \right)$.

Обозначим

$$H_0 = D + h = \frac{V^2}{2} + \varphi_t + \frac{a^2}{\gamma - 1}, \quad (3)$$

где a – скорость звука, $\gamma > 1$ – отношение теплоёмкостей. Тогда уравнения движения в (1) примут вид

$$\rho \nabla D = \nabla \left(-p + \mu'' \nabla \bar{V} \right), \quad \rho = \rho(D), \quad (4)$$

а уравнение энергии

$$\rho D_t - \rho \frac{dH_0}{dt} = \left(-p + \frac{\lambda}{c_p} \nabla \bar{V} \right)_t - \nabla \left[\left(\mu' - \frac{2}{3} \mu \right) \bar{V} \nabla \bar{V} + \frac{\lambda}{c_p} \nabla H_0 + \left(2\mu - \frac{\lambda}{c_p} \right) \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) \right].$$

Если течение изэнергетическое ($H_0 \equiv \text{const}$),

$$\mu' = \frac{2}{3} \mu, \quad \frac{\lambda}{c_p} = 2\mu = \mu'' \quad (\text{Pr} = 1/2, \quad \text{Pr}'' = 1), \quad (5)$$

то

$$\rho D_t = \left(-p + \mu'' \nabla \bar{V} \right)_t, \quad (6)$$

и равенства (4), (6) эквивалентны выражению

$$\rho \frac{dh}{dt} - \frac{dp}{dt} = -\mu'' \frac{d}{dt} \nabla \bar{V}. \quad (7)$$

Подставив $\rho = \gamma \frac{p}{a^2}$ и $\frac{dp}{dt}$ из (7) в уравнение неразрывности в (1), получим [2], учитывая $a^2 = a_0^2 - (\gamma - 1)D$:

$$N(\varphi) = -\frac{dD}{dt} + a^2 \nabla \bar{V} = -\frac{\gamma \mu''}{\rho} \frac{d}{dt} \Delta \varphi, \quad (8)$$

где Δ – лапласиан по x, y, z .

$$N(\varphi) = (a^2 - u^2) \varphi_{xx} + (a^2 - v^2) \varphi_{yy} + (a^2 - w^2) \varphi_{zz} - 2uv\varphi_{xy} - 2uw\varphi_{xz} - 2vw\varphi_{yz} - 2u\varphi_{xt} - 2v\varphi_{yt} - 2w\varphi_{zt} - \varphi_{tt}. \quad (9)$$

Здесь $u = \varphi_x, v = \varphi_y, w = \varphi_z$. Для других значений чисел Прандтля уравнение (8) будет более сложного вида.

Так как $\frac{df}{dt} = f_t + \bar{V} \nabla f$, то для акустических течений ($\bar{V} \approx 0, a \approx a_0, \rho \approx \rho_0$) из (9) получаем

$$\varphi_{tt} - a_0^2 \Delta \varphi = \delta (\Delta \varphi)_t, \quad \delta = \frac{\gamma \lambda}{c_p \rho_0} = \frac{\mu'' + (\gamma - 1) \frac{\lambda}{c_p}}{\rho_0}. \quad (10)$$

Это же акустическое уравнение можно получить без условий (5), не учитывая диссипативные члены с квадратами и произведениями производных u, v, w по координатам.

Для сферически одномерных акустических течений в вязком газе имеем линейное уравнение для потенциала $\varphi(r, t)$

$$\varphi_{tt} - a_0^2 \left(\varphi_{rr} + \frac{2}{r} \varphi_r \right) = \delta \left(\varphi_{rr} + \frac{2}{r} \varphi_r \right)_t. \quad (11)$$

Здесь появился новый вязкий член.

Если сделать замену

$$\varphi = \frac{1}{r}\Phi(r, t), \quad (12)$$

оно примет вид

$$\Phi_{tt} - a_0^2\Phi_{rr} = \delta\Phi_{rrt}, \quad (13)$$

скорость $V = \varphi_r$, $\frac{p-p_0}{\rho_0} = -\frac{\gamma-1}{\gamma}\varphi_t$.

Пусть шар радиуса r_0 (или источник) с момента $t = 0$ начинает пульсировать в неподвижном газе, гармонически изменяя радиус с заданной круговой частотой ω (и частотой $\nu = \omega/(2\pi)$). Тогда решение бегущей волны ищем в виде

$$\Phi = \text{Re}B e^{i[k(r-r_0)-\omega t]}, \quad (14)$$

где $B > 0$ – постоянная, $k = \beta + i\alpha$, β – волновое число.

В результате имеем следующую систему для α , β :

$$\beta^2 - \alpha^2 = A^2, \quad 2\alpha\beta = \varepsilon A^2, \quad \varepsilon = \frac{\delta\omega}{a_0^2} = \frac{\lambda\omega}{c_p\rho_0}, \quad A = \frac{\omega}{a_0\sqrt{1+\varepsilon^2}}. \quad (15)$$

Исключив β , получим биквадратное уравнение для α :

$$\alpha^4 + A^2\alpha^2 - \varepsilon^2 A^4/4 = 0$$

и решение системы (15):

$$\alpha = \frac{a_0}{\delta} \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{2(1+\varepsilon^2)}(\sqrt{1+\varepsilon^2}+1)}, \quad \beta = \frac{a_0\varepsilon}{\delta} \sqrt{\frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}+1}{2(1+\varepsilon^2)}}, \quad (16)$$

$$c = a_0 \sqrt{\frac{2(1+\varepsilon^2)}{\sqrt{1+\varepsilon^2}+1}}.$$

Тогда из (10), (14) имеем решение бегущей сферической волны ([3, с. 327], $\varepsilon = 0$)

$$\varphi(r, t) = \frac{B}{r} e^{-\alpha(r-r_0)} \cos[\beta(r-r_0) - \omega t], \quad r - r_0 < ct. \quad (17)$$

$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ – длина волны, $c = \frac{\omega}{\beta}$ – фазовая скорость ($c(\omega)$ – дисперсия скорости).

При малых значениях ε ($\varepsilon \ll 1$), разлагая в ряды, получим:

$$\alpha \approx \frac{a_0}{2\delta} \varepsilon^2 \left(1 - \frac{5}{8}\varepsilon^2 + \dots\right), \quad \beta \approx \frac{a_0}{\delta} \varepsilon \left(1 - \frac{3}{8}\varepsilon^2 + \dots\right), \quad (18)$$

$$c \approx a_0 \left(1 + \frac{3}{8}\varepsilon^2 + \dots\right).$$

Уравнения (15) совпадают [4] с уравнениями одномерной акустики в прямом канале (когда $\varphi = \Phi$, $r = x$).

На рис. 1–3 дано сравнение точных характеристик с их первыми приближениями по формулам (18).

Определим расстояние $r = r_{\text{зат}}$ эффективного затухания амплитуды φ из формулы

$$e^{-\alpha(r_{\text{зат}}-r_0)} = e^{-3} \approx 1/20 = 5\%.$$

Тогда

$$r_{\text{зат}} = r_0 + 3/\alpha$$

или

$$R_3 = \frac{a_0}{\delta} (r_{\text{зат}} - r_0) = \frac{3a_0}{\delta\alpha} = 3\varepsilon^{-2} \sqrt{2(1 + \varepsilon^2) (\sqrt{1 + \varepsilon^2} + 1)}.$$

На рис. 4 дана зависимость $r_{\text{зат}}$ от круговой частоты.

При $\varepsilon \gg 1$ из соотношений (1)–(3) имеем

$$\alpha \approx \frac{\sqrt{2} a_0}{2 \delta}, \quad \beta \approx \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\omega}{\delta}}, \quad c \approx \sqrt{2} \sqrt{\delta \omega}, \quad a_0^2 \ll \delta \omega,$$

при $\varepsilon \ll 1$ из (18) получаем

$$\alpha \approx \frac{\delta \omega^2}{a_0^3} \ll \frac{\omega}{a_0}, \quad \beta \approx \frac{\omega}{a_0} \ll \frac{a_0}{\delta}, \quad c \approx a_0, \quad \delta \omega \ll a_0^2.$$

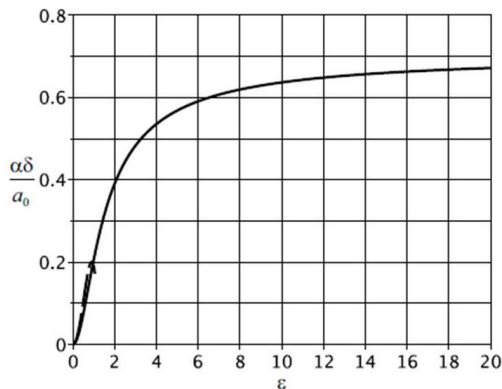


Рис. 1

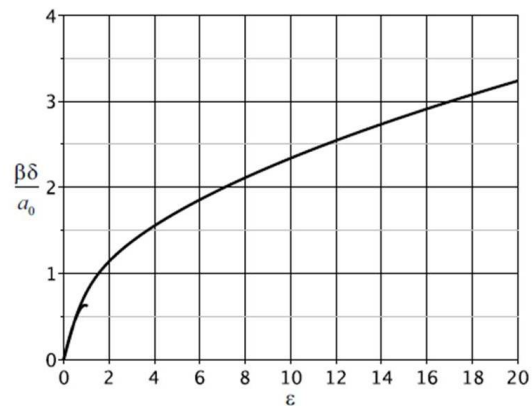


Рис. 2

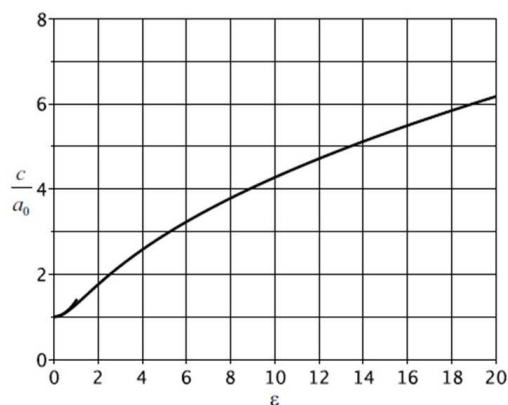


Рис. 3

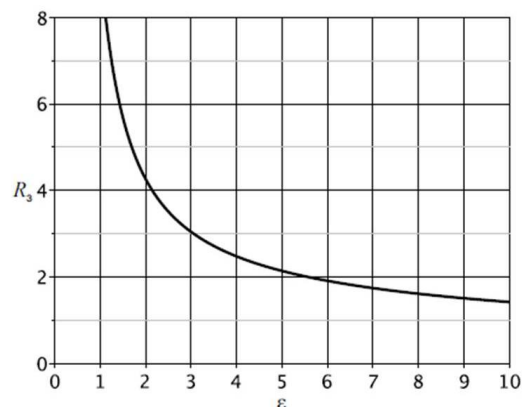


Рис. 4

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа : учебн. для вузов. 7-е изд., испр. М. : Дрофа, 2003. 840 с.
2. Севостьянов Г. Д. К теории нестационарных околозвуковых течений вязкого газа // Аэродинамика : межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1981. Вып. 2. С. 21–33.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М. : Наука, 1973. 832 с.
4. Ольховский И. И. Курс теоретической механики для физиков. 3-е изд., доп. и перераб. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1978. 575 с.

УДК 629

Е. А. Козлов, Ю. Н. Челноков

НЕЛИНЕЙНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНЫХ ЗНАЧЕНИЙ УГЛОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

В работе изучается задача переориентации плоскости орбиты космического аппарата (КА) посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты. При этом орбита КА в процессе управления движением центра масс КА не меняет своей формы и своих размеров, а поворачивается в пространстве как неизменяемая фигура. Для решения задачи используется дифференциальное кватернионное уравнение ориентации орбиты в отклонениях. Работа является развитием [1].

Введем систему координат η , связанную с центром масс КА: ось η_1 направлена вдоль радиуса-вектора центра масс КА, ось η_3 – перпендикулярно плоскости орбиты КА, а η_2 так, чтобы орты осей η_1 , η_2 и η_3 образовывали правую тройку. Введем также систему координат ξ , связанную с плоскостью и перицентром орбиты КА. Начало этой системы

координат находится в центре O притяжения Земли, ось ξ_1 направлена вдоль радиуса-вектора перицентра орбиты, ось ξ_3 перпендикулярна плоскости орбиты и имеет направление постоянного по модулю вектора \mathbf{c} момента скорости центра масс КА, а ось ξ_2 образует правую тройку с осями ξ_1 и ξ_3 .

В инерциальной системе координат X ориентация системы координат ξ характеризует собой ориентацию орбиты КА в инерциальном пространстве и задается тремя угловыми оскулирующими элементами орбиты: долготой восходящего узла Ω_u , наклоном орбиты I , угловым расстоянием перицентра от узла ω_π .

Считается, что вектор ускорения \mathbf{u} от тяги реактивного двигателя во все время управляемого движения КА направлен ортогонально плоскости орбиты КА. Тогда орбита КА не меняет своей формы и своих размеров, а поворачивается в пространстве под действием управления \mathbf{u} как неизменяемая фигура.

Требуется найти управление \mathbf{u} , переводящее плоскость орбиты КА, движение центра масс которого описывается дифференциальными уравнениями

$$2 \frac{d\mathbf{\Lambda}}{dt} = \mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{\Omega}_\xi, \quad \frac{d\varphi_{tr}}{dt} = \frac{c}{r^2}, \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi_{tr}}, \quad c = \text{const}, \quad (1)$$

$$\mathbf{\Lambda} = \Lambda_0 + \Lambda_1 \mathbf{i}_1 + \Lambda_2 \mathbf{i}_2 + \Lambda_3 \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{\Omega}_\xi = u \frac{r}{c} (\cos \varphi_{tr} \mathbf{i}_1 + \sin \varphi_{tr} \mathbf{i}_2),$$

из любого заданного начального состояния

$$t = t_0, \quad \mathbf{\Lambda}(t_0) = \mathbf{\Lambda}^0,$$

в требуемое конечное состояния

$$t = t^*, \quad \mathbf{\Lambda}(t^*) = \mathbf{\Lambda}^*.$$

Здесь $\mathbf{\Lambda}$ – кватернион ориентации орбиты КА (кватернионный оскулирующий (медленно изменяющийся) элемент орбиты КА); $\mathbf{\Omega}_\xi$ – отображение вектора $\mathbf{\Omega}$ абсолютной угловой скорости орбиты КА на базис ξ ; φ_{tr} – истинная аномалия (угловая переменная, отсчитываемая в плоскости орбиты от ее перицентра и характеризующая положение КА на орбите); c – постоянная площадей (модуль вектора момента скорости $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ центра масс КА); r – модуль радиуса-вектора \mathbf{r} центра масс КА; p и e – параметр и эксцентриситет орбиты КА; Λ_j – компоненты кватерниона (параметры Эйлера), характеризующие ориентацию орбиты КА в инерциальной системе координат X ; \mathbf{i}_j – векторные мнимые единицы Гамильтона; u – проекция вектора ускорения \mathbf{u} на направление вектора момента скорости центра масс КА; \circ – символ кватернионного умножения.

Для решения задачи в рамках теории нелинейной стабилизации [2] нами используются дифференциальные уравнения возмущенного движения центра масс КА в параметрах Эйлера, получающиеся из (1):

$$2 \frac{d\Delta\Lambda}{dt} = \Delta\Lambda \circ \Omega_\xi = u \frac{r(\varphi_{tr}(t))}{c} \Delta\Lambda \circ (\cos \varphi_{tr}(t) \mathbf{i}_1 + \sin \varphi_{tr}(t) \mathbf{i}_2), \quad (2)$$

$$\frac{d\varphi_{tr}(t)}{dt} = \frac{c}{r^2}, \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi_{tr}(t)}, \quad c = \text{const.}$$

Здесь $\Delta\Lambda = \cos(\frac{1}{2}\Delta\varphi) + \sin(\frac{1}{2}\Delta\varphi) \mathbf{e}_\Delta$ – отклонение углового положения орбиты КА от ее требуемого положения Λ^* , которая определяется кватернионной формой:

$$\Lambda = \Lambda^* \circ \Delta\Lambda,$$

где $\Delta\varphi$ и \mathbf{e}_Δ – эйлеров угол и единичный вектор эйлеровой оси возмущенного конечного поворота орбиты КА относительно ее невозмущенного углового положения, задаваемого кватернионом поворота Λ^* .

Невозмущенному движению центра масс КА соответствует частное решение $\Delta\Lambda = 1$ кватернионного уравнения при управляющем воздействии $u = 0$. Этому частному решению отвечает нулевое значение эйлерова угла $\Delta\varphi$ и любые значения проекций $e_{\Delta i} (i = 1, 2, 3)$ единичного вектора \mathbf{e}_Δ эйлерова поворота на оси системы координат, связанной с орбитой.

Задача переориентации орбиты с использованием теории нелинейной стабилизации формулируется следующим образом: требуется построить стабилизирующее управление \mathbf{u} , при котором невозмущенное движение $\Delta\Lambda(t) = 1$ центра масс КА при управляющем воздействии $u = 0$ будет устойчивым.

Для построения стабилизирующего управления будем использовать второй метод функции Ляпунова теории устойчивости движения, применяя подход Бранца–Шмыглевского [3].

Рассмотрим положительно определенную функцию Ляпунова:

$$W = 1 - \Delta\Lambda_0^2 = \frac{1}{2}[(1 - \Delta\Lambda_0^2) + \Delta\Lambda_1^2 + \Delta\Lambda_2^2 + \Delta\Lambda_3^2].$$

Производная от этой функции с учетом (2) примет вид

$$\dot{W} = -u \frac{r}{c} \Delta\Lambda_0 (\Delta\Lambda_1 \cos \varphi + \Delta\Lambda_2 \sin \varphi).$$

Выберем управление u в виде

$$u = -k \Delta\Lambda_0 (\Delta\Lambda_1 \cos \varphi + \Delta\Lambda_2 \sin \varphi), \quad k > 0. \quad (3)$$

Тогда производная \dot{W} примет вид

$$\dot{W} = k\Delta\Lambda_0^2(\Delta\Lambda_1 \cos \varphi + \Delta\Lambda_2 \sin \varphi)^2.$$

Эта функция является знакопостоянной положительной и процесс переориентации орбиты, в соответствии с теоремой устойчивости Ляпунова, будет устойчив не асимптотически.

Таким образом, управления u , имеющие вид (3), обеспечивают сходимость процесса коррекции к положению равновесия во всей области изменения $\Delta\Lambda$, кроме точки $\Delta\Lambda_0 = 0$, когда угол эйлерового поворота равняется π радиан или 180° .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Челноков Ю. Н. Переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76, вып. 6. С. 895–912.
2. Челноков Ю. Н. Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением. М. : Физматлит, 2011. 560 с.
3. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М. : Наука, 1973. 320 с.

УДК 533.6.011

Д. И. Ливеровский, С. П. Шевырев

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ СИЛЬНОГО ЦУНАМИ, ПРИБЛИЖАЮЩЕГОСЯ К СУШЕ

В данной статье рассмотрена попытка применения метода крупных частиц для моделирования поведения цунами при встрече с сушей. Ранее уже было описано применение метода крупных частиц для моделирования движения тяжелой несжимаемой невязкой жидкости [1]. Нами рассматривается применение метода крупных частиц в двумерном случае на регулярной сетке. Для отслеживания свободной поверхности использовался метод маркеров [2].

В этой статье предпринята попытка рассмотреть волну, набегающую на берег, с учетом рельефа местности. Понятно, что для этого нужно получить профиль рельефа, эта информация является легко доступной в интернете. Определенные ограничения накладывает вычислительная мощность используемого для расчетов компьютера. А именно, для расчетов используется разностная сетка не более чем 100×100 ячеек. Поэтому если рассматривать остров шириной 100 км и высотой 1 км, то

отобразить его рельеф нормально не получится. Учитывая этот критерий, наиболее подходящими для рассмотрения оказались Курильские острова. На рис. 1, *а* и 1, *б* представлены направления, вдоль которых рассматривалось движение волны, на рис. 2, *а* и 2, *б* – соответствующие им профили рельефа.

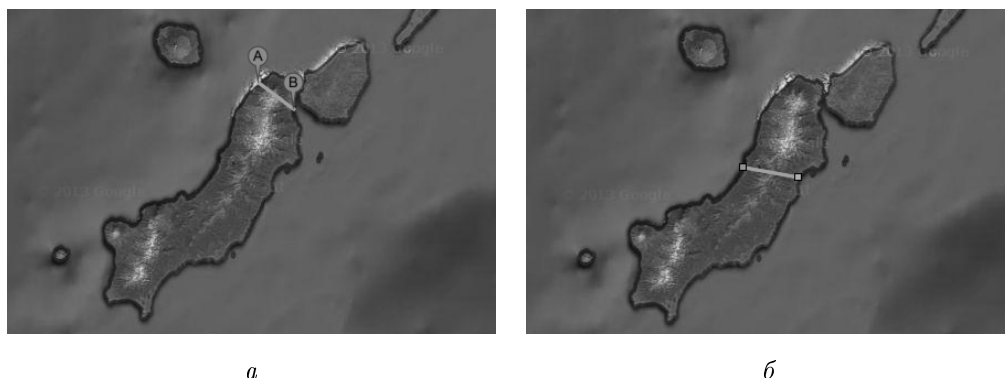


Рис. 1. Начальные условия

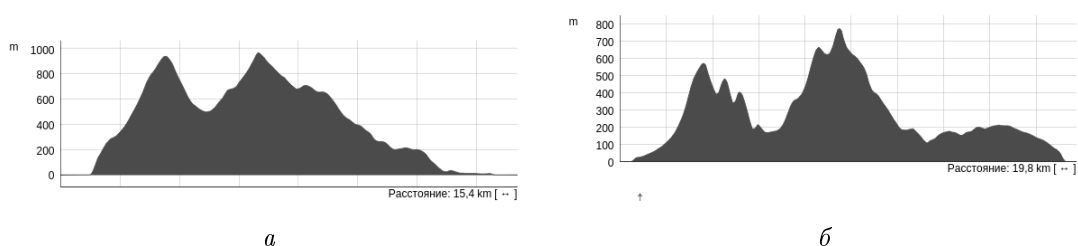


Рис. 2. Профили высот

Так как в методе используется прямоугольная сетка, то профили высот примут вид, как показано на рис. 3, *а* и 3, *б* соответственно. Все расчеты проводились для случая, показанного на рис. 1, *а*, 2, *а* и 3, *а*. На рис. 4, 5 и 6 представлен полученный результат, изначально волна предполагалась неподвижной.

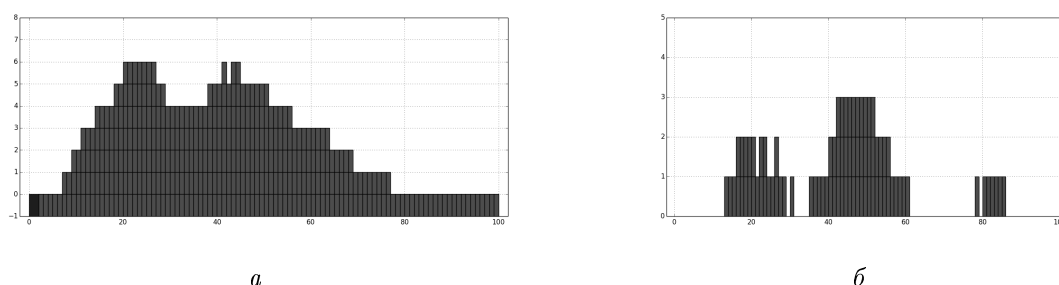


Рис. 3. Профили высот на прямоугольной сетке

Конечно, получен достаточно грубый, схематичный результат. Мы используем только профиль рельефа без данных о строениях.

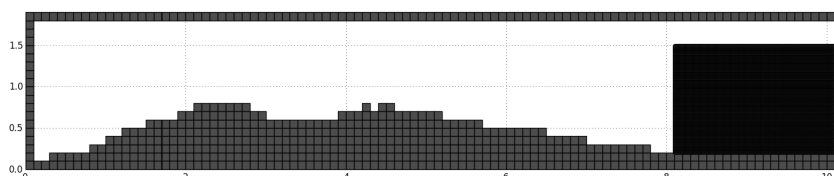


Рис. 4. Полученный результат, выполнено 0 шагов по времени

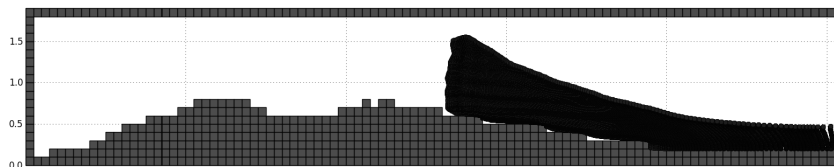


Рис. 5. Полученный результат, выполнено 1650 шагов по времени

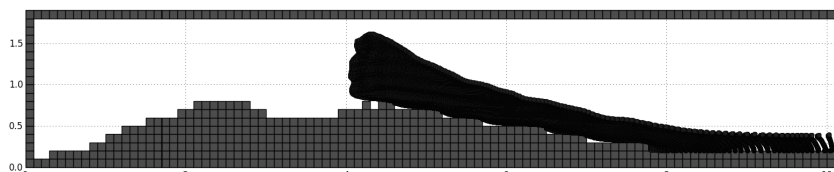


Рис. 6. Полученный результат, выполнено 2450 шагов по времени

Пока провести подобные расчёты в трехмерном случае не позволяет вычислительная мощность используемого ПК, так как для трехмерного случая мы пока рассматривали сетки не более чем $30 \times 30 \times 30$ ячеек. А этого мало, чтобы получить хороший результат.

В дальнейшем планируется использовать нерегулярную разностную сетку, в таком случае нам не потребуется как-либо преобразовывать профиль высот.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ливеровский Д. И., Шевырёв С. П.* Метод Давыдова для случая несжимаемой невязкой тяжёлой жидкости на регулярной сетке // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2011. Вып. 13. С. 161–164.
2. *Поттер Д.* Вычислительные методы в физике. М. : Мир, 1975. 392 с.

УДК 533.6.011

Р. И. Ливеровский, С. П. Шевырёв

ПОСТАНОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ НА НЕРЕГУЛЯРНОЙ СЕТКЕ МЕТОДОМ ДАВЫДОВА

В данной статье рассматривается моделирование движения идеального сжимаемого газа около абсолютно твердого тела при помощи метода Давыдова, обобщенного на случай нерегулярной четырехгранной сетки для трехмерного пространства. Использование такой сетки позволяет производить расчеты течения около тел произвольной формы.

Основная идея метода Давыдова (метода крупных частиц) [1] состоит в расщеплении по физическим процессам исходной нестационарной системы уравнений Эйлера, записанной в форме законов сохранения. Среда здесь моделируется системой из крупных частиц, каждая из которых занимает в данный момент времени некоторую ячейку эйлеровой сетки. Стационарное решение задачи, если оно существует, получается в результате установления, поэтому весь процесс вычислений состоит из многократного повторения шагов по времени. Рассмотрим движение идеального сжимаемого газа. В качестве исходных возьмем дифференциальные уравнения Эйлера в дивергентном виде (уравнения неразрывности, импульса, энергии) и уравнение состояния:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho uv}{\partial y} + \frac{\partial \rho uw}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho uv}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} + \frac{\partial \rho vw}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial \rho uw}{\partial x} + \frac{\partial \rho vw}{\partial y} + \frac{\partial \rho w^2}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho u E}{\partial x} + \frac{\partial \rho v E}{\partial y} + \frac{\partial \rho w E}{\partial z} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0, \\ p = (\kappa - 1) \rho \left(E - \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right). \end{array} \right.$$

Здесь t, x, y, z – независимые переменные, ρ – плотность, u, v, w – компоненты вектора скорости вдоль осей x, y и z соответственно, E – полная энергия единицы массы газа, κ – отношение удельных теплоемкостей. Вид данной системы одинаков как для размерных, так и для безразмерных величин.

Рассмотрим расчетную область, покрытую нерегулярной четырехгранной сеткой (рис. 1). Сверху и снизу области находится твердая непроницаемая стенка с выпуклым телом. Поток газа набегаёт слева и уходит через правую границу области. В случае однородного потока газа в начальный момент времени во все ячейки расчетной области помещаются некоторые начальные значения для газодинамических параметров потока:

$$\rho_i = \rho_0, \quad u_i = u_0, \quad v_i = v_0, \quad w_i = w_0, \quad E_i = \frac{1}{\kappa(\kappa - 1)M_\infty^2} + \frac{1}{2},$$

где M_∞ – число Маха на бесконечности.

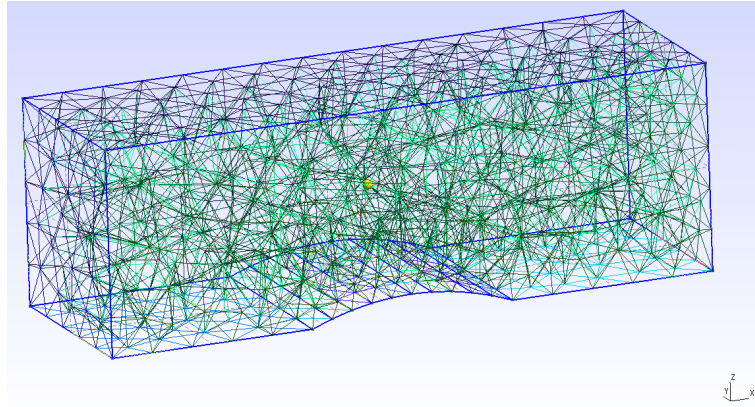


Рис. 1. Расчетная область покрытая нерегулярной четырехгранной сеткой

На левой границе происходит «подпитка» набегающего на тело потока, поэтому значения компонент вектора скорости берутся

$$u^n = u_0, v^n = v_0, w^n = w_0.$$

На правой, а так же на фронтальной и тыльной границах ставятся условия:

$$u_{fictive}^n = u_{border}^n, v_{fictive}^n = v_{border}^n, w_{fictive}^n = w_{border}^n,$$

которые являются неотражающими граничными условиями на искусственных, не существующих в реальности границах. Необходимо, чтобы сильные возмущения не отражались от этих границ, а гладко уходили на бесконечность. На теле, а так же на нижней и верхней границах области выполняются граничные условия для скорости, условия непротекания: нормальная к телу и к нижней и верхней границе компонента вектора скорости равна нулю, для этого в фиктивные ячейки помещаются такие значения u, v, w , чтобы

$$u_{fictive(norm)}^n = -u_{border(norm)}^n.$$

Результаты расчетов отображаются с помощью изолиний в сечении трехмерной области плоскостью, параллельной плоскости xOz (рис. 2), для сравнения с двухмерным случаем. При расчетах значения всех газодинамических параметров относятся к центрам ячеек сетки, необходимо вычислить значения в вершинах сетки. Значения параметров в вершинах вычисляются как среднее арифметическое значений в четырехгранниках, которым принадлежит данная вершина. Далее необходимо вычислить координаты всех точек пересечения ребер четырехгранников сетки с плоскостью сечения. Значения газодинамических параметров в этих точках вычисляются как линейная интерполяция между значениями в

вершинах ребра, которому эта точка пересечения принадлежит. Таким образом в результате получается набор точек, принадлежащих плоскости сечения, со своими координатами и соответствующими значениями газодинамических параметров. По этим точкам, используя триангуляцию Делоне, строится новый набор треугольников (рис. 3).

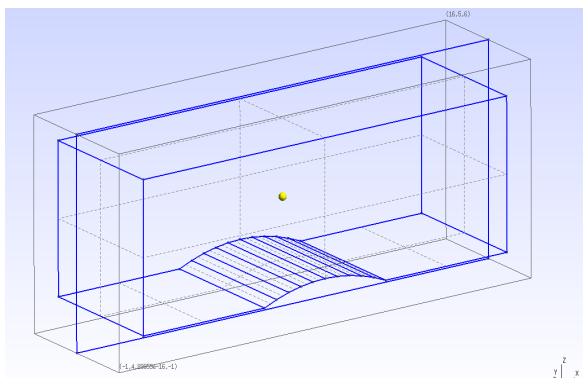


Рис. 2. Сечение

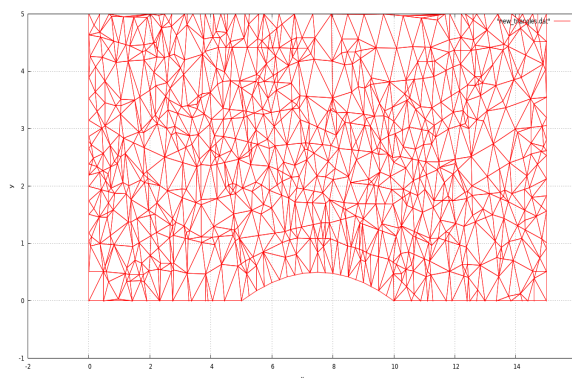


Рис. 3. Триангуляция сечения

Таким образом, переходим к задаче, которая решалась при построении изолиний для двумерного случая [2]. Качество полученной треугольной сетки невысокое (большинство треугольников не являются правильными или близкими к правильным), так как сетка тесно связана с исходной четырехгранной сеткой.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М. Метод крупных частиц в газовой динамике. М. : Наука, 1982. 392 с.
2. Ливеровский Р. И., Шевырев С. П. Численное моделирование плоских задач сверхзвуковой газовой динамики на треугольной сетке // Вестн. РУДН. Сер. Математика. Информатика. Физика. 2014. № 4. С. 23–32.

УДК 539.3

О. А. Мыльцина, М. Ю. Сурова

ДИНАМИКА ПЛАСТИНКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИМПУЛЬСНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ И СИЛОВЫХ НАГРУЗОК

Для функции прогиба изотропной прямоугольной пластинки, находящейся в условиях конвективного теплообмена и подвергающейся кратковременному воздействию сосредоточенной силы и температуры, получено аналитическое решение, на основании которого проводится количественный анализ влияния геометрических параметров на термоупругое динамическое поведение пластинки.

Рассматривается изотропная прямоугольная пластинка, находящаяся в условиях конвективного теплообмена с окружающей средой через основные плоскости. Предполагается, что внешняя плоскость пластинки подвергается воздействию (на коротком промежутке времени $|t_2 - t_1| \ll 1$) сосредоточенной силы и температуры в виде

$$\bar{q}(x, y, t) = \bar{q}^0 a_1 b_1 \delta(x - x_1, y - y_1) (H(t - t_1) - H(t - t_2)),$$

$$T^+(t) = T_0^+ + T_1^+ (H(t - t_1) - H(t - t_2)).$$

При этом учитывается линейное демпфирование. Температурное поле определяется на основании решения уравнения нестационарной теплопроводности для температурной функции при линейной аппроксимации температурного поля по толщине. В начальный момент времени термоупругая система находится в состоянии покоя и на краях отсутствует перепад температуры по толщине.

Решение несвязной термоупругости начинается с определения температурного поля. Решение уравнения нестационарной теплопроводности для температурной функции $\theta_1(x, y, t)$ [1,2] с однородными краевыми условиями

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0, \quad x = a: \quad \theta_1 &= 0, \\ \text{при } y = 0, \quad y = a: \quad \theta_1 &= 0, \end{aligned}$$

запишем в виде

$$\theta_1(x, y, t) = \sum_{k,m} \vartheta_{km}(t) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}. \quad (1)$$

Подстановка (1) в уравнение, рассмотренное в [1] на основании стандартных преобразований приводит к уравнениям относительно коэффициентов ряда (1)

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta}_{km} + \frac{\beta S_{km}}{a^2} \vartheta_{km} &= 6 \frac{\varkappa \beta}{\lambda h} \Delta T_{km} - \\ -\beta \left(6 \frac{\varkappa}{\lambda h} + \frac{12}{h^2} \right) e_{km} \tilde{\theta}_1 &+ 6 \frac{\varkappa \beta}{\lambda h} T_1^+ (H(t - t_1) - H(t - t_2)), \end{aligned} \quad (2)$$

решения которых запишутся в виде [3]

$$\begin{aligned} \vartheta_{km}(t) &= E_{km}^1 e^{-\frac{\beta S_{km}}{a^2} t} + E_{km}^2 + \\ + E_{km}^3 \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} &\left(1 - e^{-\frac{\beta S_{km}}{a^2} (t-t_i)} \right) H(t - t_i), \end{aligned} \quad (3)$$

где $E_{km}^1 = \left(1 - \frac{\varkappa a}{\lambda} \frac{1}{h S_{km}} \right) \Delta T_{km}$ определяются из начальных условий при $t = 0$: $\theta_1 = T_0^+ - T^-$, которые соответствуют условиям $\vartheta_{km}(0) = (T_0^+ -$

$-T^-)e_{km} = \Delta T_{km}$ для коэффициентов ряда (1), $E_{km}^2 = 6\frac{\kappa a}{\lambda} \frac{a}{h} \frac{\Delta T_{km}}{S_{km}}$, $E_{km}^3 = 6\frac{\kappa a}{\lambda} \frac{a}{h} \frac{e_{km}}{S_{km}} T_1^+$, $\frac{\kappa a}{\lambda} = BIO$ – параметр Био.

Решение уравнения термоупругости пластинки с шарнирно опертыми краями сводится к интегрированию неоднородного дифференциального уравнения

$$\frac{\gamma h}{gD} w_{,tt} + \frac{\mu}{D} w_{,t} + \nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{D} - \frac{1+\nu}{h} \alpha \nabla^2 \theta_1, \quad (4)$$

при однородных краевых условиях, которые в функции прогиба имеют вид

$$\text{при } x = 0, \quad x = a : w = 0, \quad w_{,11} = 0;$$

$$\text{при } y = 0, \quad y = a : w = 0, \quad w_{,22} = 0,$$

будем разыскивать в виде, тождественно удовлетворяющем всем краевым условиям

$$w(x, y, t) = \sum_{km} w_{km}(t) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}. \quad (5)$$

Подстановка (5) в дифференциальное уравнение (4) и стандартные преобразования приводят к неоднородным дифференциальным уравнениям относительно коэффициентов ряда

$$\ddot{w}_{km} + \frac{\mu g}{\gamma h} \dot{w}_{km} + \frac{gD}{\gamma h a^4} L_{km}^2 w_{km} = q_{km}(t) + \frac{gD}{\gamma h a^2} \frac{1+\nu}{h} \alpha L_{km} \vartheta_{km}(t), \quad (6)$$

здесь

$$q_{km}(t) = 4 \frac{g^0 g}{\gamma h} \frac{a_1 b_1}{ab} \sin \frac{k\pi x_1}{a} \sin \frac{m\pi y_1}{b} (H(t - t_1) - H(t - t_2)),$$

$$L_{km} = (k\pi)^2 + \left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2,$$

μ – коэффициент демпфирования. В случае комплексных корней характеристического уравнения для дифференциального уравнения (6) решение примет вид [3]

$$\begin{aligned} w_{km}(t) = & e^{-\tilde{\mu}t} (C_{km}^1 \sin k_{km}t + C_{km}^2 \cos k_{km}t) + A_{km}^3 + B_{km}^3 e^{-\frac{\beta S_{km}}{a^2}t} + \\ & + \sum_{i=1}^2 \left(e^{-\tilde{\mu}(t-t_i)} (D_{kmi}^1 \sin k_{km}t + D_{kmi}^2 \cos k_{km}t) + (-1)^{i+1} \tilde{w}_{km}^1 \right) H(t - t_i) + \\ & + \sum_{i=1}^2 \left(e^{-\tilde{\mu}(t-t_i)} (F_{kmi}^1 \sin k_{km}t + F_{kmi}^2 \cos k_{km}t) + A_{km}^i + B_{km}^i e^{-\frac{\beta S_{km}}{a^2}t} \right) \times \\ & \times H(t - t_i), \end{aligned} \quad (7)$$

где постоянные интегрирования C_{km}^l ($l = 1, 2$) определяются из начальных условий $w = 0$, $w_{,t} = 0$ при $t = 0$.

Расчеты проводились при значениях параметров: $\frac{a}{b} = 1$, $\frac{h}{a} = 0,005$, $|t_2 - t_1| = 0,005$ с, $\mu = 0,00007$, сосредоточенная сила приложена в точке $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$, $q^0 = 10$, $T_0^+ = T^- = 20$, материал типа дюралюминий.

Количественный анализ, проведенный на основании аналитического решения, показал следующие закономерности.

1. В случае отсутствия температурного скачка колебания термоупругой системы симметричны относительно временной оси и быстро затухают вне интервала действия сосредоточенной силы (рис. 1. $T_1^+ = 0$, $BIO = 10$).

2. При наличии температурного скачка T_1^+ заданной величины затухающие колебания становятся асимметричными относительно временной оси с той же тенденцией затухания (рис. 2. $T_1^+ = 100$, $BIO = 10$).

3. Существенное влияние на величину размахов колебаний оказывает параметр BIO , с увеличением которого размахи значительно возрастают при той же частоте (рис. 3. $T_1^+ = 100$, $BIO = 0,5$, рис. 4. $T_1^+ = 100$, $BIO = 100$).

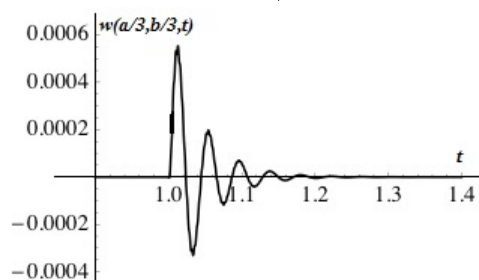


Рис. 1

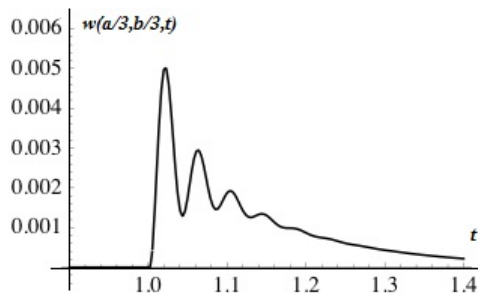


Рис. 2

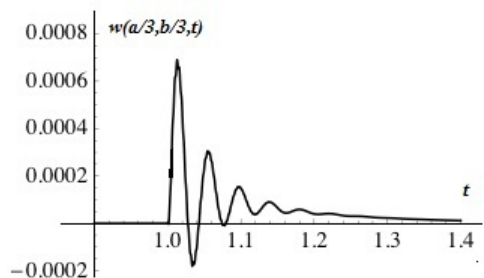


Рис. 3

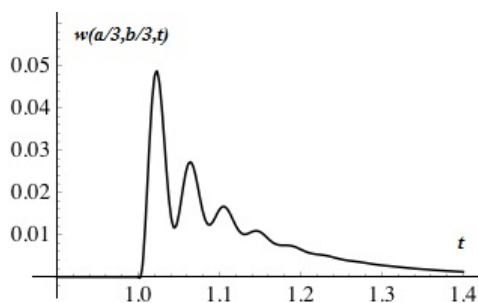


Рис. 4

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Белосточный Г. Н., Мылъцина О. А. Динамика полой оболочки постоянно го кручения в условиях конвективного теплообмена через основные поверхности с окружающей средой при быстропеременных по временной координате температурно-силовых воздействиях // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : материалы XXI Междунар. симпозиума им. А. Г. Горшкова. М. : ООО «ТРП», 2015. Т. 1. С. 21–24.

2. *Рассудов В. М., Красюков В. П., Панкратов Н. Д.* Некоторые задачи термоупругости пластинок и пологих оболочек. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1973. 157 с.

3. *Белосточный Г. Н.* Аналитические методы определения замкнутых интегралов сингулярных дифференциальных уравнений термоупругости геометрически нерегулярных оболочек // Докл. Академии военных наук. 1999. № 1. С. 14–26.

УДК 539.3

**Ю. Н. Нагар, В. Ю. Ольшанский,
И. Ф. Паршина, А. В. Серебряков**

СВЯЗАННАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

В настоящее время с целью совершенствования приборов навигации активно ведутся разработки новых конструкций датчиков инерциальной информации (ДИИ). Были предложены и производятся ДИИ с разной конструкцией чувствительных элементов. Широкое распространение получили биморфные, камертонные гироскопы. Встречаются также конструкции гироскопов с присоединенной массой [1]. Перспективными представляются модели вибрационных гироскопов с цилиндрическим резонатором, примером может служить конструкция, предложенная в патенте [2].

Для описания работы вибрационного гироскопа с резонатором, выполненным из пьезокерамического материала, в форме цилиндра необходимо решить задачу связанной электроупругости. Постановка осесимметричной задачи электроупругости в цилиндрических координатах для случая, когда пьезокерамика имеет радиальную поляризацию, содержится в работе [3]. Система уравнений для перемещений и электрического потенциала с учетом наличия кориолисовых сил и вязкого сопротивления материала принимает вид

$$\begin{aligned}
 c_{33} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{c_{11} u_r}{c_{33} r^2} \right) + \frac{c_{13} - c_{12}}{r} \frac{\partial u_z}{\partial z} + e_{33} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \left(1 - \frac{e_{31}}{e_{33}} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \\
 + e_{15} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \rho \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial u_r}{\partial t} - 2\omega \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} \right) - \rho \omega^2 r, \\
 c_{44} \left(\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r^2} \right) = \rho \left(\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + 2\omega \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} \right), \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$(e_{15} - e_{13}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} + e_{15} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} + c_{11} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = \rho \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial u_z}{\partial t} \right),$$

$$\varepsilon_{33} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \varepsilon_{11} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = e_{33} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + (e_{33} + e_{31}) \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + e_{31} \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (2)$$

Уравнения (1), (2) рассматриваются при соответствующих граничных и начальных условиях.

В работе [4] для предварительной оценки механических и электрических полей в резонаторе рассмотрена упрощенная постановка данной задачи связанной электроупругости. Для тонкостенного пьезокерамического цилиндра с радиусом срединной поверхности R компоненты вектора упругих перемещений и электрический потенциал были представлены в виде $u_r = u(t) + u$, $u_\varphi = v(t)$, $u_z = w(z, t) + w_0(z)$, $\psi = \psi(z, t)$. Система уравнений (1), (2) преобразовалась к виду

$$\begin{aligned} -c_{11} \frac{u_r}{R^2} - c_{12} \frac{1}{R} \frac{\partial u_z}{\partial z} - e_{31} \frac{1}{R} \frac{U_0}{h} + e_{15} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= \rho \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial u_r}{\partial t} - 2\omega \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} \right) - R\rho\omega^2, \\ -c_{44} \frac{u_\varphi}{R^2} &= \rho \left(\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + 2\omega \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} \right), \\ e_{15} \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial z} + c_{11} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} &= \rho \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial u_z}{\partial t} \right), \\ \varepsilon_{11} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= -\frac{1}{R} \frac{U_0}{h} + e_{31} \frac{u_r}{R^2} + e_{31} \frac{1}{R} \frac{\partial u_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3)$$

В такой постановке был рассмотрен случай вынужденных установившихся колебаний. Получено уравнение для определения собственных частот рассматриваемой упругой системы

$$\beta^4 + a_1 \beta^3 + a_2 \beta^2 + a_3 \beta + a_4 = 0, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= -2\eta i, \quad a_2 = \frac{2e_{31}e_{15} + \varepsilon_{11}(c_{13} - c_{11})}{\varepsilon_{11}\rho R^2} - \eta^2, \\ a_3 &= -\frac{2e_{31}e_{15} + \varepsilon_{11}(c_{13} - c_{11})}{\varepsilon_{11}\rho R^2} \eta i, \quad a_4 = \frac{e_{31}e_{15}(c_{12} - c_{11})}{\varepsilon_{11}\rho^2 R^4}. \end{aligned}$$

Произведена оценка влияния величины угловой скорости на выходной сигнал резонатора в виде силы тока на торцевых поверхностях цилиндрической оболочки. Пиковые значения наблюдаются при частотах β

близких к $\beta_1 = 0,165$ МГц, $\beta_2 = 0,574$ МГц. Значения β_1, β_2 равны действительным частям корней уравнения (4).

Расчет механических деформаций при $\beta = 0,165$ МГц и $\omega = 10,47c^{-1}$ дает амплитуды деформаций $\varepsilon_\varphi = 1,69 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_z = 6,7 \cdot 10^{-4}$.

Была также рассмотрена краевая задача для уравнений (1), (2) в случае установившихся колебаний при плоской деформации цилиндра [5]. Представляя решение задачи в виде

$$u_r = u + \tilde{u}_r(r) \exp(i\beta t), \quad u_\varphi = \tilde{u}_\varphi(r) \exp(i\beta t), \quad \psi = \tilde{\psi} \exp(i\beta t),$$

приходим к системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно амплитудных функций $\tilde{u}_r = \tilde{u}_r(r)$, $\tilde{u}_\varphi = \tilde{u}_\varphi(r)$, $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}(r)$.

Далее за счет введения функций

$$x_1 = \tilde{u}_r, \quad x_2 = \frac{d\tilde{u}_r}{dr}, \quad x_3 = \tilde{u}_\varphi, \quad x_4 = \frac{d\tilde{u}_\varphi}{dr}, \quad x_5 = \tilde{\psi}, \quad x_6 = \frac{d\tilde{\psi}}{dr} \quad (5)$$

переходим к решению нормальной системы дифференциальных уравнений первого порядка. Общее решение нормальной системы строится на основе фундаментальной системы частных решений, каждое из которых получено методом Рунге—Кутты на отрезке $r_1 \leq r \leq r_2$. Для того чтобы выделить из общего решения искомые функции (5), используем граничные условия при $r = r_1$ и $r = r_2$.

Для случая резонатора в виде тонкой цилиндрической оболочки с радиусом срединной поверхности R и толщиной h возможна постановка задачи электроупругости в декартовой системе координат, связанной со срединной поверхностью оболочки. При этом ось Ox направляется вдоль оси цилиндра, ось Oz – по толщине.

Физические свойства материала описываются в рамках линейного пьезоэффекта: механические напряжения и индукция электрического поля выражаются через деформации и напряженность электрического поля

$$\sigma_x = c_{11}\varepsilon_x + c_{12}\varepsilon_y - e_{31}E_z, \quad \sigma_y = c_{12}\varepsilon_x + c_{11}\varepsilon_y - e_{31}E_z, \quad \tau_{xy} = \frac{c_{11} - c_{12}}{2}\varepsilon_{xy},$$

$$D_x = \varepsilon_{11}E_x, \quad D_y = \varepsilon_{11}E_y, \quad D_z = \varepsilon_{33}E_z + e_{31}(\varepsilon_x + \varepsilon_y).$$

Напряженность электрического поля выражена через потенциал $\mathbf{E} = -grad\psi$. При этом для тонкой оболочки $\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0$. Выражения для деформаций

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{R}w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

учитывают геометрическую нелинейность при больших прогибах. Представляя усилия в срединной поверхности в виде

$$N_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad N_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad T = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},$$

приходим к уравнениям движения

$$L(w, F) - \frac{h^3}{12} c_{11} \nabla^4 w + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \rho h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial w}{\partial t} \right), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{c_{11}}{c_{11} - c_{12}} \nabla^4 F + h(c_{11} + c_{12}) \left(\frac{1}{2} L(w, w) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \\ = h e_{31} \nabla^2 \left(\psi \left(x, y, \frac{h}{2}, t \right) - \psi \left(x, y, \frac{-h}{2}, t \right) \right), \end{aligned} \quad (7)$$

где L – известный оператор, и уравнению вынужденной электростатики

$$\varepsilon_{11} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + e_{31} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ольшанский В. Ю., Абитова И. Ф., Нагар Ю. Н., Серебряков А. В.* Об одной модели датчика инерциальной информации // Вестн. Нижегород. ун-та. 2011. № 4, ч. 2. С. 260–261.
2. Пьезоэлектрический вибрационный гироскоп (варианты) : пат. 2426072 Рос. Федерация. № 2010108860/28; заявл. 09.03.2010 ; опубл. 10.08.2011, Бюл. № 22. 9 с.
3. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А.* Электроупругость. Киев : Наук. думка, 1989. 280 с.
4. *Серебряков А. В., Нагар Ю. Н.* О вынужденных колебаниях цилиндрической пьезокерамической оболочки // Математические методы в технике и технологиях ММТТ-27 : сб. трудов XXVII Междунар. науч. конф. Тамбов : Тамбовск. гос. техн. ун-т, 2014. Т. 4, вып. 12, сек. 10, 11. С. 187–190.
5. *Серебряков А. В., Паршина И. Ф.* Решение связанной задачи электроупругости для цилиндрического чувствительного элемента пьезогироскопа // Проблемы критических ситуаций в точной механике и управлении : материалы Всерос. науч. конф. с междунар. участием (Саратов, 25–27 сентября 2013). Саратов : ООО «Издательский центр «Наука», 2013. С. 166–170.

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ВНУТРЕННЕГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ МЕТОДА МИКРОТЕПЛОИЗОЛЯЦИИ ЧУВСТВИТЕЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА ПЬЕЗОГИРОСКОПА

Введение. Рассматривается влияние внешнего нестационарного температурного поля на температурные поля наиболее важных элементов датчика инерциальной информации [1, 2]. Под воздействием температурных перепадов могут изменяться линейные размеры деталей и физические свойства материалов, что оказывает негативное влияние на точность прибора, величину выходного сигнала [3].

Моделируется поведения пьезогироскопа при возможном в реальных условиях случайном характере изменения внешней температуры. Для предложенной в работах [4, 5] схемы микромеханического пьезогироскопа, рассмотрен случай, когда внешняя температура находится в заданном интервале и ее скачки происходят в заданные моменты времени.

Рассмотрено влияние внутреннего источника тепла на эффективность дополнительной теплоизоляции чувствительного элемента. Проведен анализ смещения источником тепла временных и амплитудных показателей исследуемого процесса.

Математическая модель. Исследования проводились для изображенной на рисунке конфигурации прибора (см. [4, 5]). Прибор состоит из металлического корпуса, присоединенной массы M , двух пьезопластинок П1 и П2, внутренних источников тепла, моделируемых плоским элементом H с заданным тепловым потоком и теплоизоляционных столбиков P . Теплообмен с окружающей средой происходит через участок F на одной из стенок.

При расчете трехмерного нестационарного температурного поля прибора использовался метод теплового баланса, реализованный в программном комплексе PiezoGiroscope Temperature Field Calculator 1.1 с дополнительными модулем, генерирующим серии случайных температурных перепадов в различных режимах.

Анализ температурного поля прибора при случайных скачках внешней температуры в фиксированные моменты времени при отсутствии источника тепла.

Рассмотрим ситуацию, когда внешние условия задаются серией случайных изменений внешней температуры в диапазоне от -40 до $+60$ градусов Цельсия. Скачки температуры происходят в заданные моменты

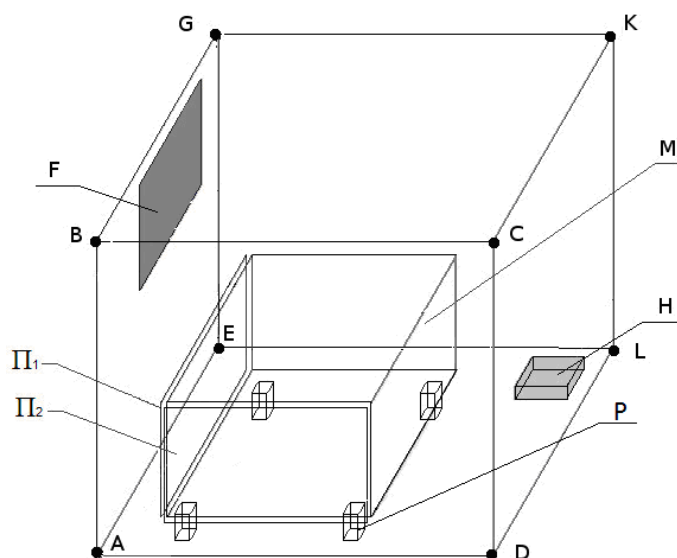


Схема пьезогироскопа

времени ts , $s = 1, \dots, S$, где $ts - ts-1 = \delta t$ – некоторый постоянный шаг. Серия случайных изменений температуры строилась с помощью генерации последовательности случайных чисел и ее последующей аппроксимации сплайном.

Проводилось две серии по три группы численных экспериментов. В первой серии внутренний источник тепла отключен, во второй присутствует и его мощность составляет 2 Ватта. Для каждой серии в первой группе случайные числа генерировались с шагом $\delta t = 5$ с, во второй $\delta t = 40$ с и в третьей $\delta t = 120$ с.

По результатам серии экспериментов была отмечена явная зависимость закона изменения температуры присоединенной массы от закона изменения внешней температуры. Особенно ярко это выражено для $\delta t = 120$ с и $\delta t = 40$ с и только при $\delta t = 5$ с эффект можно сказать практически не выражен. Аналогичная ситуация и для серии расчетов, проводившихся при включенном внутреннем источнике тепла.

Данный эффект, негативно сказывается на величине выходного сигнала [6]. Для улучшения устойчивости сигнала необходимо уменьшить влияние перепадов внешней температуры на чувствительные элементы пьезогироскопа: пьезопластины и присоединенную массу. В связи с этим была рассмотрена возможность конструктивных изменений схемы пьезогироскопа: добавление четырех элементов P (см. рисунок), увеличивающих теплоизоляцию пьезопластин. При данном изменении конструкции увеличивается шаг генерации случайных перепадов, при котором они начинают существенно влиять на температуру ядра пьезогироскопа и как следствие – на выходной сигнал прибора.

Числовые характеристики связи температуры в узлах прибора с температурой окружающей среды для серии расчетов с наличием внутреннего источника тепла и его отсутствием. В каждой из двух серий численных экспериментов для первоначальной и модифицированной конструкций прибора были проведены по три группы расчетов: для шага генерации δt , равном 5 с, 40 с и 120 с.

Для каждого сгенерированного случайным образом закона изменения внешней температуры, заданного функцией $T = f_r(t)$, находился закон изменения температуры присоединенной массы M : $T = g_r(t)$. Для каждой генерации внешней температуры отыскивался временной сдвиг τ (т. е. время запаздывания), при котором отклонение $g_r(t)$ от $f_r(t)$ минимально

$$\rho(\tau) = \rho(f, g, \tau) \rightarrow \min, \quad \rho = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^n (f_\tau(t_i) - g_\tau(t_i + \tau))^2}{n}}$$

В таблице представлены математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение τ для обеих конструкций и всех трех групп. В каждой ячейке таблицы представлены данные для первоначальной конструкции и модифицированной соответственно.

Без источника тепла	$M[\tau], c$	$\sigma[\tau], c$	$M[\rho], oC$
5с	19.377	7.640	25.85
	5.113	0.292	20.97
5с	19.377	7.640	25.85
	5.113	0.292	20.97
40с	35.716	4.304	15.79
	13.484	0.456	4.87
120с	55.862	6.594	9.24
	15.407	0.580	1.05
С источником тепла			
5с	13.406	5.385	33.50
	4.941	0.281	30.11
40с	33.155	6.339	26.69
	13.295	1.167	22.56
120с	47.160	13.353	23.02
	23.888	8.066	21.89

Из анализа данных статистической обработки для модифицированной конструкции видно, что время сдвига τ сильно увеличилось по сравнению с первоначальной конструкцией. Существенное увеличение математического ожидания $M[\rho]$ свидетельствует о значительном уменьшении влияния внешних перепадов температуры на тепловое поле оптимизированной конструкции пьезогироскопа.

Сравнивая серии расчетов с внутренним источником тепла и без его влияния, можно выявить несколько закономерностей. Во всех расчетах из серии с источником тепла выросло математическое ожидание $M[\rho]$. Для расчетов со временем генерации случайных величин в 120 с $M[\rho]$ возросло намного значительнее, чем для малых времен порядка 5 с. Это объясняется тем, что источник тепла выравнивает график температуры ключевого элемента пьезогироскопа и они становятся менее «похожими», что собственно и выражается в увеличении $M[\rho]$. Для математических ожиданий времени запаздывания τ серии расчетов с внутренним источником тепла сохраняются закономерности, присутствующие для серии расчетов без источника тепла.

Заключение. Наличие внутреннего источника тепла вносит определенные коррективы в процесс прогрева пьезогироскопа и его чувствительного элемента. Однако существенных изменений характера прогрева и установленных зависимостей не наблюдается. Откуда можно сделать вывод, что предложенный ранее метод уменьшения чувствительности основных частей пьезогироскопа остается актуальным и для случая включенного внутреннего источника тепла.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А.* Механика связанных полей в элементах конструкций : Электроупругость. Киев : Наук. думка, 1989. Т. 5. 283 с.
2. *Партон В. З., Кудрявцев Б. А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М. : Наука, 1988. 470 с.
3. *Распопов В. Я.* Микромеханические приборы : учеб. пособие. М. : Машиностроение, 2007. 400 с.
4. *Панкратов В. М., Ольшанский В. Ю., Нагар Ю. Н., Серебряков А. В.* Влияние диссипации на характеристики измерителя угловой скорости на основе взаимного пьезоэффекта // Авиакосмическое приборостроение. 2010. № 8. С. 3–8.
5. *Ольшанский В. Ю., Абитова И. Ф., Нагар Ю. Н., Серебряков А. В.* Об одной модели датчика инерциальной информации // Вестн. Нижегород. ун-та. 2011. № 4, ч. 2. С. 260–261.
6. *Растегаев Ю. О.* Влияние геометрических параметров на величину выходного сигнала пьезогироскопа // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2011. Вып. 13. С. 173–175.

К ПОСТРОЕНИЮ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОРИЕНТАЦИИ ОКОЛОКРУГОВОЙ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

1. Постановка задачи. Пусть необходимо определить ограниченное по модулю управление \mathbf{u} :

$$-u_{max} \leq u \leq u_{max},$$

ортогональное плоскости орбиты космического аппарата (КА), движение центра масс которого описывается уравнениями

$$\begin{aligned} 2\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} &= \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_\eta, \quad \boldsymbol{\lambda} = \lambda_0 + \lambda_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_3 \mathbf{i}_3, \quad \boldsymbol{\omega}_\eta = \frac{r}{c} u \mathbf{i}_1 + \frac{c}{r^2} \mathbf{i}_3, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{c}{r^2}, \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad c = \text{const}, \end{aligned} \quad (1)$$

переводящее орбиту КА из заданного начального состояния

$$t = t_0 = 0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \boldsymbol{\lambda}(0) = \boldsymbol{\lambda}^H = \boldsymbol{\Lambda}^H \circ \left(\cos \frac{\varphi_0}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi_0}{2} \right)$$

в конечное состояние, принадлежащее многообразию

$$t = t^* = ?, \quad \varphi(t^*) = \varphi^*, \quad \boldsymbol{\lambda}(t^*) = \pm \boldsymbol{\Lambda}^* \circ \left(\cos \frac{\varphi^*}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi^*}{2} \right)$$

и минимизирующее функционал

$$J_1 = \int_0^{t^*} (\alpha_1 + \alpha_2 u^2), \quad \alpha_1, \alpha_2 = \text{const} \geq 0,$$

или функционал

$$J_2 = \int_0^{t^*} (\alpha_1 + \alpha_2 |u|), \quad \alpha_1, \alpha_2 = \text{const} \geq 0.$$

Здесь $\boldsymbol{\lambda}$ – нормированный кватернион ориентации орбитальной системы координат; \circ – символ кватернионного умножения; $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ – векторные мнимые единицы Гамильтона; $r = |\mathbf{r}|$ – модуль радиуса-вектора центра масс КА; $c = |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|$ – постоянная площадей (модуль вектора момента

скорости \mathbf{v} центра масс КА); u – проекция вектора реактивного ускорения \mathbf{u} на направление вектора момента скорости центра масс КА (алгебраическая величина реактивного ускорения, перпендикулярного мгновенной плоскости орбиты КА); φ – истинная аномалия, характеризующая положение КА на орбите; p и e – параметр и эксцентриситет орбиты.

Отметим, что для нахождения аналитического решения уравнений (1) удобно перейти к новой независимой переменной – истинной аномалии φ и ввести безразмерные переменные. Система фазовых уравнений в безразмерных переменных примет вид (N – характерный безразмерный параметр):

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{d\varphi} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda} \circ [N(r^b)^3 \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3], \quad r^b = \frac{1}{1 + e \cos \varphi}. \quad (2)$$

2. Первая поправка. Предположим, что орбита КА является околокруговой ($e \ll 1$), а управление постоянным. Следуя [1], будем искать решение в виде разложения по степеням малого параметра e :

$$\boldsymbol{\lambda}(\varphi) = \boldsymbol{\lambda}^{(0)}(\varphi) + e\boldsymbol{\lambda}^{(1)}(\varphi) + e^2\boldsymbol{\lambda}^{(2)}(\varphi) + \dots \quad (3)$$

Входящий в уравнения (2) множитель $(r^b)^3$ можно также представить в виде ряда по степеням e :

$$(r^b)^3 = \frac{1}{(1 + e \cos \varphi)^3} = 1 + 3e \cos \varphi + 6e^2 \cos^2 \varphi + \dots$$

Ограничимся пока нахождением лишь первого поправочного члена ряда (3), т. е. будем искать приближённое решение задачи в виде

$$\boldsymbol{\lambda}(\varphi) = \boldsymbol{\lambda}^{(0)}(\varphi) + e\boldsymbol{\lambda}^{(1)}(\varphi) + O(e^2). \quad (4)$$

Тогда уравнение для кватерниона $\boldsymbol{\lambda}$ примет вид

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{d\varphi} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda} \circ \{[N \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3] - 3Ne \cos \varphi \mathbf{i}_1\}. \quad (5)$$

Подставляя разложение (4) в кватернионное уравнение (5) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях e , имеем два обыкновенных дифференциальных уравнения относительно $\boldsymbol{\lambda}^{(0)}$ и $\boldsymbol{\lambda}^{(1)}$. Решая их, получим, что общее решение уравнения (2) с точностью до слагаемых,

содержащих эксцентриситет орбиты КА в степени не выше первой, есть

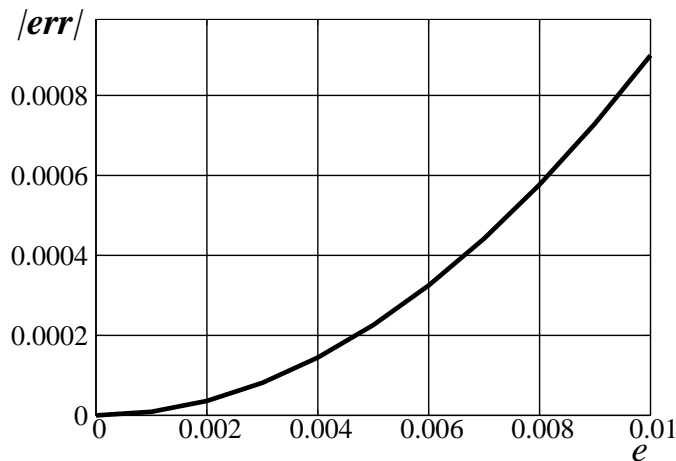
$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda} = & \mathbf{C} \cos \left(\frac{\omega\varphi}{2} \right) + \mathbf{D} \sin \left(\frac{\omega\varphi}{2} \right) + \\ & + e \left\{ \left(\frac{3N}{8(1+\omega)} \mathbf{C} \circ [-N - \mathbf{i}_2] + \frac{3N(\omega+2)}{8(1+\omega)} (\mathbf{D} \circ \mathbf{i}_1) \right) \cos \left[\left(\frac{\omega}{2} + 1 \right) \varphi \right] + \right. \\ & + \left(-\frac{3N(\omega+2)}{8(1+\omega)} (\mathbf{C} \circ \mathbf{i}_1) + \frac{3N}{8(1+\omega)} \mathbf{D} \circ [-N - \mathbf{i}_2] \right) \sin \left[\left(\frac{\omega}{2} + 1 \right) \varphi \right] + \\ & + \left(\frac{3N}{8(1-\omega)} \mathbf{C} \circ [-N - \mathbf{i}_2] + \frac{3N(\omega-2)}{8(1-\omega)} (\mathbf{D} \circ \mathbf{i}_1) \right) \cos \left[\left(\frac{\omega}{2} - 1 \right) \varphi \right] + \\ & \left. + \left(-\frac{3N(\omega-2)}{8(1-\omega)} (\mathbf{C} \circ \mathbf{i}_1) + \frac{3N}{8(1-\omega)} \mathbf{D} \circ [-N - \mathbf{i}_2] \right) \sin \left[\left(\frac{\omega}{2} - 1 \right) \varphi \right] \right\}. \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{C} , \mathbf{D} – кватернионные постоянные интегрирования, а величина $\omega = \sqrt{N^2 + 1} = \text{const}$.

На рисунке показан закон изменения тензора кватерниона $\mathbf{err}(e)$ погрешности определения ориентации орбитальной системы координат ($|\mathbf{err}(e)| = \sqrt{\|\mathbf{err}(e)\|^2} = \sqrt{err_0^2 + err_1^2 + err_2^2 + err_3^2}$). Компоненты этого кватерниона имеют вид

$$err_j(e) = \max_{\varphi \in [0; 2\pi]} |\lambda_j^{\text{прибл}}(\varphi, e) - \lambda_j^{\text{PK}}(\varphi, e)|, \quad j = \overline{0, 3}.$$

Здесь $\boldsymbol{\lambda}^{\text{прибл}}(\varphi, e)$ – приближённое аналитическое решение, а $\boldsymbol{\lambda}^{\text{PK}}(\varphi, e)$ – результат интегрирования уравнения (2) методом Рунге–Кутты 4-го порядка точности с шагом $h = 0.001$ рад.



Тензор кватерниона погрешности (первая поправка)

При этом начальное значение кватерниона $\boldsymbol{\lambda}$ соответствует ориентации орбиты одного из спутников группировки ГЛОНАСС, а параметр $N = 0.35$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00 165).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Найфэ А. Введение в методы возмущений. М. : Мир, 1984. 535 с.

УДК 539.3

Я. А. Парфенова

ЗАДАЧА О ДЕЙСТВИИ УДАРНОЙ НАГРУЗКИ ИЗГИБАЮЩЕГО ТИПА НА ТОРЕЦ УПРУГОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Слоистые композиционные материалы находят широкое применение в инженерной практике, так как позволяют создавать конструкции с уникальными прочностными и весовыми характеристиками. Поэтому является актуальным исследование поведения многослойных, в частности двухслойных, упругих тонкостенных оболочек при динамических воздействиях.

Постановка задачи. Рассмотрим полубесконечную двухслойную цилиндрическую оболочку толщины $2h$ и радиуса R . Каждый слой является изотропным, имеет полутолщину h_i , плотность ρ_i , модуль Юнга E_i и коэффициент Пуассона ν_i , здесь и далее $i = 1, 2$. Со срединной поверхностью оболочки свяжем ортогональную систему координат $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, причем α_1 – расстояние от торца оболочки вдоль образующей, α_2 – угол в окружном направлении, α_3 – расстояние от срединной поверхности по нормали. Уравнения движения и соотношения, выражающие закон Гука для упругой тонкостенной многослойной оболочки произвольной формы, были получены в работе [1]. Уравнения движения совпадают с соответствующими уравнениями для однослойной цилиндрической оболочки [2, 3]. Соотношения, выражающие закон Гука, получены в форме

$$\begin{aligned} T_i &= B_i \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + B_j \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{w}{R} \right) - C_i \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} - C_j \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2}, \\ G_i &= C_i \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + C_j \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{w}{R} \right) - D_i \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} - D_j \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2}, \\ S_{ij} &= B_3 \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} \right) - 2C_3 \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \\ H_{ij} &= C_3 \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} \right) - 2D_3 \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где T_i – продольные усилия, N_i – перерезывающие силы, G_i – изгибающие моменты, S_{ij} – сдвиговое усилие, H_{ij} – скручивающий момент, u_i – тангенциальные перемещения точек срединной поверхности, w – прогиб. Коэффициенты, входящие в соотношения (1), имеют вид

$$\begin{aligned} B_1 &= 2 \sum_{i=1}^2 \frac{h_i E_i}{1 - \nu_i^2}, & B_2 &= 2 \sum_{i=1}^2 \frac{h_i \nu_i E_i}{1 - \nu_i^2}, & B_3 &= \sum_{i=1}^2 \frac{h_i E_i}{1 + \nu_i}, \\ C_1 &= 2 \sum_{i=1}^2 \frac{h_i E_i}{1 - \nu_i^2} P_i, & C_2 &= 2 \sum_{i=1}^2 \frac{h_i \nu_i E_i}{1 - \nu_i^2} P_i, & C_3 &= \sum_{i=1}^2 \frac{h_i E_i}{1 + \nu_i} P_i, \\ D_1 &= \frac{2}{3} \sum_{i=1}^2 \frac{h_i E_i}{1 - \nu_i^2} Q_i, & D_2 &= \frac{2}{3} \sum_{i=1}^2 \frac{h_i \nu_i E_i}{1 - \nu_i^2} Q_i, & D_3 &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^2 \frac{h_i E_i}{1 + \nu_i} Q_i, \\ P_1 &= h - h_1, & P_2 &= h_2 - h, & Q_i &= h_i^2 + 3h_j^2, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Считая, что к торцу оболочки приложена ударная нагрузка изгибающего типа, моделируемая единичной функцией Хевисайда $H(t)$, запишем граничные условия на торце оболочки

$$G_1 = IH(t), \quad w = 0 \quad \text{при } \alpha_1 = 0. \quad (2)$$

В начальный момент времени оболочка находится в состоянии покоя.

Пусть внешняя нагрузка является осесимметричной, тогда компоненты напряженно-деформированного состояния (НДС) не зависят от угловой координаты α_2 , и можно получить разрешающее уравнение относительно прогиба

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \alpha_1^4} + \frac{2(B_2 C_1 - B_1 C_2)}{R(D_1 B_1 - C_1^2)} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} + \frac{(B_1^2 - B_2^2) w}{R^2(D_1 B_1 - C_1^2)} + \frac{1}{c_3^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (3)$$

Введем в рассмотрение безразмерные переменные ξ , τ и безразмерные компоненты НДС w^* и G_1^* по формулам

$$\alpha_1 = R\sqrt{\eta}\xi, \quad t = Rc_3^{-1}\tau, \quad c_3 = \sqrt{\frac{D_1 B_1 - C_1^2}{2\rho h}}, \quad (4)$$

$$w = R w^*, \quad G_1 = \frac{C_1^2 - B_1 D_1}{B_1 \eta} G_1^*, \quad \eta = \frac{h}{R}.$$

Разрешающее уравнение (3) и граничные условия относительно прогиба w с учетом (1) и (4) примут вид

$$\frac{\partial^4 w^*}{\partial \xi^4} + 2\delta \frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi^2} + \omega^2 w^* + \frac{\partial^2 w^*}{\partial \tau^2} = 0, \quad (5)$$

$$w^* = 0, \quad \frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi^2} + \delta w^* = I_1 H(\tau) \text{ при } \xi = 0, \quad (6)$$

где $\delta = h \frac{B_2 C_1 - B_1 C_2}{(D_1 B_1 - C_1^2)}$, $\omega^2 = h^2 \frac{B_1^2 - B_2^2}{R^2 (D_1 B_1 - C_1^2)}$ и $I_1 = \eta \frac{B_1}{(C_1^2 - D_1 B_1)} I$.

Решение задачи. Применим к краевой задаче (5), (6) интегральное преобразование Лапласа по временной переменной τ с параметром s . Запишем задачу в изображениях по Лапласу для прогиба w^L

$$\frac{d^4 w^L}{d\xi^4} + 2\delta \frac{d^2 w^L}{d\xi^2} + (\omega^2 + s^2) w^L = 0, \quad (7)$$

$$w^L = 0, \quad \frac{d^2 w^L}{d\xi^2} + \delta w^L = \frac{I_1}{s} \text{ при } \xi = 0. \quad (8)$$

Характеристическое уравнение для обыкновенного дифференциального уравнения (7) имеет две пары комплексно-сопряженных корней. Учитывая условие затухания решения на бесконечности, выбираем корни имеющие отрицательную действительную часть. С учетом граничных условий (8) решение задачи в изображениях (7) примет вид

$$w^L = \frac{-I_1}{2abs} \exp(-a\xi) \sin(b\xi), \quad G_1^L = \frac{I_1}{s} \exp(-a\xi) \cos(b\xi), \quad (9)$$

где $a = \sqrt{\frac{\sqrt{s^2 + \omega^2} - \delta}{2}}$, $b = \sqrt{\frac{\sqrt{s^2 + \omega^2} + \delta}{2}}$.

В работах [2, 3] разработан метод обращения изображений по Лапласу, основанный на первой теореме о разложении в [4]. Применим его для нахождения оригинала изгибающего момента G_1^* . Разложим изображение G_1^L в ряд по отрицательным степеням параметра преобразования s и обратим полученный ряд почленно. Сохраняя в разложении слагаемые порядка $O(s^{-4})$, получим решение для изгибающего момента в виде

$$\begin{aligned} G_1^*(y, \tau) = I_1 \left[D_{1,c}(y, \tau) + \frac{\delta y}{2} (D_{2,c}(y, \tau) - D_{2,s}(y, \tau)) - \right. \\ \left. - \frac{\delta^2 y^2}{4} D_{3,s}(y, \tau) + \left(\frac{\delta^2 y}{8} - \frac{\omega^2 y}{4} \right) (D_{4,c}(y, \tau) + D_{4,s}(y, \tau)) + \right. \\ \left. + \frac{3\delta\omega^2 y}{8} (D_{6,s}(y, \tau) - D_{6,c}(y, \tau)) + \right. \\ \left. + \left(\frac{\delta^4 y^2}{64} + \frac{20\omega^2 \delta^2 y^2}{64} + \frac{\omega^4 y^2}{16} \right) D_{7,s}(y, \tau) + \dots \right], \quad y = \frac{\xi}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (10)$$

здесь $D_{n,c}$ и $D_{n,s}$ – функции-оригиналы (см. [2, 3]) для изображений вида

$$\frac{1}{s^{(n+1)/2}} \exp(-y\sqrt{s}) \{\cos, \sin\}(y\sqrt{s}) \rightarrow D_{n,\{c,s\}}(y, \tau).$$

Рекуррентная формула для нахождения $D_{n,c}$ и $D_{n,s}$ функций получена в [2], там же исследованы их свойства.

Формула (10) это аналитическое решение краевой задачи (5), (6). Полученный результат справедлив для малых значений времени τ . Корректность вывода подтверждается тем, что при $\delta = 0$, когда один из слоев оболочки имеет нулевую толщину, решение (10) совпадает с решением соответствующей задачи для однослойной оболочки (см. [3]).

Численный анализ результатов решения задачи показал, что существенное влияние на поведение изгибающего момента оказывает отношение жесткостей слоев оболочки. Чем оно больше, тем быстрее решение для изгибающего момента стремится к решению соответствующей стационарной задачи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вильде М. В., Коссович Л. Ю., Шевцова Ю. В. Асимптотическое интегрирование динамических уравнений теории упругости для случая многослойной тонкой оболочки // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 2. С. 56–64.
2. Коссович Л. Ю. Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1986. 176 с.
3. Kossovich L. Yu., Parfenova Ya. A. Flexural transient waves in shells of revolution : an asymptotic approach // ZAMP. 2000. № 4. P. 611–628.
4. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М. : Физматгиз, 1961. 524 с.

УДК 629.78

Я. Г. Сапунков

ОПТИМАЛЬНАЯ ПЕРЕОРИЕНТАЦИЯ ОРБИТЫ С ПОМОЩЬЮ ТЯГИ, ОРТОГОНАЛЬНОЙ ВЕКТОРУ СКОРОСТИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

С использованием переменных Кустаанхеймо—Штифеля [1, 2] в статье решена задача об оптимальной переориентации орбиты космического аппарата (КА) для трех вариантов условий, наложенных на тягу двигателя аппарата. В первом случае тяга полагается ограниченной (двигатель малой тяги) и вектор тяги ортогонален вектору скорости аппарата. Во втором случае сохраняется лишь условие ограниченности тяги. В третьем случае тяга полагается импульсной (двигатель большой тяги). Для решения задач об оптимальной переориентации орбиты КА использовался принцип максимума Понтрягина.

1. Постановка задачи. Как известно, орбита КА определяется с помощью пяти классических элементов: a – большая полуось эллипса,

e – эксцентриситет, I – угол наклона орбиты, Ω_u – долгота восходящего узла, ω_π – угловое расстояние до перигентра. Положение КА на орбите определяется истинной аномалией φ . Результаты решения задач об оптимальной переориентации орбиты представлены ниже в безразмерных переменных. Для возвращения к размерным переменным необходимо использовать масштабы координат положения КА R , координат скорости V , времени T и тяги, отнесенной к единице массы W , которые определяются по формулам

$$R = a_{\text{н}}^{\text{разм}}(1 - e_{\text{н}}^2), \quad V = \sqrt{\gamma M/R}, \quad T = R(R/(\gamma M))^{1/2}, \quad W = \gamma M/R^2,$$

где γ – гравитационная постоянная, M – масса центра притяжения.

Далее большая полуось орбит будет отнесена к размерному значению большой полуоси начальной орбиты. Ориентация орбиты КА в начальный момент времени определяется классическими элементами:

$$a_{\text{н}} = 1.0, \quad e_{\text{н}} = 0.1, \quad I_{\text{н}} = 5.0^\circ, \quad \Omega_{u\text{н}} = 30.0^\circ, \quad \omega_{\pi\text{н}} = 50.0^\circ. \quad (1)$$

Начальная истинная аномалия КА $\varphi_{\text{н}} = 0.5$ рад. Ориентация орбиты, на которую необходимо перевести КА, определяется классическими элементами:

$$a_{\text{к}} = 1.0, \quad e_{\text{к}} = 0.1, \quad I_{\text{к}} = 8.0^\circ, \quad \Omega_{u\text{к}} = 34.0^\circ, \quad \omega_{\pi\text{к}} = 46.0^\circ. \quad (2)$$

Функционал, определяющий качество процесса управления и принимающий минимальное значение для оптимального процесса, представляет собой свертку двух критериев (времени и суммарного импульса величины тяги, отнесенной к единице массы КА, затраченных на процесс управления) с весовыми множителями, в безразмерных переменных имеет вид

$$J = \int_0^{t_{\text{к}}} (\alpha_0 + \alpha_1 |\mathbf{p}|) dt, \quad \alpha_0 = 1.0, \quad \alpha_1 = 2.5. \quad (3)$$

Для задач с ограниченной тягой на управляющий параметр наложено ограничение $|\mathbf{p}| \leq p_{\text{max}} = 1.0$.

2. Примеры решения задачи. В табл. 1 в безразмерных переменных приводятся результаты решения задач с функционалом (3) об оптимальном переводе КА с орбиты (1) на орбиту (2) для трех видов тяги. Для всех трех видов тяги оптимальный процесс состоял из трех этапов: первый и третий этапы активные, на которых величина тяги принимает максимально допустимое значение, а второй этап пассивный, на

котором двигатель отключен. Для импульсного двигателя длительности активных этапов нулевые и в эти моменты времени происходит скачкообразное изменение вектора скорости КА. В первой колонке табл. 1 и 2 указаны характеристики оптимальной тяги. Во второй и третьей колонках табл. 1 приводятся значения импульса модуля тяги (приращение характеристической скорости) на начальном и конечном этапах соответственно. В четвертой и пятой - длительности пассивного этапа и длительности всего процесса управления, а в шестой - значения функционала.

Таблица 1

Характеристика тяги	$ \mathbf{imp}_n $	$ \mathbf{imp}_k $	$\Delta t_{\text{пас}}$	t_k	J
Ограниченная тяга ортогональная вектору скорости $ \mathbf{p} \leq 1$	0.0926	0.0878	0.4711	0.6514	1.1023
Ограниченная тяга без условия ортогональности $ \mathbf{p} \leq 1$	0.0967	0.0914	0.4425	0.6305	1.1006
Импульсная тяга без условия ортогональности	0.1084	0.0984	0.4810	0.4810	0.9980

Таблица 2

Характеристика тяги	a	e	$I, ^\circ$	$\Omega_u, ^\circ$	$\omega_\pi, ^\circ$
Ограниченная тяга ортогональная вектору скорости $ \mathbf{p} \leq 1$	1.0	0.0999	7.4689	70.415	9.9400
Ограниченная тяга без условия ортогональности $ \mathbf{p} \leq 1$	1.0074	0.1049	7.6180	71.526	11.580
Импульсная тяга без условия ортогональности	1.0087	0.1062	8.2808	72.500	10.822

В табл. 2 приводятся значения классических элементов орбиты КА для пассивного этапа для трех видов тяги.

Из табл. 1 видно, что функционал, определяющий качество процесса управления, минимален в случае импульсной тяги.

В табл. 3 и 4 приводятся аналогичные данные оптимальной переориентации орбиты КА с функционалом (3) для случая, когда начальная орбита определяется соотношениями (1), а конечная орбита, на которую необходимо вывести КА, соотношениями:

$$a_k = 1.0, \quad e_k = 0.1, \quad I_k = 18.0^\circ, \quad \Omega_{uk} = 74.0^\circ, \quad \omega_{\pi k} = 86.0^\circ. \quad (4)$$

Таблица 3

Характеристика тяги	$ \mathbf{imp}_n $	$ \mathbf{imp}_k $	$\Delta t_{\text{пас}}$	t_k	J
Ограниченная тяга ортогональная вектору скорости $ \mathbf{p} \leq 1$	0.0926	0.0878	0.4711	0.6514	1.1023
Ограниченная тяга без условия ортогональности $ \mathbf{p} \leq 1$	0.0967	0.0914	0.4425	0.6305	1.1006
Импульсная тяга без условия ортогональности	0.1084	0.0984	0.4810	0.4810	0.9980

Таблица 4

Характеристика тяги	a	e	$I, ^\circ$	$\Omega_u, ^\circ$	$\omega_\pi, ^\circ$
Ограниченная тяга ортогональная вектору скорости $ \mathbf{p} \leq 1$	1.0	0.0999	7.4689	70.415	9.940
Ограниченная тяга без условия ортогональности $ \mathbf{p} \leq 1$	1.0074	0.1049	7.6180	71.526	11.580
Импульсная тяга без условия ортогональности	1.0087	0.1062	8.2808	72.500	10.822

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Штифель Е., Шейфеле Г. Линейная и регулярная небесная механика. М. : Наука, 1975. 304 с.
2. Сапунков Я. Г. Оптимальное управление космическим аппаратом с двигателем ограниченной или импульсной тяги и солнечным парусом // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 4. С. 55–61.

УДК 531.36:521.135

Г. Д. Севостьянов

ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ ЧЕТЫРЕХ ТЕЛ

Интеграл энергии n тел записан в относительных скоростях. Для относительных уравнений движения дана форма в триадах. Построено частное решение для тетраэдра тел ($n = 4$).

Теоретические проблемы небесной механики до сих пор требуют своего решения: проблема захвата в системе трех тел; проблема Смейла о конечности количества тел относительного равновесия и др. Частные

аналитические решения [1–4] позволяют объяснить некоторые свойства движения системы тел.

Интеграл энергии $E = T + \Pi = E_0$ в задаче n тел, где

$$T = \sum_{k=1}^n \frac{m_k \bar{V}_k^2}{2}, \quad \Pi = -f \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}},$$

можно, считая центр масс G неподвижным $\left(\sum_{k=1}^n m_k \bar{V}_k = 0 \right)$, после умножения на $2 \sum_{k=1}^n m_k = 2M$ записать в относительных скоростях, вычитая в обеих частях $\left(\sum_{k=1}^n m_k \bar{V}_k \right)^2 = 0$:

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n m_i m_j \left[(\bar{V}_j - \bar{V}_i)^2 - 2 \frac{\mu}{\Delta_{ij}} \right] = 2M E_0, \quad \mu = fM. \quad (1)$$

При $n = 3$ он записан в [4]. $2 \frac{\mu}{\Delta_{ij}}$ – квадрат «параболической» скорости для двух тел M_i и M_j . Сумма слева в (1) содержит $\frac{n(n-1)}{2}$ скобок.

Уравнения для относительных движений $\left(\dot{\bar{\Delta}}_{ij} = \bar{V}_j - \bar{V}_i \right)$

$$\ddot{\bar{\Delta}}_{ij} = f \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^n m_k \left(\frac{\bar{\Delta}_{jk}}{\Delta_{jk}^3} - \frac{\bar{\Delta}_{ik}}{\Delta_{ik}^3} \right), \quad i < j,$$

можно записать, выделяя ньютоновскую силу. Так,

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{\Delta}}_{12} = & -\mu \frac{\bar{\Delta}_{12}}{\Delta_{12}^3} + m_3 f \left(\frac{\bar{\Delta}_{12}}{\Delta_{12}^3} + \frac{\bar{\Delta}_{23}}{\Delta_{23}^3} + \frac{\bar{\Delta}_{31}}{\Delta_{31}^3} \right) + \\ & + m_4 f \left(\frac{\bar{\Delta}_{12}}{\Delta_{12}^3} + \frac{\bar{\Delta}_{24}}{\Delta_{24}^3} + \frac{\bar{\Delta}_{41}}{\Delta_{41}^3} \right) + \dots, \end{aligned} \quad (2)$$

где имеется ряд из триад. Триада равна нулю, если три ее тела образуют равносторонний треугольник. Для $n = 3$ триада \bar{F}_c использована в [5].

Все триады равны нулю для решения Лагранжа ($n = 3$), когда тела образуют равносторонний треугольник, а также для тетраэдра ($n = 4$).

Если длина ребра тетраэдра $\Delta(t)$, то для движения тела M_2 около M_1 :

$$\ddot{\bar{\Delta}}_{12} = -\mu \frac{\bar{\Delta}_{12}}{\Delta^3}, \quad \mu = fM, \quad M = \sum_{k=1}^4 m_k, \quad (3)$$

т.е. относительная траектория плоская. Пусть $\overline{GM}_k = \bar{r}_k$ в неподвижной системе $G\xi\eta\zeta$, тогда

$$m_1 \ddot{\bar{r}}_1 = f \frac{m_1}{\Delta^3} (m_2 \bar{\Delta}_{12} + m_3 \bar{\Delta}_{13} + m_4 \bar{\Delta}_{14}) = -m_1 k^2 \bar{r}_0, \quad k^2 = \frac{\mu}{\Delta^3}$$

плоской будет и абсолютная траектория M_1 . Аналогичные уравнения для всех тел системы:

$$\ddot{\bar{r}}_k + k^2 \bar{r}_k = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (4)$$

в неподвижной системе $G\xi\eta\zeta$. В связанной системе $Gxyz$ координаты четырех тел пропорциональны Δ , тогда в системе $G\xi\eta\zeta$

$$r_k = \Delta \rho_k(t), \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (5)$$

Если при $t = 0$ система неподвижна, то тела согласно уравнениям (4) будут двигаться прямолинейно к центру масс G (размеры невращающегося тетраэдра уменьшаются) до их столкновения. Аналогичное решение имеется в случае Лагранжа (три точки столкнутся в G).

Системы $G\xi\eta\zeta$ и $Gxyz$ совпадают, $\rho_k(t) = c_k(m_1, m_2, m_3, m_4)$, имеет место интеграл энергии:

$$\frac{\dot{r}_k^2}{2} - \mu \frac{c_k^3}{r_k} = h_k, \quad (6)$$

откуда находятся законы движения $r_k(t)$ системы тел.

Время движения всех тел до удара равно

$$t_{\text{уд}} = \frac{\pi \Delta_0^{3/2}}{2 \sqrt{2\mu}}, \quad \Delta_0 = \Delta(0).$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хильми Г. Ф. Качественные методы в проблеме n тел. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1958. 123 с.
2. Зигель К. Л. Лекции по небесной механике. М. : Изд-во иностр. лит., 1959. 300 с.
3. Тхай В. Н. Симметричные периодические орбиты задачи многих тел. Резонансность и парад орбит // Прикладная математика и механика. 1995. Вып. 3. С. 355–365.
4. Севостьянов Г. Д. Равнобедренная конфигурация в плоской неограниченной задаче трех тел. Ч. 2 // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2012. Вып. 14. С. 142–144.
5. Севостьянов Г. Д. Равнобедренная конфигурация в плоской неограниченной задаче трех тел // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2010. Вып. 12. С. 187–189.

**ВЛИЯНИЕ ГАЗСОДЕРЖАНИЯ ВОДНОЙ СРЕДЫ
НА ГРАНИЦЫ РЕЖИМОВ РЕФРАКЦИИ УДАРНЫХ
ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ОКЕАНА**

Методами нелинейной теории взаимодействия ударных волн (УВ) в газожидкостных средах (ГЖС) [1] установлены границы области рефракции УВ, характеризующиеся возникновением отраженной УВ (в жидкости) и невырожденной преломленной УВ (в газе).

1. При падении УВ АВ (рис. 1) относительно малой интенсивности $\varepsilon = \frac{(p_1 - p_0)}{p_0}$, где ($\varepsilon \sim 10^{-2} \div 10^{-1}$) под углом α к вертикали на свободную поверхность АF океана, разделяющую воздух и воду с газосодержаниями γ^+, γ^- , возникают различные режимы рефракции [2,3]: RR – регулярной; NR – нерегулярной с волной разряжения; TNR – twin Neumann ref. – с двойной отраженной УВ; RW – рефракция с отражённой УВ; BPR – bound precursor ref. – (когда преломленная УВ в точке А – вертикальна), $\omega = 0$; LSR – lambda shock ref. – (когда преломленная УВ на поверхности опережает падающую).

Особый интерес представляет режим с отраженной УВ АС, когда интенсивность преломленной УВ AD $q^+ = \frac{P_3 - P_0}{P_1 - P_0}$ может превышать интенсивность падающей УВ АВ в зависимости от $\varepsilon, \alpha, \gamma$. Относительное газосодержание водной среды (см. [1]) $\gamma = \gamma^- = \frac{m_{II}}{m_I}$ (m_{II} – масса пузырьков газа, m_I – масса жидкости при пузырьковом режиме течения, $0 \leq \gamma \leq 10^{-4}$). При использовании модели гомогенной локально равновесной пузырьковой среды (см. [1]) с газосодержаниями γ^- для жидкости и $\gamma^+ = \infty$ для газа были установлены основные параметры для относительно слабых УВ (ρ_0 – плотность, c_0 – скорость звука)

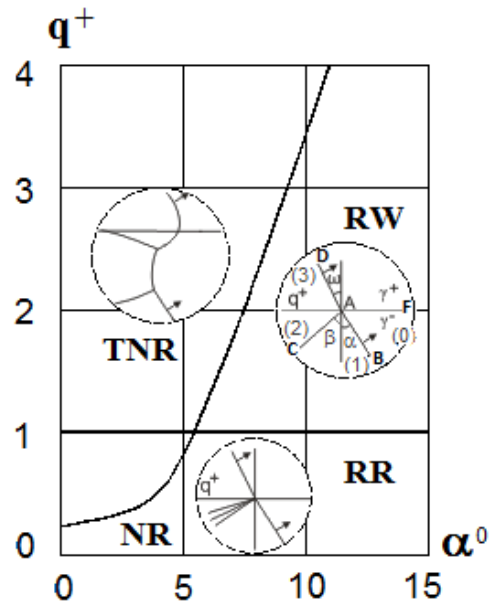


Рис. 1. Режимы рефракции УВ при $\varepsilon = 0.01$

$$\bar{\varepsilon} \ll 1, \bar{\varepsilon} = L_0(\gamma)\varepsilon = R_0(\gamma)P_{10}, P_{10} = \frac{p_1 - p_0}{B_0(\gamma)}, \quad (1)$$

$$B_0(\gamma) = \rho_0(\gamma)c_0^2(\gamma), L_0(\gamma) = \frac{p_0 R_0(\gamma)}{B_0(\gamma)}.$$

С помощью теории коротких волн (ТКВ) (см. [1]) при ограничениях на интенсивность ε (1) и угол падения УВ АВ ($\alpha \sim \bar{\varepsilon}^{1/2}$)

$$\frac{R}{c_0 t} = z = 1 + \bar{\varepsilon} \delta, \Theta = \bar{\varepsilon}^{1/2} Y, \quad (2)$$

$$\frac{u}{c_0} = \frac{\bar{\varepsilon}}{R_0(\gamma)} \mu, \frac{v}{c_0} = \frac{\bar{\varepsilon}^{3/2}}{R_0(\gamma)} \nu, \mu = \frac{p - p_0}{p_1 - p_0},$$

были установлены (см. [1]) в пространстве q^+ , α, γ (при фиксированных значениях ε) границы режимов рефракции RR, NR, TNR, RW. При возрастании интенсивности эти границы смещаются в сторону больших углов α и результаты асимптотической ТКВ [4] требуют уточнения.

2. Для получения общих результатов, уточняющих ТКВ, используем для режима RW и граничащих с ним (когда УВ пересекаются в точке $A(\xi_A, \eta_A)$ на свободной поверхности) точные соотношения на фронтах УВ (AB, AC, AD) [1,5].

Для элемента фронта УВ в автономных переменных $\xi = \frac{x}{c_0 t}, \eta = \frac{y}{c_0 t}$, описываемого уравнением $\xi = \xi(\eta)$, интенсивности $P_{ji} = \frac{(p_j - p_i)}{B_0^\pm}$, $B_0^\pm = \rho_0^\pm c_0^{\pm 2}$ (i – соответствует значениям перед фронтом, j – за фронтом) имеем условия динамической совместности ($\xi' = \frac{d\xi}{d\eta}$) (в рамках модели Эйлера):

$$\frac{\rho_i}{\rho_0} \frac{\left[(\xi - \eta \xi') - \left(\frac{u_i}{c_0} - \xi' \frac{v_i}{c_0} \right) \right]^2}{1 + \xi'^2} = N(P_{ji}); \quad \frac{\rho_i}{\rho_j} = \frac{N(P_{ji}) - P_{ji}}{N(P_{ji})},$$

$$P_{ji} = \frac{\rho_i}{\rho_0} \left[\left(\xi - \eta \xi' \right) - \left(\frac{u_i}{c_0} - \xi' \frac{v_i}{c_0} \right) \right] \left(\frac{u_j}{c_0} - \frac{u_i}{c_0} \right); \quad (3)$$

$$\xi' \left(\frac{u_j}{c_0} - \frac{u_i}{c_0} \right) = \frac{v_i}{c_0} - \frac{v_j}{c_0}; \quad N(P_{ji}) = \frac{1 + 2a(d_1 + P_{ji})(d_2 + P_{ji})}{2(d_3 + P_{ji})}.$$

Коэффициенты a, d_1, d_2, d_3 зависят от газосодержания среды γ^+ или γ^- (см. [1, 5]).

Условие совместности течений на свободной поверхности АФ (в верхней и нижней областях) в точке $A(\eta_A^+ = \eta_A^- = 0, \frac{x_A}{t} = c_0 \xi)$ приводят [6]

к установлению двух инвариантов (см. рис. 1) ($p_3 = p_2, u_{3n} = u_{2n}$)

$$(I) : c_0^+ \xi_A^+ = c_0^- \xi_A^-, \quad \text{или} \quad \frac{c_0^+ N^{1/2}(P_{30})}{\cos \omega} = \frac{c_0^- N^{1/2}(P_{10})}{\cos \alpha}. \quad (4)$$

$$(II) : \frac{v^+ - c_0^+ \eta_A^+}{u^+ - c_0^+ \xi_A^+} = \frac{v^- - c_0^- \eta_A^-}{u^- - c_0^- \xi_A^-}. \quad (5)$$

3. Анализ инвариантов (I), (II) в пространстве параметров подобия (см. [3, 6])

$$\alpha^\nu = \frac{\tan \alpha}{\bar{\varepsilon}^{1/2}}, \quad c_\gamma = \frac{1 - \frac{1}{\bar{c}}}{\bar{\varepsilon}}, \quad \bar{c} = \frac{c_0^-}{c_0^+}; \quad \bar{L} = \frac{L_0^-}{L_0^+}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho_0^-}{\rho_0^+}, \quad \bar{c} = \frac{c_0^-}{c_0^+}, \quad (6)$$

при исключении угла ω (преломленной УВ) приводит к уравнению для q^+ (при RW)

$$q^{+2}(\bar{\rho}\bar{c})^2 \cdot \left(2c_\gamma + \alpha^{\nu 2} - \frac{q^+}{\bar{L}} + 1 \right) = \left[\alpha^\nu - (q^+ - 1) \sqrt{\alpha^{\nu 2} - q^+} \right]. \quad (7)$$

В случае рефракции RW при возникновении невырожденной преломленной УВ ($q^+ \geq 1$) (см. [3]), при $c_0^- \approx c_0^+$ ($\gamma \simeq 10^{-6}$), значениях $(\bar{\rho}\bar{c})^2 \sim 10^6$ правая часть (7) может быть отброшена и для поля газосодержаний γ ($\gamma = \text{const}$) имеем в общем случае уравнение

$$2c_\gamma + \alpha^{\nu 2} - \frac{q^+}{\bar{L}} + 1 = 0. \quad (8)$$

4. Для ТКВ имеем две границы области существования RW ($q^+ \geq 1$) (рис. 2).

Из правой части (7) – условия существования следует левая граница

$$\alpha^{\nu 2} = q^+. \quad (9)$$

Условие $\omega = 0$ (АС ортогональна АФ) из инварианта (II) ($v^+ = v^-$) [7] дает $\nu_2 = 0$, где ν_2 – правая часть (7).

$$\alpha^{\nu 2} = \frac{q^+}{1 - \frac{1}{(q^+ - 1)^2}}. \quad (10)$$

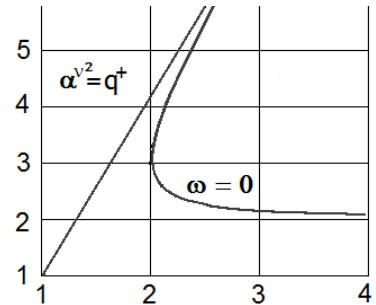


Рис. 2. Границы RW в ТКВ

В ТКВ границы (9), (10) не пересекаются.

5. Уточнение положения границ режима RW (для произвольных углов α).

С учетом (I) инварианта (4) второй инвариант (II) (5) примет вид ($\eta_A^+ = \eta_A^- = 0$)

$$c_0^- \xi_0^- = \frac{v_3 u_2 - v_2 u_3}{v_3 - v_2}. \quad (11)$$

Используя точные выражения (3) на фронтах УВ (AB, AC, AD) для u_2, v_2, u_3, v_3 и выражения (6)

$$\tan \beta = \tan \alpha \left(1 - \frac{1}{2 \sin^2 \alpha} q^+ \bar{\varepsilon} \right), \quad \xi_A' = \frac{N(P_{10})}{\cos^2 \alpha} = \frac{1 + \bar{\varepsilon}}{\cos^2 \alpha}, \quad (12)$$

можно записать (II) инвариант (11) в виде ($P_{30} = q^+ \bar{\rho} \bar{c}^2 P_{10}$)

$$(1 + \bar{\varepsilon}) \left[\tan \omega P_{30} - \bar{c}^2 \tan \alpha \left(2 - q^+ + \frac{q^+ - 1}{2 \sin^2 \alpha} q^+ \bar{\varepsilon} \right) P_{10} \right] = \quad (13)$$

$$= \cos^2 \alpha \left[q^+ \tan \omega - \tan \alpha \left(2 - q^+ + \frac{q^+ - 1}{2 \sin^2 \alpha} q^+ \bar{\varepsilon} \right) \right] P_{10} P_{30}.$$

Выражение (13) представляет (II) инвариант при произвольных ω ($\omega \geq 0$).

- Найдем границу $\omega = 0$. Полагая в (13) $\tan \omega = 0$, получим

$$\left[q^+ - 2 - \frac{q^+ - 1}{2 \sin^2 \alpha} q^+ \bar{\varepsilon} \right] [\bar{c}^2 (1 + \bar{\varepsilon}) - \cos^2 \alpha P_{30}] = 0.$$

Граница $\omega = 0$ реализуется за счет первого множителя

$$\sin^2 \alpha = \frac{q^+(q^+ - 1)}{2(q^+ - 2)} \bar{\varepsilon} \quad \text{или} \quad \alpha^{\nu 2} = \frac{\tan^2 \alpha}{\bar{\varepsilon}} = \frac{q^+}{2 \left(\frac{q^+ - 2}{q^+ - 1} \right) - q^+ \bar{\varepsilon}}. \quad (14)$$

Формула (14) для линии $\omega = 0$ уточняет (10) по ТКВ.

• Для уточнения левой границы области RW рассмотрим для фронта AC выражение для $\xi' = \tan \beta$. Разрешая первое уравнение (3) относительно ξ' и приравнявая нулю подкоренное выражение, получим

$$\cos^2 \alpha = \frac{N^2(P_{10})}{N(P_{21})(N(P_{10}) - P_{10}) + 2N(P_{10})P_{10}}. \quad (15)$$

Оценивая порядки величин в (15) (при $c_0^- \simeq c_0^+, \gamma \sim 10^{-6}, P_{10} \sim 10^{-4}, P_{21} = (q^+ - 1)P_{10}$), получим (с погрешностью порядка 10^{-3}) уравнение

$$\cos^2 \alpha = \frac{N(P_{10})}{N(P_{21})} = \frac{1 + \bar{\varepsilon}}{1 + \bar{\varepsilon} + q^+ \bar{\varepsilon}}, \quad \text{или} \quad \alpha^{\nu 2} = \frac{q^+}{1 + \bar{\varepsilon}}. \quad (16)$$

Формула (16) для левой границы области RW уточняет (9) по ТКВ.

6. Точка пересечения левой границы (16) и границы $\omega = 0$ (14) в области RW.

Исключая α из (14), (16), имеем в точке пересечения зависимость:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{q^+ - 3}{q^{+2} - 1}, \quad (17)$$

при $q^+ = 3$, $\bar{\varepsilon} = 0$; $q^+ = 3.5$, $\bar{\varepsilon} = 0.044$; $q^+ = 4$, $\bar{\varepsilon} = 0.066$.

Зависимость (8), (6) устанавливает связь q^+ от γ и по (16) от α^ν .

$$\alpha^{\nu 2} = \frac{q^+ (q^{+2} - 1)}{q^{+2} + q^+ - 4}. \quad (18)$$

На (рис. 3) изображены зависимости $q^+/\bar{\varepsilon}$; α^ν/q^+ (17), (18). В точке пересечения левой границы (16) и линии $\omega = 0$ (14). Максимальная интенсивность преломленной УВ АД q^+ монотонно растет с возрастанием $\bar{\varepsilon}$ от значения $q^+ = 3$ при $\bar{\varepsilon} = 0$; α^ν – характеризующее положение точки с $\max q^+$ на линии $\omega = 0$, также возрастает от 1.74 при $\bar{\varepsilon} = 0$.

7. Области существования режима RW.

На (рис. 4) представлены результаты расчёта границ режима RW согласно (16) для границы с TNR и согласно (14) для границы $\omega = 0$ с BPR и LSR; граница $q^+ = 1$ с режимами RR, RRW при фиксированных значениях $\varepsilon = 0.010; 0.022; 0.041$. На области режима RW нанесены поля газосодержаний (поля кривых $\gamma = \text{const}$) согласно (8) при фиксированных значениях интенсивности падающей УВ ε .

С ростом интенсивности ε вся область RW смещается в сторону больших газосодержаний γ и максимальное значение q^+ в точке пересечения границ также растет (см. рис. 3).

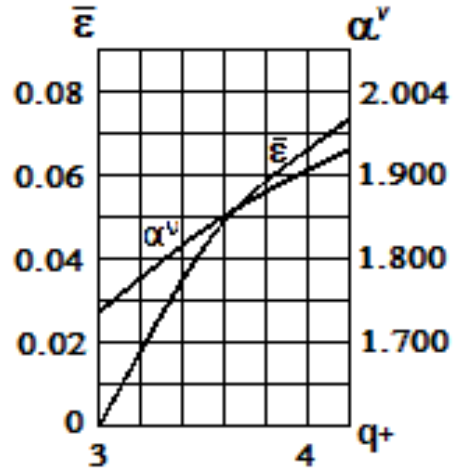


Рис. 3. Зависимость q^+ от α^ν , $\bar{\varepsilon}$ в точке пересечения границ RW

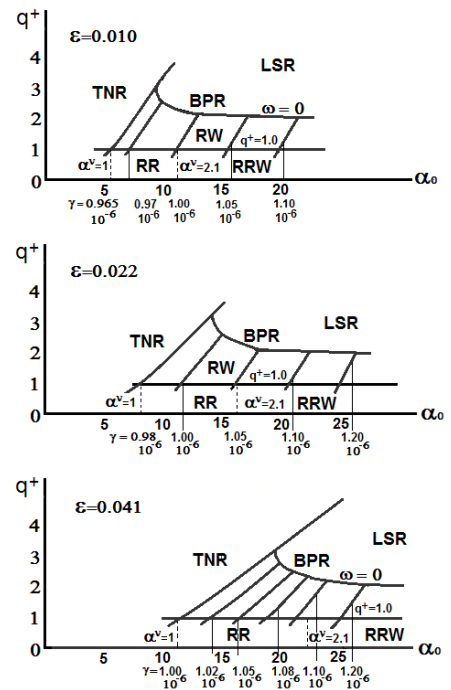


Рис. 4. Области рефракции RW при различных ε

Общие итоги:

- Рассчитано максимальное давление за преломленной УВ (AD) в воздухе для относительно слабых УВ ($\bar{\varepsilon} \leq 0.1$);
- Найдены границы режима RW с режимами TNR, BPR. Граница BPR соответствует переходу от режима RW к режиму LSR;
- Полученные результаты для режима RW представляют практический интерес для оценки ударных воздействий (преломленных УВ). При переходе к режимам TNR, LSR, когда преломленная УВ уходит вперед (опережая падающую), её интенсивность падает.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Шиндяпин Г. П.* Нелинейные взаимодействия ударных волн в газах и газожидкостных средах. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1997. 104 с.
2. *Henderson L. F., Ma J., Sakurai A., Takayama K.* Refraction of Shock wave at an air-water interface // Fluid Dynamics Research. 1990. № 5. P. 337–350.
3. *Шиндяпин Г. П., Матутин А. А.* Возникновение невырожденной ударной волны в воздухе при рефракции ударной волны в океане // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2013. Вып. 15. С. 136–141.
4. *Шиндяпин Г. П., Матутин А. А., Баранова Ю. Д.* Влияние газосодержания водной среды на возникающие режимы ударных волн на поверхности океана // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2014. Вып. 16. С. 127–132.
5. *Шиндяпин Г. П., Ковалев А. Д.* Математическое моделирование в задачах динамики многофазных сред. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1988. Ч. I. 75 с.
6. *Шиндяпин Г. П., Матутин А. А.* О законах подобия рефракции ударных в газовых и газожидкостных средах // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 146–150.
7. *Шиндяпин Г. П., Матутин А. А.* Анализ нелинейной рефракции ударных волн методами асимптотической теории коротких волн // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 150–154.

СОДЕРЖАНИЕ

СЕКЦИЯ МАТЕМАТИКИ

АБРАМОВА В. В. О системе Фабера—Шаудера на треугольнике	3
БУКУШЕВА А. В. Нелинейные связности и внутренние полупульверизации на распределении почти контактной метрической структуры	6
БУТЕРИН С. А. Обратная спектральная задача для интегро-дифференциальных операторов с условиями разрыва	9
ГАЛАЕВ С. В. О некоторых классах N -продолженных связностей	12
ГАЛАЕВ С. В., ГОХМАН А. В. О лагранжевых механических системах с неинтегрируемой линейной связью	15
ГАЛАЕВ С. В., ШЕВЦОВА Ю. В. Почти контактные кэлеровы пространства, определяемые симплектической связностью над распределением	19
ГУДОШНИКОВА Е. В. Оценки порядка приближения и теоремы насыщения для класса операторов	21
КОРОЛЕВА О. А. Интегральный оператор с ядром, имеющим скачки на сторонах квадрата, вписанного в единичный квадрат	26
КУЗНЕЦОВА И. А. Иерархические игры с неполной информацией первого игрока о выборе второго	29
КУРДЮМОВ В. П., ХРОМОВ А. П. Обоснование метода Фурье для волнового уравнения при минимальных требованиях на исходные данные	32
МИРОНОВ В. А., ТЕРЕХИН П. А. Тригонометрическая аффинная система типа Уолша	37
МОЛЧАНОВ В. А. О строении морфизмов категории универсальных планарных автоматов	40
НОВИКОВ В. Е. Вычисление множества оптимальных концептов в контексте с упорядоченными множествами атрибутов	43
ПОЛИКАРПОВ С. И. Представление конечного автомата рядом по системе функций Уолша	45
ПОПОВИЧ А. В. О многообразиях полугрупп бинарных отношений с операциями идентификации неподвижной точки и рефлексивной двойной цилиндрификации	47
РОЗЕН В. В. Вложения упорядоченных множеств в упорядоченные векторные пространства	49
РОМАКИНА Л. Н. Аналоги формулы Герона для трехреберников типов $eee(I)$, $eee(III)$ гиперболической плоскости положительной кривизны	52
РОМАКИНА Л. Н., ЧУРИЛОВА В. О. Эллиптические орициклические N -реберники плоскости \hat{H}	56

РЫХЛОВ В. С. N -кратная полнота корневых функций пучков дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами N -го порядка	59
СИДОРОВ С. П. Оценка скорости сходимости последовательностей формосохраняющих линейных операторов	62
СМИРНОВА Д. С. Ранжирование альтернатив в задачах многокритериальной оптимизации с качественными критериями	66
ТИМОФЕЕВ В. Г., РАЗУМОВСКАЯ Е. В. Об одной задаче конформного склеивания	70
ТРЫНИН А. Ю. О единственности решения одной обратной узловой задачи для оператора Штурма—Лиувилля с потенциалом $q \in L_p[0, \pi]$	72
ХРОМОВ А. А. О приближении производной от решения уравнения Абеля	76
ХРОМОВА Г. В. О решении уравнения Абеля	79
ХРОМОВА Г. В., САВЕНКОВА А. О. Оценка погрешности приближенного решения уравнения Абеля на некотором компактном классе	81
ХРОМОВА Г. В., ЯНИНА Е. О. Об одном семействе операторов с полиномиальными ядрами	84
ЮРКО В. А. Восстановление дифференциальных пучков с нелокальными краевыми условиями	87

СЕКЦИЯ МЕХАНИКИ

АНОФРИКОВА Н. С., БЕЛИЦКАЯ В. С. Определение нормального продольного усилия в трехслойной вязкоупругой пластине	91
АНОФРИКОВА Н. С., СЕРГЕЕВА Н. В. Исследование дисперсионных уравнений в случае наследственно-упругого полого цилиндра	94
АНТОНЕНКО Э. В. Аппроксимирующие функции прогиба в задачах устойчивости и колебаний тонкостенных конструкций	97
ИЛЬЯСОВА Т. А., ПАНКРАТОВ И. А. Математическое моделирование циркуляции воды в озере	101
КОЖАНОВ В. С., СЕВОСТЬЯНОВ Г. Д. Характеристики сферической акустической бегущей волны в вязком газе	105
КОЗЛОВ Е. А., ЧЕЛНОКОВ Ю. Н. Нелинейная стабилизация программных значений угловых элементов орбиты космического аппарата	109
ЛИВЕРОВСКИЙ Д. И., ШЕВЫРЕВ С. П. Моделирование движения сильного цунами, приближающегося к суше	112
ЛИВЕРОВСКИЙ Р. И., ШЕВЫРЕВ С. П. Постановка краевых задач для моделирования трехмерных течений на нерегулярной сетке методом Давыдова	114
МЫЛЬЦИНА О. А., СУРОВА М. Ю. Динамика пластинки под действием импульсных температурных и силовых нагрузок	117
НАГАР Ю. Н., ОЛЬШАНСКИЙ В. Ю., ПАРШИНА И. Ф., СЕРЕБРЯКОВ А. В. Связанная нестационарная задача электроупругости для пьезокерамического цилиндра	121
ОЛЬШАНСКИЙ В. Ю., РАСТЕГАЕВ Ю. О. Анализ влияния внутреннего источника тепла на эффективность метода микротеплоизоляции чувствительного элемента пьезогироскопа	125
ПАНКРАТОВ И. А. К построению решения дифференциальных уравнений ориентации околокруговой орбиты космического аппарата	129
ПАРФЕНОВА Я. А. Задача о действии ударной нагрузки изгибающего типа на торец упругой двухслойной цилиндрической оболочки	132

САПУНКОВ Я.Г. Оптимальная переориентация орбиты с помощью тяги, ортогональной вектору скорости космического аппарата	135
СЕВОСТЬЯНОВ Г.Д. Частное решение неограниченной задачи четырех тел	138
ШИНДЯПИН Г.П., МАТУТИН А.А, БАРАНОВА Ю.Д. Влияние газосо- держания водной среды на границы режимов рефракции ударных волн на поверхности океана	141

Научное издание

МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА

Сборник научных трудов

ВЫПУСК 17

Ответственный за выпуск *Л. В. Бессонов*
Технический редактор *Т. А. Трубникова*
Корректор *Е. Б. Крылова*
Оригинал-макет подготовила *Н. В. Пчелинцева*

Подписано в печать 07.12.2015.
Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 8.37 (9.5). Тираж 100 экз. Заказ 193 - Т.

Издательство Саратовского университета. 410012, Саратов, Астраханская, 83.
Типография Саратовского университета. 410012, Саратов, Б. Казачья, 112А.