

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

# МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА

*Сборник научных трудов*

ВЫПУСК 8

- 5 -

ИЗДАТЕЛЬСТВО САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА  
2006

УДК [51+531]  
ББК (22.1+22.2)я43  
М34

**Математика. Механика:** Сб. науч. тр. – Саратов: Изд-во Саратов.  
ун-та, 2006. – Вып. 8. – 240 с.: ил.

Настоящий сборник содержит труды сотрудников механико-математического факультета Саратовского государственного университета. Представлены исследования по алгебре, геометрии, дискретной математике, информатике, математическому анализу, спектральной теории операторов, теории приближений, биомеханике, механике деформируемого твёрдого тела, оптимальному управлению движением космического аппарата, механике жидкости и газа и их приложениям.

Для научных работников, аспирантов и специалистов в области математики и механики.

Редакционная коллегия:

доктор физ.-мат. наук *Г. В. Хромова* (отв. редактор),  
доктор физ.-мат. наук *Г. П. Шиндяпин* (зам. отв. редактора),  
доктор физ.-мат. наук *Д. В. Прохоров*,  
доктор физ.-мат. наук *А. П. Хромов*,  
доктор техн. наук *П. Ф. Недорезов*,  
кандидат физ.-мат. наук *С. П. Сидоров* (отв. секретарь)

УДК [51+531]  
ББК (22.1+22.2)я43

Работа издана в авторской редакции

ISSN 1609-4751

© Саратовский государственный  
университет, 2006

С. А. Акимова

### КОНКРЕТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА УНИВЕРСАЛЬНЫХ УПОРЯДОЧЕННЫХ АВТОМАТОВ

Под *упорядоченным автоматом* будем понимать, следуя [1], алгебраическую систему вида  $A = (X_1, S, X_2, \delta, \lambda)$ , где  $X_1$  – упорядоченное множество состояний автомата,  $X_2$  – упорядоченное множество выходных сигналов,  $S$  – полугруппа входных сигналов,  $\delta: S \times X_1 \rightarrow X_1$  – функция переходов и  $\lambda: S \times X_1 \rightarrow X_2$  – выходная функция, удовлетворяющие при всех  $s, s' \in S, x \in X_1$  условиям  $\delta(ss', x) = \delta(s', \delta(s, x))$ , и при фиксированном значении  $s$  отображение  $\delta(s, x)$  является эндоморфизмом  $X_1$ , отображение  $\lambda(s, x)$  – гомоморфизмом  $X_1$  в  $X_2$ . Заметим, что для автомата  $A$  без равнодействующих входных сигналов каждый входной сигнал  $s \in S$  естественно отождествляется с парой отображений

$$(\delta(s, x), \lambda(s, x)) \in \text{End}X_1 \times \text{Hom}(X_1, X_2), \text{ где } x \in X_1.$$

Значит, для такого автомата полугруппа входных сигналов  $S$  может рассматриваться как полугруппа пар отображений  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ , где  $\varphi_1: X_1 \rightarrow X_1, \varphi_2: X_1 \rightarrow X_2$ , с операцией умножения  $\varphi\psi = (\varphi_1\psi_1, \varphi_1\psi_2)$ . Более того, доказательство предложения 2.1 из [1] можно без труда перенести на следующий результат.

**ЛЕММА.** Для произвольных упорядоченных множеств  $X_1, X_2$  алгебраическая система

$$\text{Atm}(X_1, X_2) = (X_1, S, X_2, \delta, \lambda)$$

с полугруппой  $S = \text{End}X_1 \times \text{Hom}(X_1, X_2)$  и функциями  $\delta((\varphi, \psi), x) = \varphi(x), \lambda((\varphi, \psi), x) = \psi(x)$  является упорядоченным автоматом, который обладает следующим универсальным свойством: для всякого упорядоченного автомата  $A = (X_1, S', X_2, \delta, \lambda)$  существует и притом единственный гомоморфизм по входным сигналам этого автомата  $A$  в автомат  $\text{Atm}(X_1, X_2)$ .

Автомат  $Atm(X_1, X_2)$  называется *универсальным упорядоченным автоматом* над упорядоченными множествами  $X_1, X_2$ .

В настоящей статье для универсального упорядоченного автомата  $Atm(X_1, X_2)$  решена задача о конкретной характеристике [2]. Данную задачу можно сформулировать следующим образом: для автомата  $A = (X_1, S, X_2, \delta, \lambda)$  без равнодействующих входных сигналов требуется найти необходимые и достаточные условия, при которых множества  $X_1$  и  $X_2$  можно так упорядочить, что автомат  $A$  будет совпадать с универсальным упорядоченным автоматом  $Atm(X_1, X_2)$ .

Идея решения задачи заключается в том, что по полугруппе входных сигналов автомата  $A$  на его множествах  $X_1, X_2$  строятся канонические отношения и с их помощью формулируются необходимые и достаточные условия, при которых на множествах  $X_1, X_2$  существуют такие отношения порядков, что  $A$  совпадает с универсальным упорядоченным автоматом  $Atm(X_1, X_2)$ , т.е. полугруппа  $S$  совпадает с полугруппой  $EndX_1 \times Hom(X_1, X_2)$ .

Пусть  $X_1, X_2$  – не пустые множества и  $S$  – полугруппа пар отображений  $X_1$  в  $X_1$  и  $X_1$  в  $X_2$  с определенной выше операцией умножения.

Введем обозначения. Для пары отображений  $f = (f_1, f_2)$  из полугруппы  $S$  запись  $\begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix}_{f_1}$  будет обозначать, что  $f_1(u) = x, f_1(v) = y$ , и

запись  $\begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix}_{f_2}$  будет обозначать, что  $f_2(u) = x, f_2(v) = y$ .

Для элементов  $u, v \in X_1, x, y \in X_1 \cup X_2$  запись  $\begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix}$  будет обозначать, что для некоторой пары отображений  $f = (f_1, f_2)$  из полугруппы  $S$  выполняется условие  $\begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix}_{f_1}$ , если  $x, y \in X_1$ , или  $\begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix}_{f_2}$ , если  $x, y \in X_2$ .

Определим для полугруппы  $S$  на множествах  $X_i$  (здесь  $i = 1, 2$ ) канонические отношения  $Q_i$  (здесь  $i = 1, 2$ ) по формулам

$$Q_i = \left\{ (x, y) \in X_i^2 : (\forall u, v \in X_1, u \neq v) \begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} v & u \\ x & y \end{pmatrix} \right\} \quad (i = 1, 2).$$

Очевидно, что  $Q_1$  и  $Q_2$  – симметричные бинарные отношения.

Полугруппу  $S$  будем называть *Q-замкнутой*, если для любой пары отображений  $f = (f_1, f_2)$ , где  $f_1 : X_1 \rightarrow X_1, f_2 : X_1 \rightarrow X_2$ , из условия, что

для любых  $x, y \in X_1$ , удовлетворяющих свойству  $(x, y) \in Q_1$ , существуют  $\varphi, \psi \in S$ , для которых ограничение отображения  $\varphi_1 \upharpoonright \{x, y\}$  совпадает с ограничением отображения  $f_1 \upharpoonright \{x, y\}$  и ограничение отображения  $\psi_2 \upharpoonright \{x, y\}$  совпадает с ограничением отображения  $f_2 \upharpoonright \{x, y\}$ , следует  $f \in S$ .

ТЕОРЕМА. Автомат  $A = (X_1, S, X_2, \delta, \lambda)$  без равнодействующих входных сигналов в том и только том случае совпадает с универсальным упорядоченным автоматом  $Atm(X_1, X_2)$  для некоторого нетривиального порядка на множестве  $X_1$  и некоторого порядка на множестве  $X_2$ , если полугруппа входных сигналов  $S$  является  $Q$ -замкнутой полугруппой и ее канонические отношения  $Q_1, Q_2$  удовлетворяют следующим схемам аксиом:

(A1) для любого  $x \in X_i$  выполняется  $(x, x) \in Q_i$  ( $i = 1, 2$ );

(A2) для любых различных элементов  $x, y \in X_1$  и любых элементов  $u, v \in X_i$ , удовлетворяющих условию

$$\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y & x \\ u & v \end{pmatrix},$$

выполняется  $(x, y) \notin Q_1$  ( $i = 1, 2$ );

(A3) если  $(x, y) \in Q_1$  и элементы  $u, v, w \in X_i$  удовлетворяют условиям  $(u, v), (v, w) \in Q_i$  и

$$\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x & y \\ v & w \end{pmatrix},$$

то

$$\begin{pmatrix} x & y \\ u & w \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2);$$

(A4) существуют такие различные элементы  $x, y \in X_1$ , что  $(x, y) \in Q_1$ .

Таким образом, полученный результат дает алгоритм решения задачи о том, какой конечный автомат может быть упорядочен так, что будет универсальным упорядоченным автоматом. С другой стороны, этот результат можно применять в изучении абстрактных и элементарных свойств универсальных упорядоченных автоматов.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Плоткин Б. И., Гринглас Л. Я., Гварамия А. А. Элементы алгебраической теории автоматов. М.: Высш. шк., 1994.
2. Улам С. Нерешенные математические задачи. М.: Наука, 1964.

## ПРОБЛЕМА ПРАВОВОЙ ОЦЕНКИ УНИЧТОЖЕНИЯ ФАЙЛОВ В СОВРЕМЕННОМ УГОЛОВНОМ ЗАКОНОДАТЕЛЬСТВЕ

Современное уголовное законодательство в сфере компьютерной информации не раз подвергалось критике за слабость понятийного аппарата. Мы хотим указать на малоизученную проблему – на то, как эта слабость приводит к серьезным проблемам при квалификации такого общественно опасного деяния, как уничтожение компьютерных файлов.

Компьютерный файл – это принятая в информатике абстракция, которая обозначает именованную область на машинном носителе информации, в которой могут храниться данные<sup>1</sup>. С помощью такой абстракции устанавливается связь между именем, которое пользователь или система присваивает некоторой совокупности данных для ее идентификации (имя файла), самими данными и конкретной физической областью машинного носителя (жесткого диска, CD-диска и т.д.), в которой эти данные располагаются. В свою очередь, данные – это информация, представленная в форме, удобной для ее обработки на ЭВМ (как правило, в двоичной форме).

В уголовном законодательстве нет понятия компьютерного файла. Вообще, в федеральном законодательстве термин «файл» встречается лишь дважды. Статья 4 закона от 27 декабря 1991 года № 2124-1 «О средствах массовой информации», декларирующая недопустимость злоупотребления свободой массовой информации, упоминает информационные компьютерные файлы наряду с теле-, видео-, кинопрограммами, документальными и художественными фильмами, запрещая использование в них «скрытых вставок, воздействующих на подсознание людей и (или) оказывающих вредное влияние на их здоровье»<sup>2</sup>. Этой статье корреспондирует статья 13.15 Кодекса об административных правонарушениях РФ, устанавливающая ответственность за нарушение данного запрета.

По нашему мнению, названные статьи федерального законодательства компьютерные файлы попали по ошибке. Очевидно, законодатель под «скрытыми вставками» понимал так называемый «эффект 25-го кадра». Подобные эффекты теоретически могут присутствовать в файлах, предназначенных для построения видеопотока (например, кинофильмы в DVD-формате, flash-ролики, мультимедийные программы и т.д.). Однако компьютерные файлы выступают здесь в той же роли, что и кинолента или видеокассета. Таким образом, законодатель ошибочно смешивает в одном

<sup>1</sup> В ОС Unix понятие файла шире и включает в себя устройства ввода – вывода, но для целей данной статьи мы будем пользоваться приведенным определением.

<sup>2</sup> О средствах массовой информации: ФЗ от 27 декабря 1991 года № 2124-1 // Российская газ. 1992. № 32. 8 февр.

списке принципиально разные элементы содержания и формы (причем форма представлена только файлами).

Итак, мы можем говорить об игнорировании законодательством понятия компьютерных файлов. Между тем зарубежное законодательство оперирует этим понятием уже несколько десятков лет. В качестве примера приведем Конвенцию о защите физических лиц при автоматизированной обработке персональных данных ETS № 108 (Страсбург, 28 января 1981 г.), кстати, не ратифицированную Российской Федерацией.

Глава 28 Уголовного кодекса РФ «Преступления в сфере компьютерной информации» состоит из трех статей. Статья 272 устанавливает ответственность за неправомерный доступ к компьютерной информации. Статья 273 – за создание, использование и распространение вредоносных программ для ЭВМ. Статья 274 описывает такой состав преступления, как нарушение правил эксплуатации ЭВМ, системы ЭВМ или их сети. В главе 28 УК РФ законодатель использует понятие *компьютерной информации*. На первый взгляд проблема файлов решена выбором более общего термина. Однако в контексте *уничтожения компьютерной информации* эта точка зрения оказывается неверной. Компьютерная информация, согласно ст. 272 УК РФ, – это «информация на машинном носителе, в электронно-вычислительной машине (ЭВМ), системе ЭВМ или их сети». Определение подвергается заслуженной критике в работах многих авторов [1 – 3]. Прежде всего, законодательно не разъясняется, что именно считать электронно-вычислительной машиной (и не относятся ли к классу ЭВМ, например, сотовые телефоны, способные выполнять программы), чем отличается система ЭВМ от их сети и т.д. По нашему мнению, использование понятия «компьютерная информация» вместо известного науке понятия данных (хотя именно они и подразумеваются по смыслу закона) неудачно. Термин «данные» более универсален и потенциально более широк, поскольку упор в нем делается на форму представления информации, а не на исчерпывающее перечисление ее возможных носителей. Несколько десятков лет назад сетей ЭВМ еще не существовало, но данные уже были.

Уничтожение данных представляется нам весьма актуальной угрозой. Неправомерный доступ к данным может заканчиваться их уничтожением как средством для правонарушителя скрыть следы своего пребывания в системе. Неправомерный доступ может служить и целью уничтожения данных (например, уволенный или обиженный сотрудник компании действует по мотиву мести). В уничтожении данных заключается деструктивная нагрузка многих компьютерных вирусов. И нарушение правил эксплуатации ЭВМ нередко приводит именно к таким последствиям.

Однако в большинстве случаев осуществляется не уничтожение собственно данных (как поступал, например, вирус Klez, затирая данные случайным мусором), а уничтожение файлов, содержащих эти данные. Казалось бы, законодателем выбран более универсальный подход – способ уничтожения компьютерной информации не имеет значения. Однако ана-

лиз ситуации показывает ошибочность такой точки зрения. Дело в том, что зачастую уничтожение файлов только создает угрозу уничтожения данных, а не уничтожает их.

Структура компьютерного файла отличается в различных файловых системах (FAT, NTFS и др.). Однако все они при удалении файла ведут себя одинаково – содержимое файла, то есть хранящиеся в нем данные, с носителя не стирается. Само понятие «стирания» к таким машинным носителям, как дискеты, винчестеры и проч., неприменимо – общее количество битов, байтов, секторов и кластеров всегда остается одним и тем же. Уничтожение данных могло бы подразумевать заполнение занимаемого ими места нулями или случайным «цифровым мусором», но такая процедура имеет смысл не всегда, однако продолжительна по времени для файлов большого размера. Вместо этого файловая система «ждет», пока на машинном носителе не будут созданы новые файлы и тогда уже «позволит» затереть своим содержимым данные из уничтоженных файлов.

Рассмотрим процедуру удаления файла в файловой системе FAT.

В FAT, как и во многих других файловых системах, все пространство машинного носителя разбивается на блоки равного размера, называемые кластерами. Кластеры нумеруются, начиная с нуля. Каждому файлу отводится целое число кластеров, куда и записываются данные этого файла. Задача файловой системы – определить по имени файла номера кластеров, занятые его данными. Имена файлов хранятся в каталоге. Каталог на самом деле тоже является файлом, имеющим жесткую структуру. Содержимое файла-каталога описывает хранящиеся в нем файлы (в том числе и другие файлы-каталоги), причем каждый файл описывается одной или несколькими (например, для поддержки длинных и коротких имен) файловыми записями. Файловая запись в системе FAT начинается с имени файла и содержит помимо его размера, даты и времени создания и т.п. номер первого кластера, в котором содержатся данные файла.

Чтобы определить номера остальных кластеров файла, которые в общем случае могут располагаться не подряд (такой файл называется *фрагментированным*), используется структура, называемая таблицей размещения файлов или FAT (отсюда и название системы). На самом деле это не таблица, а линейный упорядоченный список чисел, причем каждое число – номер некоего кластера. Таких элементов в списке ровно столько, сколько кластеров на машинном носителе, то есть позиция элемента в списке тоже соответствует номеру некоего кластера. Элемент списка является нулем, если соответствующий ему кластер (кластер с номером, равным позиции элемента в FAT) не занят никаким файлом. Элемент списка, соответствующий кластеру, занятому файлом, содержит номер того кластера, который является для этого файла следующим. Кластер, которым заканчивается файл, помечается в FAT специальной сигнатурой.

При обращении к файлу файловая система находит его имя в списке соответствующего каталога и узнает из каталоговой записи номер первого



кластера файла. Элемент таблицы FAT с номером, равным номеру первого кластера, содержит номер второго кластера файла и так далее. Восстановив всю цепочку кластеров для файла, система может обработать все содержащиеся в нем данные (например, вывести на экран).

Когда файл удаляется, его кластеры помечаются как свободные (т.е. элементы FAT с их номерами становятся равными нулю). Содержимое файла – данные – остаются нетронутыми. Каталогская запись, описывающая удаленный файл, также не затирается, а просто помечается как недействительная – первый символ этой записи (то есть первая буква имени файла) затирается символом «х».

Таким образом, при удалении компьютерного файла реально уничтожается лишь его структура, причем, как правило, лишь частично. Об уничтожении компьютерной информации при этом говорить нельзя. Оно произойдет лишь после того, как в кластеры, где хранится эта информация, ныне помеченные как свободные, запишутся данные новых файлов.

Как же квалифицировать уничтожение файла применительно к компьютерной информации? На наш взгляд, уместен будет термин «сокрытие». Причем осуществить это сокрытие можно и другим способом, например, переименовав и переместив файл в другой каталог. Очевидно, ни копирования, ни модификации, ни уничтожения информации опять-таки не происходит. Из существующего в уголовном праве понятийного аппарата ближе всего подойдет термин «блокирование», законодательного определения которого мы снова не находим. Мы определим блокирование как такое состояние данных, при которых они невредимы, но доступ к ним управомоченных пользователей невозможен. Только в отличие от блокирования при сокрытии информации квалифицированный пользователь может восстановить доступ, воспользовавшись программами поиска файлов по их содержанию, если файл переименован, или утилитами восстановления (например, Norton UnErase), если он уничтожен.

Отметим, что если файл был фрагментирован, то есть его данные располагались на машинном носителе в несмежных кластерах, утилиты восстановления не дадут желаемого результата. Все они работают, исходя из обратного предположения. Поскольку в таблице размещения файлов больше нет информации, позволяющей восстановить всю цепочку кластеров данного файла, а количество кластеров на современном машинном носителе исключает возможность ручного анализа, восстановить фрагментированный файл невозможно в принципе. Тем не менее данные в момент после уничтожения файла остаются на диске в неприкосновенности.

Преступление, чтобы являться таковым, должно содержать все признаки состава преступления. Составы преступлений, предусмотренных ст. 272 и 274 сконструированы как материальные. Это значит, что одним из признаков преступления является причинная связь между деянием и последствием. Уничтожение файла, очевидно, является условием уничтожения компьютерной информации, но не является его причиной. Непосред-

ственной причиной будет затирание данных новыми файлами, возможно, в результате правомерных действий совсем другого пользователя. По ст. 273 УК РФ ответственность наступает уже по факту создания вредоносной программы, но в определении вредоносной программы фигурирует то же самое спорное уничтожение информации.

Все вышесказанное создает существенные трудности на пути отправления правосудия. Неправомерный доступ к компьютерной информации, создание, использование и распространение вредоносных программ для ЭВМ, а также нарушение правил эксплуатации ЭВМ, системы ЭВМ или их сети, повлекшие за собой уничтожение важных компьютерных файлов, могут оказаться неквалифицируемыми по современному законодательству, особенно при участии грамотного в техническом отношении адвоката.

Очерченная нами проблема решаема. Одно из наиболее подходящих, на наш взгляд, решений заключается в добавлении в диспозиции статей 28-й главы упоминания о файлах. Например, в диспозиции ст. 272 указать: «...если это деяние повлекло уничтожение, блокирование, модификацию либо копирование компьютерной информации или файлов». Слова «компьютерной информации» должны остаться, поскольку данные могут существовать не только в виде файлов, но, например, в виде пакетов, пересылаемых по сети Интернет.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Нехорошев А. Б.* Компьютерные преступления: квалификация, расследование, экспертиза / Под ред. В. Н. Черкасова. Саратов: СЮИ МВД России, 2003. Ч. 1.
2. Преступления в сфере компьютерной информации: квалификация и доказывание: Учеб. пособие / Под ред. Ю. В. Гаврилина. М.: ЮИ МВД РФ, 2003.
3. Расследование неправомерного доступа к компьютерной информации. Учеб. пособие. 2-е изд., доп. и перераб. / Под ред. Н. Г. Шурухнова. М.: Моск. ун-т МВД России, 2004.

УДК 007.3

**К. В. Банников**

### **ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА СОЗДАНИЯ ПРОГРАММНЫХ ПРОДУКТОВ**

Главные характеристики программного продукта это: стоимость, скорость разработки, функциональные возможности, надежность, сопровождаемость.

Этапы ведения проекта [1]:

- 1) анализ задачи;
- 2) создание эскизов проекта, различающихся по характеристикам; выбор подходящего варианта;

- 3) проектирование;
- 4) собственно программирование и отладка;
- 5) тестирование;
- 6) документирование;
- 7) сопровождение.

Если обратиться к теории [2], то типичное распределение ресурсов, т. е. денег, таково. На сопровождение тратится примерно половина всех средств. Остальное делится в такой пропорции: половина уходит на анализ и проектирование, шестая часть на программирование и отладку, треть – на тестирование. Но всё это только теория, которая зачастую расходится с реальностью, поскольку заказчик должен знать:

- какие задачи должна выполнять информационная система (ИС);
- какие входные данные будут использоваться;
- в каком виде эти данные будут попадать в систему;
- параметры выходных данных для интеграции с другими ИС, если есть такая необходимость.

Причем первый пункт наиболее важен.

Рассмотрим пример. Некий программист и одна организация договорились о создании программного продукта за пять недель, за *n*-ю сумму. Через полтора месяца заказчик выясняет, что программист делает меньше того, что в итоге нужно заказчику и что стороны понимали задачу поразному. Заказчик хочет, чтобы неопределенное дополнительное количество работы было сделано за те же деньги, а программист, конечно же, хочет, чтобы ему оплатили тот труд, который уже вложен. Почему так произошло?

На практике предпроектное обследование проходит без детального описания задач или же вообще не проводится, а уточнение требований к ИС происходит даже не на этапе проектирования, а уже во время разработки модулей ИС. Где же анализ, эскизы решения, выбор варианта, проектирование? Заказчик обсудил проект с парой компетентных, по его мнению, людей, выделил некоторые финансовые средства на проект и нашёл программиста. На этом его усилия по созданию проекта закончились и остальное, по его мнению, должен выполнить программист. Но задача программиста состоит в проектировании, программировании и отладке ИС. Таким образом, пропущены несколько важных этапов создания ИС: анализ, эскизы решения, выбор варианта, документирование и тестирование.

Прошло шесть недель, т. е. больше оговоренного срока. Программа работает, и ее пора сдавать. За это время сделан и проект, написан и отлажен почти весь код под этот проект. Очередная версия программы отправляется заказчику. Представитель заказчика, по своим обязанностям администратор и продвинутый пользователь, обнаруживает, что функциональность программы ниже, чем рассчитывала его организация. Далее происходят долгие и неприятные выяснения, кто же виноват в сложившемся положении.

Основной причиной подобных ситуаций является отсутствие специалистов у заказчика, с одной стороны, знакомых с основными принципами работы программных продуктов, с другой стороны, хорошо владеющих предметной областью. Следствием этого является написание формального технического задания (ТЗ), практически не описывающего предметную область ИС.

В данной ситуации программисту приходится принимать решение о выборе технологий создания ИС на основании поверхностных сведений об основных функциях будущей системы, поскольку общие представления о задачах, решаемых ИС, у заказчика всё же имеются.

Как же получается, что заказчик почти ничего не знает о жизненном цикле программного продукта, его этапах и оценивает трудоемкость в несколько раз ниже реальной? И почему происходит так, что исполнитель-программист из раза в раз договаривается делать проект, игнорируя большие этапы работы, без ТЗ, без малейшего намека на методичную оценку трудоемкости? Заказчик в своей работе нашёл некий объект, который может быть качественно автоматизирован программным продуктом. Конечно, он плохо знаком с тонкостями исполнения заказов на создание информационных систем. Он спрашивает своих знакомых, сколько это будет стоить и каков реальный срок? И, естественно, хочет заплатить чуть меньше и получить чуть быстрее. А поскольку среди знакомых, как правило, очень мало людей, владеющих спецификой создания программных продуктов на заказ, то решение о сложности и стоимости принимают конкуренты. Программист же понимает, что называемые им цены и сроки должны быть чуть меньше, чем у конкурентов. Программист как бы закрывает глаза на реальную оценку сложности проекта, «забывает» об анализе, о ТЗ, взаимопонимании с заказчиком, у него нет уверенности в том, что заказ будет оплачен, он забывает про документирование, тестирование и сопровождение, да еще преуменьшает сложность и трудоемкость некоторых компонентов системы, оставляет их оценку «на потом» и берет проект, лишь бы опередить конкурента.

Заложниками такой ситуации в результате являются все ее участники: и заказчики, так как они не имеют реального представления о сложности и цене проекта, и программисты, поскольку берутся за проект, имея смутные представления об объемах предстоящей работы. Становятся заложниками и те программисты и фирмы, которые умеют считать реальную трудоемкость, реальное время исполнения и цену проекта из-за того, что не выдерживают конкуренции.

Самое дешевое решение проблемы таково: на старте проекта, когда идея о заказе программы только начинает оформляться, нужно пригласить консультанта по проектированию корпоративных программных продуктов. Работа потребует недели времени, в течение которой консультант вложит десяток часов своей работы в проект. В результате, если реальная цена, сложность и длительность изготовления проекта окажутся слишком высо-

кими, от заказа придется отказаться в пользу других решений. Альтернативные решения, скорее всего, предложит сам консультант. Таким образом, затраты составят на порядки меньше любого мыслимого проекта (имеются в виду реальные затраты, а не те, которые подразумевают конкурирующие программисты). Консультант должен выполнить письменный анализ задачи, эскизы вариантов решения, оценку выходных характеристик этих вариантов – трудоемкости, стоимости, времени исполнения. Письменный анализ обладает рядом преимуществ. Во-первых, консультант тоже человек, и изложение на бумаге обяжет его тщательно продумать детали предлагаемых решений. Бумага как средство для выражения мыслей и концепций оказывается более требовательной, чем устная беседа, детали которой могут не запомниться. Во-вторых, это хорошее приближение к ТЗ. Кроме того, документальный отчет поможет программисту более чётко понять функции будущей системы и не будет значительных разногласий в представлениях заказчика и программиста о необходимых возможностях системы. Совместно с программистом и заказчиком консультант сможет разработать проект ИС и календарный план его реализации. Очень важно, чтобы календарный план включал в себя подробное описание этапов с заложенной стоимостью каждого этапа. Это позволит снять ряд проблем в случае замены исполнителя, поскольку оплата будет производиться поэтапно, а следовательно, будут оплачены все реализованные этапы.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Cooling J. E.* Software Engineering for Real-Time Systems. Washington: Chapman and Hall, 2003.
2. *Booch G.* Object-oriented analysis and design with applications. Menlo Park: Addison-Wesley, 1994.

УДК 519.865.5

**Р. Бейкер<sup>1</sup>, А. В. Белгородский**

### **О ПРИМЕНЕНИИ ЭМПИРИЧЕСКОГО БАЙЕСОВСКОГО ПОДХОДА К ПРОБЛЕМЕ ФОРМИРОВАНИЯ ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ**

Проблема формирования портфеля ценных бумаг – одна из основных проблем, стоящих как перед индивидуальными, так и перед институциональными инвесторами, работающими на финансовом рынке. Задача заключается в определении оптимальных долей вложения капитала  $X_1, \dots, X_N$  в портфель, состоящий из  $N$  активов.

---

<sup>1</sup> Центр для управления операциями и прикладной статистики, Селфордский университет, Великобритания.

Решение было предложено американским экономистом Г. Марковицем. Согласно Марковицу, оптимальный портфель может быть найден при помощи максимизации соотношения

$$(\bar{\mu} - \bar{R}_F)^T \bar{X} / (\bar{X}^T \bar{V} \bar{X})^{1/2} \rightarrow \max, \quad (1)$$

где  $\bar{\mu}$  – вектор ожидаемых доходностей активов,  $\bar{V}$  – ковариационная матрица доходностей,  $R_F$  – ставка доходности по «безрисковому» активу,  $\bar{R}_F = \bar{e} R_F$ ,  $\bar{e}$  – вектор размерности  $N$ , состоящий из 1.

Наилучший в смысле максимизации функции (1) набор бумаг может быть найден из соотношения

$$\bar{X} \propto \bar{V}^{-1} (\bar{\mu} - \bar{R}_F). \quad (2)$$

Однако перед использованием формулы (2) необходимо получить оценки величин  $\bar{\mu}$  и  $\bar{V}$ . Их точность будет влиять на решение об оптимальном распределении капитала.

Доходность актива  $i$  за определенный период может быть описана регрессионной моделью вида

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + \delta^T x_i + \varepsilon_i. \quad (3)$$

Здесь  $R_m$  – доходность индексного портфеля,  $x_i$  – вектор независимых переменных размерности  $p$  (среди них рыночная капитализация компанией  $i$  в предыдущем месяце, дивидендный доход за один год, доходности актива  $i$  за различные периоды и т.д.),  $\{\alpha_i, \beta_i, \delta\}$  – параметры модели,  $\varepsilon_i \sim N[0, \sigma_i^2]$ .

Для «рыночной модели» (3) ковариация эффективности активов  $i$  и  $j$  вычисляется по следующей формуле [1, с. 135]:

$$V_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_m^2 + \delta_j \sigma_i^2,$$

где  $\sigma_m$  – волатильность доходности рынка.

Асимметрия и эксцесс распределения независимых предикторов достаточно велики. Для преодоления этой проблемы преобразование Бокса – Кокса было применено к переменным, принимающим только положительные значения. В противном случае – для переменных  $\xi$ , принимающих, помимо положительных, нулевые и отрицательные значения, использовалось преобразование Джонсона

$$\psi = \sinh^{-1} \{c(\xi - a)\} / c.$$

Оптимальные значения параметров трансформации были найдены при помощи максимизации функции правдоподобия, записанной при условии, что преобразованная переменная имеет нормальное распределение с произвольным средним и дисперсией.

На рис. 1 показано распределение переменной «рыночная капитализация» до применения какого-либо преобразования. Оптимальное преобразование Бокса-Кокса в данном случае – логарифмическое преобразование ведет к распределению, изображенному на рис. 2. Полученное распределе-

ние (рис. 2) далеко от нормального и является бимодальным, однако асимметрия и эксцесс теперь значительно ниже.

Помимо применения преобразований, описанных выше, независимые переменные модели были центрированы и нормированы.

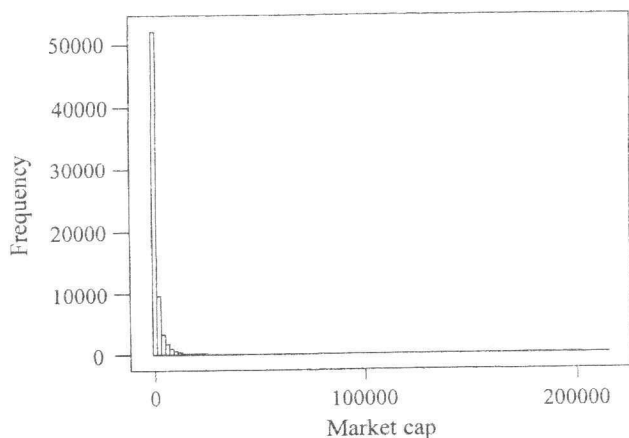


Рис. 1

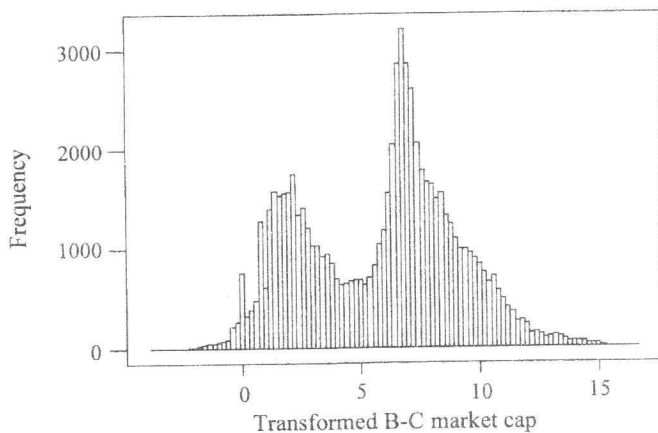


Рис. 2

Цель нашего исследования – повысить точность прогноза доходности активов при помощи использования эмпирического байесовского подхода (ЭБП). Ввиду обилия априорной информации о значениях параметров, применение байесовского подхода позволит получить более точные оценки коэффициентов  $\{\alpha_i, \beta_i, \sigma_i^2, \delta\}$ , что даст возможность достичь более эффективного распределения капитала.

ЭБП предполагает, что параметры модели являются случайными величинами и имеют априорные распределения. Таким образом, ЭБ корректировка навязывает сжатие коэффициентов к среднему значению априорного распределения. В работе [2] рассматривается процесс получения ЭБ оценок коэффициента бета. Мы же фокусируемся не только на оценках  $\beta_i$ , но и на оценках параметров  $\delta$ . Согласно ЭБП оценки параметров модели могут быть получены путем максимизации функции правдоподобия, записанной для  $N$  компаний

$$L = \prod_{i=1}^N \left\{ (2\pi\sigma_i^2)^{-n_i/2} \exp\left(-\sum_{t=1}^{n_i} \frac{(R_{it} - \alpha_i - \delta^T x_{it} - \beta_i R_{mt})^2}{2\sigma_i^2}\right) \right\} \times \\ \times f_\alpha(\alpha_i|\theta_\alpha) \times f_\beta(\beta_i|\theta_\beta) \times f_\sigma(\sigma_i|\theta_\sigma) \times \prod_{k=1}^p f_\delta(\delta_k|\theta_\delta), \quad (4)$$

здесь для  $i$ -й компании используются данные за  $n_i$  предыдущих месяцев,  $x_{it}$  – вектор предикторов для компании  $i$  в момент времени (месяце)  $t$ , априорные распределения  $f_\alpha$ ,  $f_\beta$ ,  $f_\sigma$ ,  $f_\delta$  зависят от векторов гиперпараметров  $\theta_\alpha$ ,  $\theta_\beta$ ,  $\theta_\sigma$ ,  $\theta_\delta$  соответственно.

Предположим, что  $f_\alpha$ ,  $f_\beta$ ,  $f_\delta$  – гауссовские функции плотности распределения,  $\sigma_i^2$  имеет обратное гамма-распределение.

Алгоритм оптимизации состоит из следующих 4 этапов.

1. Максимизировать  $L$  по параметрам  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\sigma_i^2$ , предполагая, что величины  $\delta_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ , и гиперпараметры  $\theta$  известны.

2. Подставить значения оценок  $\hat{\alpha}_i$ ,  $\hat{\beta}_i$ ,  $\hat{\sigma}_i^2$ , полученных на предыдущем шаге, обратно в функцию (4). Предполагая известные значения гиперпараметров, максимизировать (4) по параметрам  $\delta_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ . Дифференцирование функции правдоподобия по параметрам  $\delta_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ , ведет к системе, состоящей из  $p$  линейных уравнений.

3. Пересчитать оценки, полученные на первом шаге, используя «новые» значения  $\delta$  (выполнение этого шага следует повторить несколько раз).

4. Подставить оценки  $\{\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i, \hat{\sigma}_i^2, \hat{\delta}\}$  в функцию (4). Максимизировать полученную функцию правдоподобия по гиперпараметрам  $\theta$ .

В описании алгоритма оптимизации было сделано предположение о том, что элементы вектора  $\delta$  – независимые одинаково распределенные нормальные случайные величины с общим средним 0. Следует отметить, что использование распределения, имеющего «тяжелые хвосты» (например, распределения Стьюдента), в качестве априорного распределения для параметров  $\delta$  было бы хорошей альтернативой Гауссовскому распределению. Однако в этом случае система, полученная на шаге 2 алгоритма, является нелинейной относительно  $\delta_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ .



1. Elton E. J., Gruber M. J., Brown S. J., Goetzmann W. N. Modern portfolio theory and investment analysis. N. Y.: Wiley, 2003.
2. Vasicek O. A note on using cross-sectional information in Bayesian estimation on security betas // J. of Finance. 1973. № 28. С. 1233 – 1239.

УДК 519.4

Д. А. Бредихин

## О МНОГООБРАЗИИ ПОЛУГРУПП БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ С ОПЕРАЦИЕЙ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ЗАМКНАНИЯ

Обозначим через  $Rel(X)$  множество всех бинарных отношений, заданных на базисном множестве  $X$ . Относительно операции умножения отношений  $\circ$  множество  $Rel(X)$  образует полугруппу  $(Rel(X), \circ)$ , называемую *полугруппой бинарных отношений*. Рассмотрение полугрупп отношений занимает одно из центральных мест в современной теории полугрупп. Наряду с операцией умножения на множестве  $Rel(X)$  могут быть заданы ряд других операций, играющих важную роль в теории отношений. Ряд таких операций был рассмотрен в фундаментальной работе В. В. Вагнера [1], посвященной общей теории бинарных отношений.

В общем случае множество бинарных отношений  $\Phi$ , замкнутое относительно некоторой совокупности  $\Omega$  операций над ними, образует алгебру  $(\Phi, \Omega)$ , называемую *алгеброй отношений*. Таким образом, исследование полугрупп бинарных отношений с дополнительными операциями может проводиться в рамках общей теории алгебр отношений. Основы алгебраического подхода к изучению алгебр отношений были заложены в работах А. Тарского [2, 3]. Обзор некоторых результатов в этом направлении можно найти в [4, 5].

Обозначим через  $R\{\Omega\}$  класс алгебр, изоморфных алгебрам отношения с операциями из  $\Omega$ . Пусть  $Q\{\Omega\}$  – квазимногообразие и  $V\{\Omega\}$  – многообразие, порожденное классом  $R\{\Omega\}$ . Согласно А. Тарскому, одной из основных проблем при изучении алгебр отношений является проблема описания их свойств, выразимых на языке тождеств. Эта проблема фактически сводится к изучению многообразий  $V\{\Omega\}$ . Представляет также интерес изучение квазимногообразия  $Q\{\Omega\}$ .

Нами будет рассмотрена операция прямоугольного замыкания бинарных отношений [1]. Бинарное отношение  $\rho \in Rel(X)$  называется *прямоугольным*, если  $\rho = A \times B$  для некоторых подмножеств  $A, B \subset X$ . Множество всех прямоугольных отношений образует систему замыканий на  $Rel(X)$ . Соответствующую операцию замыкания обозначим через  $S$ . За-

метим (см. [1]), что прямоугольное замыкание  $S(\rho)$  бинарного отношения  $\rho \in \text{Rel}(X)$  может быть явно выражено в следующем виде:

$$S(\rho) = p r_1 \rho \times p r_2 \rho,$$

где  $p r_1 \rho = \{x \in X : (\exists y)(x, y) \in \rho\}$  и  $p r_2 \rho = \{x \in X : (\exists y)(x, y) \in \rho\}$  – первая и вторая проекции отношения  $\rho$ . Отсюда, в частности, легко следует, что операция прямоугольного замыкания является диофантовой, то есть может быть задана с помощью формулы исчисления предикатов первого порядка, содержащей в своей записи лишь операцию конъюнкции и кванторы существования [6, 7]. Этот факт позволяет применить к классу  $R\{\circ, S\}$  полугрупп отношений с операцией прямоугольного замыкания общую теорию многообразий и квазимногообразий алгебр отношений с диофантовыми операциями [6, 7, 8].

Основной результат статьи формулируется в следующей теореме, в которой, в частности, находится базис тождеств многообразия  $V\{\circ, S\}$ .

**ТЕОРЕМА.** Класс  $R\{\circ, S\}$  полугрупп отношений с операцией прямоугольного замыкания не является квазимногообразием, то есть  $R\{\circ, S\} \neq Q\{\circ, S\}$ . Квазимногообразиие  $Q\{\circ, S\}$  не является многообразием, то есть  $Q\{\circ, S\} \neq V\{\circ, S\}$ . Многообразие  $V\{\circ, S\}$  конечно базлируемо. Алгебра  $(A, ;, *)$  типа (2,1) принадлежит многообразию  $V\{\circ, S\}$  тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим тождествам:

$$\begin{aligned} (xy)z &= x(yz), & (x^*)^* &= x^*, & xx^*x &= (xx)^*, & xx^* &= xx^*x^*, & xx^* &= xx^*x^*, \\ x^*x &= x^*x^*x, & x^*x^*x^* &= x^*x^*, & (xy^*)^* &= xy^*, & (x^*y)^* &= x^*y, \\ x^*yx^*zx^* &= x^*zx^*yx^*, & xyx^*yx^* &= xyx^*, & x^*yx^*yx^* &= x^*yx^*, \\ x^*yx^*yx^* &= x^*yx, & x^*yx^*yx^* &= x^*yx^*, & xyxzx^*yx^* &= xyxzx^*, \\ x^*yxzx^*yx^* &= x^*yxzx^*, & x^*yx^*zxyx &= x^*zxyx, & x^*yx^*zxyx^* &= x^*zxyx^*. \end{aligned}$$

В связи с результатом, сформулированным в этой теореме, естественно возникают следующие проблемы.

**Проблема 1.** Найти базис квазитожеств квазимногообразия  $Q\{\circ, S\}$ .

**Проблема 2.** Найти элементарную систему аксиом для класса  $R\{\circ, S\}$ .

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вагнер В. В. Теория отношений и алгебра частичных преобразований // Теория полугрупп и ее приложения. Саратов, 1965. Вып. 1. С. 3 – 197.
2. Tarski A. On the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1941. Vol. 6. P. 73 – 89.
3. Tarski A. Some methodological results concerning the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1953. Vol. 18. P. 188 – 189.
4. Schein B. M. Representation of reducts of Tarski relation algebras // Coll. Math. Soc. J. Bolyai. 1991. Vol. 54. P. 379 – 394.

5. Bredikhin D. A. On relation algebras with general superpositions // Coll. Math. Soc. J. Bolyai. 1991. Vol. 54. P. 111–124.

6. Бредихин Д. А. Эквациональная теория алгебр отношений с позитивными операциями // Изв. вузов. Сер. Математика. 1993. № 3. С. 23 – 30.

7. Бредихин Д. А. О квазитожествах алгебр отношений с диофантовыми операциями // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38. С. 29 – 41.

8. Бредихин Д. А. Об алгебрах отношений с диофантовыми операциями // Докл. РАН. 1998. Т. 360. С. 594 – 595.

УДК 519.83

Л. М. Брэгман, Т. Т. Брэгман, И. Н. Фокин

## МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СТРАТЕГИЙ В КОМБИНАТОРНЫХ МАТРИЧНЫХ ИГРАХ

Данная статья посвящена исследованию матричных игр, в которых стратегии игроков имеют комбинаторную природу. Рассматривается возможность представления оптимальных стратегий игроков в таких играх в мультипликативном виде. Устанавливается необходимое и достаточное условие существования в них оптимальных стратегий игроков, допускающих представление в указанном виде. Соответствующие стратегии определяются относительно небольшим числом параметров.

Рассмотрим игру  $\Gamma$ , в которой множество  $\bar{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_p\}$  ( $X_i \in R^k$ ) есть множество чистых стратегий первого игрока, а множество  $\bar{Y} = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_q\}$  ( $Y_j \in R^l$ ) есть множество чистых стратегий второго игрока. Пусть  $H$  является  $k \times l$ -матрицей. Определим выигрыш первого игрока как  $(X_i, HY_j)$ , если игроки используют свои чистые стратегии  $X_i$  и  $Y_j$  соответственно. Предполагается, что векторы  $X_i$  ( $Y_j$ ) являются неотрицательными и для всех  $1 \leq j \leq k$  ( $1 \leq j \leq l$ ) существует  $X_i$ , у которого  $X_i[j] > 0$  ( $Y_j[j] > 0$ ). Игра  $\Gamma$  является матричной игрой с матрицей выигрышей  $A$ , которая может быть представлена в виде произведения:

$$A = XHY,$$

где  $X$  есть  $p \times k$ -матрица, у которой векторы  $X_i$  являются строками, а  $Y$  есть  $l \times q$ -матрица, у которой векторы  $Y_j$  являются столбцами.

Такая схема удобна для игр, в которых множество стратегий имеет комбинаторную структуру, поэтому мы называем такие игры *комбинаторными матричными играми*. В таких играх числа  $p$  и  $q$  гораздо больше, чем числа  $k$  и  $l$ . Примерами комбинаторных матричных игр являются размещения двумя игроками  $n$  предметов между  $n$  отделениями, в которых стратегиями игроков являются перестановки  $n$  чисел; игровые задачи рас-

пределения дискретных ресурсов, в которых стратегии -- это всевозможные распределения заданного числа ресурсов между несколькими участками.

Хотя число чистых стратегий у игроков очень велико, существуют оптимальные смешанные стратегии, которые описываются относительно малым числом параметров. Например, первый игрок имеет оптимальную смешанную стратегию с не более чем  $k + 1$  положительными компонентами. Существование таких стратегий и метод их нахождения для сепарабельных игр с нулевой суммой предложены в [1].

Представляет интерес получить оптимальные смешанные стратегии в специальной мультипликативной форме. Такие стратегии также описываются  $k + 1$  параметрами, но мультипликативная форма в некоторых случаях является более удобной, в частности, для случаев имитации стратегий игроков. Цель данной статьи заключается в том, чтобы установить условия существования у игроков оптимальных смешанных стратегий, имеющих мультипликативную форму.

Основной результат для первого игрока заключается в следующем: необходимым и достаточным условием существования у игрока оптимальной стратегии, имеющей мультипликативную форму, является совпадение выпуклой оболочки  $\bar{X}$  с пересечением аффинной оболочки  $\bar{X}$  с неотрицательным ортантом. В частном случае для сумм матричных игр это свойство было установлено в [2]. Техника, используемая для доказательства основных результатов, основана на исследовании задачи о максимизации взвешенной энтропии, теории двойственности и на специальных вариантах теорем о дополняющей нежесткости.

Опишем представление стратегий в мультипликативной форме. Пусть  $C$  есть выпуклая оболочка  $\bar{X}$  и  $D$  есть выпуклая оболочка  $\bar{Y}$ . Тогда игра  $\Gamma$  может быть сведена к полиэдральной игре  $\Delta$ , в которой множества  $C$  и  $D$  являются множествами стратегий первого и второго игроков, а выигрыш первого игрока при стратегиях  $v \in C$  и  $w \in D$  равен  $(v, Hw)$ .

Игры  $\Gamma$  и  $\Delta$  эквивалентны: если  $\alpha$  есть оптимальная смешанная стратегия первого игрока в игре  $\Gamma$ , то

$$v^* = \sum_{i=1}^p \alpha_i X_i \quad (1)$$

является оптимальной стратегией этого игрока в игре  $\Delta$ , и если  $v^* \in C$  есть оптимальная стратегия первого игрока в игре  $\Delta$ , то вектор  $\alpha$ , удовлетворяющий условиям

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i X_i = v^*, \quad \sum_{i=1}^p \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0, \quad (2)$$

является оптимальной стратегией первого игрока в игре  $\Gamma$ .

Метод решения игры  $\Gamma$  может быть построен следующим образом. Сначала находят оптимальные стратегии в игре  $\Delta$ , а затем оптимальные

смешанные стратегии первого игрока определяются из условий (2). Оптимальная смешанная стратегия второго игрока может быть найдена аналогичным образом. Вообще, система (2) имеет не единственное решение. Представляет интерес найти оптимальную смешанную стратегию, которая описывается малым числом параметров.

Особый интерес представляет нахождение такой стратегии первого игрока, которая имеет следующее мультипликативное представление:

$$\alpha_i = \gamma \prod_{\mu=1}^k \beta_{\mu}^{X_i[\mu]}. \quad (3)$$

Эта стратегия описывается  $k+1$  параметрами.

Определение. Будем говорить, что  $v \in C$  имеет представление в мультипликативной форме, если существует вектор  $\alpha$ , удовлетворяющий условиям

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \alpha_i X_i &= v^*, \\ \sum_{i=1}^p \alpha_i &= 1, \alpha_i \geq 0, \end{aligned} \quad (4)$$

который может быть представлен в мультипликативной форме (3). В общем случае не все  $v \in C$  имеют представление в мультипликативной форме.

Дадим понятие полноты множества и приведем главные результаты. Будем говорить, что множество  $\bar{X}$  является *полным*, если каждый вектор  $v \in C$  имеет представление в мультипликативной форме. Пусть  $A = \text{aff}(\bar{X}) \cap R_+^k$ , где  $R_+^k$  есть неотрицательный ортант. Основной результат статьи дает следующая

**ТЕОРЕМА.** Множество  $\bar{X}$  является полным тогда и только тогда, когда  $A = C$ .

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Bregman L. M., Fokin I. N. On separable non-cooperative zero-sum games // Optimization. 1998. № 44. P. 69 – 84.
2. Брегман Л. М., Фокин И. Н. О суммах матричных игр // Экон. и мат. методы. 1973. № 9. С. 148 – 154.

С. А. Бутерин

## ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕВОЛЬТЕРРОВЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ\*

1. Фиксируем  $n \geq 1$ . Пусть  $\{\lambda_k\}$  – спектр краевой задачи  $L = L(M, g, v)$ :

$$\ell y := i^n y^{(n)} + \int_0^x M(x-t)y^{(n-1)}(t)dt + g(x) \int_0^\pi y(t)v(t)dt = \lambda y, \quad 0 < x < \pi, \quad (1)$$

$$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0, \quad (2)$$

где  $(\pi - x)M(x) \in L_2(0, \pi)$ ,  $g(x), v(x) \in W_2^1[0, \pi]$ ,  $a := ig(0)v(\pi) \neq 0$ . Рассмотрим следующую обратную задачу.

ЗАДАЧА 1. Даны  $\{\lambda_k\}$ ,  $g(x)$ ,  $v(x)$ , найти функцию  $M(x)$ .

В [1] исследовалось восстановление функции  $M(x)$  по спектру в случае, когда  $g(x)v(x) = 0$ ,  $n = 2$  и вместо (2) наложены краевые условия Дирихле. Отметим, что невольтерровость в интегро-дифференциальном выражении (1) вносит дополнительные трудности в исследование обратной задачи. Кроме того, здесь наблюдается качественно новый эффект по сравнению со случаем компактного оператора свертки по спектру его одномерного возмущения. А именно, как видно из дальнейшего, для разрешимости задачи 1 здесь не требуется согласования спектра с функциями  $g(x)$ ,  $v(x)$ . Как и в [1–3], обратная задача сводится к некоторому нелинейному интегральному уравнению (см. ниже уравнение (9)). В [3] получено глобальное решение нелинейных уравнений такого вида. В настоящей статье доказывается единственность решения задачи 1 и получены необходимые и достаточные условия ее разрешимости. Последние даются в терминах характеристической функции краевой задачи  $L$ . Заметим, что обратные спектральные задачи для интегро-дифференциальных операторов в различных постановках исследовались также в [4–7] и других работах.

2. Наряду с  $L$  рассмотрим краевую задачу  $\tilde{L} = L(\tilde{M}, g, v)$  вида (1), (2) со спектром  $\{\tilde{\lambda}_k\}$  и с теми же функциями  $g(x)$ ,  $v(x)$ .

ТЕОРЕМА 1. Если  $\{\tilde{\lambda}_k\} = \{\lambda_k\}$ , то  $M(x) = \tilde{M}(x)$  почти всюду на  $(0, \pi)$ .

Пусть функция  $y = u(x, \lambda)$  является решением задачи Коши

$$i^n y^{(n)} + \int_0^x M(x-t)y^{(n-1)}(t)dt + g(x)y = \lambda y, \quad y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0.$$

Тогда  $\{\lambda_k\}$  совпадает с множеством нулей характеристической функции

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 04-01-00007).

$$\Delta(\lambda) = 1 - \int_0^{\pi} v(x) u(x, \lambda) dx.$$

Введем обозначения:

$$S(x, \lambda) = \frac{i}{n\rho^{n+1}} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\omega_j} \exp(-i\omega_j \rho x), \quad \mu_0(x) = \int_x^{\pi} v(t) g(t-x) dt, \quad \bar{\mu}_0(x) = \mu_0(\pi-x),$$

где  $\rho^n = \lambda$ ,  $\omega_j^n = 1$ ,  $\omega_j \neq \omega_l$  при  $j \neq l$ .

ЛЕММА 1. При  $\lambda \neq 0$  характеристическая функция имеет вид

$$\Delta(\lambda) = 1 + \int_0^{\pi} \mu_0(x) S^n(x, \lambda) dx + \int_0^{\pi} w(x) S(x, \lambda) dx, \quad w(x) \in L_2(0, \pi). \quad (3)$$

Здесь

$$w(x) = \frac{d^2}{dx^2} \int_x^{\pi} P(t, t-x) \mu_0(t) dt, \quad \text{где } P(x, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{i^{\nu} (x-t)^{\nu}}{\nu!} H^{*\nu}(t), \quad (4)$$

$H^{*1} = H$ ,  $H^{*(\nu+1)} = H * H^{*\nu}$ , а функция  $H(x)$ ,  $(\pi-x)H(x) \in L_2(0, \pi)$ , является решением уравнения

$$M(x) = ni^{n-1} H(x) + \sum_{j=2}^n C_n^j i^{n-j} \int_0^x \frac{(x-t)^{j-2}}{(j-2)!} H^{*j}(t) dt, \quad 0 < x < \pi. \quad (5)$$

Любая функция  $\Delta(\lambda)$  вида (3) является целой тогда и только тогда, когда

$$\int_0^{\pi} x w(x) dx = 0. \quad (6)$$

Заметим, что для характеристической функции условие (6) следует из (4).

ЛЕММА 2. Характеристическая функция  $\Delta(\lambda)$  определяется своими нулями  $\lambda_k$  однозначно по формуле

$$\Delta(\lambda) = C_n \exp(b_n \lambda) \Delta^1(\lambda), \quad \text{где } \Delta^1(\lambda) = \lambda^p \prod_{\lambda_k \neq 0} \left( 1 - \frac{\lambda}{\lambda_k} \right) \exp\left( \delta_{1,n} \frac{\lambda}{\lambda_k} \right), \quad (7)$$

где  $p$  – кратность нулевого собственного значения,

$$\left. \begin{aligned} b_n &= -\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\delta_{1,n} \ln \Delta^1(\lambda)}{\lambda}, \quad C_1 = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \exp(-b_1 \lambda) (\Delta^1(\lambda))^{-1}, \quad \lambda > 0, \quad \lambda \rightarrow \infty; \\ C_n &= \frac{a}{n\omega_1} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\exp(-i\omega_1 \rho \pi)}{\Delta^1(\lambda) \rho^{n+1}}, \quad i\omega_1 \rho < 0, \quad \rho \rightarrow \infty, \quad n > 1. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Тождество (4) является нелинейным уравнением относительно  $H(x)$ :

$$(\pi-x)H(x) = \frac{w(\pi-x)}{a} + \sum_{j=1}^{\infty} \left( b_j(x) H^{*j}(x) + \int_0^x B_j(x, t) H^{*j}(t) dt \right), \quad 0 < x < \pi, \quad (9)$$

где  $b_1(x) \equiv 0$ ,  $b_j(x) = i^{j+1} (\pi-x)^j / j!$ ,  $j \geq 2$ ;

$$B_j(x,t) = \frac{(i\pi - ix)^{j-2}}{j!a} \left( j(j-1)\ddot{\mu}_0(x-t) - 2j(\pi-x)\ddot{\mu}'_0(x-t) + (\pi-x)^2 \ddot{\mu}''_0(x-t) \right).$$

ТЕОРЕМА 2 (см. [3]). Для любой функции  $w(x) \in L_2(0, \pi)$ , удовлетворяющей условию (6), уравнение (9) имеет единственное решение  $H(x)$ , такое что  $(\pi-x)H(x) \in L_2(0, \pi)$ .

ТЕОРЕМА 3. Пусть заданы функции  $g(x), v(x) \in W_2^1[0, \pi]$ ,  $g(0)v(\pi) \neq 0$ , и последовательность комплексных чисел  $\{\lambda_k\}$ , определяющая некоторую целую функцию  $\Delta(\lambda)$  по формулам (7), (8), где  $p$  – количество элементов  $\{\lambda_k\}$ , равных нулю ( $p < \infty$ ). Тогда для существования функции  $M(x)$ ,  $(\pi-x)M(x) \in L_2(0, \pi)$ , такой что последовательность  $\{\lambda_k\}$  является спектром задачи  $L = L(M, g, v)$ , необходимо и достаточно, чтобы функция  $\Delta(\lambda)$  имела вид (3).

Доказательство теорем 1, 3. Необходимость условий теоремы 3 была установлена выше. Докажем достаточность. Рассмотрим функцию  $w(x) \in L_2(0, \pi)$ , определяемую формулой (3), с данной функцией  $\Delta(\lambda)$ . Так как  $w(x)$  удовлетворяет (6), то согласно теореме 2 уравнение (9) имеет единственное решение  $H(x)$ ,  $(\pi-x)H(x) \in L_2(0, \pi)$ . Строим функцию  $M(x)$  по формуле (5). Ясно, что  $(\pi-x)M(x) \in L_2(0, \pi)$ . Рассмотрим задачу  $L = L(M, g, v)$ . Нетрудно увидеть, что  $\Delta(\lambda)$  является характеристической функцией задачи  $L$ , а значит, спектр последней совпадает с  $\{\lambda_k\}$ . Теорема 3 доказана. Утверждение теоремы 1 следует из (3), (7), (8) и единственности решения уравнения (9).

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бутерин С. А. Восстановление интегро-дифференциального оператора свертки по спектру // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 15 – 18.
2. Бутерин С. А. Обратная спектральная задача восстановления оператора свертки, возмущенного одномерным оператором // Мат. заметки. 2006. Т. 80, № 5. С. 668 – 682.
3. Бутерин С. А. Обратная задача для одномерного возмущения оператора свертки. Саратов, 2003. 84 с. Деп. в ВИНТИ 01.10.03, № 1754 – В2003.
4. Маламуд М. М. О некоторых обратных задачах // Краевые задачи математической физики. Киев, 1979. С. 116 – 124.
5. Юрко В. А. Обратная задача для интегро-дифференциальных операторов первого порядка // Функциональный анализ. Ульяновск, 1984. Вып. 22. С. 144 – 151.
6. Юрко В. А. Обратная задача для интегро-дифференциальных операторов // Мат. заметки. Т. 50, № 5. 1991. С. 134 – 146.
7. Курьшиова Ю. В. Об одной обратной задаче для интегро-дифференциальных операторов. Саратов, 2001. 47 с. Деп. в ВИНТИ 08.08.2001, № 1835 – В2001.



## МЕРЫ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ ДЛЯ ОРТОНОРМАЛЬНЫХ МАТРИЧНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ РЕКУРРЕНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Рассмотрим положительно определённую матричную меру  $W$  (для любого борелевского множества  $A \subset \mathfrak{R}$ ,  $W(A)$  – это положительно полуопределённая числовая матрица), имеющую моменты любого порядка, т.е. матричный интеграл

$$\int_{\mathfrak{R}} t^n dW(t)$$

существует для  $\forall n \geq 0$  ( $\mathfrak{R}$  – множество действительных чисел).

В пространстве матричных многочленов с коэффициентами размерности  $N \times N$  с мерой  $W$  свяжем последовательность ортонормальных матричных многочленов  $\{P_n\}_n$ , удовлетворяющих условиям:

$$\int_{\mathfrak{R}} P_n(t) dW(t) P_m^*(t) = \delta_{n,m} I, \quad n, m \geq 0,$$

где  $P_n(t)$  – матричный многочлен степени  $n$  с невырожденным старшим коэффициентом,  $P_m^*(t)$  – сопряженная и транспонированная матрица к  $P_m(t)$ ,  $\delta_{n,m}$  – символ Кронекера,  $I$  – единичная матрица соответствующей размерности.

Как и в скалярном случае, последовательность ортонормальных матричных многочленов  $\{P_n\}_n$  удовлетворяет трехчленному рекуррентному соотношению

$$tP_n(t) = A_{n+1}P_{n+1}(t) + B_nP_n(t) + A_n^*P_{n-1}(t), \quad n \geq 0, \quad (1)$$

где  $P_{-1}(t) = \theta$ ,  $P_0(t) \in C^{N \times N} \setminus \{\theta\}$  ( $C^{N \times N}$  – кольцо матриц размерности  $N \times N$  с комплексными элементами),  $A_n$  – невырожденные, а  $B_n$  – эрмитовы матрицы.

*Многочленами второго рода* называется последовательность, удовлетворяющая соотношению

$$tR_{n-1}(t) = A_{n+1}R_n(t) + B_nR_{n-1}(t) + A_n^*R_{n-2}(t), \quad n \geq 1.$$

Матричным аналогом последовательности многочленов Чебышева второго рода называется последовательность матричных многочленов  $\{U_n^{A,B}\}_n$ , определяемая следующими рекуррентными соотношениями:

$$tU_n^{A,B}(t) = A^*U_{n+1}^{A,B}(t) + BU_n^{A,B}(t) + AU_{n-1}^{A,B}(t), \quad n \geq 0,$$

с начальными условиями  $U_0^{A,B}(t) = I$ ,  $U_{-1}^{A,B}(t) = \theta$ .

В статье [1] была найдена мера  $W_{A,B}(x)$ , относительно которой ортонормальны многочлены  $\{U_n^{A,B}\}_n$ , и выяснено, что носитель этой меры представляет собой объединение не более чем  $N$  ограниченных невырожденных непересекающихся отрезков.

В данной статье приведено решение задачи восстановления в случае  $k$ -периодической последовательности коэффициентов, коммутирующих между собой.

Найдем невырожденный старший коэффициент  $K_n$  многочлена  $P_n(t)$ . Из соотношения (1) следует

$$K_n = A_{n+1}K_{n+1}, K_{n+1} = A_{n+1}^{-1}K_n = A_{n+1}^{-1}A_n^{-1} \dots A_1^{-1}.$$

Значит, ортогональные многочлены с единичным старшим коэффициентом – это многочлены

$$\tilde{P}_n(t) = A_1 A_2 \dots A_n P_n(t) \quad \{P_n(t) = A_{n+1}^{-1} A_n^{-1} \dots A_1^{-1} \tilde{P}_n(t)\}. \quad (2)$$

Подставляя  $P_n(t)$  из (2) в соотношение (1), получим после преобразования

$$t\tilde{P}_n(t) = \tilde{P}_{n+1}(t) + B_n \tilde{P}_n(t) + A_1 A_2 \dots A_n A_n^* A_{n-1}^{-1} A_{n-2}^{-1} \dots A_1^{-1} \tilde{P}_{n-1}(t), \quad n \geq 0.$$

То есть матричные ортогональные многочлены с единичным старшим коэффициентом удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$P_{n+1}(t) = (tI - B_n)P_n(t) - A_n P_{n-1}(t), \quad (3)$$

где  $A_n$  – невырожденные положительно определенные, а  $B_n$  – эрмитовы матрицы (в соотношении (3) дужки опущены и коэффициенты обозначены так же, как в соотношении (1)).

**ТЕОРЕМА.** Пусть  $\tilde{P}_n(t) = UP_n(t)$ ,  $\tilde{R}_n(t) = UR_n(t)$ ,  $R_n(t)$  – многочлены 2-го рода для соотношения (3), где матрица  $U$  – любая квадратная матрица размерности  $N \times N$ , обладающая свойствами:

$$UU^* = I, \quad \forall i = 1 \dots k \quad UA_i U^* = \Lambda_{A_i}, \quad UB_i U^* = \Lambda_{B_i},$$

$\Lambda_{A_i}$ ,  $\Lambda_{B_i}$  – диагональные матрицы,  $\Lambda_A = \prod_{i=1}^k \Lambda_{A_i}$ . Пусть также в (3) выполняются следующие условия: 1) коэффициенты  $\{A_n\}_n$ ,  $\{B_n\}_n$  периодические с некоторым периодом  $k$ , 2) матрицы, составляющие период  $\{A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_k\}$ , коммутируют между собой, тогда мера ортогональности  $W$ , связанная с соотношением (3), обладает свойствами:

$$1) \quad dW(x) = P(x)dx, \quad P(x) = (2\tilde{P}_{k-1}(x))^{-1} \sqrt{4\Lambda_A - \{\tilde{P}_k(x) - \tilde{R}_{k-2}(x)\}^2};$$

2) носитель меры представляет собой объединение не более чем  $kN$  ограниченных невырожденных непересекающихся отрезков, границами которых являются корни определителя многочлена

$$4\Lambda_A - \{\tilde{P}_k(x) - \tilde{R}_{k-2}(x)\}^2.$$

**СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ НЕПРЕРЫВНОГО МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ПОЛИНОМОМ**

**1. Постановка задачи.** Пусть  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  – скалярные функции, определённые и непрерывные на отрезке  $[a; b] \neq \emptyset$  и  $y_1(t) \leq y_2(t)$ ,  $\forall t \in [a; b]$ ,  $\Phi(t): R \rightarrow 2^R$  – многозначное отображение (м.о.), образом которого в каждой точке отрезка  $t \in [a; b]$  является отрезок  $\Phi(t) = [y_1(t); y_2(t)]$ ,  $p_n(A, t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$  – алгебраический полином степени не выше  $n$  с вектором коэффициентов  $A = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in R^{n+1}$ . Рассмотрим задачу

$$\rho(A) := \max_{t \in [a; b]} \max \{ y_2(t) - p_n(A, t), p_n(A, t) - y_1(t) \} \rightarrow \min_{A \in R^{n+1}}. \quad (1)$$

Функция  $f(A, t) = \max \{ y_2(t) - p_n(A, t), p_n(A, t) - y_1(t) \}$  непрерывна по всем своим аргументам и выпукла по  $A$  на  $R^{n+1}$  при каждом  $t \in [a; b]$ . Целевая функция  $\rho(A)$  задачи (1) также непрерывна и выпукла.

Обозначим  $\mathfrak{A} = \{ A \in R^{n+1} : \rho(A) = \rho^* \}$  – множество решений задачи (1), где  $\rho^* = \min_{A \in R^{n+1}} \rho(A)$ . Ввиду [1],  $\mathfrak{A} \neq \emptyset$ .

*Полиномом наилучшего приближения* задачи (1) назовём алгебраический многочлен  $p_n(A, t)$  с вектором коэффициентов  $A \in \mathfrak{A}$ . Решение задачи (1) даёт внешнюю оценку непрерывного м. о. алгебраическим полиномом – полосу ширины  $2 \cdot \rho^*$ , центром которой является полином наилучшего приближения. Она является минимальной по ширине полосой, охватывающей график м.о.

Положим  $f_i(A, t) = (-1)^{i+1} \cdot (p_n(A, t) - y_i(t))$ ,  $i \in \{1, 2\}$ .

*Базисом* назовём упорядоченное множество  $(n+2)$  точек отрезка  $[a; b]$  вида  $\sigma = \{t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1}\} \subset [a; b]$ . Амплитудными на базисе  $\sigma$  назовём функции, определяемые формулами

$$\varphi_0(\sigma, t_k) = \begin{cases} y_2(t_k), & k - \text{чётно}, \\ y_1(t_k), & k - \text{нечётно}, \end{cases} \quad \varphi_1(\sigma, t_k) = \begin{cases} y_1(t_k), & k - \text{чётно}, \\ y_2(t_k), & k - \text{нечётно}, \end{cases} \quad k \in \{0; (n+1)\}. \quad (2)$$

Сформулируем для амплитудных функций дискретные задачи П. Л. Чебышёва [2]:

$$\begin{aligned} \rho_i(A, \sigma) &:= \max_{k \in [0:n+1]} |\varphi_i(\sigma, t_k) - p_n(A, t_k)| \longrightarrow \min_{A \in R^{n+1}}, \\ \rho_i^*(\sigma) &:= \min_{A \in R^{n+1}} \rho_i(A, \sigma) = \rho_i(A_i(\sigma), \sigma), \quad i \in 0:1. \end{aligned} \quad (3)$$

По критерию решения дискретной задачи П. Л. Чебышёва [2] для задач (3) однозначно определены числа  $h_0(\sigma)$  и  $h_1(\sigma)$ , удовлетворяющие равенствам:

$$h_i(\sigma) = (-1)^{k+i} \left( y_{1.5+0.5 \cdot (-1)^{k+i}}(t_k) - p_n(A_i(\sigma), t_k) \right), \quad k \in 0:(n+1), \quad i \in 0:1. \quad (4)$$

$$\text{Положим } m := \max_{t \in [a;b]} \frac{y_2(t) - y_1(t)}{2}, \quad Z := \left\{ t \in [a;b] : \frac{y_2(t) - y_1(t)}{2} = \rho^* \right\},$$

$|Z|$  – количество элементов множества  $Z$ .

**2. Вспомогательные факты.** Из (1), (3) вытекают неравенства:

$$\rho(A) \geq m, \quad \rho(A) \geq \rho_i(A, \sigma), \quad \forall A \in R^{n+1}, \quad i \in 0:1. \quad (5)$$

Пользуясь принятыми обозначениями, сформулируем доказанную в [1] теорему.

**ТЕОРЕМА 1.** Для того чтобы вектор  $A^* \in R^{n+1}$  являлся решением задачи (1), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий:

а)  $\rho(A^*) = m$ ;

б) существует базис  $\sigma$  такой, что  $\rho(A^*) = h_i(\sigma)$ , где  $i = 0$  или  $i = 1$ .

При этом  $\rho^* = \rho(A^*)$ ,  $h_i(\sigma) = \max\{h_0(\sigma), h_1(\sigma)\}$ .

Из теоремы 1 и неравенств (5) вытекает, что условие а) эквивалентно  $Z \neq \emptyset$ .

В [3] доказано следующее утверждение.

**ЛЕММА 1.** Пусть  $x_0 < \dots < x_{n+1}$ ,  $n$  – натуральное число,  $B, C \in R^{n+1}$

и

$$p_n(B, x_i) = p_n(C, x_i), \quad \forall i \in 1:n.$$

Если  $\exists s \in 1:(n+1)$ ,  $\exists x \in (x_{s-1}; x_s)$ :  $p_n(B, x) < p_n(C, x)$ , то

$$(-1)^{i+s} (p_n(B, x) - p_n(C, x)) < 0, \quad \forall i \in 1:(n+1), \quad \forall x \in (x_{i-1}; x_i).$$

### 3. Единственность.

**ТЕОРЕМА 2.** Для того чтобы задача (1) имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий:  $\alpha$ )  $|Z| \geq n+1$ ;  $\beta$ ) существует базис  $\sigma$  такой, что  $\rho^* = h_i(\sigma)$ , где  $i = 0$  или  $i = 1$ . При этом  $h_i(\sigma) = \max\{h_0(\sigma), h_1(\sigma)\}$ .

Доказательство. Необходимость. 1. Пусть задача (1) имеет единственное решение  $A^*$  и условие  $\alpha$ ) не выполняется ( $|Z| < n+1$ ). Если вектор  $A^*$  удовлетворяет условию б) теоремы 1, то выполняется  $\beta$ ). Предположим, что имеет место условие а) теоремы 1. Тогда  $1 \leq |Z| < n+1$ .

2. Введём в рассмотрение множество  $S := \{t \in [a; b] : \rho^* = f(A^*, t)\}$ . Ясно, что  $Z \subset S$ . Разбиваем множество  $S$  на максимальное число  $r$  непустых непересекающихся следующих друг за другом подмножеств  $S_1 \cup \dots \cup S_r = S$  вида  $S_k := \{t \in [a; b] : \rho^* = f_{1,5+0,5,(-1)^{k+x}}(A^*, t)\}$ ,  $k \in 1:r$ , где  $\chi \in 0:1$  – фиксированная величина [3]. Несложно показать, что такое разбиение конечно. Если  $r \geq n+2$ , то приходим в ситуацию  $\beta$ ) теоремы.

3. Пусть  $r < n+2$ . Заметим, что в каждом подмножестве  $S_k$  содержится не более одной точки из множества  $Z$ . Если  $Z \cap S_k \neq \emptyset$ , то полагаем  $Z \cap S_k = t_k$ . Иначе произвольно берём  $t_k \in S_k$ ,  $k \in 1:r$ .

4. Если  $r < n+1$ , то возьмём, если требуется, точки  $b < t_{r+1} < \dots < t_n$  и образуем множества  $S_k = \{t_k\}$ ,  $k \in (r+1):n$ . Обозначим  $w := (-1)^{\chi+n}$ ,  $p := n+1$ . Для достаточно малого  $\varepsilon > 0$ ,  $\tilde{t} > t_n$  найдём  $A_\varepsilon$ , решив систему:

$$p_n(A_\varepsilon, t_k) = p_n(A^*, t_k), k \in \{1:(n+1)\} \setminus \{p\}, p_n(A_\varepsilon, \tilde{t}) = p_n(A^*, \tilde{t}) - w \cdot \varepsilon. \quad (6)$$

5. Пусть  $r = n+1$ . Поскольку  $1 \leq |Z| < n+1$ , то  $\exists p \in 1:r$  такое, что  $S_p \cap Z = \emptyset$ . Положим  $\tilde{t} := t_p$ ,  $w := (-1)^{\chi+p+1}$ . Находим  $A_\varepsilon$ , решая систему (6).

6. В силу леммы 1 [3], вектор  $A_\varepsilon$  будет решением задачи (1), причём  $A_\varepsilon \neq A^*$ , что невозможно, ввиду единственности.

Достаточность. 1. Пусть выполнено условие  $\alpha$ ). Тогда алгебраический полином степени  $n$  проходит через середины образов м.о. во всех точках из множества  $Z$ . По условию таковых не менее чем  $(n+1)$  штук, следовательно, полином единственен [2].

2. Пусть выполняется условие  $\beta$ ) теоремы для решения  $A^*$  задачи (1). Допустим, что существует другое решение  $A^{**}$  этой задачи. Ввиду (4), например, при  $i=0$ , получаем  $y_2(t_0) - p_n(A^*, t_0) = \rho^*$ ,  $p_n(A^*, t_1) - y_1(t_1) = \rho^*$ , ... Поскольку  $A^{**}$  – решение, то

$$y_2(t_0) - p_n(A^{**}, t_0) \leq \rho^*, p_n(A^{**}, t_1) - y_1(t_1) \leq \rho^*, \dots$$

Следовательно,  $(-1)^k \cdot p_n(A^* - A^{**}, t_k) \leq 0$ ,  $k \in 0:(n+1)$ . Выполнение всех таких неравенств возможно только при  $A^{**} \equiv A^*$ .

#### 4. Критерий распознавания крайних точек.

Поскольку множество  $\mathcal{Y}$  не пусто, ограничено [1], выпукло и замкнуто, то оно имеет крайние точки.

ТЕОРЕМА 3. Все векторы  $A^* \in \mathfrak{R}$ , для каждого из которых существует система точек  $\{t_0 < t_1 < \dots < t_n\} \subset [a; b]$ , на которой выполняются  $(n+1)$  равенства:

$$f(A^*, t_k) = \rho^*, \quad k \in 0:n, \quad (7)$$

и только они, являются крайними точками  $\mathfrak{R}$ .

Доказательство. Необходимость. Пусть  $A^* \in \mathfrak{R}$  – крайняя точка этого множества и (7) не выполняется. В таком случае имеет место ситуация а) теоремы 1,  $1 \leq |Z| < n+1$  и  $\rho^* = m$ . Обозначим

$$S := \{t \in [a; b]: m = f(A^*, t)\}, \quad w := |S|.$$

Имеем  $w < n+1$ . Возьмём произвольно  $(n+1-w)$  точек

$$\bar{S} := \{t_0 < t_1 < \dots < t_{n-w}\} \subset [a; b] \setminus S$$

и малое число  $\varepsilon > 0$ . Тогда векторы  $A^i_\varepsilon$ , являющиеся решениями линейных систем (при  $i = 1$  и  $i = 2$ )

$$p_n(A^i_\varepsilon, t) = p_n(A^*, t), \quad \forall t \in S \cup \bar{S} \setminus \{t_0\}, \quad p_n(A^i_\varepsilon, t_0) = p_n(A^*, t_0) + (-1)^i \cdot \varepsilon, \quad (8)$$

будут решениями задачи (1), причём  $A^* = 0,5 \cdot (A^1_\varepsilon + A^2_\varepsilon)$ . Последнее равенство противоречит определению крайней точки множества.

Достаточность. Пусть для вектора  $A^* \in \mathfrak{R}$  выполняется условие (7). Тогда для любого  $A \in \mathfrak{R}$  выполняются  $(n+1)$  неравенств

$$p_n(A, t_k) \leq p_n(A^*, t_k) \quad (\text{если } f(A^*, t_k) = f_1(A^*, t_k))$$

или

$$p_n(A, t_k) \geq p_n(A^*, t_k) \quad (\text{если } f(A^*, t_k) = f_2(A^*, t_k)), \quad \forall k \in 0:n.$$

Следовательно, вектор  $A^*$  нельзя представить в виде выпуклой комбинации двух различных между собой и отличных от  $A^*$  решений задачи (1), поэтому вектор  $A^*$  – крайняя точка  $\mathfrak{R}$ .

Теорема доказана.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Выгодчикова И. Ю.* О наилучшем приближении непрерывного многозначного отображения алгебраическим полиномом // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 13 – 15.
2. *Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.* Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.
3. *Выгодчикова И. Ю.* О единственности решения задачи наилучшего приближения многозначного отображения алгебраическим полиномом // Изв. Саратов. ун-та. Н.С. 2006. Т. 6, вып. 1/2. С. 11 – 19.

### ПРИМЕР РЕДУКЦИИ ДОПУСТИМОЙ СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

Рассматривается неголономное многообразие  $X_n^m$ , заданное вместе со своим оснащением  $X_n^{n-m}$  [1]. Ранее [2] авторы ввели понятие допустимой тензорной структуры и, в частности, допустимой симплектической структуры. Обозначим через  $F_s^t(X_n)$ ,  $(F_s^t(X_n^m))$  модуль тензорных полей (допустимых тензорных полей) типа  $(t, s)$  на  $X_n$ . Имеет место естественное вложение  $F_s^t(X_n^m) \subset F_s^t(X_n)$ .

**Определение.** Пусть  $m = 2k$ . Назовем дифференциальную допустимую 2-форму  $\omega \in F_2^0(X_n^m)$  *допустимой симплектической структурой* на неголономном многообразии  $X_n^m$ , если

- 1) форма  $\omega$  замкнута;
- 2) ранг формы  $\omega$  в каждой точке  $x \in X_n$  равен  $m$ .

Многообразии  $X_n^m$  вместе с  $\omega$  назовем *неголономным симплектическим многообразием*  $(X_n^m, \omega)$ . Хорошо известно [3], что оснащение  $X_n^{n-m}$  неголономного симплектического многообразия всегда инволютивно.

Рассмотрим пространство

$$(X_n^m)^* = \bigcup_{x \in X_n} (X_n^m)_x^*.$$

На нем можно ввести структуру дифференцируемого многообразия. В качестве атласа, задающего структуру гладкого многообразия на  $(X_n^m)^*$ , рассмотрим атлас, состоящий из карт  $\tilde{k}$  таких, что  $\tilde{k}(\alpha_x) = (x^\alpha, p_\alpha)$ , где  $\alpha_x \in (X_n^m)_x^*$ ,  $k(x) = x^\alpha$ ,  $p_\alpha = \alpha_x(\bar{e}_\alpha(x))$ ,  $\bar{e}_\alpha$  — локальные допустимые базисные векторные поля. отображение  $\pi: (X_n^m)^* \rightarrow X_n$ , ставящее в соответствие каждой форме  $\alpha \in (X_n^m)_x^*$  точку  $x \in X_n$ , — естественная проекция. Тогда  $\pi_*: T\left((X_n^m)^*\right) \rightarrow T(X_n)$ . Определим пространство  $X_{n+m}^{2m}$  следующим образом:  $X_{n+m}^{2m} = \pi_*^{-1}(X_n^m)$ . Определим далее на  $(X_n^m)^*$  1-форму  $\lambda$ , полагая

$\lambda(\bar{\xi}_\alpha) = \alpha pr \pi_* (\bar{\xi}_\alpha)$ , где  $\alpha \in (X_n^m)_x^*$ ,  $pr: T(X_n) \rightarrow X_n^m$  – естественная проекция. Имеет место

ТЕОРЕМА 1. Форма  $d\lambda$  допустима к неголономному многообразию  $X_{n+m}^{2m}$  тогда и только тогда, когда оснащение  $X_n^{n-m}$  инволютивно.

Будем полагать, что оснащение  $X_n^{n-m}$  является интегрируемой дифференциальной системой. Тогда в окрестности каждой точки  $x \in X_n$  найдется такая карта  $k(x^\alpha)$  ( $\alpha, \beta = 1, \dots, n$ ), что интегральные многообразия системы  $X_n^{n-m}$  определяются равенствами  $x^1 = \text{const}, \dots, x^m = \text{const}$ . Закон преобразования, связывающий две такие карты, имеет вид

$$\begin{aligned} x^{a'} &= x^a(x^a), \\ x^{p'} &= x^{p'}(x^a, x^p) \end{aligned}$$

( $a, b, c = 1, \dots, m$ ;  $p, q = m+1, \dots, n$ ).

В дальнейшем будем рассматривать атлас, состоящий из карт такого вида, которые называют *адаптированными*.

Дифференциальные формы  $dx^a$  определяют локальное поле допустимых векторных полей  $\bar{e}_a \in F_0^1(X_n^m)$  таких, что  $dx^a(\bar{e}_b) = \delta_b^a$ . При этом выполняются равенства  $\bar{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^p \partial_p$ . Таким образом, адаптированная карта  $k(x^\alpha)$  определяет на  $prk$  поле репера  $(\bar{e}_a, \partial_p)$  и поле корепера  $(dx^a, \theta^p)$ , где  $\theta^p = dx^p + \Gamma_a^p dx^a$ .

В карте  $\tilde{k}$  форма  $\lambda$  получает следующее координатное представление:  $\lambda = p_a dx^a$ . Ее дифференциал  $\omega = d\lambda$  определяет на  $(X_n^m)^*$  естественную допустимую симплектическую структуру:  $\omega = dp_a \wedge dx^a$ .

Пусть  $\bar{u} \in F_0^1(X_n)$  – векторное поле такое, что  $\partial_p u^a = 0$ . Тогда имеет место

ТЕОРЕМА 2. Существует и притом единственное векторное поле  $\bar{\xi}$  на многообразии  $(X_n^m)^*$  такое, что выполняются следующие условия: 1)  $\pi_* \bar{\xi} = \bar{u}$ , 2)  $L_{\bar{\xi}} \lambda = 0$ .

Пусть  $G$  – какая-либо группа диффеоморфизмов, действующая на многообразии  $X_n$  и сохраняющая систему  $(X_n^m)^*$ . Тогда, как следует из теоремы 2, эта группа порождает группу  $\tilde{G}$  симплектоморфизмов структуры  $\omega = d\lambda$ . Если поле  $\bar{\xi}$  порождается однопараметрической подгруппой



этой группы, то легко проверить, что  $\bar{\xi}$  – гамильтоново векторное поле [2], гамильтониан которого определяется формулой

$$H(\alpha) = \lambda(\bar{\xi}_\alpha). \quad (1)$$

Из формулы (1) видно, что функция Гамильтона линейно зависит от элемента алгебры Ли группы  $\tilde{G}$ . Выполнение последнего условия позволяет ввести отображение момента [3]:  $P: (X_n^m)^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$  по формуле  $P_\alpha(a) = H_a(\alpha)$ , где  $a \in \mathfrak{g}$ . Отображение момента мы будем использовать для осуществления процесса редукции допустимой симплектической структуры. В голономном случае задача редукции решена в [4]. Процесс редукции сводится к понижению размерности исходного симплектического многообразия. Редукция возможна, если на симплектическом многообразии действует группа, сохраняющая симплектическую структуру. Теорема 2 позволяет обобщить результаты, полученные в [4], на неголономный случай.

Покажем на примере как, используя отображение момента, можно провести редукцию симплектической структуры. Возьмем в качестве исходного многообразия трехмерное евклидово пространство  $E^3$  с фиксированной декартовой системой координат. Полагаем, что

$$X_3^2 = \langle \partial_1 - x^2 \partial_3, \partial_2 \rangle, \quad X_3^1 = \langle \partial_3 \rangle,$$

$G$  – группа вращений  $E^3$  вокруг оси  $Oz$ . В  $E^3$  группе  $G$  будет соответствовать поле  $\bar{u} = -x^2 \partial_1 + x^1 \partial_2$ , а в  $(X_3^2)^*$  – поле  $\bar{\xi} = -x^2 \partial_1 + x^1 \partial_2 - P_2 \partial^1 + P_1 \partial^2$ . Согласно (1), получаем

$$H(x^\alpha, P_\alpha) = -x^2 P_1 + x^1 P_2.$$

Группа  $G$  будет действовать в пространстве  $E^3$  без неподвижных точек, если исключить из рассмотрения третью координатную ось. Поверхность уровня  $\Pi: -x^2 P_1 + x^1 P_2 = c$  расслаивается на одномерные орбиты продолженной группы  $\tilde{G}$ , образующие трехмерное многообразие  $F_c$ . Касательное пространство к  $F_c$  получается факторизацией касательного пространства к поверхности  $\Pi$  по пространству  $\langle \bar{\xi} \rangle$ . В результате на многообразии  $F_c$  возникает дифференциальная система размерности 2 с допустимой симплектической структурой.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вагнер В. В. Геометрия  $(n-1)$ -мерного неголономного многообразия в  $n$ -мерном пространстве // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 173 – 255.

2. *Галаев С. В., Гохман А. В.* Почти симплектические связности на неголономном многообразии // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 28 – 31.

3. *Трофимов В. В., Фоменко А. Т.* Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. М.: Факториал, 1995.

4. *Marsden J., Weinstein A.* Reduction of Symplectic Manifolds with Symmetry // Rep. Math. Phys. 1974. Vol. 5. P. 121 – 130.

УДК 517.51

Е. В. Гудошникова

## СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА ОПЕРАТОРОВ БАСКАКОВА\*

При изучении свойств линейных положительных операторов помимо классических методов теории приближений используются и другие приемы. Например, многие линейные положительные операторы имеют естественную вероятностную интерпретацию и некоторые их свойства могут быть доказаны с применением теорем и методов теории вероятности. В. И. Волков ввел в рассмотрение достаточно широкий класс линейных положительных операторов, являющихся решением определенного дифференциального уравнения. Такой взгляд на операторы позволил доказать ряд аппроксимативных свойств для всего класса операторов на различных классах функций.

В работе [1] было показано, что собственные числа для операторов Бернштейна

$$S_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

имеют вид

$$\lambda_j = \begin{cases} 1, & j = 0; \\ \frac{(n-1)\dots(n-j+1)}{n^{j-1}}, & 1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

Используя указанные собственные числа и соответствующие собственные функции, авторы работы [2] доказали, что для фиксированного  $n \geq 1$ , для  $f: [0;1] \rightarrow R$  последовательность операторов  $\{1 - (1 - S_n)^m\}_{m=1}^{\infty}$  сходится равномерно на  $[0;1]$  при  $m \rightarrow \infty$  к  $L_n(f; x)$  – полиному Лагранжа степени  $n$  по равноотстоящим узлам.

Ниже находятся собственные числа для последовательности линейных положительных операторов Баскакова:

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}.$$

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 04-01-00060).

ТЕОРЕМА. Собственные числа оператора  $B_n$  имеют вид

$$\lambda_j = \begin{cases} 1, & j=0; \\ \frac{(n+1)\dots(n+j-1)}{n^{j-1}}, & j \geq 1. \end{cases}$$

Соответствующие собственные функции – многочлены порядка  $j$  без свободного члена со старшим коэффициентом 1 для  $j \geq 1$ , а  $p_0 = 1$ .

Доказательство.

1. Подсчитаем  $\frac{d}{dx} B_n(t^j; x) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{n} j \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} \right)'$ . Выполнив

необходимые преобразования, получаем, что операторы  $B_n$  удовлетворяют следующему равенству:

$$B_n(t^{j+1}; x) = \frac{x+x^2}{n} (B_n(t^j; x))' + x B_n(t^j; x). \quad (1)$$

2. Непосредственным вычислением проверяется, что  $B_n(1; x) = 1$  и  $B_n(t; x) = x$ . Следовательно, утверждение теоремы для  $j=0$  и  $j=1$  выполнено, причем  $p_0(x) = 1$  и  $p_1(x) = x$ .

3. Пусть построены  $p_i$  для  $1 \leq i \leq j$ . Будем искать  $p_{j+1}$  в виде

$$p_{j+1}(x) = x^{j+1} + \sum_{k=1}^j b_k p_k(x). \quad (2)$$

Возьмем от обеих частей равенства (2) оператор Баскакова и применим соотношение (1). После необходимых вычислений получаем, что

$$\sum_{k=1}^j b_k p_k(x) (\lambda_{j+1} - \lambda_k) = q(x),$$

где  $q(x)$  – многочлен с известными коэффициентами степени  $j$  без свободного члена. Этот многочлен можно разложить по базису. Получаем

$$\sum_{k=1}^j b_k p_k(x) (\lambda_{j+1} - \lambda_k) = \sum_{k=1}^j c_k p_k(x).$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых многочленах, находим  $b_k$ , а следовательно, и  $p_{j+1}$ .

*Замечание.* Как видно, операторы Баскакова и Бернштейна имеют сходную конструкцию и похожую структуру собственных чисел. Эти операторы обладают целым рядом аналогичных свойств. Однако, так же используя собственные числа, можно доказать, что для операторов Баскакова результат, аналогичный результату работы [2], не имеет места, а именно последовательность  $\{1 - (1 - B_n)^m\}_{m=1}^{\infty}$  расходится в смысле равномерной нормы.

1. Kelisky R. P., Rivlin T. J. Iterates of Bernstein polynomials // Pacific J. Math. 1967. № 21. P. 511 – 520.
2. Sevy J. C. Lagrange and Least-Squares Polynomials as Limits of Linear Combinations of Iterates of Bernstein and Durrmeyer polynomials // J. of Approx. Theory. 1995. № 80. P. 267 – 271.

УДК 517.53

П. А. Гуменюк

## ФУНКЦИИ КЁНИГСА СХОДЯЩЕЙСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ЭНДОМОРФИЗМОВ КРУГА\*

Итерации аналитических функций относятся к классическим объектам исследования теории функций комплексного переменного. Одной из основных проблем в теории итераций является изучение того, как меняется предельное поведение последовательности итераций при малом возмущении итерируемой функции. В данной статье рассматривается задача, непосредственно связанная с проблемой изучения поведения функции Кёнигса, ассоциированной с иррационально-нейтральной неподвижной точкой аналитической функции, при малых возмущениях этой функции.

Пусть  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  – последовательность аналитических функций в круге  $\mathbb{D} := \{z : |z| < 1\}$ , сходящаяся равномерно внутри  $\mathbb{D}$  к функции  $f_0(z) = e^{2\pi i \alpha_0 z}$ ,  $\alpha_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Пусть, кроме того,  $f_n(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ ,  $f_n(0) = 0$  и  $|f'_n(0)| \in (0, 1)$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ . Через  $f_n^k$  обозначим  $k$ -кратную итерацию функции  $f_n$ . Так как  $f_n^k(z) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow +\infty$  равномерно внутри  $\mathbb{D}$ , то (см., например [1, с. 97 – 101]) для каждого  $n \in \mathbb{N}$  существует аналитическая в  $\mathbb{D}$  функция  $\varphi_n$ ,  $\varphi_n(0) = 0$ ,  $\varphi'_n(0) = 1$ , удовлетворяющая функциональному уравнению Шрёдера

$$\varphi_n(f_n(z)) = f'_n(0)\varphi_n(z), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Функция  $\varphi_n$  называется *функцией Кёнигса*, ассоциированной с неподвижной точкой  $z = 0$  функции  $f_n$ . Справедлива следующая

**ТЕОРЕМА 1.** Последовательность  $\varphi_n$  сходится равномерно внутри круга  $\mathbb{D}$  к тождественному отображению  $\varphi_0(z) = z$ .

Схема доказательства. Прежде всего отметим, что радиус однолистности функции  $f_n$  стремится к единице при  $n \rightarrow +\infty$ . Поэтому не умаляя общности можно считать, что все функции  $f_n$  однолиственны в  $\mathbb{D}$ .

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 04-01-00083).

Тогда функции  $\varphi_n$  также однолиственны в  $\mathbb{D}$  (см., например, [2]). Дальнейший ход доказательства основан на следующем утверждении.

ЛЕММА 1. Существуют  $r_n \in (0, 1)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , такие что  $r_n \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow +\infty$  и для всякого  $n \in \mathbb{N}$  область  $\varphi_n(r_n \mathbb{D})$  содержится в некотором круге  $\{\xi: |\xi| < R_n\}$ , целиком лежащем в  $\varphi_n(\mathbb{D})$ .

Доказательство. Используя известное неравенство для однолистных в  $\mathbb{D}$  функций (см., например, [3, с. 117])

$$\left| \log \frac{\xi \varphi_n'(\xi)}{\varphi_n(\xi)} \right| \leq \log \frac{1 + |\xi|}{1 - |\xi|}, \quad \xi \in \mathbb{D},$$

можно показать, что если

$$r_n \leq k_n^{-1} \left( (1/4) e^{-\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \quad a, b > 0,$$

где

$$k_n(z) := \frac{z}{(1+z)^2}, \quad z \in \mathbb{D},$$

то вместе со всякой точкой  $\xi_0 \in \varphi_n(r_n \mathbb{D})$  область  $\Omega := \varphi_n(\mathbb{D})$  содержит кольцевой сектор  $\Sigma := \{\xi_0 e^{x+iy} : |x| \leq a, |y| \leq b, x, y \in \mathbb{R}\}$ . Кроме того, нетрудно убедиться, что область  $\Omega$  инвариантна относительно преобразования  $\xi \mapsto \lambda \xi$ , где  $\lambda := f_n'(0)$ .

Пусть  $\kappa := -\log |f_n'(0)|$ ,  $\alpha := \arg f_n'(0)$ , и  $p/q$ ,  $q > 1$ , — одна из подходящих дробей числа  $\alpha$ . Положим  $a := \kappa(q-1)$ ,  $b := \pi/q$ , если  $\alpha = p/q$  и  $b := \pi/q + 2\pi/q'$ , где  $q'$  — знаменатель следующей за  $p/q$  подходящей дроби числа  $\alpha$ , в противном случае. Так как  $p$  и  $q$  взаимно просты, то объединение секторов

$$\lambda_*^j \Sigma_0, \quad j = 0, 1, \dots, q-1, \quad \lambda_* := e^{-\kappa + 2\pi i p/q},$$

где  $\Sigma_0 := \{\xi_0 e^{x+iy} : |x| \leq \pi/q, |y| \leq b, x, y \in \mathbb{R}\}$ , содержит окружность  $\xi_0 \mathbb{T}$ ,  $\mathbb{T} := \partial \mathbb{D}$ . Если  $\alpha = p/q$ , то  $\lambda_*^j \Sigma_0 = \lambda^j \Sigma \subset \Omega$ . Если же  $\alpha \neq p/q$ , то из известного неравенства теории цепных дробей,  $|\alpha - p/q| \leq 1/(qq')$ , следует, что  $\lambda_*^j \Sigma_0 \subset \lambda^j \Sigma \subset \Omega$  для всех  $j = 0, 1, \dots, q-1$ .

Таким образом, вместе со всякой точкой  $\xi_0 \in \varphi_n(r_n \mathbb{D})$  область  $\Omega$  содержит окружность  $\xi_0 \mathbb{T}$ . Это означает, что  $\varphi_n(r_n \mathbb{D})$  лежит в некотором круге вида  $\{\xi: |\xi| < R\}$ , целиком содержащемся в  $\Omega$ . Остается убедиться в том, что выбор подходящей дроби  $p/q$  для каждого  $n \in \mathbb{N}$ , может быть реализован так, чтобы  $r_n \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow +\infty$ . Для этого зафиксируем некоторую подходящую дробь  $p/q$  числа  $\alpha_0$  и заметим, что  $p/q$  вместе со следующей за ней подходящей дробью являются также последовательными

подходящими дробями числа  $\alpha$ , если  $n$  достаточно велико. Поэтому  $\sqrt{a^2 + b^2} < 2\pi(1/q + 2/q')$  для всех достаточно больших  $n \in \mathbb{N}$ . С учетом того, что  $\alpha_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , и следовательно,  $\alpha_0$  имеет подходящие дроби со сколь угодно большими знаменателями, это означает, что  $\sqrt{a^2 + b^2} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тем самым доказательство леммы 1 завершено.  $\square$

Теперь утверждение теоремы 1 следует из теоремы Каратеодори о сходимости областей и из того, что функции последовательности  $\varphi_n$  образуют нормальное семейство в круге  $\mathbb{D}$ .

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Милнор Дж. Голоморфная динамика. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.
2. Горяинов В. В. Функция Кёнигса и дробное итерирование вероятностных производящих функций // Мат. сб. 2002. Т. 193, № 7. С. 69 – 86.
3. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.

УДК 517.984

А. П. Гуревич

### ОБ ОДНОЙ СЛАБО НЕРЕГУЛЯРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ\*

Рассмотрим оператор дифференцирования

$$Ly = y'(x), \quad x \in [0,1]$$

с интегральным условием следующего вида:

$$\int_0^1 t^m y(t) dt = 0, \tag{1}$$

где  $m$  – произвольное натуральное число.

В статье найден класс функций  $f(x)$ , для которых обобщенные средние Рисса вида  $-\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) R_\lambda f d\lambda$  сходятся к  $f(x)$  в пространстве  $C[0,1]$ . Здесь  $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ ,  $E$  – единичный оператор,  $\lambda$  – спектральный параметр, а функция  $g(\lambda, r)$  удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $g(\lambda, r)$  непрерывна по  $\lambda$  в круге  $|\lambda| \leq r$  и аналитична по  $\lambda$  в круге  $|\lambda| < r$  при любом  $r > 0$ ;

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003).

- 2) при произвольном фиксированном  $\lambda$   $\lim_{r \rightarrow \infty} g(\lambda, r) = 1$ ;
- 3) существует такая константа  $C > 0$ , что  $|g(\lambda, r)| \leq C$  при всех  $r > 0$  и  $|\lambda| \leq r$ ;
- 4) существует  $\gamma > 0$  такое, что  $g(r \exp(i\varphi), r) = O\left(\left|\varphi \pm \frac{\pi}{2}\right|^\gamma\right)$ , причем

оценка равномерна по  $r$ .

Отметим, что функция Грина  $G(x, t, \lambda)$  оператора  $L$  как функция  $\lambda$  имеет степенной рост порядка  $m$ , и следовательно, указанная краевая задача является слабо нерегулярной. Случай  $m=1$  рассмотрен в [1].

Обозначим через  $\Gamma_r$  окружность  $|\lambda| = r$ .

ТЕОРЕМА 1 [2]. Справедлива следующая формула:

$$f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} g(\lambda, r) R_\lambda f d\lambda = f(x)(1 - g(0, r)) + g(0, r)(f(x) - f_0(x)) + J_{1r} + J_{2r},$$

где  $f(x) \in C[0, 1]$ ,  $f_0(x) \in C^m[0, 1]$  и удовлетворяет (1),

$$J_{1r} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{g(\lambda, r)}{\lambda} R_\lambda f'_0 d\lambda, \quad J_{2r} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} g(\lambda, r) R_\lambda (f - f_0) d\lambda.$$

В дальнейшем при выборе функции  $f_0(x)$  важную роль играют три леммы.

ЛЕММА 1. Для любого  $m \in \mathbb{N}$  и произвольного  $h \in (0, 1)$  существует система функций  $\{\psi_k(x, n)\}_{k=1}^{m+1}$ , обладающая следующими свойствами:

- 1)  $\psi_k(x, n) \in C^m[0, 1]$ ;
- 2)  $\psi_k^{(s)}(x, n) = O\left(\frac{1}{n^{k-s-1}}\right)$  при  $n \rightarrow \infty$ ;
- 3)  $\psi_k^{(k-1)}(1-h, n) = 1$ ;  $\psi_k^{(s)}(1-h, n) = 0$  при  $s \neq k-1$ ,  $s = 0, \dots, m$ ;  
 $k = 1, \dots, m+1$ .

ЛЕММА 2. Для любого  $m \in \mathbb{N}$  найдутся натуральные числа  $\{n_k\}_{k=1}^{m+1}$  ( $n_1 < n_2 < \dots < n_{m+1}$ ) такие, что определитель

$$\begin{vmatrix} \int_0^1 t^m (1-t)^{n_1} dt & \int_0^1 t^m (1-t)^{n_2} dt & \dots & \int_0^1 t^m (1-t)^{n_{m+1}} dt \\ \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n_1} dt & \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n_2} dt & \dots & \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n_{m+1}} dt \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_0^1 (1-t)^{n_1} dt & \int_0^1 (1-t)^{n_2} dt & \dots & \int_0^1 (1-t)^{n_{m+1}} dt \end{vmatrix}$$

отличен от нуля.

ЛЕММА 3. Предположим, что  $f(x)$  удовлетворяет условиям:

а)  $f(x) \in C[0,1] \cap C^m[1-h,1]$  ( $0 < h < 1$ );

б)  $\int_0^1 t^m f(t) dt = 0$ ;

в)  $f(1) - m \int_0^1 t^{m-1} f(t) dt = 0$ ;

г)  $\sum_{p=1}^{m-s+1} \alpha_{m-p+1} f^{(m-s+1-p)}(1) - s \alpha_s \int_0^1 t^{s-1} f(t) dt = 0$ ,  $s = 0, \dots, m-1$ ;

$$\alpha_s = \frac{(-1)^{s-1}}{s!};$$

д)  $\sum_{s=1}^m \alpha_s f^{(s)}(1) - f(1) + f(0) = 0$ .

Тогда существует последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset C^m[0,1]$ , удовлетворяющая условиям б) – г), а также

1)  $\sum_{s=1}^m \alpha_s f_n^{(s)}(1) - f_n(1) + f_n(0) = o_n(1)$ , где  $o_n(1) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ;

2)  $f_n(x) \in C^{m+1}[0,1-h] \cap C^{m+1}[1-h,1]$ ;

3)  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  в  $C[0,1]$ ;

4)  $f_n^{(p)}(x) \rightarrow f^{(p)}(x)$  в  $C[1-h,1]$ ,  $p = 1, \dots, m$ .

Используя явное представление  $R_\lambda f$  и леммы 1 – 3, можно доказать, что справедлива

ТЕОРЕМА 2. Предположим, что функция  $f(x)$  удовлетворяет условиям а) – д) леммы 3, тогда при  $\gamma \geq m$  обобщенные средние Рисса ряда по собственным и присоединенным функциям оператора  $L$  сходятся к  $f(x)$  в пространстве  $C[0,1]$ .

При доказательстве этой теоремы используется асимптотика резольвенты оператора  $L$ , полученная А. С. Ягубовым.

*Замечание.* Легко видеть, что если обобщенные средние Рисса функции  $f(x)$  сходятся к ней в  $C[0,1]$ , то  $f(x)$  удовлетворяет условиям б), в) из леммы 3.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гуревич А.П., Хромов А.П. Суммируемость по Риссу спектральных разложений оператора дифференцирования с интегральным условием // Вопросы прикладной физики: Межвузов. сб. науч. тр. 2004. № 11, вып. 11. С. 146 – 152.

2. Гуревич А.П., Хромов А.П. Суммируемость по Риссу разложений по собственным функциям интегральных операторов // Изв. вузов. Сер. Математика. 2003. № 2(489). С. 24 – 35.



## О ПРИБЛИЖЕНИИ НЕПРЕРЫВНОГО МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ПОСТОЯННЫМ МНОГОЗНАЧНЫМ ОТОБРАЖЕНИЕМ С ШАРОВЫМИ ОБРАЗАМИ

1. В работе [1] непрерывное многозначное отображение (м.о.) с выпуклыми компактными образами приближалось постоянным м.о. с выпуклыми образами. В этой статье мы также рассмотрим задачу, когда для приближения м.о. используется постоянное м.о., но с образами в виде шара некоторой нормы.

Пусть непрерывное на отрезке  $[0, 1]$  м.о.  $F(t)$  имеет выпуклые компактные образы из  $R^P$ ,  $n(x)$  – некоторая норма, действующая на  $R^P$ ,  $Bn(x, r) = \{y \in R^P : n(x - y) \leq r\}$  – шар в этой норме с центром в точке  $x$  и радиусом  $r$ ,  $h(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} n(a - b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} n(a - b)\}$  – расстояние Хаусдорфа между множествами  $A$  и  $B$  из  $R^P$ . Рассмотрим задачу

$$\varphi(x, r) \equiv \max_{t \in [0, 1]} h(F(t), Bn(x, r)) \rightarrow \min_{x \in R^P, r \geq 0} \quad (1)$$

о наилучшем равномерном на отрезке  $[0, 1]$  приближении м.о.  $F(\cdot)$  постоянным м.о. с образами в виде  $Bn(x, r)$ .

Далее используем обозначения:  $\hat{\partial}f(x)$  – субдифференциал выпуклой функции  $f(\cdot)$  в точке  $x$ ,

$$\Omega(t) = \overline{R^P \setminus F(t)}, \quad R(t, x) = \max_{v \in F(t)} n(v - x),$$

$$P(t, x) = \min_{v \in F(t)} n(v - x) - \min_{v \in \Omega(t)} n(v - x), \quad \hat{R}(x) = \max_{t \in [0, 1]} R(t, x), \quad \hat{P}(x) = \max_{t \in [0, 1]} P(t, x).$$

Кроме того, для выпуклого компакта  $A \subset R^P$  определим функции

$$R_A(x) = \max_{y \in A} n(x - y), \quad \rho_A(x) = \min_{y \in A} n(x - y), \quad P_A(x) = \rho_A(x) - \rho_{\Omega_A}(x),$$

$$\Omega_A = \overline{R^P \setminus A}.$$

Свойства введенных функций изучались в [2] – [4]. Отметим, что функции  $R(t, x)$  и  $P(t, x)$  являются выпуклыми по  $x$  на  $R^P$  при любом фиксированном  $t \in [0, 1]$  [2, 3], а следовательно, являются выпуклыми по  $x$  на  $R^P$  и функции  $\hat{R}(x)$  и  $\hat{P}(x)$ .

2. Существование решения задачи (1), как и в [1], следует из непрерывности м.о.  $F(\cdot)$  и компактности его образов. Сформулируем и докажем критерий решения задачи (1).

ТЕОРЕМА 1. Для того чтобы пара  $(x^*, r^*)$  являлась решением задачи (1), необходимо и достаточно, чтобы

$$0_p \in \partial \hat{R}(x^*) + \partial \hat{P}(x^*), \quad (2)$$

$$r^* = \frac{\hat{R}(x^*) - \hat{P}(x^*)}{2}. \quad (3)$$

Доказательство. Как показано в [4], для выпуклого компакта  $A$  справедлива формула

$$h(A, Bn(x, r)) = \max\{R_A(x) - r, P_A(x) + r\}.$$

Поэтому из определения функций  $R(t, x)$  и  $P(t, x)$  следует

$$\varphi(x, r) = \max_{t \in [0, 1]} \max\{R(t, x) - r, P(t, x) + r\} = \max\{\hat{R}(x) - r, \hat{P}(x) + r\}. \quad (4)$$

Поскольку функции  $\hat{R}(x)$  и  $\hat{P}(x)$  являются выпуклыми на  $R^p$ , то из (4) следует, что функция  $\varphi(x, r)$  является выпуклой по совокупности переменных  $(x, r)$  на  $R^p \times R_+$ . Ее субдифференциал, как это следует из субдифференциального исчисления для выпуклых функций [5], можно записать в виде

$$\partial \varphi(x, r) = \begin{cases} (\partial \hat{R}(x), -1), & \text{если } \hat{R}(x) - r > \hat{P}(x) + r, \\ (\partial \hat{P}(x), 1), & \text{если } \hat{R}(x) - r < \hat{P}(x) + r, \\ \text{co}\{(\partial \hat{R}(x), -1), (\partial \hat{P}(x), 1)\}, & \text{если } \hat{R}(x) - r = \hat{P}(x) + r. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь  $\text{co}\{A, B\}$  – выпуклая оболочка объединения множеств  $A$  и  $B$ . В соответствии с известным фактом выпуклого анализа [5, с. 129], для того чтобы пара  $(x^*, r^*)$  была точкой минимума функции  $\varphi(x, r)$  на  $R^p \times R_+$ , необходимо и достаточно выполнения включения

$$0_p \in \partial \varphi(x^*, r^*). \quad (6)$$

Из формулы (5) следует, что включение (6) реализуемо тогда и только тогда, когда выполняются соотношения (2), (3). Что и требовалось доказать.

3. Рассмотрим случай м.о., имеющего вид

$$F(t) = (1-t)A + tB, \quad (7)$$

где  $A$  и  $B$  – некоторые выпуклые компакты из  $R^p$ .

ТЕОРЕМА 2. Для м.о.  $F(t)$  вида (7) справедливы формулы

$$\hat{R}(x) = \max\{R_A(x), R_B(x)\}, \quad (8)$$

$$\hat{P}(x) = \max\{P_A(x), P_B(x)\}. \quad (9)$$

Доказательство. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \hat{R}(x) &= \max_{t \in [0, 1]} \max_{v \in (1-t)A + tB} n(x - v) = \max_{v \in \text{co}\{A, B\}} n(v - x) = \\ &= \max\{\max_{v \in A} n(v - x), \max_{v \in B} n(v - x)\} = \max\{R_A(x), P_B(x)\}. \end{aligned}$$

Чтобы доказать формулу (9), рассмотрим два случая.

1. Пусть точка  $x$  такова, что  $\hat{P}(x) \geq 0$ . В этом случае

$$\hat{P}(x) = \max_{t \in [0,1]} \{\rho_{F(t)}(x) - \rho_{\Omega(t)}(x)\} = \max_{t \in [0,1]} \rho_{F(t)}(x).$$

А поскольку

$$\begin{aligned} \rho_{F(t)}(x) &= \min_{v \in F(t)} n(x-v) = \min_{a \in A, b \in B} n(x-(1-t)a-tb) \leq \\ &\leq \min_{a \in A, b \in B} \{(1-t)n(x-a) + tn(x-b)\} = (1-t) \min_{a \in A} n(x-a) + t \min_{b \in B} n(x-b) = \\ &= (1-t)\rho_A(x) + t\rho_B(x), \end{aligned}$$

то, с учетом того, что  $\rho_{F(0)}(x) = \rho_A(x)$ ,  $\rho_{F(1)}(x) = \rho_B(x)$ , получаем

$$\hat{P}(x) = \max_{t \in [0,1]} \rho_{F(t)}(x) = \max\{\rho_A(x), \rho_B(x)\}. \quad (10)$$

2. Пусть теперь  $\hat{P}(x) < 0$ . Этот случай возможен, только если  $x \in A \cap B \neq \emptyset$  и, следовательно,

$$\hat{P}(x) = \max_{t \in [0,1]} \{-\rho_{\Omega(t)}(x)\}. \quad (11)$$

Очевидно, что  $A \cap B \subset F(t)$  при всех  $t \in [0,1]$ , поэтому  $\Omega(t) \subset \Omega_{A \cap B}$ . Следовательно, учитывая также  $\Omega_{A \cap B} = \Omega_A \cup \Omega_B$ , имеем

$$\rho_{\Omega(t)}(x) \geq \rho_{\Omega_{A \cap B}}(x) = \min\{\rho_{\Omega_A}(x), \rho_{\Omega_B}(x)\},$$

откуда вытекает неравенство

$$\max_{t \in [0,1]} \{-\rho_{\Omega(t)}(x)\} \leq \max\{-\rho_{\Omega_A}(x), -\rho_{\Omega_B}(x)\}. \quad (12)$$

С другой стороны,

$$\max_{t \in [0,1]} \{-\rho_{\Omega(t)}(x)\} \geq \max\{-\rho_{\Omega(0)}(x), -\rho_{\Omega(1)}(x)\} = \max\{-\rho_{\Omega_A}(x), -\rho_{\Omega_B}(x)\}. \quad (13)$$

Таким образом, из (11)–(13) получаем

$$\hat{P}(x) = \max\{-\rho_{\Omega_A}(x), -\rho_{\Omega_B}(x)\}. \quad (14)$$

Из формул (10) и (14) для этих рассмотренных случаев теперь легко следует (9). Что и требовалось доказать.

Из теорем 1, 2 вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Для м.о.  $F(t)$  вида (7) задача (1) эквивалентна задаче

$$\max\{R_A(x), R_B(x)\} + \max\{P_A(x), P_B(x)\} \rightarrow \min_{x \in R^p}.$$

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Никольский М. С. Об аппроксимации непрерывного многозначного отображения постоянным многозначным отображением // Вестник МГУ. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 1990. № 1. С. 76–80.

2. Минченко Л. И., Борисенко О. Ф., Грицай С. П. Многозначный анализ и возмущенные задачи нелинейного программирования. Минск: Навука і тэхніка, 1993.

3. Коноплев А. Б. Формула субдифференциала одной негладкой функции // Со-временные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 13-й Сарат. зимней шк. Саратов, 27 янв. – 3 февр. 2006 г. Саратов: ООО Изд-во «Научная книга», 2006. С. 93 – 94.

4. Дудов С. И., Златорунская И. В. Равномерная оценка выпуклого компакта ша-ром произвольной нормы // Мат. сб. 2000. № 10. С. 13 – 38.

5. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.

УДК 519.853

А. С. Дудова

## СВОЙСТВА ФУНКЦИИ РАССТОЯНИЯ ДО СТРОГО И СИЛЬНО ВЫПУКЛОГО МНОЖЕСТВА

Под функцией расстояния до замкнутого множества  $D \subset R^p$  в норме  $n(\cdot)$ , действующей на  $R^p$ , понимается

$$\rho_D(x) = \min_{y \in D} n(x - y).$$

Известно [1 – 3], что если  $D$  является выпуклым множеством, то функция  $\rho_D(x)$  является выпуклой на  $R^p$ , а функция  $\rho_\Omega(x)$ , где  $\Omega = R^p \setminus D$ , является вогнутой на  $D$ . В данной статье укажем на некото-рые свойства функции расстояния до строго выпуклого множества [2] и функции расстояния до  $r$ -сильно выпуклого множества [4], то есть множе-ства, представимого в виде пересечения евклидовых шаров радиуса  $r$ .

ТЕОРЕМА 1. Если  $D$  является строго выпуклым множеством, то функция  $\rho_\Omega(x)$  является строго квазивыпуклой на  $D$ , то есть

$$\rho_\Omega(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) > \min\{\rho_\Omega(x_1), \rho_\Omega(x_2)\}, \quad \forall x_1, x_2 \in D, \alpha \in (0, 1).$$

Доказательство. Известно [3], что для любых  $x_1, x_2$  из  $R^p$

$$|\rho_\Omega(x_1) - \rho_\Omega(x_2)| \leq n(x_1 - x_2). \quad (1)$$

Пусть далее, для определенности, точки  $x_1, x_2$  из  $D$  таковы, что  $\rho_\Omega(x_1) \leq \rho_\Omega(x_2)$ . Если только  $\rho_\Omega(x_2) \leq \rho_\Omega(x_1) + n(x_1 - x_2)$ , то можно пока-зать выполнение строгого неравенства

$$\rho_\Omega(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) > \alpha \rho_\Omega(x_1) + (1 - \alpha)\rho_\Omega(x_2), \quad \forall \alpha \in (0, 1),$$

из которого вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \rho_\Omega(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) &> \alpha \min\{\rho_\Omega(x_1), \rho_\Omega(x_2)\} + (1 - \alpha) \min\{\rho_\Omega(x_1), \rho_\Omega(x_2)\} = \\ &= \min\{\rho_\Omega(x_1), \rho_\Omega(x_2)\}. \end{aligned}$$

Ввиду (1), альтернативным случаем является выполнение равенства  $\rho_\Omega(x_2) = \rho_\Omega(x_1) + n(x_1 - x_2)$ , используя которое, с учетом вогнутости функции  $\rho_\Omega(x)$  на  $D$ , получаем

$$\begin{aligned} \rho_{\Omega}(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) &\geq \alpha \rho_{\Omega}(x_1) + (1 - \alpha)\rho_{\Omega}(x_2) = \rho_{\Omega}(x_1) + (1 - \alpha)n(x_1 - x_2) > \\ &> \rho_{\Omega}(x_1) = \min\{\rho_{\Omega}(x_1), \rho_{\Omega}(x_2)\}. \quad \square \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2. Если  $D$  является строго выпуклым множеством, а норма  $n(\cdot)$  – строго квазивыпуклой, то

1) для любого  $\lambda \geq 0$  множество  $G(\lambda) = \{x \in R^p : \rho_D(x) \leq \lambda\}$  является строго выпуклым,

2) если к тому же хотя бы одна из точек  $x_1, x_2$  не содержится в  $D$ , то

$$\rho_D(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) < \max\{\rho_D(x_1), \rho_D(x_2)\}, \quad \forall \alpha \in (0, 1). \quad (2)$$

Доказательство. 1) Нетрудно показать, что

$$G(\lambda) = D + Bn(0_p, \lambda), \quad (3)$$

где  $Bn(0_p, \lambda) = \{y \in R^p : n(y) \leq \lambda\}$ . Если  $\lambda = 0$ , то  $G(0) = D$  – строго выпуклое множество по условию теоремы.

Пусть  $\lambda > 0$ . В соответствии с (3) любая пара точек  $y_1, y_2$  из  $G(\lambda)$  представима в виде  $y_i = d_i + b_i$ , где  $d_i \in D, b_i \in Bn(0, \lambda), i = 1, 2$ . Тогда точка  $y_{\alpha} = \alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2$  представима в виде

$$y_{\alpha} = \alpha d_1 + (1 - \alpha)d_2 + \alpha b_1 + (1 - \alpha)b_2.$$

Если  $y_1 \neq y_2$ , то либо  $d_1 \neq d_2$ , либо  $b_1 \neq b_2$ . Поэтому, в силу условий теоремы, либо  $\alpha d_1 + (1 - \alpha)d_2 \in \text{int } D$ , либо  $\alpha b_1 + (1 - \alpha)b_2 \in \text{int } Bn(0_p, \lambda)$  при  $\alpha \in (0, 1)$ . Это, ввиду (3), влечет включение  $y_{\alpha} \in \text{int } G(\lambda)$ . Поскольку  $y_1, y_2$  выбирались из  $G(\lambda)$  произвольно, мы тем самым доказали строгую выпуклость множества  $G(\lambda)$ .

2) Пусть, для определенности,  $\rho_D(x_1) \leq \rho_D(x_2)$  и  $x_2 \notin D$ . Если к тому же выполняется  $\rho_D(x_2) < \rho_D(x_1) + n(x_1 - x_2)$ , то нетрудно доказать выполнение неравенства

$$\rho_D(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) < \alpha \rho_D(x_1) + (1 - \alpha)\rho_D(x_2), \quad \forall \alpha \in (0, 1),$$

из которого сразу следует (2). Если же  $\rho_D(x_2) = \rho_D(x_1) + n(x_1 - x_2)$ , то используется выпуклость функции  $\rho_D(x)$ :

$$\begin{aligned} \rho_D(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) &\leq \alpha \rho_D(x_1) + (1 - \alpha)\rho_D(x_2) < \rho_D(x_2) = \\ &= \max\{\rho_D(x_1), \rho_D(x_2)\}. \quad \square \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ. Если  $D$  не является строго выпуклым множеством или норма  $n(\cdot)$  не является строго квазивыпуклой, то множество  $G(\lambda)$  при любом  $\lambda > 0$  не является строго выпуклым.

Доказательство. В соответствии с известным фактом [5, с. 124] из (3) следует

$$D = G(\lambda) - Bn(0_p, \lambda), \quad Bn(0_p, \lambda) = G(\lambda) - D,$$

где  $A - B = \{c : c + B \subset A\}$  – разность Л. С. Понтрягина множеств  $A$  и  $B$ .

Поэтому допущение о строгой выпуклости  $G(\lambda)$  [4, с. 292] приводит нас к строгой выпуклости  $D$  и строгой квазивыпуклости нормы  $n(\cdot)$  одновременно.  $\square$

**ТЕОРЕМА 3.** Пусть  $D$  является  $r$ -сильно выпуклым множеством. Существует константа  $C > 0$ , что для любых точек  $x_1, x_2$  из  $D$  таких, что  $\rho_\Omega(x_1) = \rho_\Omega(x_2) = \rho$  и  $\alpha \in [0, 1]$  выполняется

$$\rho_\Omega(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \geq \rho + \frac{C\alpha(1 - \alpha)}{2r} \|x_1 - x_2\|^2.$$

Здесь  $\|\cdot\|$  — евклидова норма.

**Доказательство.** В силу эквивалентности норм в  $R^p$  существует  $C > 0$  такое, что

$$C\|x\| \leq n(x), \quad \forall x \in R^p. \quad (4)$$

1) Рассмотрим случай  $\rho_\Omega(x_1) = \rho_\Omega(x_2) = 0$ . Поскольку точки  $x_1, x_2$  содержатся в  $r$ -сильно выпуклом множестве  $D$ , то [4, с. 298 – 300] точка  $x_\alpha = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$  содержится в  $D$  вместе с евклидовым шаром  $B(x_\alpha, r_\alpha) = \{y \in R^p : \|x_\alpha - y\| \leq r_\alpha\}$ , где  $r_\alpha = r - \sqrt{r^2 - \alpha(1 - \alpha)\|x_1 - x_2\|^2}$ . Поэтому из (4) следует включение  $Bn(x_\alpha, C \cdot r_\alpha) \subset D$ , из которого вытекает неравенство

$$\rho_\Omega(x_\alpha) \geq Cr_\alpha = \frac{C\alpha(1 - \alpha)\|x_1 - x_2\|^2}{r + \sqrt{r^2 - \alpha(1 - \alpha)\|x_1 - x_2\|^2}} \geq \frac{C\alpha(1 - \alpha)}{2r} \|x_1 - x_2\|^2.$$

2) Пусть теперь  $\rho_\Omega(x_1) = \rho_\Omega(x_2) = \rho > 0$ . Обозначим через

$$\Omega_1 = \{x \in R^p : \rho_\Omega(x) \leq \rho\}, \quad D_1 = \{x \in R^p : \rho_\Omega(x) \geq \rho\}.$$

Легко видно, что  $\Omega_1 = \overline{R^p \setminus D_1}$ , а множество  $D_1$  представимо в виде

$$D_1 = D - \overset{*}{Bn(0, \rho)}$$

и значит [4, с. 292] является, как и множество  $D$ ,  $r$ -сильно выпуклым. Поскольку  $\rho_{\Omega_1}(x_1) = \rho_{\Omega_1}(x_2) = 0$ , то в соответствии со случаем, рассмотренным выше, можем записать

$$\rho_{\Omega_1}(x_\alpha) \geq \frac{C\alpha(1 - \alpha)}{2r} \|x_1 - x_2\|^2.$$

Осталось заметить справедливость равенства  $\rho_\Omega(x_\alpha) = \rho_{\Omega_1}(x_\alpha) + \rho$ .  $\square$

**ТЕОРЕМА 4.** Если  $D$  является  $r_1$ -сильно выпуклым множеством, а норма  $n(\cdot)$  такова, что ее шар единичного радиуса является  $r_2$ -сильно выпуклым множеством, то для любого  $\lambda \geq 0$  множество  $G(\lambda)$  является  $(r_1 + \lambda r_2)$ -сильно выпуклым.

Доказательство. Поскольку шар  $Bn(0_p, \lambda) = \lambda Bn(0_p, 1)$  является  $\lambda r_2$ -сильно выпуклым, то утверждение теоремы вытекает из (3) и известного факта о радиусе сильной выпуклости суммы сильно выпуклых множеств [4, с. 292].  $\square$

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.
2. Демьянов В. Ф., Васильев Л. В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981.
3. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.
4. Половинкин Е. С., Балашов М. В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2004.
5. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990.

УДК 517.51

В. С. Зюзин, Е. К. Черепанов

### ПРИБЛИЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ИНТЕРВАЛЬНЫМИ МНОГОЧЛЕНАМИ ТЕЙЛОРА

Предлагается методика нахождения коэффициентов рядов Тейлора в интервальном виде для решения уравнений в частных производных с начальными условиями. Она разработана по аналогии с методикой нахождения коэффициентов рядов Тейлора для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями [1].

Находим многочлен до  $n$ -й степени и оцениваем остаточный член  $(n + 1)$ -го порядка. Используя интервальные методы, получаем гарантированные, апостериорные оценки погрешности, включая погрешности вычисления приближенного решения задачи.

В данной статье рассматривается метод приближения решения задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial y^j} = f(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}), \quad i + j = 2; \quad (1)$$

$$u(x_0, y) = \varphi_2(y); \quad u(x, y_0) = \varphi_1(x); \quad (2)$$

причем  $\varphi_1(x_0) = \varphi_2(y_0)$  (условие непрерывности), многочленами Тейлора с интервальной оценкой остаточного члена.

Предполагается, что правая часть (1) имеет рациональный вид и непрерывные частные производные любого порядка, также предполагается дифференцируемость функций из начальных условий достаточное число раз. Требование рациональности правой части уравнения (1) не ограничи-

вает общности. В основном большой класс уравнений путем замены переменных можно свести к рациональному виду.

Решение задачи (1), (2) находим с помощью ряда Тейлора

$$u(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (u)_{ij} (x - x_0)^i (y - y_0)^j + R_{n+1}, \quad (3)$$

где остаточный член

$$R_{n+1} := \sum_{i=0}^{n+1} (u(\tau_1, \tau_2))_{i, n+1-i} (x - x_0)^i (y - y_0)^{n+1-i}, \quad (4)$$

где  $x_0 \leq \tau_1 \leq x_0 + h_1$ ,  $y_0 \leq \tau_2 \leq y_0 + h_2$ ,

$$(u)_{ij} := \frac{1}{i!j!} \left. \frac{\partial^{i+j} u(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} \right|_{x=x_0, y=y_0}$$

Для нахождения коэффициентов ряда Тейлора (3) выведены следующие рекуррентные формулы. Пусть  $u(x, y)$  и  $u_1(x, y)$  имеют частные производные любого порядка, тогда имеют место следующие формулы:

$$(u_x)_{ij} = (i+1)(u)_{i+1, j}, \quad (u_y)_{ij} = (j+1)(u)_{i, j+1}, \quad (u_{xy})_{ij} = (i+1)(j+1)(u)_{i+1, j+1},$$

$$(u_{xx})_{ij} = (i+1)(i+2)(u)_{i+2, j}, \quad (u_{yy})_{ij} = (j+1)(j+2)(u)_{i, j+2},$$

$$(u \pm u_1)_{ij} = (u)_{ij} \pm (u_1)_{ij}, \quad (uu_1)_{ij} = \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j (u)_{kl} (u_1)_{i-k, j-l}.$$

В приведенных формулах не рассмотрен случай операции деления. Если у функции рационального вида встречается операция деления, то ее можно избежать путем замены переменных.

Применение выведенных формул избавляет от необходимости последовательного дифференцирования правой части уравнения (1). Если нам известна двусторонняя оценка решения  $u(x, y)$  задачи (1), (2) на области  $[x_0, x_0 + h_1] \times [y_0, y_0 + h_2]$  ( $\underline{u} \leq u(x, y) \leq \bar{u}$  или  $u(x, y) \in [\underline{u}, \bar{u}] := [u]$ ), то, используя рекуррентные формулы, можно получить двустороннюю оценку остаточного члена (4).

В случае, когда нам неизвестна двусторонняя оценка решения  $u(x, y)$  задачи (1), (2) в рассматриваемой области, ниже приводится вариант нахождения указанной двусторонней оценки.

Для этого сводим задачу (1), (2) к системе интегральных уравнений с помощью замены:  $v := u_x$ ,  $w := u_y$ .

Пусть

$$z := (v, w, u), \quad Tz := (T_v v, T_w w, T_u u) \Rightarrow z = Tz.$$

Предположим, что функция  $f(x, y, v, w, u)$  по переменным  $u, v, w$  удовлетворяет условию Липшица.

Введем расстояние [2]



$$\rho(z, z_0) := \max_{x_0 \leq x \leq x_0 + h_1; y_0 \leq y \leq y_0 + h_2} \{e^{-\alpha(x-x_0) - \beta(y-y_0)} [ |u - u_0| + |v - v_0| + |w - w_0| ]\},$$

где  $\alpha, \beta > 0$ .

С его помощью показываем, что оператор  $T$  есть оператор сжатия при соответствующем выборе  $\alpha, \beta > 0$ , т.е.

$$\rho(Tz, Tz_0) \leq q\rho(z, z_0), \text{ где } 0 < q < 1.$$

Следовательно, оператор  $T$  с введенным расстоянием обеспечивает сжатое отображение на заданной области.

Приведенная ниже теорема способствует установлению двусторонней оценки решения  $u(x, y)$  задачи (1), (2).

**ТЕОРЕМА.** Пусть интервальный вектор  $[z^0] := ([v^0], [w^0], [u^0])$  такой, что

$$[z^1] := T[z_0] \subseteq [z_0].$$

Тогда задача (1), (2) на области  $[x_0, x_0 + h_1] \times [y_0, y_0 + h_2]$  имеет единственное решение  $u(x, y) \in [z^1] \subseteq [z_0]$ .

Установленную оценку  $[u^1] := [u^1, \bar{u}^1]$  можно использовать для оценки остаточного члена (4), используя приведенные выше рекуррентные формулы.

Предлагаемый метод позволяет находить приближения решения  $u(x, y)$  задачи (1), (2) в аналитическом виде, а именно в виде многочлена Тейлора с интервальной оценкой остаточного члена. При вычислении на Pascal-XSC получаем гарантированные двусторонние приближения точного решения с учетом погрешности округлений.

В работе [3] был рассмотрен частный случай: задача Гурса.

Решение задачи (1), (2) было рассмотрено на следующем примере:

$$\partial^2 u / \partial x \partial y + \partial u / \partial x + \partial u / \partial y + u = 0,$$

$$u(0, y) = \cos y, \quad 0 \leq y \leq h_2; \quad h_2 := 0.1,$$

$$u(x, 0) = e^{-x}, \quad 0 \leq x \leq h_1; \quad h_1 := 0.1.$$

Полученное решение оказалось на 2 порядка точнее решения этого примера с помощью численных методов.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Moore R. E. Interval Analysis. Englewood Cliffs. N. J.: Prentice-Hall, 1966.
2. Walter W. Gewöhnliche Differentialgleichungen. Berlin: Springer-Verlag, 1976.
3. Филиппенко Е. Г., Зюзин В. С. Приближение решения задачи Гурса интервальными многочленами Тейлора // Междунар. конф. по вычислительной математике: Рабочие совещания. Новосибирск, 21 – 25 июля 2004 г. Новосибирск: ЗАО РИЦ «Прайс – Курьер», 2004. С. 255 – 257.

М. Ю. Игнатьев

**О РЕШЕНИИ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ  
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КДФ НА ПОЛУОСИ  
С НЕОДНОРОДНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ \***

Рассмотрим смешанную задачу

$$q_t - 6qq_x + q_{xxx} = 0, x \geq 0, t \geq 0; \quad (1)$$

$$q(0, t) = a, q_{xx}(0, t) = b; \quad (2)$$

$$q(x, 0) = q_0(x), \quad (3)$$

где  $a, b$  – вещественные константы.

Известно, что задача (1) – (3) имеет бесконечно много интегралов движения и высших симметрий [1, 2]. В [2] построены и исследованы конечнозонные, солитонные и некоторые другие частные решения уравнения КДФ, удовлетворяющие краевым условиям (2).

В настоящей статье предлагается способ применения к задаче (1) – (3) схемы метода обратной спектральной задачи, позволяющий свести решение данной задачи к решению ряда классических обратных задач Штурма – Лиувилля. Введем в рассмотрение функцию

$$f(\lambda) = 16\lambda^3 - 4(3a^2 - b)\lambda + 2ab - 4a^3.$$

Далее предполагаем для определенности, что  $a \geq 0, b < 0$ . В этом случае функция  $f(\lambda)$  имеет 3 вещественных корня  $c_1 < c_2 < c_3$ , причем  $c_2 = -a/2$ , и 2 локальных экстремума  $d_1 = -c/\sqrt{3}, d_2 = c/\sqrt{3}$ , где  $3a^2 - b = 4c^2, c > 0$ . Обозначим  $\mu^* = f(d_1), \mu_* = f(d_2)$ . Рассмотрим разбиение комплексной  $\lambda$ -плоскости вещественной осью и ветвями гиперболы  $\Gamma = \{\lambda = \sigma + it : \tau^2 = 3\sigma^2 - c^2\}$  на области  $G_\nu, \nu = \overline{1, 6}$  (нумерация идёт в положительном направлении от положительной части вещественной оси). Каждая из этих областей конформно отображается функцией  $f(\lambda)$  на верхнюю или нижнюю полуплоскость ( $G_1$  отображается на верхнюю полуплоскость,  $G_2$  – на нижнюю и т.д.). Пусть  $\gamma_1, \gamma_2$  – ветви  $\Gamma$ , лежащие в 1-й и 2-й четвертях соответственно,  $G = G_1 \cup \gamma_1 \cup G_2$ .

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть задача (1) – (3) имеет вещественное решение  $q(x, t)$  такое, что  $q, q_x, q_{xx}$  ограничены при  $x \geq 0, t \geq 0$  и функция  $p(t) := (-q_{xt} + q_x^2)|_{x=0}$  определена и ограничена снизу при  $t \geq 0$ . Тогда

1) при  $\lambda \in G$  справедливо соотношение

$$M_1^0(f(\lambda)) = -q_0'(0) + (4\lambda + 2a)m_0(\lambda), \quad (4)$$

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 04-01-00007).

где  $m_0(\lambda)$  – функция Вейля оператора  $L_0 y = -y'' + q_0(x)y$  с условием  $y(0) = 0$ ,  $M_1^0(\mu)$  – функция Вейля оператора  $\ell_0 z = -\ddot{z} + p(t)z$  с условием  $z(0) = 0$ ;

2)  $p(t)$  может быть продолжена на всю ось  $t \in \mathbb{R}$  так, что  $p(t) \in \mu^* + \tilde{B}$  (класс  $\tilde{B}$  подробно описан, например, в [3]); при этом справедливо соотношение

$$M_2^0(f(\lambda)) = -q_0'(0) + (4\lambda + 2a)m_0(\lambda), \lambda \in G_3, \quad (5)$$

где  $M_2^0(\mu)$  – функция Вейля оператора  $\ell_0 z = -\ddot{z} + p(t)z$  на полуоси  $t < 0$  с условием  $z(0) = 0$ ;

3) оператор  $\ell_0 z = -\ddot{z} + p(t)z$  на полуоси  $t > 0$  с условием  $z(0) = 0$  не отрицателен;

4) эволюция функции Вейля  $m(t, \lambda)$  оператора  $L(t)y = -y'' + q(x, t)y$  с условием  $y(0) = 0$  даётся равенством

$$m(t, \lambda) = \frac{1}{4\lambda + 2a} (M_\nu(t, f(\lambda)) - w(t)), \quad (6)$$

где  $M_1(\tau, \mu)$ ,  $M_2(\tau, \mu)$  – функции Вейля операторов  $\ell(\tau)z = -\ddot{z} + p(t)z$  с условием  $z(\tau) = 0$  на полуосях  $t > \tau$  и  $t < \tau$ ,  $\nu = 1$  при  $\lambda \in G$ ,  $\nu = 2$  при  $\lambda \in G_3$ ,  $w(t)$  – решение уравнения  $\dot{w} + w^2 = p(t)$  с условием  $w(0) = -q_0'(0)$ .

Теорема 1 даёт процедуру решения задачи (1) – (3) при условии, что решение существует. Однако, как известно [4], задача (1) – (3) является переопределенной, и существование решения априори не очевидно. Неясно даже, насколько широк класс решений уравнения КдФ, удовлетворяющих условиям (2). Описание некоторого такого класса дается в следующей теореме, причем условия, найденные в теореме 1 (условия 2 и 3), оказываются в некотором смысле характеристическими.

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть:

1)  $p(t) \in \mu^* - \delta + \tilde{B}$  при некотором  $\delta > 0$ , нижняя грань оператора  $\ell_0 z = -\ddot{z} + p(t)z$  на полуоси  $t > 0$  с условием  $z(0) = 0$  не меньше  $\delta$ ;

2)  $w_0 > M_1(0, 0)$  – произвольное число,  $w(t)$  – решение уравнения  $\dot{w} + w^2 = p(t)$  с условием  $w(0) = w_0$ ;

3) функция  $m(t, \lambda)$  определяется при  $t \geq 0$ ,  $\text{Im } \lambda > 0$  равенством (6), где  $M_1(\tau, \mu)$ ,  $M_2(\tau, \mu)$  – функции Вейля операторов  $\ell(\tau)z = -\ddot{z} + p(t)z$  с условием  $z(\tau) = 0$  на полуосях  $t > \tau$  и  $t < \tau$ ,  $\nu = 1$  при  $\lambda \in G$ ,  $\nu = 2$  при  $\lambda \in G_3$ . Тогда функция  $m(t, \lambda)$  при каждом  $t \geq 0$  является функцией Вейля некоторого оператора  $L(t)y = -y'' + q(x, t)y$  с условием  $y(0) = 0$ ; при этом потенциал  $q(x, t)$  удовлетворяет уравнению КдФ (1) и краевым условиям (2).

Опишем теперь условия на функцию  $q_0(x)$ , гарантирующие существование решения задачи (1) – (3).

ТЕОРЕМА 3. Пусть  $q_0(x)$  – вещественная, непрерывно дифференцируемая функция, ограниченная снизу на полуоси  $x > 0$  и удовлетворяющая условию  $q_0(0) = a$ . Определим функцию

$$\varphi(\lambda) = -q_0'(0) + (4\lambda + 2a)m_0(\lambda),$$

где  $m_0(\lambda)$  – функция Вейля оператора  $L_0 y = -y'' + q_0(x)y$  с условием  $y(0) = 0$ .

Пусть, далее, выполнены условия:

1) при  $\lambda \in \gamma_1$   $\text{Im}\varphi(\lambda) = 0$ ;  
 2) точка  $\lambda = -a/2$  является изолированным собственным значением оператора  $L_0$ ;

3) спектральная функция  $\sigma_0(\lambda)$  оператора  $L_0$  абсолютно непрерывна в некоторой окрестности точки  $\lambda = d_1$ , и для некоторого  $\varepsilon > 0$  при  $\lambda \in (d_1, d_1 + \varepsilon)$  справедливо

$$\varphi(\lambda) = \varphi(\tilde{\lambda}),$$

где  $\tilde{\lambda} < d_1$ ,  $f(\tilde{\lambda}) = f(\lambda)$ .

Тогда равенство

$$M_1^0(f(\lambda)) = \varphi(\lambda), \lambda \in G,$$

определяет функцию  $M_1^0(\mu)$ , являющуюся функцией Вейля некоторого оператора  $\ell_0 z = -\dot{z} + p(t)z$ ,  $z(0) = 0$  на полуоси  $t > 0$  с потенциалом, удовлетворяющим условию 1 теоремы 2. При этом процедура, описанная в теореме 2 с  $w_0 = -q_0'(0)$ , приводит к функции  $q(x, t)$ , являющейся решением задачи (1) – (3).

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Adler V., Gürel B., Gürses M., Habibullin I. Boundary conditions for integrable equations // J. Phys. A: Math. Gen. 1997. Vol. 30. P. 3505 – 3513.
2. Адлер В. Э., Хабибуллин И. Т., Шабат А. Б. Красная задача для уравнения КдФ на полуоси // ТМФ. 1997. Т. 110, вып. 1. С. 98 – 113.
3. Marchenko V. A. The Cauchy Problem for the KdV Equation With Non-Decreasing Initial Data // What is Integrability? Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1991. P. 279 – 318.
4. Фаминский А. В. Смешанные задачи для уравнения Кортевега-де Фриза // Мат. сб. 1999. Т. 190, № 6. С. 127 – 160.

А. Б. Коноплев

### ФОРМУЛА СУБДИФФЕРЕНЦИАЛА ОДНОЙ НЕГЛАДКОЙ ФУНКЦИИ

Пусть  $X = R^n, Y = R^m, F: X \rightarrow 2^Y$  – многозначное отображение с выпуклым компактным графиком  $grF$ . Образует многозначное отображение  $\Omega(x) = \overline{Y \setminus F(x)}$ . Рассмотрим функцию

$$P(x, y) = \min_{w \in F(x)} \|y - w\| - \min_{w \in \Omega(x)} \|y - w\|,$$

где  $\|\cdot\|$  – некоторая норма в пространстве  $Y$ . Эта функция возникает при решении задач об оценке и аппроксимации многозначных отображений отображениями с шаровыми образами. Поэтому полезно располагать условиями выпуклости функции  $P(x, y)$  и формулой ее субдифференциала.

В рассматриваемом случае функция расстояния

$$d_F(x, y) \equiv \min_{w \in F(x)} \|y - w\|$$

является выпуклой и конечной на  $domF \times Y$ , и ее условный субдифференциал в точках множества  $domF \times Y$  выражается формулой [1]

$$\partial d_F(x, y) = [X \times \partial \|y - w\|] \cap -K^+((x, w), grF), \quad \forall w \in Q_F(x, y), \quad (1)$$

где  $domF = \{x \in X | F(x) \neq \emptyset\}$ ,  $\partial \|\cdot\|$  – субдифференциал нормы,  $K^+(z, A)$  – положительно сопряженный конус к конусу касательных направлений  $K(z, A)$  множества  $A$  в точке  $z$ ,

$$Q_F(x, y) = \{w \in F(x) | \|y - w\| = d_F(x, y)\}.$$

Пользуясь результатами работы [2], нетрудно доказать, что функция расстояния  $d_\Omega(x, y)$  является вогнутой и конечной на множестве  $grF$ , и ее условный супердифференциал в точках  $grF$  выражается формулой

$$\overline{\partial} d_F(x, y) = co\{[X \times \partial \|y - w\|] \cap K^+((x, w), grF), w \in Q_\Omega(x, y)\}, \quad (2)$$

для  $(x, y) \in \text{int } grF$ . В граничных точках  $grF$  функция  $d_\Omega(x, y)$  дифференцируема по любому направлению  $g \in X \times Y$ , причем

$$\begin{aligned} d'_\Omega((x, y), g) &\equiv \lim_{\alpha \downarrow 0} \alpha^{-1} [d_\Omega((x, y) + \alpha g) - d_\Omega(x, y)] = \\ &= \max\{0, \min_{(v, w) \in K^+((x, y), grF), \|w\|^* = 1} \langle (v, w), g \rangle\}, \end{aligned}$$

где  $\|\cdot\|^*$  – норма, полярная к  $\|\cdot\|$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  – скалярное произведение.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА. Функция  $P(x, y)$  является выпуклой и конечной на  $dom F \times Y$  функцией, причем ее условный субдифференциал на  $dom F \times Y$  можно записать в виде

$$\partial P(x, y) = \begin{cases} [X \times \partial \|y - w\|] \cap -K^+((x, w), grF), & \forall w \in Q_F(x, y), \quad y \notin F(x), \\ co\{(\bar{v}, \bar{w}) \in -K^+((x, w), grF) : \|\bar{w}\|^* = 1, w \in Q_\Omega(x, y)\}, & y \in F(x). \end{cases}$$

Доказательство. 1. Докажем выпуклость  $P(x, y)$ . Предположим противное, то есть найдутся  $z_1 = (x_1, y_1)$ ,  $z_2 = (x_2, y_2)$  и  $\alpha_0 \in (0, 1)$  такие, что

$$P(\alpha_0 z_1 + (1 - \alpha_0) z_2) > \alpha_0 P(z_1) + (1 - \alpha_0) P(z_2). \quad (3)$$

Нетривиальными для рассмотрения являются два случая:

- 1)  $z_1 \in \text{int } gr F$ ,  $z_2 \notin gr F$ ,
- 2)  $z_1, z_2 \notin gr F$ ,  $[z_1, z_2] \cap \text{int } gr F = \emptyset$ .

Рассмотрим случай 1). Пусть  $z_0$  – граничная точка  $gr F$ ,  $z_0 \in [z_1, z_2]$ . Очевидно,  $P(x, y)$  выпукла на  $[z_1, z_0]$  и на  $[z_0, z_2]$ . В соответствии с леммой 2.3 из [3] и соотношением (3) выполняется неравенство

$$P(z_0) > \beta P(z_1) + (1 - \beta) P(z_2), \quad \forall \beta \in (0, 1). \quad (4)$$

Возьмем  $g = (z_2 - z_1) / \|z_2 - z_1\|$  и докажем, что из (4) следует

$$P'(z_0, g) < -P'(z_0, -g). \quad (5)$$

Из (4) получаем

$$(1 - \beta)[P(z_2) - P(z_0)] < \beta[P(z_0) - P(z_1)].$$

Положив  $\beta / (1 - \beta) = \|z_2 - z_0\| / \|z_1 - z_0\|$ , имеем

$$[P(z_2) - P(z_0)] / \|z_2 - z_0\| < [P(z_0) - P(z_1)] / \|z_1 - z_0\|.$$

Из выпуклости  $P(\cdot, \cdot)$  на отрезках  $[z_0, z_2]$  и  $[z_1, z_0]$  следуют неравенства

$$P'(z_0, g) \leq [P(z_2) - P(z_0)] / \|z_2 - z_0\|, \quad P'(z_0, -g) \leq [P(z_1) - P(z_0)] / \|z_1 - z_0\|.$$

Отсюда получаем (5). Покажем теперь, что выполняется

$$P'(z_0, g) \geq -P'(z_0, -g). \quad (6)$$

Ввиду того что  $z_0$  – граничная точка выпуклого множества  $gr F$ , существует опорная гиперплоскость  $\pi$ , такая что  $z_0 \in \pi$  и  $gr F \subset \pi^+(\pi^-)$ . Следовательно,  $d_\pi(z_0 + \alpha g) = d_\pi(z_0 - \alpha g)$ ,

$$P(z_0 + \alpha g) = d_F(z_0 + \alpha g) \geq d_\pi(z_0 + \alpha g),$$

$$P(z_0 - \alpha g) = -d_\Omega(z_0 - \alpha g) \geq -d_\pi(z_0 - \alpha g), \quad d_\pi(z_0) = P(z_0) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$P'(z_0, g) \geq d'_\pi(z_0, g), \quad P'(z_0, -g) \geq -d'_\pi(z_0, -g), \quad d'_\pi(z_0, g) = d'_\pi(z_0, -g).$$

Таким образом, (4) выполняется. Получили противоречие между (5) и (6).

Рассмотрим случай 2). Пусть  $z_1, z_2 \notin gr F$ ,  $[z_1, z_2] \cap \text{int } gr F \neq \emptyset$ . Так как  $P(\cdot, \cdot)$  непрерывна, то найдется элемент  $z_0 \in [z_1, z_2] \cap \text{int } gr F$  такой, что  $P(z_0) = \min_{z \in [z_1, z_2]} P(z) < 0 < \min\{P(z_1), P(z_2)\}$ .

Получили противоречие с неравенством (4).

2. Получим формулу субдифференциала для функции  $P(\cdot, \cdot)$ . Ввиду (1) и (2) достаточно рассмотреть только случай, когда  $z = (x, y)$  – граничная точка  $gr F$ .

$$P'(z, g) = d'_F(z, g) - d'_\Omega(z, g) = \max_{(v, w) \in [X \times \partial \|0_Y\|] \cap -K^+(z, gr F)} \langle g, (v, w) \rangle - \max\{0, \min_{(v, w) \in K^+(z, gr F), \|w\|^* = 1} \langle g, (v, w) \rangle\}.$$

Так как  $0_{X \times Y} \in [X \times \partial \|0_Y\| \cap -K^+(z, gr F)]$ , то

$$\max_{(v, w) \in [X \times \partial \|0_Y\|] \cap -K^+(z, gr F)} \langle g, (v, w) \rangle \geq 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \max_{(v, w) \in [X \times \partial \|0_Y\|] \cap -K^+(z, gr F)} \langle g, (v, w) \rangle = \\ & = \max\{0, \max_{(v, w) \in -K^+(z, gr F), \|w\|^* = 1} \langle g, (v, w) \rangle\}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} P'(z, g) &= d'_F(z, g) - d'_\Omega(z, g) = \\ &= \max_{(v, w) \in -K^+(z, gr F), \|w\|^* = 1} \langle g, (v, w) \rangle = \max_{co\{(v, w) \in -K^+(z, gr F): \|w\|^* = 1\}} \langle g, (v, w) \rangle. \end{aligned}$$

Откуда и следует справедливость формулы субдифференциала  $P(\cdot, \cdot)$  в данном случае. Теорема доказана.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Коноплев А. Б. Формула субдифференциала функции расстояния от точек до образов мультиотображения // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 67 – 70.
2. Дудов С. И. Субдифференцируемость и супердифференцируемость функции расстояния // Мат. заметки. 1997. Т. 61, № 4. С. 530 – 542.
3. Дудов С. И., Златорунская И. В. Равномерная оценка выпуклого компакта шаром произвольной нормы // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 10. С. 13 – 38.

## ДОСТАТОЧНЫЙ ПРИЗНАК АБСОЛЮТНОЙ И РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ\*

Обозначим через  $L$  дифференциальный оператор:

$$Ly = y^{(n)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y, \quad x \in [0,1], \quad (1)$$

$$U_j(y) = \sum_{k=0}^j [a_{jk}y^{(k)}(0) + b_{jk}y^{(k)}(1)] = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

где  $n$  – нечетное,  $p_k(x) \in C[0,1]$ , краевые условия (2) – нормированные регулярные.

В работе [1] для разложений по собственным и присоединенным функциям оператора  $L$  был доказан аналог теоремы Зигмунда об абсолютной сходимости тригонометрических рядов Фурье. В настоящей статье устанавливается более сильный результат, который можно рассматривать как аналог известной теоремы Саса [2] об абсолютной сходимости тригонометрических рядов Фурье.

Обозначим через  $L_0$  оператор  $L_0y = y^{(n)}$  с краевыми условиями (2),  $R_{0\lambda} = (L_0 - \lambda E)^{-1}$  ( $E$  – единичный оператор,  $\lambda$  – спектральный параметр). Положим  $\lambda = -\rho^n$ , где  $\rho \in S = \left\{ \rho \mid \arg \rho \in \left[ 0, \frac{2\pi}{n} \right] \right\}$ . Сектор  $S$  разобьем на четыре сектора  $S_j = \left\{ \rho \mid \arg \rho \in \left[ \frac{\pi}{2n}(j-1), \frac{\pi}{2n}j \right] \right\}$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ . Рассмотрим для определенности сектор  $S_1$  и обозначим через  $\omega_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) корни  $n$ -й степени из  $-1$ , занумерованные так, чтобы

$$\operatorname{Re} \rho_{\omega_1} \geq \dots \geq \operatorname{Re} \rho_{\omega_v} \geq 0 \geq \operatorname{Re} \rho_{\omega_{v+1}} \geq \dots \geq \operatorname{Re} \rho_{\omega_n}.$$

Удалим из  $S_1$  точки  $\rho_k = (-\lambda_k)^{1/n}$  ( $\lambda_k$  – собственные значения оператора  $L_0$ ) вместе с круговыми окрестностями достаточного малого радиуса  $\delta$ . Получим область  $S_1(\delta)$ . Положим

$$g(x, t, \rho) = \frac{1}{n\rho^{n-1}} \left[ -\varepsilon(x, t) \sum_{k=v+1}^n \omega_k \exp \rho \omega_k (x-t) + \varepsilon(t, x) \sum_{k=1}^v \omega_k \exp \rho \omega_k (x-t) \right],$$

где  $\varepsilon(x, t) = 1$  при  $t \leq x$  и  $\varepsilon(x, t) = 0$  при  $t > x$ . В дальнейшем под символом  $\sigma(x, \rho)$  будем понимать любую из следующих функций:

$$\{ \exp(-\rho \omega_k x), \exp \rho \omega_k (x-1) \}_{k=1}^v \cup \{ \exp(\rho \omega_k x), \exp \rho \omega_k (1-x) \}_{k=v+1}^n.$$

Ясно, что  $|\sigma(x, \rho)| \leq 1$ .

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003).



ЛЕММА 1. В  $S_1(\delta)$  при больших  $|\rho|$

$$R_{0\lambda}f = \int_0^1 G(x, t, \rho) f(t) dt,$$

где  $G(x, t, \rho) = g(x, t, \rho) + \rho^{1-n} H(x, t, \rho)$ ,  $H(x, t, \rho)$  – линейная комбинация всевозможных произведений  $\sigma(x, \rho)\sigma(t, \rho)$  с независимыми от  $x$  и  $t$  коэффициентами, являющимися ограниченными функциями  $\rho$ .

ЛЕММА 2. В  $S_1(\delta)$  при больших  $|\rho|$  резольвента  $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$  существует и

$$R_\lambda = R_{0\lambda} - R_{0\lambda}(E + MR_{0\lambda})^{-1}MR_{0\lambda},$$

где  $My = p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y$ .

Обозначим  $b = 2\pi \exp \frac{\pi}{2n} i$ ;  $\sigma(x, \rho, m) = \sigma(x, \rho + bm)$ ;

$w(x, t, \rho, m) = \varepsilon(x, t) \exp[(\rho + bm)\omega(x - t)]$ , если  $\omega$  одно из чисел  $\omega_{\nu+1}, \dots, \omega_n$ ;

$w(x, t, \rho, m) = \varepsilon(t, x) \exp[(\rho + bm)\omega(x - t)]$ , если  $\omega$  одно из чисел  $\omega_1, \dots, \omega_\nu$ .

Введем также следующие интегральные операторы:

$$P_m f = \int_0^1 p(x, t, \rho, m) f(t) dt,$$

где  $p(x, t, \rho, m) = \sigma(x, \rho, m)\sigma(t, \rho, m)$  или  $p(x, t, \rho, m) = w(x, t, \rho, m)$ .

ЛЕММА 3. Пусть  $\rho \in S_1(\delta)$ ,  $\rho = \rho_1 + bm$  и  $\rho_1$  принадлежит ограниченному множеству. Тогда

$$\rho^{n-1-j} \frac{d^j}{dx^j} R_{0\lambda} f \quad (j = 0, 1, \dots, n-1)$$

есть конечная сумма с ограниченными по  $\rho_1$  и  $m$  коэффициентами операторов  $P_m f(x)$  при всевозможных вариантах ядер  $p(x, t, \rho, m)$ .

Аналогичные леммы справедливы для секторов  $S_2, S_3$  и  $S_4$ . Положим  $S(\delta) = \bigcup_{j=1}^4 S_j(\delta)$  и обозначим через  $\gamma_m$  окружности радиуса  $\delta$  с центрами в точках  $\rho_m$ , занумеровав все собственные значения в одну последовательность в порядке возрастания модулей.

ЛЕММА 4. Пусть  $f(x)$  удовлетворяет условиям

$$1) f(0) = f(1); \tag{3}$$

$$2) \text{ либо } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \int_0^{1/n} |f(x) - f(0)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty, \tag{4}$$

$$\text{либо } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \int_{1-1/n}^1 |f(x) - f(1)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty;$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \omega^{(2)} \left( f, \frac{1}{n} \right) < \infty, \quad (5)$$

где  $\omega^{(2)} \left( f, \frac{1}{n} \right)$  – квадратический модуль непрерывности функции  $f(x)$ , продолженной периодически. Тогда существует такое натуральное  $m_0$ , что

$$\sum_{m > m_0} \max_{0 \leq x \leq 1} \left| \int_{\Gamma_m} (R_\lambda - R_{0\lambda}) f(x) d\lambda \right| < \infty,$$

где  $\Gamma_m$  – образы в  $\lambda$ -плоскости окружностей  $\gamma_m$ .

Теперь рассмотрим следующую краевую задачу:

$$y^{(n)} - \lambda y = f(x), \quad y^{(j)}(0) = y^{(j)}(1), \quad j = 0, 1, \dots, n-1. \quad (6)$$

Соответствующие этой задаче  $\rho_k$  тоже удалим из  $S(\delta)$  вместе с  $\delta$ -окрестностями, получившуюся область по-прежнему обозначим  $S(\delta)$ .

ЛЕММА 5. Пусть  $y(x, \rho)$  – решение задачи (6), функция  $f(x)$  удовлетворяет условиям (3) – (5). Тогда существует такое  $m_0$ , что

$$\sum_{m > m_0} \max_{0 \leq x \leq 1} \left| \int_{\Gamma_m} (R_{0,\lambda} - y(x, \rho)) d\lambda \right| < \infty.$$

Эти леммы позволяют доказать следующий основной результат.

ТЕОРЕМА. Пусть  $f(x)$  удовлетворяет тем краевым условиям в (2), которые не содержат производных,  $f(0) = f(1)$  и выполняются условия (4), (5). Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq x \leq 1} |\varphi_n(x)| < \infty,$$

где  $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$  – ряд Фурье функции  $f(x)$  по собственным и присоединенным функциям оператора  $L$ .

Заметим, что в случае четного  $n$  собственные значения не всегда являются однократными, и тогда абсолютная равномерная сходимость ряда Фурье будет иметь место при некоторой группировке членов.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Корнев В. В., Хромов А. П. Об абсолютной сходимости разложений по собственным функциям дифференциальных и интегральных операторов // ДАН. 2005. Т. 400, № 3. С.304 – 308.
2. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.

Ю. В. Куприянова

## ОБ ОЦЕНКЕ ПРОИЗВОДНОЙ ПО НАПРАВЛЕНИЮ ЭРМИТОВА СПЛАЙНА НА ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Пусть  $\bar{T} = (A_1 A_2 A_3)$  – замкнутый невырожденный треугольник на плоскости с внутренностью  $T$ . Функция  $f(x) = f(x_1, x_2)$  определена на  $T$ .

Пусть далее  $e_{ij} = \frac{A_i A_j}{|A_i A_j|}$ ,  $i, j = \overline{1,3}$ , – единичные векторы.

Будем строить полином

$$Q(x) = Q(x_1, x_2) = \sum_{\substack{i+j=3 \\ i, j \geq 0}} a_{ij} x_1^i x_2^j$$

с действительными коэффициентами степени три, который в вершинах  $A_i$ ,  $i = \overline{1,3}$ , треугольника интерполирует функцию  $f(x)$  вместе с ее производными по направлениям сторон  $T$ , т.е.

$$f(A_i) = Q(A_i), \quad \frac{\partial f(A_i)}{\partial e_{ij}} = \frac{\partial Q(A_i)}{\partial e_{ij}}, \quad i, j = \overline{1,3}, \quad i \neq j. \quad (1)$$

Такой полином имеет 10 коэффициентов. Условия (1) определяют 9 из них. Остается выбрать один, в зависимости от которого можно будет говорить о степени приближения функции  $f(x)$  полиномом  $Q(x)$ .

В работе [1] параметр выбран как производная в средней точке на наименьшей стороне треугольника и доказана следующая

**ТЕОРЕМА 1 (Zenisek).** Пусть  $\bar{T} = (A_1 A_2 A_3)$  – замкнутый треугольник со сторонами  $a \leq b \leq c$  и углами  $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ . Пусть  $f \in C^4(\bar{T})$ ,

$$|D^i f(B) - D^i Q(B)| \leq M_4 \quad \forall |i| = 4 \quad \forall B \in T,$$

$P$  – средняя точка наименьшей стороны,  $n_\alpha$  – нормаль к наименьшей стороне и

$$\frac{\partial f(P)}{\partial n_\alpha} = \frac{\partial Q(P)}{\partial n_\alpha}. \quad (2)$$

Тогда

$$\left| \frac{\partial f(B)}{\partial x_i} - \frac{\partial Q(B)}{\partial x_i} \right| \leq \frac{4}{15} \left( 1 + 5 \left( \frac{a}{c} \right)^2 \right) \frac{M_4 c^3}{\sin \beta} \quad \forall B \in \bar{T}, \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

Мы видим, что в оценке участвует второй по величине угол (начиная с меньшего) треугольника, тогда как раньше оценка выражалась через наименьший угол. Как отметил Ю.Н. Субботин (личное сообщение): аппроксимация производной на самом деле зависит от синуса наибольшего угла в треугольнике.

Теперь выберем недостающий в определении полинома  $Q(\mathbf{x})$  коэффициент способом, отличным от (2). Определим его из равенства производных в средней точке стороны треугольника по направлению, коллинеарному любой из двух других сторон.

Для определенности положим

$$P_{12} = \frac{A_1 + A_2}{2}, \quad \frac{\partial f(P_{12})}{\partial \mathbf{e}_{13}} = \frac{\partial Q(P_{12})}{\partial \mathbf{e}_{13}}. \quad (4)$$

Справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция  $f(\mathbf{x})$  определена на треугольнике  $\bar{T}$  и имеет на нем непрерывные частные производные до второго порядка включительно,  $d(T)$  – диаметр  $\bar{T}$ ,  $M_2 = \max_{\xi, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2} \left| \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \mathbf{e}_1 \partial \mathbf{e}_2} \right|$ , и пусть интерполяционный полином  $Q(\mathbf{x})$  удовлетворяет условиям (1), (4). Тогда

$$\left| \frac{\partial Q(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}} - \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}} \right| \leq C_1 \cdot M_2 \cdot d(T), \quad (5)$$

$$\left| \frac{\partial Q(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{13}} - \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{13}} \right| \leq M_2 \cdot d(T), \quad (6)$$

где  $C_1 < 1,6$ .

Доказательство. Получим оценку (5). Для удобства рассмотрим на  $\bar{T}$  барицентрические координаты:  $x_1, x_2, x_3$ . Тогда полином  $Q(\mathbf{x})$ , интерполирующий функцию на  $\bar{T}$  с условиями (1) и (4), имеет вид

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 f(A_i) x_i^3 + 3 \sum_{\substack{i \neq j \\ i, j \geq 0}} f(A_i) x_i^2 x_j + \\ + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} |A_i A_j| \cdot \left( \frac{\partial f(A_i)}{\partial \mathbf{e}_{ij}} x_i + \frac{\partial f(A_j)}{\partial \mathbf{e}_{ji}} x_j \right) x_i x_j + 6a_{111} x_1 x_2 x_3,$$

где

$$6a_{111} = 4 \cdot |A_1 A_3| \cdot \frac{\partial f(P_{12})}{\partial \mathbf{e}_{13}} + 6f(A_1) - \\ - |A_1 A_2| \cdot \left( \frac{\partial f(A_2)}{\partial \mathbf{e}_{12}} - 2 \frac{\partial f(A_1)}{\partial \mathbf{e}_{12}} \right) - |A_2 A_3| \cdot \frac{\partial f(A_2)}{\partial \mathbf{e}_{23}} - |A_1 A_3| \cdot \frac{\partial f(A_1)}{\partial \mathbf{e}_{13}}.$$

Так как  $x_i, i = \overline{1,3}$ , – барицентрические координаты, то производные по направлениям можно вычислить по следующему правилу:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{ij}} = \frac{1}{|A_i A_j|} \cdot \left( \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} - \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right), \quad i, j = \overline{1,3}, \quad i \neq j. \quad (7)$$

Используя (7), имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Q(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}} - \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}} = \\ & = x_1^2 \left( \frac{\partial f(A_1)}{\partial \mathbf{e}_{12}} - \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}} \right) + x_2^2 \left( \frac{\partial f(A_2)}{\partial \mathbf{e}_{12}} - \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}} \right) + x_3^2 \left( \frac{\partial f(A_3)}{\partial \mathbf{e}_{12}} - \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}} \right) + \\ & + 2x_1x_2 \left( \frac{3(f(A_2) - f(A_1))}{|A_1A_2|} - \frac{\partial f(A_1)}{\partial \mathbf{e}_{12}} + \frac{\partial f(A_2)}{\partial \mathbf{e}_{21}} - \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}} \right) + \\ & + 2x_1x_3 \left( \frac{3(a_{111} - f(A_1))}{|A_1A_2|} - \frac{|A_1A_3|}{|A_1A_2|} \frac{\partial f(A_1)}{\partial \mathbf{e}_{13}} - \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}} \right) + \\ & + 2x_2x_3 \left( \frac{3(f(A_2) - a_{111})}{|A_1A_2|} + \frac{|A_2A_3|}{|A_1A_2|} \frac{\partial f(A_2)}{\partial \mathbf{e}_{23}} - \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}} \right) = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4. \end{aligned} \quad (8)$$

Применяя теорему о среднем для каждой из разностей в (8), получим

$$|\Sigma_1| \leq d(T) \cdot M_2 \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2),$$

$$|\Sigma_2| \leq 4 \cdot d(T) \cdot M_2 \cdot x_1x_2,$$

$$|\Sigma_3| \leq 4 \cdot d(T) \cdot M_2 \cdot x_1x_3,$$

$$|\Sigma_4| \leq \frac{13}{4} \cdot d(T) \cdot M_2 \cdot x_2x_3.$$

Подставляя найденные оценки в (8), имеем

$$\left| \frac{\partial Q(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}} - \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}} \right| \leq M_2 \cdot d(T) \cdot \left[ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + \frac{13}{4}x_2x_3 \right].$$

Используя стандартные методы анализа, получаем оценку (5).

Неравенство (6) получается аналогично.

Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 можно получить оценки отклонения производных как через синус второго по величине угла  $\beta$  треугольника:

$$\left| \frac{\partial f(B)}{\partial x_i} - \frac{\partial Q(B)}{\partial x_i} \right| \leq \left( \frac{1}{2} C_1 + 1 \right) \cdot M_2 \cdot \frac{d(T)}{\sin \beta} \quad \forall B \in \bar{T}, \quad i=1,2, \quad (9)$$

так и через синус наибольшего угла  $\gamma$ :

$$\left| \frac{\partial f(B)}{\partial x_i} - \frac{\partial Q(B)}{\partial x_i} \right| \leq \left( \frac{1}{2} C_1 + 1 \right) \cdot M_2 \cdot \frac{d(T)}{\sin \gamma} \quad \forall B \in \bar{T}, \quad i=1,2. \quad (10)$$

Очевидно, что из оценки типа Субботина (10) следуют оценки типа Женишека (9).

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Zenisek A. Maximum-angle condition and triangular finite elements of Hermite type // Math. Comp. 1995. Vol. 64. P. 929 – 941.

## ОБ АСИМПТОТИКЕ СРЕДНИХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ АХИЕЗЕРА\*

Ортогональными многочленами Ахиезера называются многочлены, ортогональные на нескольких отрезках действительной оси относительно весов специального вида. Здесь будет рассматриваться простейший случай таких многочленов — многочлены  $P_n$ , ортогональные на двух отрезках  $E = [-1, \alpha] \cup [\beta, 1]$  ( $-1 < \alpha < \beta < 1$ ) относительно веса

$$p(t) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{t - \alpha}{(1 - t^2)(t - \beta)}} \chi_E(t),$$

переходящего в предельном случае ( $\alpha = \beta$ ) в чебышевский вес [1, §53]. Как в этой, так и в существенно более общей ситуации ортогональности на системе дуг в конечной плоскости, известно их асимптотическое поведение [2, теорема 12.3]:

$$P_n(z) = C^n(E) \Phi^n(z) (F_n(t) + o(1)) \quad (1)$$

равномерно на компактах комплексной плоскости вне  $E$ . В равенстве (1) приняты следующие обозначения:  $C(E)$  — (логарифмическая) емкость компакта  $E$ ,  $\Phi(z)$  — комплексная функция Грина дополнения  $E$ ;

$F_n(z) = \frac{K_n(z, \infty)}{K_n(\infty, \infty)}$ , где  $K_n(z, \zeta)$  — ядро Сеге, отвечающее весу  $p$  и

$\Gamma_n = -n\Gamma(\Phi)$ ,  $\Gamma(\Phi)$  обозначает двумерный вектор приращений (деленных на  $2\pi$ ) аргумента функции  $\Phi$  при обходе вокруг каждого из отрезков из  $E$ .

Таким образом, даже в этом простейшем случае ситуация существенно отличается от случая одного отрезка, когда [3, теорема 16.4] существует конечный предел  $\frac{P_n(z)}{C^n(E)\Phi^n(z)}$  вне  $E$ . Поэтому представляется есте-

ственным вопросом, поставленный автору А. И. Аптекаревым, — существует ли предел соответствующих средних, т. е.  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_k(z)}{C^k(E)\Phi^k(z)}$  для случая

двух или более отрезков? Цель данной статьи — дать ответ на этот вопрос для многочленов Ахиезера  $P_n(z)$ .

Предварительно введем необходимые обозначения (см. например, [1]). Через  $z = \varphi(u)$  обозначим отображение

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 04-01-00060).

$$z = \frac{sn^2 u * cn^2 \rho + cn^2 u * sn^2 \rho}{sn^2 u - sn^2 \rho} \quad (2)$$

прямоугольника  $-K \leq \Omega u \leq 0$ ,  $-K' \leq \Im n \leq K'$  на плоскость, разрезанную вдоль  $E$ . Здесь  $\rho$  ( $0 < \rho < k$ ) определяется из уравнения  $1 - 2sn^2 \rho = \alpha$ , эллиптические функции Якоби  $sn u$ ,  $cn u$  имеют модуль  $k$  ( $0 < k < 1$ ), равный

$$k = \sqrt{\frac{2(\beta - \alpha)}{(1 - \alpha)(1 + \beta)}}. \text{ Комплексная функция Грина } \Phi(z) \text{ тогда запишется как}$$

$$\Phi(z) = \frac{H(u + \rho)}{H(u - \rho)}, \text{ где здесь и в дальнейшем } H(u) = H(u | \tau); \Theta(u) = \Theta(u | \tau);$$

$\Theta_1(u) = \Theta_1(u | \tau)$  ( $\tau = \frac{iK'}{K}$ ) – тэта-функции Якоби,  $K = K(k)$ ,  $K' = K'(k)$  – соответствующие полные эллиптические интегралы.

**ТЕОРЕМА.** Для всех действительных  $z$  вне множества  $E$  существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_k(z)}{C^k(E) \Phi^k(z)} = \frac{\Theta(\rho | \tau)}{\Theta(u | \tau)} \Theta_1(u - \rho | 2\tau),$$

где  $z$  и  $u$  связаны равенством (2), а константы  $C_k$  таковы, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C^k(E)}{C_k} = \frac{1}{\Theta(\rho)}.$$

**Доказательство.** Докажем прежде всего, что для упомянутых в условии теоремы  $z$  справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{P_j(z) + \frac{1}{W(z)} Q_j(z)}{C_j \left[ \frac{H(u + \rho)}{H(u - \rho)} \right]^j} = \frac{1}{\Theta(u)}, \quad (3)$$

где  $Q_n(x) = \int_E \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x - t} p(t) dt$  – многочлен второго рода,

$$C_n = \frac{\sqrt{2}\Theta(\rho)}{\sqrt{\Theta((2n-1)\rho)\Theta((2n+1)\rho)}}, \quad W(x) = \sqrt{\frac{(x^2 - 1)(x - \beta)}{x - \alpha}}.$$

В самом деле, в [1, §53] установлено, что

$$P_n(z) + \frac{1}{W(z)} Q_n(z) = C_n \left[ \frac{H(u + \rho)}{H(u - \rho)} \right]^n \frac{\Theta(u - 2n\rho)}{\Theta(u)}.$$

Предположим теперь, что система отрезков  $E$  такова, что  $\frac{\rho}{k}$  ирра-

ционально. Тогда последовательность  $\{n\frac{\rho}{k}\}$  равномерно распределена по модулю [4, пример 2.1]. Следовательно, [4, следствие 1.2] для любой комплекснозначной непрерывной 1-периодической функции  $f$  имеет место соотношение

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n\frac{\rho}{k}) = \int_0^1 f(x) dx. \quad (4)$$

Применяя (4) к  $2K$ -периодической функции  $\Theta$ , получим, учитывая легко проверяемое по определению функции  $\Theta$  соотношение

$$\frac{1}{2K} \int_{-K}^K \Theta(v) dv = \frac{1}{2K} \int_{-k}^k \Theta(v + iK') dv = 1$$

и соответствие границ при отображении  $\phi$ , равенство (3). Если же  $\frac{\rho}{k}$  рационально, то (3) проверяется непосредственно с помощью определения функции  $\Theta$  и суммирования  $\sum_{j=0}^{n-1} \Theta(u - 2j\rho)$ .

Поскольку

$$\frac{P_n(x) - \frac{1}{W(x)} Q_n(x)}{C_n \left[ \frac{H(u+\rho)}{H(u-\rho)} \right]^n} = \left[ \frac{H(u-\rho)}{H(u+\rho)} \right]^{2n} \frac{\Theta(u+2n\rho)}{\Theta(u)},$$

функция  $\frac{\Theta(u+2n\rho)}{\Theta(u)}$  отграничена от нуля и ограничена на действитель-

ных компактах вне  $E$ , а  $\left| \frac{H(u+\rho)}{H(u-\rho)} \right| > 1$  на таких компактах, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n(x) - \frac{1}{W(x)} Q_n(x)}{C_n \left[ \frac{H(u+\rho)}{H(u-\rho)} \right]^n} = 0$$

равномерно на действительных компактах вне  $E$ . Отсюда и из (3) получаем, что для всех действительных  $x$  вне  $E$  справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{P_j(x)}{C_j \left[ \frac{H(u+\rho)}{H(u-\rho)} \right]^j} = \frac{1}{2\Theta(u)}.$$



Для завершения доказательства теоремы осталось подсчитать, используя определения емкости и свойства эллиптических функций, что

$$C_n = \frac{2\Theta(\rho)C^n(E)}{\Theta(\rho - 2n\rho)}$$

и снова применить прием, использованный при доказательстве (3).

*Замечание.* Утверждение о справедливости равенства (3) было анонсировано в [5].

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.
2. Widom H. Extremal polynomials associated with a system of curves in the complex plane // *Advances in Mathematics*. 1969. Vol. 3. P. 127 – 232.
3. Сега Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматлит, 1962.
4. Кейперс Л., Нидеррейтер Г. Равномерное распределение последовательностей. М.: Наука, 1985.
5. Лукашов А. Л. Асимптотика для средних арифметических многочленов Ахиезера // *Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 13-й Саратов. зимней шк. Саратов, 27 янв. – 3 февр. 2006 г. Саратов: ООО Изд-во «Научная книга». 2006. С. 107 – 108.*

УДК 517.5+519.7

Д. С. Лукомский, С. Ф. Лукомский

#### ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ХААРА В ЗАДАЧЕ РАСПОЗНАВАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ

Пусть  $F^{(M,N)} = (F_{i,j}^{(M,N)}) (i = 0, 1, \dots, 2^M - 1; j = 0, 1, \dots, 2^N - 1; M, N \in \mathbb{N})$  – прямоугольная матрица, которую можно трактовать как двумерное изображение. Если  $n \in \mathbb{N}$  и  $n < \min(M, N)$ , то через  $f^{(n,n)} = (f_{i,j}^{(n,n)})$  обозначим фрагмент изображения  $F^{(M,N)}$ , т.е.

$$f_{i,j}^{(n,n)} = F_{i+k_1, j+k_2}^{(M,N)} \quad (j, i = 0, 1, \dots, 2^n - 1)$$

при некоторых  $k_1$  и  $k_2$ . Задачу нахождения чисел  $k_1$  и  $k_2$  по известному фрагменту  $f_{i,j}^{(n,n)}$  называют задачей распознавания. Таким образом, задача распознавания сводится к исследованию на  $\min$  выражения

$$\sum_{i=0}^{2^n - 1} \sum_{j=0}^{2^n - 1} |f_{i,j}^{(n,n)} - F_{i+k_1, j+k_2}^{(M,N)}|^p \quad (p \geq 1) \quad (1)$$

и может быть решена полным перебором по  $k_1$  и  $k_2$ , что требует больших вычислительных затрат. Уменьшения этих затрат можно добиваться выделением во фрагментах  $f^{(n,n)}$  характерных особенностей или минимиза-

ции другого функционала. Для этого можно использовать дискретное преобразование Хаара. Пусть

$$\chi_{2^n+k}(t) = \begin{cases} -1, & t \in \left[ \frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}} \right), \\ +1, & t \in \left[ \frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k}{2^{n+1}} \right) \end{cases}, \quad k = 0, 1, \dots, 2^n - 1; n = 0, 1, \dots$$

— функции Хаара [1], нормированные в  $C_{[0,1]}$ . Любую функцию  $f$ , постоянную на двоичных полуинтервалах  $\Delta_k^{(n)} = \left[ \frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right)$ , можно представить в виде суммы

$$f(t) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \hat{f}(k) \chi_k(t). \quad (2)$$

Последовательность  $(\hat{f}(k))_{k=0}^{2^n-1}$  называется *дискретным преобразованием Хаара*. Оператор  $\hat{f}$ , который вектору  $f$  ставит в соответствие вектор  $(\hat{f}(k))_{k=0}^{2^n-1}$ , также называют *дискретным преобразованием Хаара*.

Если обозначить  $f^{(n)} = (f_k^{(n)})_{k=0}^{2^n-1}$  вектор с компонентами  $f_k^{(n)}$ , то преобразование Хаара  $\hat{f}$  можно задать следующими рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned} \hat{f}^{(n)}(2^{l-1} + j) &= \frac{1}{2} (f_{2j}^{(l)} - f_{2j+1}^{(l)}), \\ f_j^{(l-1)} &= \frac{1}{2} (f_{2j}^{(l)} + f_{2j+1}^{(l)}), \quad l = n, n-1, \dots, 1; \quad j = 0, 1, \dots, 2^{l-1} - 1; \\ \hat{f}_n^{(n)} &= f_0^{(0)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Исходный вектор значений  $f^{(n)}$  можно восстановить по  $\hat{f}^{(n)}(k)$  также рекуррентным соотношениям:

$$f_{0,0}^{(0)} = \hat{f}^{(n)}(0); \quad f_{2j}^{(l)} = f_j^{(l-1)} + \hat{f}^{(n)}(2^{l-1} + j), \quad f_{2j+1}^{(l)} = f_j^{(l-1)} - \hat{f}^{(n)}(2^{l-1} + j). \quad (4)$$

Формулы (3) называют *быстрым преобразованием Хаара*, а формулы (4) — *быстрым обратным преобразованием Хаара* [2].

Пусть далее  $f^{(M,N)} = (f_{i,j}^{(M,N)}) (i = 0, 1, \dots, 2^M - 1; j = 0, 1, \dots, 2^N - 1)$  — прямоугольная матрица. При каждом фиксированном  $i \in \overline{0, 2^M - 1}$  обозначим через  $(\hat{f}_i^{(M,N)})(j)$  ( $j = 0, 1, \dots, 2^N - 1$ ) дискретное преобразование Хаара  $i$ -й строки матрицы  $f^{(M,N)}$ . Числа  $(\hat{f}_i^{(M,N)})(j)$  также образуют матрицу размерности  $2^M \times 2^N$ . Преобразование Хаара  $j$ -го столбца этой матрицы обозначим  $\hat{f}^{(M,N)}(i, j)$ . Полученную матрицу называют *двумерным дис-*

кретным преобразованием Хаара. Таким образом, по определению  $\hat{f}^{(M,N)}(i,j) = (\hat{f}_i(j))^\wedge$ , или иначе  $\hat{f}^{(M,N)}(i,j) = (\hat{f}^{(M,N)}(,j))^\wedge(i)$ , где точка указывает переменную, по которой берется внешнее преобразование Хаара. Очевидно, что если к матрице  $\hat{f}^{(M,N)}(i,j)$  применить обратное одномерное преобразование Хаара сначала по столбцам, а затем по строкам, то получим исходную матрицу  $f^{(M,N)}$ .

ТЕОРЕМА. Пусть  $f^{(n,n)} = (f_{k,l}^{(n,n)})$  и  $g^{(n,n)} = (g_{k,l}^{(n,n)})$  – две матрицы размерности  $2^n - 1 \times 2^n - 1$ , и пусть для чисел

$$m_1 = 2^{n-1} + 2^{n_2} + \dots + 2^{n_s} \quad (n-1 > n_2 > \dots > n_s > 0),$$

$$m_2 = 2^{n-1} + 2^{v_2} + \dots + 2^{v_\sigma} \quad (n-1 > v_2 > \dots > v_\sigma > 0)$$

справедливы равенства

$$g_{k,l}^{(n,n)} = f_{2^n - m_1 + k, 2^n - m_2 + l}^{(n,n)} \quad (k = 0, 1, \dots, m_1 - 1; l = 0, 1, \dots, m_2 - 1). \quad (5)$$

Тогда для двумерного преобразования Хаара справедливы равенства:

$$\hat{g}^{(n,n)}(2^{n-1} + k, 2^{n-1} + l) = \hat{f}^{(n,n)}\left(2^n - \frac{m_1}{2} + k, 2^n - \frac{m_2}{2} + l\right)$$

$$\left(k = 0, 1, \dots, \frac{m_1}{2} - 1; l = 0, 1, \dots, \frac{m_2}{2} - 1\right) \quad \begin{cases} 2^{n-1} \leq m_1 \leq 2^n, m_1 - \text{четное}, \\ 2^{n-1} \leq m_2 \leq 2^n, m_2 - \text{четное}. \end{cases}$$

Доказательство. Используя равенства (4) и (5), имеем

$$\begin{aligned} & (\hat{g}^{(n,n)}(2^{n-1} + k, 2^{n-1} + l)) = (\hat{g}^{(n,n)}(, 2^{n-1} + l))^\wedge(2^{n-1} + k) = \\ & = \frac{1}{2} (\hat{g}_{2k}^{(n,n)}(2^{n-1} + l) - \hat{g}_{2k+1}^{(n,n)}(2^{n-1} + l)) = \\ & = \frac{1}{4} (\hat{g}_{2k, 2l}^{(n,n)} - \hat{g}_{2k, 2l+1}^{(n,n)} - \hat{g}_{2k+1, 2l}^{(n,n)} + \hat{g}_{2k+1, 2l+1}^{(n,n)}) = \frac{1}{4} \left( f_{2^n - m_1 + 2k, 2^n - m_2 + 2l}^{(n,n)} - \right. \\ & \left. - f_{2^n - m_1 + 2k, 2^n - m_2 + 2l+1}^{(n,n)} - f_{2^n - m_1 + 2k+1, 2^n - m_2 + 2l}^{(n,n)} + f_{2^n - m_1 + 2k+1, 2^n - m_2 + 2l+1}^{(n,n)} \right) = \\ & = \frac{1}{4} \left( f_{2\left(2^{n-1} - \frac{m_1}{2} + k\right)}^{(n,n)} \cdot 2\left(2^{n-1} - \frac{m_2}{2} + l\right) - f_{2\left(2^{n-1} - \frac{m_1}{2} + k\right), 2\left(2^{n-1} - \frac{m_2}{2} + l\right)+1}^{(n,n)} - \right. \\ & \left. - f_{2\left(2^{n-1} - \frac{m_1}{2} + k\right)+1, 2\left(2^{n-1} - \frac{m_2}{2} + l\right)}^{(n,n)} + f_{2\left(2^{n-1} - \frac{m_1}{2} + k\right)+1, 2\left(2^{n-1} - \frac{m_2}{2} + l\right)+1}^{(n,n)} \right) = \\ & = \frac{1}{2} \left( \hat{f}_{2\left(2^{k-1} - \frac{m_1}{2} + k\right)}^{(n,n)} \left( 2^{n-1} + 2^{n-1} - \frac{m_1}{2} + l \right) - \right. \end{aligned}$$

$$- \hat{f}^{(n,n)} \left( 2^{k-1} - \frac{m_1}{2} + k \right) + 1 \left( 2^{n-1} + 2^{n-1} - \frac{m_1}{2} + l \right) =$$

$$= \left( \hat{f}^{(n,n)} \left( \cdot, 2^n - \frac{m_2}{2} + l \right) \right) \left( 2^n - \frac{m_1}{2} + k \right) = \hat{f}^{(n,n)} \left( 2^n - \frac{m_1}{2} + k, 2^n - \frac{m_2}{2} + l \right). \square$$

Теорема дает алгоритм решения задачи распознавания с использованием двоичного преобразования Хаара. Опишем этот алгоритм.

1. Разобьем исходную матрицу изображений  $F^{(M,N)}$  на квадратные матрицы-фрагменты  $F_{k,l}^{(n,n)}$ , где  $n < \min(M,N)$ , и пусть  $f^{(n,n)}$  – фрагмент изображения размерности  $2^n - 1 \times 2^n - 1$ .

2. Среди фрагментов  $F_{k,l}^{(n,n)}$  существует такой, что пара  $F_{k,l}^{(n,n)}, f^{(n,n)}$  удовлетворяет условиям теоремы 2. Для нахождения такого фрагмента необходимо исследовать на  $\min$  выражение

$$\sum_{i=0}^{\frac{m_1}{2}-1} \sum_{j=0}^{\frac{m_2}{2}-1} \left| \hat{F}_{k,l}^{(n,n)}(2^{n-1} + i, 2^{n-1} + j) - \hat{f}^{(n,n)} \left( 2^n - \frac{m_1}{2} + i, 2^n - \frac{m_2}{2} + j \right) \right|^p. \quad (6)$$

3. Значения  $m_1, m_2, k, l$ , при которых достигается  $\min$ , и дают тот фрагмент  $F_{k,l}^{(n,n)}$ , к которому близок выбранный фрагмент.

Для нахождения  $\min$  формулы (1) требуется  $3 \cdot 2^{N+M} 2^{2n}$  операций, в то время как для нахождения  $\min$  формулы (6) нужно  $3 \cdot 2^{N+M+2n-3}$  операций. Число операций можно уменьшить, если вместо (6) рассматривать функционал

$$\left| \sum_{i=0}^{\frac{m_1}{2}-1} \sum_{j=0}^{\frac{m_2}{2}-1} \hat{F}_{k,l}^{(n,n)}(2^{n-1} + i, 2^{n-1} + j) - \sum_{i=0}^{\frac{m_1}{2}-1} \sum_{j=0}^{\frac{m_2}{2}-1} \hat{f}^{(n,n)} \left( 2^n - \frac{m_1}{2} + i, 2^n - \frac{m_2}{2} + j \right) \right|. \quad (7)$$

Минимум функционала (7) достигается при тех  $m_1$  и  $m_2$ , что и в (6), но для нахождения  $\min$  в (7) требуется всего  $\frac{3}{8} 2^{N+M}$  операций, т.е. в  $2^{2n+3}$  раза меньше, чем при нахождении  $\min$  исходного функционала (1). Конечно,  $\min$  в (7) может достигаться не в одной точке  $(m_1, m_2)$ , а в нескольких. Однако количество таких точек невелико и нужная из них легко находится перебором.

Численный эксперимент показал высокую эффективность предлагаемого алгоритма при поиске фрагментов размерности  $2^7 \times 2^7$  на изображении размерности  $2^{12} \times 2^{12}$ . Время, затраченное на поиск такого фрагмента, составляет не более 0.5 с.

1. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М.: А.ФЦ, 1999.
2. Залманзон Л. А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. М.: Наука, 1989.

УДК 517.984

А. С. Луконина

**О СУММИРУЕМОСТИ ПО РИССУ  
СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ОДНОГО  
ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА  
С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ<sup>1</sup>**

В статье рассматривается оператор  $L$ , порожденный дифференциальным выражением:

$$l(y) = \beta y'(x) + y'(1-x) + p_1(x)y(x) + p_2(x)y(1-x) \quad (1)$$

и интегральным граничным условием:

$$U(y) = \int_0^1 p(t)y(t) dt = 0, \quad p(t) = \frac{k(t)}{t^\alpha(1-t)^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (2)$$

где  $\beta^2 \neq 1$ ,  $p_j(x) \in C^1[0,1]$  ( $j=1,2$ ); на  $k(t)$  накладываются условия:

а)  $k(t) \in C[0,1] \cap V[0,1]$ ,

б)  $k^2(1) - \gamma^2 k^2(0) \neq 0$ ,  $k^2(0) - \gamma^2 k^2(1) \neq 0$ , где  $\gamma = \beta - \sqrt{\beta^2 - 1}$ .

Граничное условие схожее с (2) вида:  $\int_{-1}^1 \frac{k(t)}{(1-|t|)^\alpha} y(t) dt = 0$  для оператора  $y'(x)$  впервые было рассмотрено А. М. Седлецким. Оператор (1),(2) при  $p_1(x) \equiv p_2(x) \equiv 0$  был подробно изучен А. П. Хромовым [1]. На основе этой работы для оператора (1),(2) автором была установлена равносходимость разложений по собственным и присоединённым функциям (в дальнейшем с.п.ф.) и в обычный тригонометрический ряд Фурье, а также получен аналог теоремы Жордана – Дирихле [2]. В настоящей статье исследуется суммируемость по Риссу разложений по с.п.ф. оператора (1),(2). Рассматриваются обобщенные средние Рисса следующего вида:

$$S_r(x, f, g) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) R_\lambda f d\lambda,$$

где  $R_\lambda f = (L - \lambda E)^{-1} f$  – резольвента оператора  $L$ ,  $E$  – единичный оператор,  $\lambda$  – спектральный параметр;  $r$  такие, что на окружности  $|\lambda| = r$  нет собственных значений оператора  $L$ ;  $g(\lambda, r)$  удовлетворяет условиям:

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003).

1)  $g(\lambda, r)$  непрерывна по  $\lambda$  в круге  $|\lambda| \leq r$  и аналитична по  $\lambda$  в круге  $|\lambda| < r$  при любом  $r > 0$ ;

2) существует такая константа  $C$ , что  $|g(\lambda, r)| \leq C \quad \forall r > 0$  и  $|\lambda| \leq r$ ;

3) существует  $\nu > 0$ , что  $g(r e^{i \arg \lambda}, r) = O\left(\left|\frac{\pi}{2} \pm \arg \lambda d\right|^\nu\right)$ ,

$$\left|\frac{\pi}{2} \pm \arg \lambda d\right| \leq \frac{\pi}{2}, \quad d = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 1}};$$

4)  $g(\lambda, r) \rightarrow 1$  при  $r \rightarrow \infty$  и фиксированном  $\lambda$ .

**1. Резольвента оператора  $L$ .** Нахождение  $R_\lambda f$  сводится к решению краевой задачи в пространстве вектор-функций размерности два:

$$B u'(x) + P(x) u(x) = \lambda u(x) + F(x), \quad \tilde{U}(u) = \int_0^1 N(t) u(t) dt = 0, \quad (3)$$

$$\text{где } B = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & -\beta \end{pmatrix}, \quad P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_2(1-x) & p_1(1-x) \end{pmatrix}, \quad N(t) = \begin{pmatrix} p(t) & 0 \\ 0 & p(1-t) \end{pmatrix},$$

$F(x) = (f(x), f(1-x))^T$  ( $T$  – знак транспонирования).

**ЛЕММА 1.** Если  $\lambda$  таково, что  $R_\lambda f$  существует, то  $u(x) = (u_1(x), u_2(x))^T$ , где  $u_1(x) = R_\lambda f$ ,  $u_2(x) = u_1(1-x)$ , удовлетворяет системе (3). И обратно: если  $u(x)$  удовлетворяет (3) и соответствующая однородная краевая задача имеет только тривиальное решение, то  $R_\lambda f$  существует и  $R_\lambda f = u_1(x)$ ,  $u_2(x) = u_1(1-x)$ .

**ЛЕММА 2.** Если  $u(x)$  – решение (3), то  $w(x) = \Gamma^{-1} u(x)$ ,  $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}$ ,

является решением следующей краевой задачи:

$$w'(x) + \tilde{P}(x) w(x) = \lambda D w(x) + \tilde{F}(x), \quad \tilde{U}(\Gamma w) = 0, \quad (4)$$

где  $\tilde{P}(x) = D \Gamma^{-1} P(x) \Gamma$ ,  $\tilde{F}(x) = D \Gamma^{-1} F(x)$ ,  $D = \text{diag}(d, -d)$ . И наоборот: если  $w(x)$  есть решение (4), то  $u(x) = \Gamma w(x)$  является решением (3).

Присутствие ненулевой матрицы  $\tilde{P}(x)$  является серьёзным препятствием в исследовании асимптотического поведения решения краевой задачи (4), преодолеть которое позволяет

**ЛЕММА 3.** Пусть  $H(x, \lambda) = H_0(x) + \frac{1}{\lambda} H_1(x)$ , где  $H_0(x)$  – диагональная матрица,  $H_1(x)$  – кодиагональная матрица, зависящие только от  $x$  и определяемые единственным образом из матричного уравнения  $H_0'(x) + \tilde{P}(x) H_0(x) + (H_1(x) D - D H_1(x)) = 0$ . Тогда при больших  $|\lambda|$  неособое преобразование  $w = H(x, \lambda) z$  приводит (4) к следующей краевой задаче:

$$z'(x) + P_\lambda(x)z(x) = \lambda Dz(x) + F_\lambda(x), \quad \tilde{U}(z) = \tilde{U}(\Gamma Hz) = 0, \quad (5)$$

где  $P_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} H^{-1}(x, \lambda) [H_1'(x) + \tilde{P}(x)H_1(x)]$ ,  $F_\lambda(x) = H^{-1}(x, \lambda) \tilde{F}(x)$ .

Пусть  $h_{jj}(x) = \exp\left(-\int_0^x P_{jj}(t) dt\right)$ , где  $P_{jj}(t)$  ( $j=1,2$ ) – диагональные элементы матрицы  $\tilde{P}(t)$ . Обозначим через  $S_{\delta_0}$  область, получающуюся из полуплоскости  $\operatorname{Re} \lambda d \geq 0$  удалением всех нулей функции

$$a_0 + a_1 e^{-\lambda d} + a_2 e^{-2\lambda d},$$

где  $a_0 = h_{11}(1) \cdot h_{22}(0) \cdot (k^2(1) - \gamma^2 k^2(0))$ ,

$$a_1 = (-1)^{\alpha-1} (1 - \gamma^2) k(0) \cdot k(1) (h_{11}(0) \cdot h_{22}(0) + h_{11}(1) \cdot h_{22}(1)),$$

$$a_2 = (-1)^{2(\alpha-1)} h_{11}(0) \cdot h_{22}(1) \cdot (k^2(0) - \gamma^2 k^2(1)),$$

вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса  $\delta_0$ .

**ЛЕММА 4.** В области  $S_{\delta_0}$  при больших значениях  $|\lambda|$   $R_\lambda f$  есть первая компонента вектора  $\Gamma H(x, \lambda) (E + R_{1\lambda} P_\lambda)^{-1} R_{1\lambda} F_\lambda$ , оператор  $R_{1\lambda} \Phi$  для любого  $\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_1(x))^T$ ,  $\varphi_j(x) \in L[0,1]$  ( $j=1,2$ ), определяется по формуле

$$R_{1\lambda} \Phi = \int_0^1 g_0(x, t, \lambda) \Phi(t) dt - Z(x, \lambda) \Delta^{-1}(\lambda) \tilde{U} \left( \int_0^1 g_0(x, t, \lambda) \Phi(t) dt \right),$$

где  $g_0(x, t, \lambda) = \operatorname{diag}(g_1(x, t, \lambda), g_2(x, t, \lambda))$ ,  $g_1(x, t, \lambda) = -\varepsilon(t, x) e^{(x-t)\lambda d}$ ,

$g_2(x, t, \lambda) = \varepsilon(x, t) e^{-(x-t)\lambda d}$ ,  $\varepsilon(x, t) = 1$  при  $t \leq x$  и нулю, в противном случае,

$Z(x, \lambda) = \operatorname{diag}(e^{x\lambda d}, e^{-x\lambda d})$ ,  $\Delta^{-1}(\lambda) = \tilde{U}(Z(x, \lambda))$ .

**2. Суммируемость по Риссу разложений по с.п.ф. оператора  $L$ .** Доказательство основного результата опирается на следующие утверждения.

**ЛЕММА 5.** Для любой функции  $f(x) \in L[0,1]$  имеет место

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|\lambda|=r} \left\| \Gamma H(x, \lambda) \left[ (E + R_{1\lambda} P_\lambda)^{-1} R_{1\lambda} F_\lambda(x) - R_{1\lambda} H_0^{-1}(x) \tilde{F}(x) \right] \right\|_\infty d\lambda = 0,$$

где  $\|\cdot\|_\infty$  – норма в пространстве вектор-функций размерности два  $L_\infty[0,1]$ .

**ЛЕММА 6.** Если  $f(x) \in C[0,1]$  и удовлетворяет  $U(f) = 0$ , то существует последовательность функций  $f_n(x) \in C^1[0,1]$ ,  $U(f_n) = 0$ ,  $n \in N$ , сходящаяся к  $f$  по норме пространства  $C[0,1]$ .

**ТЕОРЕМА.** Для  $f(x) \in C[0,1]$  и удовлетворяющей граничному условию  $U(f) = 0$  выполняется соотношение  $\lim_{r \rightarrow \infty} \|f(x) - S_r(x, f, g)\|_{C[0,1]} = 0$ .

1. Хромов А. П. Об аналоге теоремы Жордана – Дирихле для разложений по собственным функциям дифференциально-разностного оператора с интегральным граничным условием // Докл. РАЕН. 2004. № 4. С. 80 – 87.

2. Луконина А. С. О сходимости разложений по собственным и присоединённым функциям одного дифференциально-разностного оператора с интегральным граничным условием // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 67 – 70.

3. Гуревич А. П., Хромов А. П. Суммируемость по Риссу разложений по собственным функциям интегральных операторов // Изв. вузов. Сер. Математика. 2003. № 2 (489). С. 24 – 35.

УДК 517.51

О.А. Лукьяненко

### О СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ – ВИЛЕНКИНА В ПРОСТРАНСТВАХ ЛОРЕНЦА ПО ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМ

Пусть  $(V_n)_{n=0}^{\infty}$  – система функций Виленкина [1] с образующей последовательностью  $(p_k)_{k=0}^{\infty}$ . Будем рассматривать вопросы сходимости рядов Фурье – Виленкина в пространствах Лоренца

$$\Lambda_{\Psi, q} = \left\{ f \in L_{(0,1)} : \|f\|_{\Psi, q} = \left( \int_0^1 \left( \frac{f^*(t)}{\Psi(t)} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < +\infty \right\},$$

порожденных функцией  $\Psi$ , которая удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $\Psi(t) > 0$  на  $(0,1]$ , убывает на  $(0,1]$  и выпукла;
- 2)  $\lim_{t \rightarrow 0+} \Psi(t) = +\infty$ ;
- 3)  $\int_0^1 \frac{dt}{\Psi^q(t)t} < +\infty$ ,  $\frac{1}{\Psi(t)t}$  убывает на  $(0,1]$ ;
- 4)  $\forall p \in \mathbb{N}, \exists C_p > 0$  такое, что  $\Psi\left(\frac{x}{p}\right) \leq \left(1 + \frac{C_p}{1 + \log x^{-1}}\right) \Psi(x)$ .

В [2] было доказано, что равенство

$$\|f\|_{\Psi, q} = \left( \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\|f\|_k}{\Psi(2^{-k})} \right)^q \right)^{1/q}$$

определяет в пространстве  $\Lambda_{\Psi, q}$  норму, эквивалентную исходной норме  $\|f\|_{\Psi, q}$ .



Через  $S_n(f)$  будем обозначать частичную сумму ряда Фурье – Вилленкина.  $\log x$  всюду в дальнейшем означает логарифм по основанию 2.

ТЕОРЕМА 1. Если  $N = (n_k)_{k=1}^{\infty}$  – произвольная возрастающая последовательность натуральных чисел, для которых  $\sup L_{n_k} = +\infty$  ( $L_n$  – константы Лебега по системе  $(V_n)$ ), то существует постоянная  $C_q > 0$  такая, что  $\forall f \in \Lambda_{\Psi, q}$ ,  $\forall n \in N$  справедливо неравенство

$$\|S_n(f)\|_{\tilde{\Psi}, q} \leq C_q \|f\|_{\Psi, q},$$

$$\text{где } \tilde{\Psi}(x) = \int_x^1 \frac{\Psi(t)}{t} dt.$$

Доказательство. Рассмотрим норму частичной суммы  $S_n(f)$

$$\begin{aligned} \|S_n(f)\|_{\tilde{\Psi}, q}^q &= \int_0^1 \left( \frac{S_n^*(f)(t)}{\tilde{\Psi}(t)} \right)^q dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{2^k}}^{\frac{1}{2^{k-1}}} \left( \frac{S_n^*(f)(t)}{\tilde{\Psi}(t)} \right)^q dt \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{S_n^*(f)\left(\frac{1}{2^k}\right)}{\tilde{\Psi}\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)} \right)^q \ln 2 \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\|S_n(f)\|_k}{\tilde{\Psi}\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)} \right)^q \ln 2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{C_k \|f\|_k}{\tilde{\Psi}\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)} \right)^q \ln 2. \end{aligned} \quad (1)$$

Отдельно рассмотрим

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right) &= \int_{\frac{1}{2^{k-1}}}^1 \frac{\Psi(t)}{t} dt = \sum_{j=1}^{k-1} \int_{\frac{1}{2^j}}^{\frac{1}{2^{j-1}}} \frac{\Psi(t)}{t} dt \geq \sum_{j=1}^{k-1} \Psi\left(\frac{1}{2^{j-1}}\right) \ln 2 \geq \Psi\left(\frac{1}{2^{k-2}}\right) \ln 2 \geq \\ &\geq \Psi\left(\frac{1}{2^k}\right) \left(1 + \frac{C_2}{1 + (k-1)\log 2}\right)^{-1} \left(1 + \frac{C_2}{1 + (k-2)\log 2}\right)^{-1} \ln 2 \geq \Psi\left(\frac{1}{2^k}\right) (1 + C_2)^{-2} \ln 2. \end{aligned}$$

Подставляя найденную оценку в (1), окончательно получаем

$$\|S_n^*(f)\|_{\tilde{\Psi}, q}^q \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{C_k \|f\|_k}{\Psi\left(\frac{1}{2^k}\right) (1 + C_2)^{-2} \ln 2} \right)^q \ln 2 \leq C_q \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\|f\|_k}{\Psi\left(\frac{1}{2^k}\right)} \right)^q \leq C_q \|f\|_{\Psi, q}^q.$$

Что и требовалось доказать.

Доказанная теорема является точной по крайней мере для пространств Лоренца, образующая функция которых удовлетворяет дополнительному условию

$$\left(1 + \frac{C'_p}{1 + \log x^{-1}}\right) \Psi(x) \leq \Psi\left(\frac{x}{p}\right), \quad (0 < C'_p < 1). \quad (2)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция  $\Psi$  удовлетворяет условию (2) и последовательность  $(p_k)$  ограничена числом  $p$ . Если  $N$  – произвольная последовательность чисел вида

$$n = \sum_{i=1}^s ((p_{k_{2i-1}-1} - q_i) m_{k_{2i-1}-1} + (p_{k_{2i-1}-2} - q_i) m_{k_{2i-1}-2} + \dots + (p_{k_{2i}} - q_i) m_{k_{2i}}),$$

где

$$k_1 > k_2 > \dots > k_{2s}, \quad m_j = p_{j-1} m_{j-1}, \quad m_0 = 1,$$

$$0 < q_i < p_k, \quad k = k_{2i}, k_{2i} + 1, \dots, k_{2i-1} - 1,$$

для которых  $\sup_{n \in N} L_n = +\infty$ , то для любой функции  $\alpha(t) \downarrow 0$  при  $t \downarrow 0$  существует функция  $f \in \Lambda_{\Psi, q}$  такая, что отношение

функция  $f \in \Lambda_{\Psi, q}$  такая, что отношение  $\frac{\|S_n(f)\|_{\bar{\Psi}_{\alpha, q}}}{\|f\|_{\Psi, q}}$  неограниченно.

Доказательство теоремы 2 является очень длинным, ему будет посвящена отдельная статья.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И. Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку: Элм, 1981.
2. Lukomskii S. F. Convergence of Fourier series in Lorents spaces // East J. on Approximations. 2003. Vol. 9, № 2. P. 229 – 238.

УДК 517.984

И. А. Мельников

### БАЗИСНОСТЬ ПО РИССУ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА\*

Исследуется вопрос о базисности по Риссу в пространстве  $L_2[0,1]$  системы собственных и присоединенных функций (с.п.ф.) интегрального оператора

$$A f = \int_0^{1-x} A(1-x, t) f(t) dt + \alpha \int_0^x A(x, t) f(t) dt, \quad x \in [0,1], \quad (1)$$

где  $\alpha$  – произвольная постоянная,  $|\alpha| < 1$ .

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003).

Предполагаем, что для некоторого натурального  $n$  при  $0 \leq t \leq x \leq 1$  существуют и непрерывны производные

$$\frac{\partial^{j+s}}{\partial x^j \partial t^s} A(x, t), \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad s = 0, 1,$$

причем

$$\left. \frac{\partial^j}{\partial x^j} A(x, t) \right|_{t=x} = \delta_{n-1, j}, \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad (2)$$

где  $\delta_{i, j}$  – символ Кронекера.

Операторы вида (1), (2) при  $\alpha = 0$  и более общего вида впервые были рассмотрены А. П. Хромовым в работе [1]. Базисность по Риссу с.п.ф. таких операторов была установлена В. П. Курдюмовым и А. П. Хромовым в работе [2]. Данная статья распространяет метод из [2] на случай  $|\alpha| < 1$ .

**1. Вспомогательная задача.** Для определенности будем считать  $n = 2k$ .

**ТЕОРЕМА 1.** Оператор  $A^{-1}$  существует, причем представляет собой интегро-дифференциальный оператор вида

$$\begin{aligned} A^{-1}y(x) &= \frac{\alpha}{\alpha^2 - 1} y^{(n)}(x) - \frac{1}{\alpha^2 - 1} y^{(n)}(1-x) + \\ &+ N_1 \left( \frac{\alpha}{\alpha^2 - 1} y^{(n-1)}(x) + \frac{1}{\alpha^2 - 1} y^{(n-1)}(1-x) \right) \end{aligned} \quad (3)$$

с граничными условиями

$$\frac{1}{\alpha^2 - 1} (\alpha y^{(k)}(0) + (-1)^{k+1} y^{(k)}(1)) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (4)$$

где  $N_1$  – некоторый интегральный оператор.

Введем следующие обозначения:

$$\beta_1 = \frac{1}{\alpha + 1}, \quad \beta_2 = \frac{1}{\alpha - 1}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Исследуя задачу на собственные значения для оператора  $A$ , можно свести исследование с.п.ф. оператора к исследованию с.п.ф. действующего в пространстве  $L_2^2[0, \frac{1}{2}]$  вектор-функций размерности два интегро-дифференциального оператора  $L$ , порождаемого выражением

$$Ly(x) = By^{(n)}(x) + Ny^{n-1}(x), \quad y \in L_2^2[0, \frac{1}{2}] \quad (5)$$

и граничными условиями

$$U_k(y) = Py^{(k)}(0) + Qy^{(k)}(\frac{1}{2}) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (6)$$

где  $N$  – некоторый интегральный оператор в  $L_2^2[0, \frac{1}{2}]$ ,  $P_k$  и  $Q$  – матрицы с постоянными коэффициентами. Связь между операторами  $L$  и  $A$  определяется в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2. Если  $y(x)$  является собственной функцией оператора  $A$  для характеристического значения  $\lambda$ , то  $u(x) = \Gamma^{-1}(y(\frac{1}{2} + x), y(\frac{1}{2} - x))^T$ ,  $x \in [0, \frac{1}{2}]$ , является собственной функцией оператора  $L$  для собственного значения  $\lambda$ .

Обратно, если  $u(x)$  является собственной функцией оператора  $L$ , то  $y(x) = (\Gamma u(\frac{1}{2} - x))_2$  при  $x \in [0, \frac{1}{2}]$  и  $y(x) = (\Gamma u(x - \frac{1}{2}))_1$  при  $x \in [\frac{1}{2}, 1]$  является собственной функцией оператора  $A$ .

**2. Исследование вспомогательной задачи.** Сначала рассмотрим интегральный оператор  $L_0$ , действующий в пространстве  $L_2^2[0, \frac{1}{2}]$  и порожденный дифференциальным выражением

$$L_0 y = B y^{(n)} \quad (7)$$

и граничными условиями (6).

ЛЕММА 1. Пусть  $R_{0,\lambda} = (L - \lambda E)^{-1}$  – резольвента оператора  $L_0$ ,  $\lambda_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , – все собственные значения оператора  $L_0$ ,  $\Gamma_m$  – замкнутые контуры в  $\lambda$ -плоскости, каждый из которых содержит одно и только одно собственное значение  $\lambda_m$ ,  $I$  – произвольный набор достаточно больших натуральных чисел. Тогда справедлива и равномерна по  $I$  оценка

$$\left\| \sum_{m \in I} \int_{\Gamma_m} R_{0,\lambda} d\lambda \right\| \leq C, \quad (8)$$

где норма берется в пространстве  $L_2^2[0, \frac{1}{2}]$ .

Имеет место следующая связь между резольвентой оператора  $L$   $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$  и  $R_{0,\lambda}$ :

$$R_\lambda = R_{0,\lambda} - R_{0,\lambda} N (E + K)^{-1} D^{n-1} R_{0,\lambda}, \quad (9)$$

где  $K = D^{n-1} R_{0,\lambda} N$ ,  $D = d/dx$ . Это позволяет получить для  $R_\lambda$  оценку, аналогичную лемме 1.

ЛЕММА 2. Пусть теперь  $\lambda_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , – все собственные значения оператора  $L$ ,  $\Gamma_m$  – замкнутые контуры в  $\lambda$ -плоскости, каждый из которых содержит одно и только одно собственное значение  $\lambda_m$ . Тогда справедлива оценка

$$\left\| \sum_{m \in I} \int_{\Gamma_m} R_\lambda d\lambda \right\| \leq C, \quad (10)$$

равномерная по  $I$ .

**3. Базисы Рисса из собственных и присоединенных функций.** Нам понадобятся следующие факты.

ЛЕММА 3. Все достаточно большие по модулю собственные значения оператора  $L$  однократны.

Положим

$$E(\lambda_m) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} R_\lambda d\lambda. \quad (11)$$

ЛЕММА 4. Если  $f(x) \in L_2^2[0, \frac{1}{2}]$  и  $E(\lambda_m)f = 0$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , то  $f(x) = 0$  почти всюду.

Основным результатом работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Система с.п.ф. оператора  $A$  образует базис Рисса в пространстве  $L_2[0, 1]$ .

Доказательство. Пусть система  $\{\lambda_k\}_1^\infty$  записана в каком-нибудь наперед заданном порядке. Представим частные суммы ряда Фурье по системе с.п.ф. оператора  $L$  в виде сумм операторов (11). По лемме 2 такие суммы равномерно ограничены. По лемме 4 система с.п.ф. оператора  $L$  полна в  $L_2^2[0, \frac{1}{2}]$ . Отсюда по теореме Банаха – Штейнгауза и по лемме 3 следует, что система с.п.ф. оператора  $L$  образует в пространстве  $L_2^2[0, \frac{1}{2}]$  базис безусловной сходимости, а следовательно, система с.п.ф. оператора  $A$  образует базис Рисса в пространстве  $L_2[0, 1]$ . Теорема доказана.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромов А. П. Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях // *Мат. заметки*. 1998. Т. 64, № 6. С. 932 – 942.
2. Курдюмов В. П., Хромов А. П. О базисах Рисса из собственных функций интегрального оператора с переменным пределом интегрирования // *Мат. заметки*. 2004. Т. 75, вып. 1. С. 97 – 110.

УДК 512+519.7

А. В. Месянжин

### К ВОПРОСУ ОБ ОДНОВРЕМЕННОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ МАТРИЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ЭЛЕМЕНТОВ ФАКТОРА ПОЛИНОМИАЛЬНОГО КОЛЬЦА ПО НУЛЬМЕРНОМУ ИДЕАЛУ В ЗАДАЧЕ ПОИСКА КОРНЕЙ ИДЕАЛА

Пусть  $I$  – нульмерный идеал полиномиального кольца  $R = K[x_1, \dots, x_n]$  над алгебраически замкнутым полем  $K$  нулевой характеристики. Коммутативное фактор-кольцо  $R/I$  изоморфно кольцу линейных операторов  $\{L_h^{R/I} \mid h \in R/I\}$ , осуществляющих умножение на факторизован-

ные (редуцированные) полиномы  $h \in R/I$  (элементы-классы фактор-кольца будем отождествлять с их представителями – редуцированными по  $I$  полиномами):

$$(\forall f \in R/I) L_h^{R/I}(f) = \overline{f \cdot h^I}.$$

Если в факторе  $R/I$  как в линейном пространстве выбрать некоторый базис линейного пространства, то матрицы  $L_h$  операторов  $L_h^{R/I}$  относительно выбранного базиса (образующие кольцо, изоморфное  $R/I$ ) будем называть *матричным представлением редуцированных полиномов  $h$* . Эффективное построение матричных представлений было рассмотрено в работе [1].

Следует отметить конструктивно неиспользовавшееся ранее свойство коммутативности кольца матричных представлений. В работах [2, 3] было проведено исследование вытекающих из указанного свойства положений. Рассмотрим, что нам дает коммутативность семейства матриц.

Используя факт наличия хотя бы одного общего собственного вектора у семейства коммутирующих матриц, а также свойство сохранения перестановочности (коммутируемости) матриц при действии на них преобразования подобия, и повторив построения в доказательстве теоремы Шура об унитарной триангуляции матрицы, получаем следующее утверждение:

*Для любого коммутативного семейства матриц существует унитарное преобразование подобия, одновременно приводящее все матрицы семейства к верхнетреугольному (нижнетреугольному) виду.*

Это положение, рассмотренное совместно с теоремой Маккоя об одновременной триангуляции матриц, приводит нас к доказательству следующего результата.

**ТЕОРЕМА 1.** Если  $A_1, \dots, A_t$  – коммутативное семейство матриц порядка  $m$  с собственными значениями  $\sigma(A_i) = \{\alpha_1^{(i)}, \dots, \alpha_m^{(i)}\}$ ,  $i = 1, \dots, t$ ,  $\alpha_j^{(i)} \in K$ , с учетом кратности, то существуют  $t-1$  перестановки  $\xi_s$  ( $s = 2, \dots, t$ ) индексов  $1, \dots, m$  таких, что для любого полинома  $f(y_1, \dots, y_t)$  выполняется

$$\sigma(f(A_1, \dots, A_t)) = \{f(\alpha_j^{(1)}, \alpha_{\xi_2(j)}^{(2)}, \dots, \alpha_{\xi_t(j)}^{(t)}) \mid j = 1, \dots, m\}$$

и эти перестановки соответствуют положениям собственных значений на главных диагоналях матриц при одновременной их триангуляции некоторой унитарной матрицей преобразования  $U$ :

$$U^{-1}A_1U = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_m^{(1)} \end{pmatrix}, \quad U^{-1}A_iU = \begin{pmatrix} \alpha_{\xi_i(1)}^{(i)} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_{\xi_i(m)}^{(i)} \end{pmatrix},$$

$$U^{-1}f(A_1, \dots, A_t)U = \begin{pmatrix} f(\alpha_1^{(1)}, \alpha_{\xi_2(1)}^{(2)}, \dots, \alpha_{\xi_t(1)}^{(t)}) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & f(\alpha_m^{(1)}, \alpha_{\xi_2(m)}^{(2)}, \dots, \alpha_{\xi_t(m)}^{(t)}) \end{pmatrix}.$$

Вернемся теперь к матричным представлениям редуцированных полиномов. Известно, что размерность фактора  $R/I$  как линейного пространства равна числу корней идеала  $I$  с учетом кратностей. Пусть идеал имеет  $m$  корней. По теореме Стикельбергера,

$$(\forall h \in R/I) \sigma(L_h) = \{h(\alpha) \mid \alpha \in \text{roots}(I)\}.$$

Таким образом, если рассмотреть матрицы  $L_{x_i}$  ( $i = 1, \dots, n$ ), где  $x_i$  – все независимые переменные кольца  $R$ , и  $\sigma(L_{x_i}) = \{\alpha_1^{(i)}, \dots, \alpha_m^{(i)}\}$ ,  $\alpha_j^{(i)} \in K$ , то существуют такие  $n-1$  перестановки  $\psi_s$  ( $s = 2, \dots, n$ ) индексов  $1, \dots, m$ , что

$$\text{roots}(I) = \{(\alpha_j^{(1)}, \alpha_{\psi_2(j)}^{(2)}, \dots, \alpha_{\psi_n(j)}^{(n)}) \mid j = 1, \dots, m\} \quad (1)$$

с учетом кратности. Теорема 1, теорема Стикельбергера и изоморфность колец  $R/I \cong \{L_h \mid h \in R/I\}$  достаточно тривиальным образом приводят к следующему результату.

**ТЕОРЕМА 2.** Одновременная триангуляция матриц  $L_{x_i}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) с помощью одного и того же преобразования подобия, о котором говорилось в теореме 1, дает необходимые для (1) перестановки собственных значений.

Таким образом, задачу поиска корней нульмерного идеала можно свести к задаче поиска преобразования подобия, осуществляющего одновременную триангуляцию матричных представлений независимых переменных полиномиального кольца. В работах [2, 3] был построен алгоритм одновременной триангуляции коммутативного семейства матриц.

Рассмотрим случай, когда  $I$  – радикальный нульмерный идеал. Так как корней – конечное число и все корни различны, можем их рассматривать как конечное множество точек пространства  $K^n$ . В общем случае выполняется следующее:

$$(\forall V \subset K^n, \#V < \infty) (\exists h \in R) (\forall \alpha_1, \alpha_2 \in V, \alpha_1 \neq \alpha_2) (h(\alpha_1) \neq h(\alpha_2)),$$

а в частности для построения удовлетворяющего указанным свойствам полинома  $h$  можно использовать следующую лемму.

**ЛЕММА.**

$$\left( \forall V \subset K^n, \#V = d < \infty \right) \left( \exists h \in \left\{ \sum_{i=1}^n j^{i-1} x_i \mid j = 0, \dots, \frac{nd(d-1)}{2} \right\} \right) \\ (\forall \alpha_1, \alpha_2 \in V, \alpha_1 \neq \alpha_2) (h(\alpha_1) \neq h(\alpha_2)).$$

При построении  $h$  знание элементов  $\alpha_i \in V = \text{roots}(I)$  не требуется, так как для выполнения условия  $h(\alpha_1) \neq h(\alpha_2)$  (при  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ) по теореме Стикельбергера необходимо и достаточно, чтобы были различны все собственные значения матрицы  $L_h$ . Тогда  $L_h$  диагонализуема, следовательно, теми же преобразованиями подобия диагонализуемы все матрицы коммутативного кольца  $\{L_f | f \in R/I\}$ . В этом случае вместо поиска преобразования подобия для семейства матриц (как в [2, 3]) строится преобразование подобия для одной матрицы.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Месяжнин А. В.* Матричное представление элементов фактора полиномиального кольца по нульмерному идеалу // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 1. С. 19 – 27.
2. *Месяжнин А. В., Блинков Ю. А.* Об одном алгоритме решения системы полиномиальных уравнений // Чебышевский сборник: Тр. VI Междунар. конф. «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения». Саратов, 13 – 17 сент. 2004 г. Тула: Изд-во Тульск. гос. пед. ун-та, 2004. Т. V, вып. 4. С. 90 – 97.
3. *Mesyanzhin A. V.* On a Method for Finding the Roots of an Ideal // Programming and Computing Software. N. Y.: Plenum Press, 2005. Vol. 31, № 2. P. 97 – 102.

УДК 517.51.518

**И. Д. Молоденкова**

### **ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ ОПЕРАТОРАМИ, ПЕРЕВОДЯЩИМИ КУБИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ В ИХ ПРОИЗВОДНЫЕ**

Пусть  $A_H$  – интегральные операторы

$$A_H(f; x) = \int_a^b K_H(x, t) \varphi(t) dt,$$

зависящие от шага разбиения отрезка  $H = \frac{b-a}{n}$  ( $n$  – натуральное число) как от параметра, переводящие кубические сплайны  $S(x)$  дефекта 1 по разбиению  $\Delta$  в их производные, с ядрами

$$K_H(x, t) = \sum_{i=1}^S \alpha_i(x) \varphi_i(t),$$

где  $S$  принимает соответствующие значения в зависимости от того, куда попадает  $x$ ,  $\varphi_i(t)$  – линейно независимые функции, получаемые сдвигом функции



$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{H}, & 0 \leq t \leq H, \\ 0, & t < 0, t > H; \end{cases}$$

$\alpha_i(x)$  находятся из соответствующих систем линейных алгебраических уравнений [1, 2].

Пусть  $f(x)$  – дифференцируемая функция и  $f'(x) \in Lip_k \beta$ ,  $0 < \beta \leq 1$ . Рассмотрим величину, характеризующую скорость приближения производной операторами  $A_H$ :

$$\Delta_1(A_H, Lip_k \beta) = \sup \{ \|A_H f - f'\|_C : f' \in Lip_k \beta \} [3].$$

Имеют место теоремы.

ТЕОРЕМА 1. При  $H \rightarrow 0$  справедливы оценки:

1.  $\Delta_1(A_H, Lip_k \beta) \leq KH^\beta$ ;
2.  $MH^3 \leq \Delta_1\left(A_H, Lip_k \frac{1}{m}\right) \leq KH^{\sqrt{m}}$ ,

где  $K = \frac{9k}{5}$  для  $\beta = 1$ ,  $K = k\sqrt{\frac{9}{40}}$  для  $\beta = \frac{1}{m}$ ,

$$M = \frac{(m-1)}{x_{n-1}^m \cdot m^2 \cdot 2 \cdot 5^6} \min_{x_p, S, p} \left| \sum_{i=1}^S \alpha_i(x_p) \left( i - \frac{1}{2} - \frac{2m-1}{3^m} p \right) \right|,$$

где  $x_p = x_l + d + ph$ ,  $p = \overline{1, 4}$ ,  $S = 4$ ,  $d = \frac{\delta_1}{2}$ , если  $l = \overline{1, n-1}$ ,  $d = 0$ , если  $l = 0$ ;  $h = \frac{H}{S}$  для  $l = \overline{1, n-2}$ ,  $h = \frac{9H}{40}$  для  $l = 0$  и  $l = n-1$ ;  $x_p = x_l - \frac{\delta_1}{2} + ph$  для  $S = 5$ ,  $p = \overline{1, 5}$ ,  $h = \frac{H}{25}$ ;  $\delta_1 = \frac{H}{5}$ ,  $m \geq 2$ .

Для доказательства отметим свойства оператора  $A_H$ .

Так как [2]  $A_H(1; x) = 0$ ,  $A_H(\xi; x) = 1$ ,  $A_H(\xi^2; x) = 2x$ ,  $A_H(\xi^3; x) = 3x^2$ ,  $A_H(\xi^4; x) = 4x^3$ , а  $\int_0^x 1 d\xi = x$ , то  $A_H\left(\int_0^\xi 1 dx; x\right) = 1$ ,  $A_H\left(\int_0^\xi x dx; x\right) = x$ ,  $A_H\left(\int_0^\xi x^2 dx; x\right) = x^2$ ,  $A_H\left(\int_0^\xi x^3 dx; x\right) = x^3$ .

Оператор  $A_H \int_0^x$  обозначим  $\tilde{A}_H$ , откуда имеем

$$\tilde{A}_H(1; x) = 1, \quad \tilde{A}_H(\xi; x) = x, \quad \tilde{A}_H(\xi^2; x) = x^2, \quad \tilde{A}_H(\xi^3; x) = x^3.$$

Кроме того, для любой непрерывно дифференцируемой функции

$$A_H(f(\xi); x) = A_H\left(\int_0^\xi f'(x)dx + f(0); x\right).$$

Но

$$A_H(f(0); x) = f(0)A_H(1; x) = 0.$$

Следовательно,

$$A_H(f(\xi); x) = \tilde{A}_H(f'(\xi); x).$$

Таким образом, оператор  $\tilde{A}_H$  обладает свойствами оператора  $A_H$ , описанного в работе [4].

Оценка сверху следует из свойств оператора  $\tilde{A}_H$  и теоремы Дзядыка (см. [5], гл. VIII, § 4, теорема 1), примененной к  $\tilde{A}_H$  и  $f'(x) \in Lip_k \beta$ .

Оценка снизу получена для  $\left\| A_H\left(\frac{m}{m+1}\xi^{\frac{m+1}{m}}; x\right) - x^{\frac{1}{m}} \right\|_C$ ,  $x^{\frac{1}{m}} \in Lip_k \frac{1}{m}$ , а

$$\sup\left\{ \|A_H f - f'\|_C : f' \in Lip_k \frac{1}{m} \right\} \geq \left\| A_H\left(\frac{m}{m+1}\xi^{\frac{m+1}{m}}; x\right) - x^{\frac{1}{m}} \right\|_C.$$

ТЕОРЕМА 2. Для любой непрерывно дифференцируемой функции до  $r$ -го порядка ( $r \geq 4$ ) при  $H \rightarrow 0$  справедлива оценка:

$$MH^3 \leq \|A_H f - f'\|_C \leq KH^\beta,$$

где  $K = \frac{9k}{40}$  при  $\beta = 1$ ,  $K = k^m \sqrt[4]{\frac{9}{40}}$  для  $\beta = \frac{1}{m}$ ,

$$M = \min_{S, x_p, x_l} \frac{\left| f^{(IV)}(x_l)x_0 \sum_{i=1}^S \alpha_i(x_p) + 3f^{(III)}(x_l) \sum_{i=1}^S \alpha_i(x_p) \left(i - \frac{1}{2}\right) \right|}{5^6 \cdot 6},$$

где  $x_p = x_l + d + ph$ ,  $p = \overline{1, 4}$ ,  $S = 4$ ,  $d = \frac{\delta_1}{2}$ , если  $l = \overline{0, n-1}$ ,  $d = 0$ , если  $l = 0$ ;

$h = \frac{H}{5}$  для  $l = \overline{0, n-2}$ ,  $h = \frac{9H}{40}$  для  $l = 0$  и  $l = n-1$ ;  $x_p = x_l - \frac{\delta_1}{2} + ph$  для

$S = 5$ ,  $p = \overline{1, 5}$ ,  $k = \frac{H}{25}$ ,  $\delta_1 = \frac{H}{5}$ .

Доказательство оценки сверху аналогично получению оценки сверху в теореме 1.

Для получения оценки снизу использовалось разложение в ряд Тейлора первообразной интеграла от функций  $f(x)$  и  $f'(x)$  по степеням  $h$  на отрезках разбиения  $\Delta$ .

1. Хромова Г. В., Молоденкова И. Д. Методы приближенного решения задачи восстановления функций: Учеб. пособие. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2001. Ч. 1.
2. Молоденкова И. Д. Построение операторов, восстанавливающих производные // Математика. Механика. Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 95 – 98.
3. Хромова Г. В., Молоденкова И. Д. Методы приближенного решения задачи восстановления функций: Учеб. пособие. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2003. Ч. 2.
4. Молоденкова И. Д. Некоторые оценки точности приближений функций с помощью осредняющих операторов, сохраняющих сплайны // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 88 – 90.
5. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977.

УДК 519.4

**В. А. Молчанов**

### **О РАСПОЗНАВАНИИ ЯЗЫКОВ ПОЛУГРУППАМИ И АВТОМАТАМИ**

В связи с широким применением в компьютерных науках языков, содержащих как конечные, так и бесконечные в любую сторону слова, естественно возникает задача обобщения на такие языки классической теории формальных языков [1]. Полученные в этом направлении результаты (см., например, [2]) показывают, что при переносе основных понятий теории языков конечных слов на бесконечные слова возникают такие понятия, которые весьма неоднозначно интерпретируются и, как правило, приводят к разнообразным теоретическим проблемам. С другой стороны, в работе [3] предложен унифицированный подход к теории языков конечных автоматов на основе методов нестандартного анализа [4]: здесь естественно введено понятие распознаваемого автоматом Буши языка произвольных слов и описан класс таких языков. В последующей статье [5] с помощью методов нестандартного анализа естественно введено понятие языка произвольных слов, распознаваемого конечной полугруппой. В настоящей статье исследуется взаимосвязь между понятиями распознаваемых автоматами и полугруппами языков произвольных слов.

Рассмотрим конечный алфавит  $A$ . Пусть  $W_{fin}(A)$  – множество всех конечных слов,  $W^{\rightarrow}(A)$  – множество всех бесконечных вправо слов,  $W^{\leftarrow}(A)$  – множество всех бесконечных влево слов,  $W^{\leftrightarrow}(A)$  – множество всех бесконечных в обе стороны слов и  $W(A) = W_{fin}(A) \cup W^{\rightarrow}(A) \cup W^{\leftarrow}(A) \cup W^{\leftrightarrow}(A)$  – множество всех слов над алфавитом  $A$ . Подмножества  $W(A)$  называются *языками над алфавитом  $A$* .

Ясно, что  $W(A)$  можно рассматривать как четырехсортную алгебру  $W(A) = (W_{fin}(A), W^{\leftarrow}(A), W^{\rightarrow}(A), W^{\leftrightarrow}(A))$  с канонически определенными в

ней четырьмя операциями конкатенации подходящих слов и двумя унарными операциями над конечными словами  $u \in W_{fin}(A)$ , которые определяются по формулам:  $u^{+\omega} = uu\dots$ ,  $u^{-\omega} = \dots uu$ . При этом для любых  $x, y, z \in W_{fin}(A)$ ,  $u \in W^{+}(A)$ ,  $v \in W^{-}(A)$  и натурального числа  $n$  выполняются свойства:  $(xy)z = x(yz)$ ,  $u(xy) = (ux)y$ ,  $(xy)v = x(yv)$ ,  $(ux)v = u(xv)$ ,  $x(yx)^{+\omega} = (xy)^{+\omega}$ ,  $(x^n)^{+\omega} = x^{+\omega}$ ,  $(yx)^{-\omega} = (xy)^{-\omega}$ ,  $(x^n)^{-\omega} = x^{-\omega}$ . Удовлетворяющие таким свойствам четырехсортные алгебры называются *алгебрами Уилки*.

В работе [5] построен функтор, который каждой конечной полугруппе  $S$  ставит в соответствие конечную алгебру Уилки  $\bar{S} = (S, S^{\leftarrow}, S^{\rightarrow}, S^{\leftrightarrow})$ , так что для любого отображения  $\varphi$  алфавита  $A$  в полугруппу  $S$  существует однозначно определенный гомоморфизм  $\bar{\varphi}$  алгебры слов  $W(A)$  в алгебру  $\bar{S}$ , ограничение которого на множестве  $A$  совпадает с отображением  $\varphi$ .

Этот результат дает возможность следующим образом ввести понятие языка, распознаваемого конечной полугруппой. Пусть  $L \subset W(A)$  – язык произвольных слов над конечным алфавитом  $A$ ,  $S$  – конечная полугруппа и  $\varphi$  – отображение множества  $A$  в  $S$ . Будем говорить, что отображение  $\varphi$  распознает язык  $L$ , если существует такое четырехсортное подмножество  $P \subset \bar{S}$ , что для канонического гомоморфизма  $\bar{\varphi} : W(A) \rightarrow \bar{S}$  выполняется равенство:  $L = \{x \in W(A) : \bar{\varphi}(x) \in P\}$ . Язык  $L \subset W(A)$  называется *распознаваемым полугруппой*, если для некоторой конечной полугруппы  $S$  найдется такое отображение  $\varphi : A \rightarrow S$ , которое распознает язык  $L$ .

Основной результат работы [3] показывает, что язык  $L \subset W(A)$  в том и только том случае распознаваем автоматом Буши, если он получается из конечных языков конечных слов с помощью операций объединения, тернарного произведения и итерации. Такие подмножества множества  $W(A)$  называются *обобщенно рациональными языками*.

С помощью методов нестандартного анализа и результатов работы [6] доказан следующий принципиально важный факт.

**ТЕОРЕМА 1.** Каждый распознаваемый автоматом Буши язык  $L \subset W(A)$  распознаваем полугруппой.

**СЛЕДСТВИЕ.** Язык  $L \subset W(A)$  в том и только том случае распознаваем полугруппой, если он является конечным объединением языков вида  $X$ ,  $X^{-\omega}Y$ ,  $XY^{+\omega}$ ,  $X^{-\omega}YZ^{+\omega}$ , где  $X, Y, Z$  – рациональные языки [1] и  $X^{+\omega} = \{u_1u_2\dots : u_1, u_2, \dots \in X\}$ ,  $X^{-\omega} = \{\dots u_{-2}u_{-1} : \dots, u_{-2}, u_{-1} \in X\}$ .

Заметим, что в отличие от равносильности понятий распознаваемых языков конечных слов автоматами и полугруппами [1] класс распознаваемых полугруппами языков произвольных слов значительно шире класса распознаваемых автоматами Буши обобщенно рациональных языков. Однако можно так модифицировать понятие автомата Мюллера [1], что в теории языков произвольных слов такие автоматы будут алгебраическими эквивалентами конечных полугрупп.

Назовем *обобщенным автоматом Мюллера* алгебраическую систему

$$A = (Q, A, E, c, F, I, F, T),$$

где:

- 1)  $(Q, A, E)$  – автомат [1] с множеством состояний  $Q$ , входным алфавитом  $A$  и множеством переходов  $E \subset Q \times A \times Q$ ;
- 2)  $c$  – элемент множества  $Q$ , называемый центральным состоянием;
- 3)  $F$  – подмножество множества  $Q$ , называемое множеством заключительных состояний;
- 4)  $I$  и  $F$  – подмножества множества  $Q$ , называемые соответственно левой и правой таблицами состояний;
- 5)  $T$  – множество упорядоченных пар подмножеств множества  $Q$ , называемое *таблицей состояний*.

Путь  $p$  в автомате  $A$  определяется как конечная последовательность его последовательных переходов  $(q_1, a_1, q_2), (q_2, a_2, q_3), \dots, (q_n, a_n, q_{n+1})$ . При этом состояние  $q_1$  (соответственно  $q_{n+1}$ ) называется *началом* (соответственно *концом*) пути  $p$  и слово  $a_1 a_2 \dots a_n$  – меткой пути  $p$ . Эти понятия естественно обобщаются на бесконечные в любую сторону последовательности последовательных переходов автомата  $A$ , которые называются его *бесконечными путями*. Если  $p$  – бесконечный путь в автомате  $A$ , проходящий через центральное состояние  $c$ , то  $Q_{-\infty}(p)$  (соответственно  $Q_{+\infty}(p)$ ) обозначает множество состояний, которые путь  $p$  посещает бесконечно много раз до (соответственно после) посещения состояния  $c$ .

Путь  $p$  в автомате  $A$  называется *успешным*, если он проходит через центральное состояние  $c$  и удовлетворяет одному из следующих условий:

- 1)  $p$  есть конечный путь с началом  $c$  и концом в  $F$ ,
- 2)  $p$  есть такой бесконечный влево (соответственно вправо) путь, что множество  $Q_{-\infty}(p)$  (соответственно  $Q_{+\infty}(p)$ ) принадлежит таблице  $I$  (соответственно таблице  $F$ ),
- 3)  $p$  есть такой бесконечный в обе стороны путь, что множество  $(Q_{-\infty}(p), Q_{+\infty}(p))$  принадлежит таблице  $T$ .

Множество меток всех успешных путей в автомате  $A$  обозначается символом  $L(A)$ .

Язык  $L \subset W(A)$  называется распознаваемым автоматом Мюллера, если  $L = L(A)$  для некоторого обобщенного автомата Мюллера  $A$ .

**ТЕОРЕМА 2.** Язык  $L \subset W(A)$  в том и только том случае распознается полугруппой, если он распознается автоматом Мюллера.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Pin J. E. Finite semigroups and recognizable languages: an introduction // Semigroups, Formal Languages and Groups. NATO ASI. Series C: Mathematical and Physical Sciences. 1993. № 466. P. 1 – 32.
2. Perrin D., Pin J. E. Semigroups and automata on infinite words // Ibid. P. 49 – 72.

3. Molchanov V. A. Nonstandard approach to general rational languages // Contributions to General Algebra 13, Proceedings of the Dresden Conference 2000 (AAA60) and the Summer School 1999, Verlag Johannes Neyn, Klagenfurt, 2001. P. 233 – 244.

4. Альбеверио С., Фенстад Й., Хезг-Крон Р., Линдстрем Т. Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике. М.: Мир, 1990. 616 с.

5. Молчанов В. А. О естественном продолжении теории рациональных языков на языки произвольных слов // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 90 – 93.

6. Молчанов В. А. О матричных полугруппах над полукольцами и их приложениях к теории формальных языков // Там же, 2001. Вып. 3. С. 98 – 101.

УДК 517.51

Н. С. Морева

## О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЯДОВ УОЛША ПО ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМ

Пусть  $G$  – двоичная группа,  $w_n(t)$  – функции Уолша на  $G$ ,  $V_n$  – база окрестностей на  $G$  [1]. В [2] были указаны условия, при которых конечное или счетное множество  $E$  на  $d$ -мерной двоичной группе ( $d \geq 1$ ) являлось множеством единственности для  $d$ -кратного ряда Уолша при сходимости по двоичным кубам.

Мы в одномерном случае рассмотрим вопрос о том, когда конечное или счетное множество  $E \subset G$  является множеством единственности для ряда

$$\sum_{p=0}^{\infty} g_p(t), \quad (1)$$

где  $g_0 \equiv c_0$ ,  $g_1 \equiv 0$ ,  $g_2(t) = c_1 w_1(t)$ ,  $g_3 \equiv 0$ ,  $g_{2n}(t) = \sum_{k=2^{n-1}}^{2^{n-1}+2^{n-2}-1} c_k w_k(t)$ ,

$$g_{2n+1}(t) = \sum_{k=2^{n-1}+2^{n-2}}^{2^n-1} c_k w_k(t), \quad n=2,3,\dots$$

Ответ на этот вопрос дают приводимые ниже теоремы 1 и 2.

Прежде всего, отметим, что  $g_{2n}$  и  $g_{2n+1}$  постоянны на окрестностях  $V_n$ , и если  $g_{2n}(t_0) \neq 0$  ( $g_{2n+1}(t_0) \neq 0$ ), то во всех точках  $t$  окрестности  $V_{n-2}$ , такой что  $t_0 \in V_{n-2}$ ,  $g_{2n}(t) \neq 0$  ( $g_{2n+1}(t) \neq 0$ ).

**Определение 1.** Индексным множеством для конечного или счетного множества  $E \subset G$  будем называть множество

$$I_E = \{k : \exists V_k, \forall V_{k+1} \subset V_k, V_{k+1} \cap E \neq \emptyset\}.$$

Вторым индексным множеством для того же множества  $E \subset G$ , будем называть множество

$$I'_E = \{k : \exists V_{k-1}, \forall V_{k+1} \subset V_{k-1}, V_{k+1} \cap E \neq \emptyset\}.$$

Очевидны следующие свойства индексных множеств множества  $E$ :

- 1)  $I'_E \subset I_E$ ;
- 2) если  $k \in I'_E$ , то  $k-1 \in I_E$ ;
- 3) наименьший элемент множества  $I_E$  не принадлежит множеству  $I'_E$ .

ТЕОРЕМА 1. Пусть

1)  $E \subset G$  – конечное или счетное множество,  $I$  – индексное множество для множества  $E$ ,  $I'$  – второе индексное множество для множества  $E$ .

2) ряд (1) сходится к нулю всюду на  $G \setminus E$ ;

3)  $g_0 \equiv 0$ ;

4)  $g_{2(k+1)} \equiv 0$  и  $g_{2(k+1)+1} \equiv 0$ ,  $\forall k \in I'$ ;

5) либо  $g_{2(k+1)} \equiv 0$ , либо  $g_{2(k+1)+1} \equiv 0$ ,  $\forall k \in I \setminus I'$ ;  $g_2 \equiv 0$ , если  $0 \in I$ .

Тогда для всех остальных  $p$ ,  $g_p \equiv 0$ .

Доказательство. Пусть существует  $g_p \neq 0$ . Обозначим через  $p_1$  наименьший из таких индексов. Пусть  $k_1 = \left[ \frac{p_1}{2} \right]$ . Очевидно, что  $k_1 \notin I'$ , поэтому возможны два случая: А)  $k_1 \in I \setminus I'$ ; Б)  $k_1 \notin I$ .

И в том, и в другом случаях существует окрестность  $V_{k_1}$ , такая что  $V_{k_1} \cap E = \emptyset$  и  $\forall t \in V_{k_1}$   $g_{2k_1}(t) + g_{2k_1+1}(t) \equiv a_1$ ,  $a_1 \neq 0$ . Предположим для определенности, что  $a_1 > 0$ . Далее если бы при всех  $p > p_1$  на  $V_{k_1}$  имело место тождество  $g_p \equiv 0$ , то ряд (1) не сошелся бы к нулю на  $V_{k_1}$ , что противоречит условию теоремы. Поэтому существует наименьший индекс  $p_2$  ( $p_2 > 2k_1 + 1$ ) такой, что  $g_{p_2} \neq 0$  на  $V_{k_1}$ ,  $k_2 = \left[ \frac{p_2}{2} \right]$ . Тогда на некоторой окрестности  $V_{k_2}$   $g_{2k_2}(t) + g_{2k_2+1}(t) \equiv a_1$ ,  $a_2 > 0$ . Продолжая эти рассуждения, найдем последовательность вложенных окрестностей  $V_{k_1} \supset V_{k_2} \supset \dots \supset V_{k_d} \supset \dots$ , имеющих в пересечении точку  $t_0 \notin E$  и ряд в этой точке  $t_0$  не сходится к нулю. Полученное противоречие доказывает теорему.

В теореме 1 нельзя отказаться ни от одного из условий 3) – 5).

Определение 2. Пусть  $V_n$  – некоторая окрестность ранга  $n$ . Возьмем любую точку  $t = (t_k) \in V_n$ . Точки

$$(t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, 1, 0, 0, \dots) \text{ и } (t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, 0, 1, 1, \dots)$$

будем называть крайними точками окрестности  $V_n$ .

ТЕОРЕМА 2. Пусть  $I \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$  – произвольное множество такое, что  $(\mathbb{N} \cup \{0\}) \setminus I$  счетно, и пусть  $I'$  – произвольное подмножество множества  $I$  такое, что  $I'$  удовлетворяет свойствам 1) – 3) индексных множеств относительно множества  $I$ . Тогда

1) существует множество  $E \subset G$  такое, что множество  $I$  будет его индексным множеством,  $I'$  – вторым индексным множеством;

2)  $\forall k_i \in I \setminus I'$  найдется ряд вида (1), сходящийся к нулю всюду на  $G \setminus E$  такой, что  $g_{2(k_i+1)} \neq 0$  и  $g_{2(k_i+1)+1} \neq 0$ , либо  $g_{2(k+1)} \equiv 0$ , либо  $g_{2(k+1)+1} \equiv 0$ ,  $\forall k \in I \setminus I'$   $k \neq k_i$ ;  $g_2 \equiv 0$ , если  $0 \in I$  и  $k_i \neq 0$ ;  $g_{2(k+1)} \equiv 0$  и  $g_{2(k+1)+1} \equiv 0 \forall k \in I'$ ;  $g_0 \equiv 0$  и при этом неверно, что все остальные  $g_p \equiv 0$ ;

3)  $\forall k_j \in I'$  найдется ряд вида (1), сходящийся к нулю всюду на  $G \setminus E$  такой, что  $g_{2(k_j+1)} \neq 0$  или  $g_{2(k_j+1)+1} \neq 0$ ,  $g_{2(k+1)} \equiv 0$  и  $g_{2(k+1)+1} \equiv 0 \forall k \in I'$   $k \neq k_j$ ; либо  $g_{2(k+1)} \equiv 0$ , либо  $g_{2(k+1)+1} \equiv 0 \forall k \in I \setminus I'$ ;  $g_2 \equiv 0$ , если  $0 \in I$ ,  $g_0 \equiv 0$  и при этом неверно, что все остальные  $g_p \equiv 0$ ;

4) найдется ряд вида (1), сходящийся к нулю всюду на  $G \setminus E$  такой, что  $g_0 \neq 0$ ,  $g_{2(k+1)} \equiv 0$  и  $g_{2(k+1)+1} \equiv 0 \forall k \in I'$ ; либо  $g_{2(k+1)} \equiv 0$ , либо  $g_{2(k+1)+1} \equiv 0 \forall k \in I \setminus I'$ ;  $g_2 \equiv 0$ , если  $0 \in I$  и при этом неверно, что все остальные  $g_p \equiv 0$ .

Доказательство. Доказательство проведем только для пункта 1) в случае, когда  $I$  – счетное множество (случай, когда  $I$  конечно, рассматривается аналогично). Доказательства 2) – 4) непосредственно следуют из свойств функций  $g_p$ , определения 1 и вида построенного ниже множества  $E$ .

Пусть  $I \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$  – произвольное счетное множество такое, что  $(\mathbb{N} \cup \{0\}) \setminus I$  счетно,  $I = \{k_1, k_2, \dots, k_s, \dots\}$ ,  $k_i < k_{i+1}, \forall i \in \mathbb{N}$ . Пусть  $I'$  – произвольное подмножество множества  $I$  такое, что  $k_1 \notin I'$  и  $I'$  удовлетворяет свойству 3) индексных множеств относительно множества  $I$ .

Пусть на первом этапе множество  $E$  пусто. Представим двоичную группу в виде дизъюнктного объединения окрестностей  $V_{k_1}$  и выберем одну произвольную такую окрестность. Отметим крайние точки этой окрестности  $V_{k_1}$  и включим их в множество  $E$ .

Если  $k_2 = k_1 + 1$  и  $k_2 \notin I'$ , то разбиваем окрестность  $V_{k_1}$  на две окрестности  $V_{k_2}$ , выбираем одну из них, отмечаем в ней крайние точки и включаем их в множество  $E$ . Иначе разбиваем окрестность  $V_{k_1}$  на окрестности  $V_{k_2}$ , выбираем те из них, которые уже содержат точку из  $E$ , отмечаем в них крайние точки и включаем их в множество  $E$ . Аналогично продолжаем дальше.

На некотором  $h$ -м шаге, если  $k_h = k_{h-1} + 1$  и  $k_h \notin I'$ , то разбиваем окрестность  $V_{k_1}$  на окрестности  $V_{k_h-1}$ . Рассмотрим сначала все такие окрестности  $V_{k_h-1}$ , у которых только одна половина  $V_{k_h} \subset V_{k_h-1}$  содержит точки



из  $E$ . Выбираем те  $V_{k_h}$ , которые содержат точки из  $E$ , отмечаем в них крайние точки и включаем их в множество  $E$ . Далее рассматриваем те  $V_{k_h-1}$ , у которых обе  $V_{k_h}$  содержат точки из  $E$ . В каждой такой  $V_{k_h-1}$  выбираем только одну  $V_{k_h}$ , отмечаем в ней крайние точки и включаем их в множество  $E$ . Если не верно, что  $k_h = k_{h-1} + 1$  и  $k_h \notin I'$ , то разбиваем окрестность  $V_{k_1}$  на окрестности  $V_{k_h}$ , выбираем те из них, которые уже содержат точки из  $E$ , отмечаем в них крайние точки и включаем эти точки в  $E$ . Продолжая этот процесс далее, получаем требуемое множество  $E$ .

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Schipp F., Wade W. R., Simon P. Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis. Budapest: Akademiai Kiado, 1990.
2. Морева Н. С. Конечные и счетные множества единственности для кратных рядов Уолша // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 13-й Сарат. зимней шк. Саратов, 27 янв. – 3 февр. 2006 г. Саратов: ООО Изд-во «Научная книга», 2006. С. 121 – 122.

УДК 517.984

Е. В. Назарова

### О РАВНОСХОДИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ, ИМЕЮЩИХ РАЗРЫВЫ ПРОИЗВОДНОЙ ЯДРА НА ДИАГОНАЛЯХ\*

Рассматривается интегральный оператор

$$Af(x) = \int_0^1 A(x,t) f(t) dt. \quad (1)$$

Исследуется вопрос о равносходимости разложений произвольной суммируемой на отрезке  $[0;1]$  функции по системе собственных и присоединенных функций оператора (1) и в тригонометрический ряд Фурье.

Проблема равносходимости, имеющая давнюю историю, более всего изучена для дифференциальных операторов. В отношении интегральных операторов она изучена значительно меньше. В частности, А. П. Хромов в работе [1] ввел ограничения на ядро – условия гладкости, а также существенное условие скачка  $(n-1)$ -й производной ядра на диагонали единичного квадрата. Последнее условие задает канонический вид оператора среди всех интегральных операторов с данной системой собственных и присоединенных функций, разложения по которой равносходятся с разложением по тригонометрической системе. Но в связи с отсутствием конструктивно-

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003).

го перехода к каноническому оператору возник вопрос о нахождении классов интегральных операторов, для которых будет иметь место равносходимость. Поэтому начиная с 1998 г. стали исследоваться интегральные операторы, комплекснозначные ядра которых имеют скачки  $(n-1)$ -й производной не только на линии  $t = x$ , но и на линии  $t = 1 - x$ . Эти операторы удобнее рассматривать в следующем виде:

$$Af(x) = \alpha_1 \int_0^x A_1(x,t)f(t)dt + \alpha_2 \int_x^1 A_2(x,t)f(t)dt + \\ + \alpha_3 \int_0^{1-x} A_3(1-x,t)f(t)dt + \alpha_4 \int_{1-x}^1 A_4(1-x,t)f(t)dt. \quad (2)$$

Здесь  $\alpha_i$  ( $i=1, \dots, 4$ ) – комплексные константы, причем  $\delta = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 - (\alpha_3 - \alpha_4)^2 \neq 0$ . Предполагается, что ядро каждого интегрального слагаемого в (2) непрерывно дифференцируемо  $n$  раз по  $x$  и один раз по  $t$  на области своего задания и выполняются соотношения:

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j} A_i(x,t)|_{t=x} = \delta_{j,n-1}, \quad (j=0, \dots, n), \quad (3)$$

$\delta_{j,k}$  – символ Кронекера.

Для частных случаев оператора (2) теоремы равносходимости были получены в работе [2] (случай  $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ ); в работе [3] (случай  $\alpha_2 = \alpha_4 = 0, A_1 \equiv A_3$ ) и в работе [4] (случай произвольных комплексных констант  $\alpha_i, n=1$  – случай, когда разрыв терпит ядро оператора (1)). Рассматривается случай произвольных констант  $\alpha_i$  и нечетного натурального  $n > 2$  (разрыв терпит  $(n-1)$ -я производная ядра исходного интегрального оператора (1)).

Для получения теоремы равносходимости используется метод контурного интегрирования резольвенты по расширяющимся контурам в комплексной плоскости спектрального параметра. Удобнее вместо резольвенты Фредгольма оператора  $A$  рассматривать обычную резольвенту обратного оператора, имеющего вид

$$A^{-1}y = (E + N)^{-1}P(y^{(n)}(x)) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)}(x) \quad (4)$$

с граничными условиями

$$y^{(s)}(0) = \int_0^1 A_{x^s}^{(s)}(0,t)(E + N)^{-1}P(y^{(n)}(t)) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)}(t) dt. \quad (5)$$

Здесь  $s=0, \dots, n-1$ ;  $Pf(x) = \delta^{-1}[(\alpha_1 - \alpha_2)f(x) + (-1)^n(\alpha_4 - \alpha_3)f(1-x)]$ ,

$N$  – интегральный оператор  $Nf(x) = \int_0^1 N(x,t)f(t)dt$ .

Построение резольвенты  $R_\lambda$  сводится к изучению оператора  $L_0 : Py^{(n)}$  с краевыми условиями  $U_j(y) = 0, j = 1, \dots, n$ , последовательные возмущения которого приводят к оператору  $A^{-1}$ .  $U_j(y)$  – линейно независимые линейные формы от  $y^{(s)}(0)$  и  $y^{(s)}(1)$ , полученные после преобразования граничных условий (5) к виду  $U_j(y) = (y, \phi_j)$ , где  $(y, \phi_j) = \int_0^1 y(t) \phi_j(t) dt$ . Построение и исследование резольвенты  $R_{0,\lambda}$  оператора  $L_0$  сводится к решению краевой задачи  $n$ -го порядка в пространстве двумерных вектор-функций и оценки характеристического определителя, для которого получена асимптотическая формула. Затем исследование резольвенты позволяет получить для нее необходимые оценки.

**ТЕОРЕМА 1.** Положим  $\lambda\sqrt{\delta} = \rho^n$  ( $0 \leq \arg \rho \leq 2\pi/n$ ). Удалим из данного сектора  $\rho$ -плоскости те значения  $\rho$ , которые соответствуют нулям характеристического определителя, вместе с окрестностями одинакового достаточного малого радиуса  $\delta_0$ . Обозначим полученную область  $S_{\delta_0}$ . Тогда при больших значениях  $|\rho|$  справедливы оценки:

1.  $\|R_{0,\lambda} f\|_\infty = O(|\rho|^{1-n}) \|f\|_1$ ;
2.  $\|R_{0,\lambda} f\|_\infty = O(|\rho|^{1-n} \psi(\rho)) \|f\|_\infty$ ;
3.  $\|D^m R_{0,\lambda} f\|_1 = O(|\rho|^{1-n+m} \psi(\rho)) \|f\|_1$ ;
4.  $\|D^m R_{0,\lambda} \chi\|_\infty = O(|\rho|^{-n+m})$ ;

$$m = 0, \dots, n-1; \quad \psi(\rho) = \sum_{j=1}^n \Omega(|\operatorname{Re} \rho \omega_j|), \quad \Omega(y) = (1 - e^{-y})/y \quad \text{при } y \geq 0,$$

$D$  – оператор дифференцирования,  $\chi$  – характеристическая функция отрезка  $[\eta_0, \eta_1] \subset [0, 1]$ ,  $\omega_j$  – корни  $n$ -й степени из 1.

Далее получены формулы, связывающие резольвенты  $R_\lambda$  и  $R_{0,\lambda}$  и необходимые оценки для резольвенты  $R_\lambda$ . Наконец, приходим к основному результату.

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть для оператора (2) выполнены следующие условия: а)  $\delta \neq 0$ , б) ядро каждого интегрального слагаемого в (2) непрерывно дифференцируемо  $n$  раз по  $x$  и один раз по  $t$  на области своего задания, в) линейные формы  $U_j(y)$  регулярны по Биркгофу, г) выполняются соотношения (3), д)  $\int_0^1 \operatorname{Var} A_x^{(n)}(x, t)$  ограничена по  $t$ . Тогда для любой функции  $f(x) \in L[0; 1]$  и любого  $\delta_1 \in (0; 1/2)$  имеет место соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \max_{\delta_1 \leq \alpha \leq 1 - \delta_1} \left| S_r(f, x) - \sigma_{r|\sqrt{\delta}|}(f, x) \right| = 0,$$

где  $S_r(f, x)$  – частичная сумма ряда Фурье функции  $f(x)$  по собственным и присоединенным функциям оператора  $A$  для тех характеристических чисел  $\lambda_k$ , для которых  $|\lambda_k| < r$ ;  $\sigma_{r|\sqrt{\delta}|}(f, x)$  – частичная сумма тригонометрического ряда Фурье функции  $f(x)$  для тех номеров  $k$ , для которых  $(2k\pi)^n < r|\sqrt{\delta}|$  и  $r$  таково, что  $\{|\rho| = r^{1/n}, 0 \leq \arg \rho \leq 2\pi/n\} \subset S_{\delta_0}$ .

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромов А. П. Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов // Мат. сб. 1981. Т. 144(156), № 3. С. 358 – 450.
2. Хромов А. П. Теорема равносходимости для интегрального оператора с переменным верхним пределом интегрирования // Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа: Сб. ст. М., 1999. С. 255 – 266.
3. Корнев В. В., Хромов А. П. О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Мат. сб. 2001. Т. 192. С. 33 – 50.
4. Назарова Е. В. О равносходимости спектральных разложений для интегральных операторов с разрывными ядрами // Spectral and evolution problems: Proceedings of the Fourteenth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. September 18 – 29, 2003, Sevastopol, Laspi. Simferopol, 2004. Vol. 14. С. 30 – 34.

УДК 519.4

С. И. Небалуев, И. А. Кляева

### ТОЛЕРАНТНЫЕ КУБИЧЕСКИЕ СИНГУЛЯРНЫЕ ГОМОЛОГИИ

В настоящей статье изучаются толерантные кубические сингулярные гомологии, являющиеся подходящим аппаратом для построения спектральных последовательностей толерантных расслоений.

Толерантным отрезком длины  $m$  назовем толерантное пространство

$$(I_m, \iota_m),$$

где  $I_m = \left\{ \frac{k}{m} \mid k = \overline{0, m} \right\}$  – множество точек деления единичного отрезка на  $m$  частей, а толерантность  $\iota_m$  определяется условием

$$\frac{k}{m} \iota_m \frac{l}{m} \Leftrightarrow |k - l| \leq 1.$$

Для  $n \in \mathbb{N}$  назовем  $n$ -мерным толерантным сингулярным кубом толерантного пространства  $(X, \tau)$  любое толерантное отображение

$u: \left( \times I_m, \times \iota_m \right) \rightarrow (X, \tau)$  для произвольных  $m \in N$ . Если  $n=0$ , то 0-мерным кубом в  $(X, \tau)$  будем считать любую точку пространства  $(X, \tau)$ .

Обозначим через  $\mathcal{Q}_n(X)$  абелеву группу, свободно порожденную над  $Z$  всеми  $n$ -мерными толерантными сингулярными кубами пространства  $(X, \tau)$ , если  $n \geq 0$ , а для  $n < 0$  положим  $\mathcal{Q}_n(X) = 0$ .

Для каждого  $n \geq 1$  определим граничный гомоморфизм  $\partial_n: \mathcal{Q}_n(X) \rightarrow \mathcal{Q}_{n-1}(X)$ , задаваемый на образующих формулой

$$\begin{aligned} (\partial_n u) \left( \left( \frac{k_i}{m} \right)_{i=1, n-1} \right) &= \sum_{i=1}^n (-1)^i \left[ u \left( \frac{k_1}{m}, \dots, \frac{k_{i-1}}{m}, 0, \frac{k_i}{m}, \dots, \frac{k_{n-1}}{m} \right) - \right. \\ &\quad \left. - u \left( \frac{k_1}{m}, \dots, \frac{k_{i-1}}{m}, 1, \frac{k_i}{m}, \dots, \frac{k_{n-1}}{m} \right) \right]. \end{aligned}$$

Обычным способом проверяется, что  $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ . Тем самым получаем цепной комплекс  $\{\mathcal{Q}_n(X), \partial_n\}$ . Однако прежде чем рассматривать гомологии, этот комплекс следует нормализовать по тем же причинам, что и в алгебро-топологическом случае. Для этого рассмотрим толерантные сингулярные  $n$ -мерные ( $n > 0$ ) кубы  $u: \times I_m \rightarrow X$ , получающиеся из  $(n-1)$ -мерных кубов  $u': \times I_m \rightarrow X$  следующим образом:

$$u \left( \frac{k_1}{m}, \dots, \frac{k_{n-1}}{m}, \frac{k_n}{m} \right) = u' \left( \frac{k_1}{m}, \dots, \frac{k_{n-1}}{m} \right).$$

Такие кубы мы будем называть вырожденными. Они образуют подгруппу  $D_n(X) \subset \mathcal{Q}_n(X)$ . При этом имеем  $\partial_n(D_n(X)) \subset D_{n-1}(X)$ , что позволяет рассмотреть фактор-комплекс  $\{C_n(X) = \mathcal{Q}_n(X)/D_n(X), \partial_n\}$ , который будем называть комплексом нормализованных толерантных кубических сингулярных цепей пространства  $(X, \tau)$ . Гомологии этого комплекса будем обозначать  $H^Q(X) = \bigoplus_{n \geq 0} H_n^Q(X)$  и называть толерантными кубическими сингулярными гомологиями пространства  $(X, \tau)$ . Таким образом определен ковариантный функтор толерантных кубических сингулярных гомологий.

Если во всех описанных выше конструкциях постоянно брать  $m=1$ , то получим подкомплексы  $\{Q_n^s(X)\} \subset \{\mathcal{Q}_n(X)\}$ ,  $\{D_n^s(X)\} \subset \{D_n(X)\}$ ,  $\{C_n^s(X) = Q_n^s(X)/D_n^s(X)\} \subset \{C_n(X)\}$ .

Группы гомологий комплекса  $\{C_n^s(X), \partial_n\}$  будем обозначать  $H^s(X) = \bigoplus_{n \geq 0} H_n^s(X)$  и называть простыми толерантными кубическими сингулярными гомологиями пространства  $(X, \tau)$ . Получаем еще один ковариантный гомологический функтор.

ТЕОРЕМА 1. Для любого толерантного пространства  $(X, \tau)$  имеется естественный по  $(X, \tau)$  изоморфизм  $H^Q(X) \cong H^S(X)$ .

Для доказательства достаточно показать, что комплексы  $\{C_n^s(X), \partial_n\}$  и  $\{C_n(X), \partial_n\}$  естественно цепно гомотопно эквивалентны. Для этого, в свою очередь, надо предъявить два цепных отображения между этими комплексами, которые были бы взаимно обратны с точностью до цепной гомотопии. Такими отображениями являются отображения  $\{\tilde{i}: C_n^s(X) \rightarrow C_n(X)\}$  и  $\{\tilde{j}: C_n(X) \rightarrow C_n^s(X)\}$ , которые индуцированы отображениями  $\{i_n: Q_n^s(X) \subset Q_n(X)\}$  и  $\{j: C_n(X) \rightarrow C_n^s(X)\}$ , первое из которых суть вложение, причем  $i_n(D_n^s(X)) \subset D_n(X)$ . Опишем теперь отображение  $j = \{j_n\}$ . Пусть  $u: \times I_m^n \rightarrow X$  — толерантный сингулярный куб в  $(X, \tau)$ . Тогда для каждой точки подмножества

$$\left\{ \left( \frac{k_1}{m}, \dots, \frac{k_n}{m} \right) \in \times I_m^n \mid (\forall i = \overline{1, n}) \ 0 \leq k_i \leq m-1 \right\} \subset \times I_m^n$$

определим простые толерантные сингулярные кубы  $u_{k_1, \dots, k_n} \in Q^s(X)$ :

$$(\forall \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{0, 1\}) \ u_{k_1, \dots, k_n}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = u \left( \frac{k_1 + \varepsilon_1}{m}, \dots, \frac{k_n + \varepsilon_n}{m} \right).$$

В этих обозначениях определим отображения  $j_n$  на образующих формулой  $j_n(u) = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{m-1} u_{k_1, \dots, k_n}$ . Очевидно, что при этом удовлетворяется необходимое для индуцирования условие  $j_n(D_n(X)) \in D_n^s(X)$ .

ТЕОРЕМА 2. Для толерантного пространства  $(X, \tau)$  группа простых толерантных кубических сингулярных гомологий  $H^S(X)$  и группа толерантных сингулярных гомологий  $H^\wedge(X)$  [3] изоморфны естественно по  $(X, \tau)$ .

Для доказательства этой теоремы возьмем толерантный  $n$ -мерный куб  $\times I_1^n = \left\{ (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \mid (\forall i = \overline{1, n}) \ \varepsilon_i \in \{0, 1\} \right\}$ , все точки которого толерантны друг другу. И рассмотрим толерантный  $n$ -мерный симплекс  $\Lambda^n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ , все точки которого также толерантны друг другу. Для удобства дальнейшего представим все точки симплекса  $\Lambda^n$  как некоторые точки толерантного куба  $\times I_1^{n+1} = \left\{ (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n) \mid (\forall i = \overline{0, n}) \ \delta_i \in \{0, 1\} \right\}$ . А

именно  $x_0 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $x_1 = (0, 1, \dots, 0)$ , ...,  $x_n = (0, 0, \dots, 1)$ . Построим теперь отображение  $\rho_n : \times I_1^n \rightarrow \Lambda^n$ , воспользовавшись классическими формулами Серра:

$$\begin{aligned}\delta_0 &= 1 - \varepsilon_1, \\ \delta_1 &= \varepsilon_1(1 - \varepsilon_2), \dots \\ \delta_{n-1} &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-1}(1 - \varepsilon_n), \\ \delta_n &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n.\end{aligned}$$

С помощью отображений  $\rho_n$  строится гомоморфизм  $\rho$  группы толерантных сингулярных цепей в группу простых толерантных кубических цепей, который коммутирует с граничными гомоморфизмами и индуцирует изоморфизм, утверждаемый теоремой 2.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Zeeman E. C. The topology of brain and visual perception // The topology of 3-Manifolds. N. Y., 1962. P. 240 – 256.
2. Небагуев С. И. Алгебро-топологические характеристики толерантных пространств // Математика и ее приложения. Теория, методы, алгоритмы: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов, 1991. Вып. 2. С. 105 – 107.
3. Небагуев С. И. Группы гомологий прямого произведения толерантных пространств // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов, 2002. Вып. 4. С. 105 – 107.

УДК 517.51

**В. В. Новиков**

### О КЛАССЕ ФУНКЦИЙ, ОБЛАДАЮЩИХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМ АНАЛОГОМ УСИЛЕННОГО С-СВОЙСТВА\*

Обозначим через  $L_n(T, f, x)$  тригонометрический полином Лагранжа, интерполирующий  $2\pi$ -периодическую функцию  $f$  в равноотстоящих узлах  $T = \{x_{k,n} = 2\pi k / (2n + 1), k = -n, \dots, n, n = 1, 2, \dots\}$ .

В 1940 году Д. Е. Меньшов доказал теорему [1] о наличии у измеримой, почти всюду конечной функции так называемого усиленного С-свойства: для любой функции  $f$  указанного вида и любого  $\varepsilon > 0$  существует функция  $g$  такая, что  $f = g$  на некотором множестве  $E$ ,  $\text{mes} E > 2\pi - \varepsilon$  и ряд Фурье  $\sigma(g)$  сходится равномерно на  $[-\pi, \pi]$ .

Более того, им было показано, что если  $f$ , в частности непрерывна, то множество  $E$ , на котором производится исправление, будет зависеть только от  $\varepsilon$  и модуля непрерывности функции  $f$ , но не от самой этой функции. Точнее, справедлива следующая теорема [2].

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 04-01-00060).

Для любой положительной неубывающей функции  $\omega(h)$  определенной для  $h > 0$  и такой, что  $\lim_{h \rightarrow 0} \omega(h) = 0$ , и для любого  $\varepsilon > 0$  существует множество  $E$ ,  $\text{mes} E < \varepsilon$ , обладающее свойством: если  $f \in C_{2\pi}$  – любая, для которой модуль непрерывности  $\omega(f, h)$  удовлетворяет условию  $\omega(f, h) \leq \omega(h), h > 0$ , то  $f$  можно так изменить на  $E$ , чтобы для вновь полученной функции  $g$  ее ряд Фурье  $\sigma(g)$  сходиллся равномерно.

Хорошо известно [3, 4], что последовательность  $\{L_n(T, f, x)\}$  для  $f \in C_{2\pi}$  может расходиться всюду, поэтому представляет интерес вопрос о наличии подобного усиленного  $C$ -свойства у произвольной функции  $f \in C_{2\pi}$  по отношению к указанному интерполяционному процессу. Как выяснилось, ответ на этот вопрос является положительным, причем справедлива

**ТЕОРЕМА 1 [5].** Для любой функции  $f \in C_{2\pi}$  и любого  $\varepsilon > 0$  существует функция  $g \in C_{2\pi}$  такая, что  $f = g$  на некотором множестве  $E$ ,  $\text{mes} E > 2\pi - \varepsilon$ , и интерполяционный процесс  $\{L_n(T, g, x)\}$  сходится к  $g$  равномерно на  $[-\pi, \pi]$ .

В настоящей статье изложена схема доказательства интерполяционного аналога второй из приведенных выше теорем Д. Е. Меньшова.

**ТЕОРЕМА 2.** Для любой положительной неубывающей функции  $\omega(h)$  определенной для  $h > 0$  и такой, что  $\lim_{h \rightarrow 0} \omega(h) = 0$ , и для любого  $\varepsilon > 0$  существует множество  $E$ ,  $\text{mes} E < \varepsilon$ , обладающее свойством: если  $f \in C_{2\pi}$  – любая, для которой модуль непрерывности  $\omega(f, h)$  удовлетворяет условию  $\omega(f, h) \leq \omega(h), h > 0$ , то  $f$  можно так изменить на  $E$ , чтобы для вновь полученной функции  $g$  интерполяционный процесс  $\{L_n(T, g, x)\}$  сходиллся равномерно.

Доказательство теоремы проводится по следующей схеме. Пусть даны произвольная  $\omega(h)$  указанного вида,  $f \in C_{2\pi}$  такая, что  $\omega(f, h) \leq \omega(h), h > 0$  и  $\varepsilon > 0$ . Пусть  $\{v(j)\}$  – также произвольная пока последовательность  $v(j) \uparrow \infty, v(j) \in \mathbf{N}$ , которую мы подберем позже. Не теряя общности, можно считать, что  $f \geq 0$ . Обозначим

$$\Delta_{k,j} = [-\pi + 2\pi(k-1)2^{-v(j)}, -\pi + 2\pi k 2^{-v(j)}], \quad k = 1, \dots, 2^{v(j)},$$

и положим

$$\tilde{f}_j(x) = \min_{t \in \Delta_{k,j}} f(t), \quad x \in \Delta_{k,j}, \quad k = 1, \dots, 2^{v(j)}, \quad j \in \mathbf{N}.$$

Последовательность  $\{\tilde{f}_j(x)\}$  не убывает по  $j$  и равномерно сходится к  $f$  на  $[-\pi, \pi]$ . Положим

$$f_j(x) = \tilde{f}_j(x) - \tilde{f}_{j-1}(x), \quad \tilde{f}_0(x) \equiv 0.$$



Тогда ряд  $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$  равномерно и абсолютно на  $[-\pi, \pi]$  сходится к  $f$ , причем  $f_j(x) \leq \omega(\pi 2^{1-v(j)})$ ,  $j \geq 2$ .

Далее нам понадобится несколько лемм.

ЛЕММА 1 [6]. Для произвольной  $f \in C_{2\pi}$  и  $n \geq 3$  положим

$$T_{n,p}^*(f) = \sum_{k=-[n/2]}^{[n/2]} \left| \frac{f(x_{2k+1,n}) - f(x_{2k,n})}{\varphi(2k+1, n, p)} \right|, \quad p = -n-1, \dots, n,$$

где

$$\varphi(m, n, p) = \begin{cases} p-m, & \text{если } |p-m| \leq 3([n/2] + 1); \\ 2n - (p-m), & \text{если } p-m > 3([n/2] + 1); \\ -2n - (p-m), & \text{если } p-m < -3([n/2] + 1); \end{cases}$$

$$T_n^*(f) = \max_{-n-1 \leq p \leq n} T_{n,p}^*(f).$$

Штрих у знака суммы указывает на отсутствие (не более двух) слагаемых, у которых индекс  $k$  является решением уравнения  $\varphi(2k+1, n, p) = 0$ ; кроме того, будем считать, что  $x_{n+1,n} = \pi$ ,  $x_{-n-1,n} = -\pi$ .

Тогда условие  $T_n^*(f) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  влечет равномерную на  $[-\pi, \pi]$  сходимости к  $f$  полиномов  $\{L_n(T, f, x)\}$ .

ЛЕММА 2 [6]. Если  $f \in C_{2\pi}$  — ограниченной вариации на  $[-\pi, \pi]$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n^*(f) = 0.$$

ЛЕММА 3. Пусть  $A > 0$ ,  $s \in \mathbb{N}$  и  $\Lambda = \{\pi k 2^{1-s}\}_{k=1}^{2^s}$  — фиксированные числа. Тогда существует число  $\varepsilon = \varepsilon(A, \Lambda) > 0$  такое, что  $\forall \delta < \varepsilon$  и для любой ступенчатой функции  $f$ ,  $0 \leq f(x) \leq A$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$ , множество точек разрыва которой совпадает с  $\Lambda$ , найдутся функция  $g \in C_{2\pi}$  и множество  $E = E(A, \Lambda, \delta)$ ,  $\text{mes} E < \delta$ ,  $T \subset E \subset [-\pi, \pi]$ , обладающие свойствами:

$$1) 0 \leq g(t) \leq f(t), \quad t \in [-\pi, \pi]; \quad (1)$$

$$2) f(t) = g(t), \quad t \in [-\pi; \pi] \setminus E; \quad (2)$$

$$3) \sup_n T_n^*(g) \leq CA, \quad (3)$$

где  $C$  — абсолютная постоянная;

$$4) T_n^*(g) = 0, \quad 2n+1 < 2^{s^2}; \quad (4)$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} T_n^*(g) = 0. \quad (5)$$

Доказательство леммы 3 проводится, в основном, с помощью рассуждений, аналогичных рассуждениям из работ [6] и [7]. Ввиду громоздкости мы его не приводим.

Пусть  $\nu(1)$  – достаточно большое число. Определим функцию  $g_1 \in C_{2\pi}$  как кусочно-линейную и такую, что

$$\text{mes}\{t \in [-\pi; \pi]: f_1(t) \neq g_1(t)\} \equiv \text{mes}E_1 < \varepsilon/2, 0 \leq g_1(t) \leq f_1(t).$$

В силу леммы 2 имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n^*(g_1) = 0.$$

Выберем  $\nu(2)$  так, чтобы выполнялось условие

$$T_n^*(g_1) \leq 2^{-1}, \forall n: 2n+1 \geq 2^{\nu(2)}.$$

Используя лемму 3, построим функцию  $g_2 \in C_{2\pi}$  и множество  $E_2$ , для которых выполнены условия (1) – (5) при  $A = \omega(\pi 2^{1-\nu(2)})$ ,  $s = \nu(2)$ ,  $\delta = \varepsilon 2^{-2}$ .

Пусть теперь  $j \geq 3$ , числа  $\nu(1), \dots, \nu(j-1)$  уже выбраны, функции  $g_1, \dots, g_{j-1}$  и множества  $E_1, \dots, E_{j-1}$  построены. Выберем  $\nu(j)$  так, что

$$T_n^*\left(\sum_{i=1}^{j-1} g_i\right) \leq \frac{1}{j}, \forall n: 2n+1 \geq 2^{\nu(j)}, \quad (6)$$

и построим  $g_j \in C_{2\pi}$  и множество  $E_j$ , для которых выполнены условия

(1) – (5) при  $A = \omega(\pi 2^{1-\nu(2)})$ ,  $s = \nu(2)$ ,  $\delta = \varepsilon 2^{-2}$ . Положим  $g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j(x)$ .

Этот ряд абсолютно и равномерно сходится, так что  $g_j \in C_{2\pi}$ , кроме того,

$f(t) = g(t), t \in [-\pi; \pi] \setminus E$ , где  $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ ,  $\text{mes}E < \varepsilon$ . Если учесть лемму 1, то

для завершения доказательства достаточно проверить, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n^*(g) = 0. \quad (7)$$

Пусть  $n$  – достаточно большой номер, определим  $j$  из условия

$$2^{\nu^2(j-1)} < 2n+1 \leq 2^{\nu^2(j)}.$$

В силу абсолютной сходимости ряда  $\sum_{j=1}^{\infty} g_j(x)$  можно записать

$$T_{n,p}^*(g) \leq \sum_{k=1}^{j-1} T_{n,p}^*(g_k) + T_{n,p}^*(g_j) + \sum_{k=j+1}^{\infty} T_{n,p}^*(g_k) \equiv V_1 + V_2 + V_3, \forall p.$$

Учитывая (6) для  $V_1$ , (1) и (3) для  $V_2$ , и, наконец, (4) для  $V_3$ , получим (7).

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Меньшов Д. Е.* Sur les series de Fourier des fonctions continues // МС. 1940. Vol. 8(50). P. 493 – 518.
2. *Меньшов Д. Е.* О рядах Фурье непрерывных функций // УЗМ. 1951. Сер. 148. Математика. Т. IV. С. 108 – 132.

3. Grunwald G. Über Divergenzerscheinungen der Lagrangeschen Interpolationspolynome Stetiger Funktionen // Ann. Math. 1936. Vol. 37. S. 908 – 918.

4. Marcinkiewicz J. Sur la divergence des polynomes d'interpolation // Acta Litt. Sci. Szeged. 1936/1937. Vol. 8. P. 131 – 135.

5. Новиков В. В. Интерполяционный аналог одной теоремы Д. Е. Меньшова // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 100 – 102.

6. Привалов А. А. О равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа // Мат. заметки. 1986. Т. 39, № 2. С. 228 – 243.

7. Новиков В. В. О расходимости ряда Фурье функции со сходящимся интерполяционным процессом Лагранжа // Analysis Mathematica. 2003. Vol. 29. P. 289 – 317.

УДК 519.4

В. Е. Новиков

## НАСЫЩЕННЫЕ СЕМЕЙСТВА МИНИМАЛЬНЫХ ГЕНЕРАТОРОВ КОНЦЕПТА

Статья посвящена исследованию строения насыщенных семейств минимальных генераторов концепта в контексте с  $n$ -арным отношением. Главный результат работы устанавливает критерий наибольшего насыщенного семейства минимальных генераторов концепта.

Развивая идеи концептуального анализа [1] и используя аппарат алгебры отношений В. В. Вагнера [2], обобщим понятие формального контекста с одноместного на  $n$ -местное множество атрибутов и объектов и определим концепт на контексте с  $n$ -арным отношением. Пусть  $\rho \subseteq M_1 \times \dots \times M_n$  –  $n$ -арное отношение. Обозначим  $\bar{n} := (1, 2, \dots, n)$ ,  $M_{\bar{n}} := M_1 \times \dots \times M_n$  и  $\bar{i}_k := (i_1, i_2, \dots, i_k)$ ,  $x_{\bar{i}_k} := (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})$ ,  $M_{\bar{i}_k} := M_{i_1} \times \dots \times M_{i_k}$  для произвольных  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ . При этом также обозначаем  $\bar{i}_k \subseteq \bar{n}$ . Будем говорить, что  $k$ -система  $x_{\bar{i}_k}$  входит в отношение  $\rho$ , если существует  $n$ -система  $x_{\bar{n}} \in \rho$ , для которой элементы  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$  являются её соответствующими компонентами. Для  $\bar{i}_s, \bar{j}_k \subseteq \bar{n}$ ,  $a_{\bar{i}_s} \in M_{\bar{i}_s}$ ,  $X \subseteq M_{\bar{i}_s}$  обозначим:

$$\pi_{\bar{j}_k}(\rho) := \{y_{\bar{j}_k} \in M_{\bar{j}_k} \mid y_{\bar{j}_k} \text{ входит в } \rho\}, \sigma_{\{a_{\bar{i}_s}\}}(\rho) := \{x_{\bar{n}} \in \rho \mid a_{\bar{i}_s} \subseteq x_{\bar{n}}\},$$

$$\rho_{\bar{j}_k} \langle x_{\bar{i}_s} \rangle := \pi_{\bar{j}_k}(\sigma_{\{x_{\bar{i}_s}\}}(\rho)), \bar{\rho}_{\bar{j}_k}(X) := \bigcap_{x_{\bar{i}_s} \in X} \rho_{\bar{j}_k} \langle x_{\bar{i}_s} \rangle, \bar{\rho}_{\bar{i}_s \bar{j}_k}(X) := \bar{\rho}_{\bar{i}_s}(\bar{\rho}_{\bar{j}_k}(X)).$$

Формальный контекст определяется как тройка  $K = (M_{\bar{n}}, M_{\bar{i}_s}, \rho)$ , где зафиксирован  $\bar{i}_s \subseteq \bar{n}$ ,  $M_{\bar{i}_s}$  называется множеством объектов,  $M_{\bar{n}}$  – декартово произведение базисных множеств атрибутов,  $\rho \subseteq M_{\bar{n}}$  – некоторое  $n$ -арное отношение на базисных множествах атрибутов. Если  $X = \bar{\rho}_{\bar{i}_s \bar{j}_k}(X)$  и  $\bar{\rho}_{\bar{i}_s}(Y) = X$  для  $Y \subseteq M_{\bar{j}_k}$ , то  $X$  называется  $\bar{i}_s$ -концептом по

$\bar{j}_k$  и  $Y - \bar{j}_k$ -генератором  $\bar{i}_s$ -концепта  $X$ . В этом случае элементы множества  $X$  будем называть *объектами*, а элементы множества  $Y$  – *атрибутами*  $\bar{i}_s$ -концепта  $X$  по  $\bar{j}_k$ , при этом также  $\bar{j}_k$  называем *индексом* генератора или атрибута: В [3] представлен обзор некоторых результатов с определёнными понятиями. Эти результаты, в частности, касаются проблемы распознавания концепта, решение которой может быть использовано в задаче диагностики сложных систем и принятия решения. Определим ещё одно понятие.

Семейство минимальных (по теоретико-множественному включению)  $\bar{j}_k$ -генераторов  $\{Y_t\}_{t \in T}$   $\bar{i}_s$ -концепта  $X$  называется *насыщенным*, если объединение  $\bigcup_{t \in T} Y_t$  не содержит минимального  $\bar{j}_k$ -генератора, не присутствующего в этом семействе.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.** Пусть  $\rho \subseteq M_{\bar{n}}$ ,  $\bar{i}_s, \bar{j}_k \subseteq \bar{n}$ , задан контекст  $K = (M_{\bar{n}}, M_{\bar{i}_s}, \rho)$  и  $X \subseteq M_{\bar{i}_s}$  – некоторый  $\bar{i}_s$ -концепт по  $\bar{j}_k$  на данном контексте. Непустое пересечение двух насыщенных семейств минимальных  $\bar{j}_k$ -генераторов  $\bar{i}_s$ -концепта  $X$  опять является насыщенным семейством минимальных  $\bar{j}_k$ -генераторов этого концепта.  $\square$

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть  $\bar{i}_s, \bar{j}_k \subseteq \bar{n}$ ,  $\rho \subseteq M_{\bar{n}}$ , задан контекст  $K = (M_{\bar{n}}, M_{\bar{i}_s}, \rho)$ , подмножество  $X \subseteq M_{\bar{i}_s}$  является  $\bar{i}_s$ -концептом по  $\bar{j}_k$  и  $Y = \hat{\rho}_{\bar{j}_k}(X)$ . Насыщенное семейство минимальных  $\bar{j}_k$ -генераторов  $\{Y_t\}_{t \in T}$   $\bar{i}_s$ -концепта  $X$  является наибольшим тогда и только тогда, когда для любых  $y_t \in Y_t$  ( $t \in T$ ) выполняется условие:  $\hat{\rho}_{\bar{i}_s}(Y \setminus \{y_t : t \in T\}) \neq X$ .  $\square$

**Пример.** В таблице представлено отношение  $\rho \subseteq M_1 \times M_2$  (его диаграмма 1-концептов по атрибуту 2 изображена на рис. 1<sup>1</sup>), которое имеет 1-концепт  $\{a5, a6\}$  по атрибуту 2. Этот концепт, в частности, имеет минимальные 2-генераторы  $\{b1, b3\}$  и  $\{b3, b4, b5\}$ . Таким образом, минимальные генераторы могут пересекаться и иметь разную мощность.

Нетрудно заметить, что 1-концепт  $\{a5, a6\}$  имеет всего пять различных минимальных генераторов:  $\{b1, b2\}$ ,  $\{b1, b3\}$ ,  $\{b1, b4\}$ ,  $\{b2, b3\}$ ,  $\{b3, b4, b5\}$  – это наибольшее насыщенное семейство минимальных 2-генераторов 1-концепта  $\{a5, a6\}$ . Они являются подмножествами максимального 2-генератора  $\{b1, b2, b3, b4, b5\}$  этого концепта. Причем семейство минимальных генераторов  $\{\{b1, b2\}, \{b1, b3\}\}$  ненасыщенное, из объединения его элементов можно получить ещё один минимальный 2-генератор  $\{b2, b3\}$  1-концепта  $\{a5, a6\}$ . А семейство  $\{\{b1, b2\}, \{b1, b3\}, \{b2, b3\}\}$  уже насыщенное. Легко видеть, что семейства  $\{\{b2, b3\}, \{b3, b4, b5\}\}$ ;

<sup>1</sup> Этот рисунок диаграммы частично упорядоченного множества получен с помощью программы «КонцептАнализ», выполненной в дипломной работе студента СГУ И. Каурцева под руководством автора.

$\{\{b1, b3\}, \{b1, b4\}, \{b3, b4, b5\}\}; \{\{b1, b2\}, \{b1, b4\}\}$  и  $\{\{b1, b2\}, \{b1, b3\}, \{b2, b3\}, \{b1, b4\}\}$  также насыщенные. Следовательно, насыщенными должны являться и любые их непустые пересечения:  $\{\{b2, b3\}\}; \{\{b1, b3\}\}; \{\{b3, b4, b5\}\}; \{\{b1, b2\}\}; \{\{b1, b3\}, \{b1, b4\}\}; \{\{b1, b4\}\}$ .

На рис. 2 изображена диаграмма упорядоченного множества всех насыщенных семейств минимальных 2-генератор 1-концепта  $\{a5, a6\}$ .

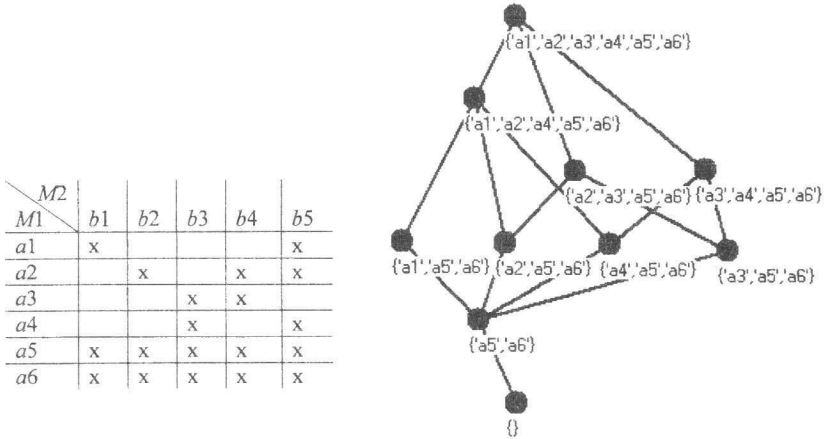


Рис. 1

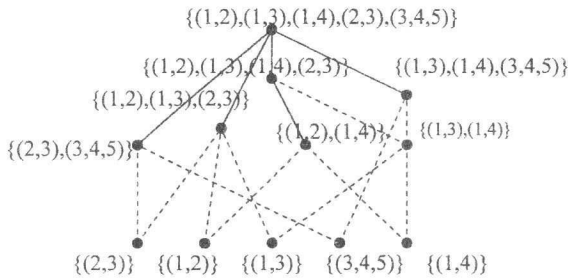


Рис. 2

Элементы этой диаграммы замаркированы индексами 2-атрибутов.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ganter B., Wille R. Formal Concept Analysis. Mathematical Foundations.* Berlin, 1999.
2. *Вагнер В. В. Теория отношений и алгебра частичных отображений // Теория полугрупп и её приложения.* Саратов, 1965. Вып. 1. С. 3 – 178.
3. *Новиков В. Е. О концептуальном анализе на контексте с многомерными атрибутами // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов, 2005. Вып. 7. С. 82 – 85.*

А. А. Орел

## ПРИМЕНЕНИЕ АППАРАТА ФОРМАЛЬНЫХ ГРАММАТИК ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ФАКТОГРАФИЧЕСКИХ ИНФОРМАЦИОННО-ПОИСКОВЫХ СИСТЕМ

Рассматривается технология построения фактографических информационно-поисковых систем (ИПС), использующая аппарат формальных КС-грамматик [1], позволяющая создавать специализированные языки для описания предметной области и формулировать запросы для получения данных, отвечающих заданным критериям.

В фактографических ИПС хранятся факты, извлеченные из различных документов, относящихся к какой-либо предметной области. Они связываются между собой системой отношений, образуя сеть, называемую тезаурусом предметной области. Запросы, поступающие в фактографические ИПС, используют тезаурус для формирования соответствующих отчетов с помощью метода поиска по образцу.

В качестве примера построения тезауруса предметной области с использованием аппарата КС-грамматик приведем фрагмент описания информационно-аналитической системы в кардиологии [2], который был получен в результате совместной работы эксперта-специалиста в предметной области и аналитика-специалиста по представлению знаний.

Терминальными символами порождающей грамматики будут: Вторичная\_гипертензия, Мягкая, Умеренная, Тяжелая, Без\_поражения\_органов, Кардиопатия, Нефропатия Почечная, Кровообращения, 1, 2, 3, 4.

Нетерминальные символы представлены следующими грамматическими правилами в расширенной нотации Бэкуса-Наура:

```

Повышение_кровяного_давления ::= Первичная_гипертензия |
Вторичная_гипертензия
Первичная_гипертензия ::= Степень Клиническое_проявление
Степень ::= Мягкая | Умеренная | Тяжелая
Клиническое_проявление ::= Без_поражения_органов |
С_поражением_органов
С_поражением_органов ::= {Поражение_органа Осложнения}
Поражение_органа ::= Кардиопатия | Нефропатия
Осложнения ::= {Недостаточность Степень_осложнения}
Недостаточность ::= Почечная | Кровообращения
Степень_осложнения ::= 1 | 2 | 3 | 4

```

Начальным символом грамматики будем считать нетерминальный символ из правой части первого правила. В рассматриваемом случае им будет «Повышение\_кровяного\_давления». Таким образом, в информационно-аналитической системе содержатся факты, представляющие причины повышенного кровяного давления у кардиологических больных.

База данных содержит множество именованных предложений, удовлетворяющих рассмотренным грамматическим правилам. Например:

Пациент 1:

Тяжелая Кардиопатия Кровообращения 1 Нефропатия Почечная 1

Пациент 2:

Тяжелая Кардиопатия Кровообращения 3 Нефропатия Почечная 2

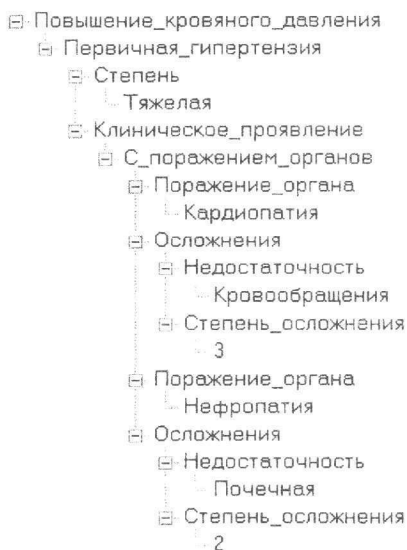
Пациент 3:

Умеренная Нефропатия Почечная 3

Предложения представляют собой цепочки терминальных символов грамматики, интерпретируемых как значения нетерминальных символов, выражающих понятия (концепты) предметной области. Порождающая грамматика при выполнении синтаксического анализа предложений связывает концепты с их значениями и позволяет выявить смысл хранимой в базе данных информации.

Наиболее простой и естественной формой выражения смысла некоторого предложения из базы данных является иерархия, начинающаяся от корневого понятия, представленного начальным символом грамматики, формируемой в виде дерева синтаксического разбора этого предложения.

Для предложения с именем «Пациент 2» из рассмотренной базы данных соответствующая иерархия понятий имеет вид



Для формулирования запросов к базе данных будем использовать образцы цепочек терминальных символов, построенных в виде шаблонов в соответствии с заданными критериями поиска, которым могут отвечать некоторые предложения, хранимые в базе данных. Кроме символов исход-

ной грамматики образец может содержать заключенные в угловые скобки специальные символы – квантификаторы, которые служат для выделения множеств терминальных символов.

Например, запрос может быть построен на основе следующего образца:

Тяжелая Кардиопатия Кровообращения <любой> Нефропатия  
Почечная 1 | 2.

Каждому образцу соответствует специальная грамматика запроса, полученная с помощью сужения области значений выражений из правых частей правил вывода исходной порождающей грамматики. При этом возможно введение новых нетерминальных символов.

Для рассмотренного примера грамматика запроса имеет вид  
Повышение\_кровяного\_давления ::= Первичная\_гипертензия  
Первичная\_гипертензия ::= Степень Клиническое\_проявление  
Степень ::= Тяжелая  
Клиническое\_проявление ::= С\_поражением\_органов  
С\_поражением\_органов ::= Поражение\_органа\_1 Осложнения\_1  
Поражение\_органа\_2 Осложнения\_2  
Поражение\_органа\_1 ::= Кардиопатия  
Осложнения\_1 ::= Недостаточность\_1 Степень\_осложнения\_1  
Недостаточность\_1 ::= Кровообращения  
Степень\_осложнения\_1 ::= 1 | 2 | 3 | 4  
Поражение\_органа\_2 ::= Нефропатия  
Осложнения\_2 ::= Недостаточность\_2 Степень\_осложнения\_2  
Недостаточность\_2 ::= Почечная  
Степень\_осложнения\_2 ::= 1 | 2

Грамматика запроса позволяет выделить из базы данных подмножество удовлетворяющих ей предложений. Для рассмотренного запроса будет выделено подмножество предложений с именами Пациент 1 и Пациент 2. Формирование базы данных, образцов запросов и соответствующих грамматик запросов эффективно реализуется с помощью компьютерных технологий.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ахо А., Ульман Дж. Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции: В 2 т. М., 1978.

2. Орел А. А., Гриднев В. И., Петров Н. В., Котельникова Е. В. Новые методологические подходы проектирования информационно-аналитических систем в кардиологии // Кардиология: Эффективность и безопасность диагностики и лечения: Тез. докл. Российского национального конгресса кардиологов. Москва, 6–11 окт. 2001 г. М., 2001.



## О РАЗЛОЖИМОСТИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ БУЛЕВЫХ (0,1)-МАТРИЦ

Известно, что для ориентированных полуперманентов  $\overset{+}{\nabla} A, \overset{-}{\nabla} A$  (компонент бидетерминанта) и перманентов  $PerA = \overset{+}{\nabla} A \cup \overset{-}{\nabla} A$  справедливы формулы Лапласа, дающие разложения по элементам строк или столбцов любой квадратной матрицы с элементами из произвольного коммутативного полукольца [1–3]. Для правых  $RDetA = \overset{+}{\nabla} A \setminus \overset{-}{\nabla} A$  и левых  $LDetA = \overset{-}{\nabla} A \setminus \overset{+}{\nabla} A$  ориентированных определителей квадратных  $n \times n$ -матриц над произвольной булевой алгеброй, определяемых [4, 5] как соответствующие булевы разности ориентированных полуперманентов и для определителей, определяемых как симметрическая разность ориентированных полуперманентов  $DetA = (\overset{+}{\nabla} A \setminus \overset{-}{\nabla} A) \cup (\overset{-}{\nabla} A \setminus \overset{+}{\nabla} A)$ , формулы Лапласа не выполняются в общем случае. Попытки в определении условий, при которых разложения таких определителей возможны, предпринимались и ранее. Авторы работы [6] приводят достаточные условия разложения определителя по некоторой строке, удовлетворяющей определенным условиям. Тем не менее формулы разложения определителей по элементам строк или столбцов булевой матрицы верны для достаточно широкого класса матриц над двухэлементной булевой алгеброй  $B_2 = \{0, 1\}$ . К таким матрицам, в частности, относятся матрицы, которые в данной статье названы матрицами без внутреннейности. Это и есть основной результат статьи. В ней продолжаются исследования булевых ориентированных полуперманентов и определителей дающие булевозначные инварианты бинарных отношений на конечных множествах.

В случае булевой алгебры  $B_2$  всякая ненулевая булева  $n \times n$ -матрица может быть одного из четырех типов: внешней  $(\overset{+}{\nabla} A, \overset{-}{\nabla} A) = (0, 0)$ , внутренней  $(\overset{+}{\nabla} A, \overset{-}{\nabla} A) = (1, 1)$ , положительной  $(\overset{+}{\nabla} A, \overset{-}{\nabla} A) = (1, 0)$  или отрицательной  $(\overset{+}{\nabla} A, \overset{-}{\nabla} A) = (0, 1)$ , употребляя терминологию, введенную в [7]. Оказывается, что формулы Лапласа всегда выполняются для матриц  $A$ , если  $(\overset{+}{\nabla} A, \overset{-}{\nabla} A) = (0, 0), (\overset{+}{\nabla} A, \overset{-}{\nabla} A) = (1, 1)$ . Такие матрицы можно назвать матрицами без внутреннейности. Определители таких булевых (0,1)-матриц всегда совпадают с их перманентами:  $PerA = DetA = 1$  или  $PerA = DetA = 0$ .

Определение. Перестановочная  $n \times n$ -матрица  $P$ , получаемая четной или нечетной перестановкой столбцов (или строк) единичной  $n \times n$ -матрицы, называется *четной* или *нечетной диагональю* матрицы  $A$  соответственно, если  $P \subset A$ .

Из определения полуперманентов  $\overset{+}{\nabla} A, \overset{-}{\nabla} A$  получаем следующее утверждение.

ЛЕММА. Квадратная матрица является внутренней тогда и только тогда, когда у нее есть *четные и нечетные диагонали*.

СЛЕДСТВИЕ. Матрица является положительной булевой матрицей тогда и только тогда, когда у нее есть четная диагональ и нет нечетной диагонали. Аналогично для отрицательной булевой матрицы найдется нечетная диагональ и не существует четная. Матрица является внешней булевой матрицей тогда и только тогда, когда у нее нет ни четных, ни нечетных диагоналей.

Символом  $\partial_k^i A$  ( $i, k = 1, 2, \dots, n$ ) обозначим матрицу, получаемую из  $n \times n$ -матрицы  $A$  удалением строки и столбца с соответствующими номерами  $i$  и  $k$ .

ТЕОРЕМА. Пусть матрица  $A$  над булевой алгеброй  $B_2$  является матрицей без внутренней, тогда выполняются формулы разложения детерминантов по любой  $i$ -й строке этой матрицы:

$$RDetA = \bigcup_{k=1}^n (a_k^i \cap R_k^i Det(\partial_k^i A)), \quad (1)$$

где  $R_k^i = R$ , если  $i+k$  – четное, и  $R_k^i = L$ , если  $i+k$  – нечетное;

$$LDetA = \bigcup_{k=1}^n (a_k^i \cap L_k^i Det(\partial_k^i A)), \quad (2)$$

где  $L_k^i = L$ , если  $i+k$  – четное, и  $L_k^i = R$ , если  $i+k$  – нечетное.

Аналогичное утверждение верно и для столбцов.

Доказательство. Для внешней матрицы, определяемой условием

$RDetA = LDetA = PerA = \overset{+}{\nabla} A = \overset{-}{\nabla} A = 0$ , известная формула разложения  $PerA = \bigcup_{k=1}^n (a_k^i \cap Per(\partial_k^i A)) = 0$  дает  $a_k^i \cap Per(\partial_k^i A) = 0$  для всех  $i$  и  $k$ . Следовательно,

$$a_k^i \cap RDet(\partial_k^i A) = a_k^i \cap LDet(\partial_k^i A) = 0,$$

так как  $R(L)Det(\partial_k^i A) \subseteq Per(\partial_k^i A)$ . Тогда формулы (1), (2) выполняются, так как в правых и левых частях стоят нули.

Докажем теперь формулу (1), полагая для определенности, что  $A$  есть матрица положительная. Тогда можно разложить перманент, получая

равенство  $R\text{Det}A = \text{Per}A = \bigcup_{k=1}^n (a_k^i \cap \text{Per}(\partial_k^i A)) = I$ . Остается показать, что  $a_k^i \cap \text{Per}(\partial_k^i A) = a_k^i \cap (R)_k^i \text{Det}(\partial_k^i A)$  для всех значений индексов  $i$  и  $k$ .

Действительно, это выполняется, если  $a_k^i \cap \text{Per}(\partial_k^i A) = 0$ , так как  $R(L)\text{Det}(\partial_k^i A) \subset \text{Per}(\partial_k^i A)$ . Если же  $a_k^i = \text{Per}(\partial_k^i A) = I$ , то, как будет показано ниже, верным становится равенство  $\text{Per}(\partial_k^i A) = R_k^i \text{Det}(\partial_k^i A) = I$ .

Это действительно так. В противном случае были бы две альтернативные ситуации: либо  $\text{Per}(\partial_k^i A) = \overset{+}{\nabla}(\partial_k^i A) = \overset{-}{\nabla}(\partial_k^i A) = I$ , либо  $\text{Per}(\partial_k^i A) = L_k^i \text{Det}(\partial_k^i A) = I$ . В случае, когда матрица  $\partial_k^i A$  удовлетворяет первому условию, то есть является внутренней, она содержит по лемме две диагонали  $\tilde{P}_1$  и  $\tilde{P}_2$  разной четности. Рассмотрим теперь матрицы  $P_1 = \begin{pmatrix} I & O \\ O^T & \tilde{P}_1 \end{pmatrix}$  и  $P_2 = \begin{pmatrix} I & O \\ O^T & \tilde{P}_2 \end{pmatrix}$ . Учитывая, что  $a_k^i = I$  и этот элемент не находится в строчках и столбцах, образующих подматрицу  $\partial_k^i A$  получаем, что матрицы  $P_1$  и  $P_2$ , после  $i+k-2$  транспозиций их строк или столбцов, выводящих единицу из верхнего правого угла на место элемента  $a_k^i$ , остаются перестановочными матрицами разной четности, содержащимися в матрице  $A$ . Последнее противоречит положительности матрицы  $A$ .

Рассмотрим теперь второй случай, когда  $\text{Per}(\partial_k^i A) = L_k^i \text{Det}(\partial_k^i A) = I$ . Если сумма  $i+k$  четна, то  $L_k^i \text{Det}(\partial_k^i A) = L\text{Det}(\partial_k^i A) = I$ . Следовательно, матрица  $\partial_k^i A$  отрицательная. У нее есть нечетная диагональ  $\tilde{P}$ , и нет четной диагонали. Но тогда  $\begin{pmatrix} I & O \\ O^T & \tilde{P} \end{pmatrix}$  есть нечетная перестановочная матрица, которая после  $i+k-2$  (четного числа) транспозиций ее строк или столбцов, выводящих единицу из верхнего правого угла на место элемента  $a_k^i$ , дает нечетную диагональ матрицы  $A$ , что противоречит начальному условию ее положительности. Если сумма номеров  $i+k$  нечетная, то  $L_k^i \text{Det}(\partial_k^i A) = R\text{Det}(\partial_k^i A) = I$ . Следовательно, матрица  $\partial_k^i A$  положительная. У нее есть четная диагональ  $\tilde{P}$  и нет нечетной диагонали. Но тогда  $\begin{pmatrix} I & O \\ O^T & \tilde{P} \end{pmatrix}$  есть четная перестановочная матрица, которая после  $i+k-2$  (нечетного числа) транспозиций ее строк или столбцов дает нечетную диагональ матрицы  $A$ , что вновь противоречит условию ее положительности. Доказательство формулы (2) проходит похожим образом. Для случая, когда матрица  $A$  является отрицательной, рассуждения проводятся аналогично.  $\square$

СЛЕДСТВИЕ. Определитель всякой матрицы без внутренности можно разложить по любой строке с номером  $i$ , то есть  $DetA = \bigcup_{k=1}^n (a_k^i \cap Det(\partial_k^i A))$ . Аналогично  $DetA = \bigcup_{k=1}^n (a_j^k \cap Det(\partial_j^k A))$  есть разложение по произвольному столбцу с номером  $j$ .

Последняя формула является очевидным следствием формул (1), (2).

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Rutherford D. E.* Inverses of Boolean matrices // Proc. Glasgow Math. Assoc. 1963. Vol. 6, № 1. P. 49 – 53.
2. *Golan J. S.* Semirings and their Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 1999. xi, 381 p.
3. *Poplin P. L., Hartwig R. E.* Determinantal identities over commutative semirings // Linear Algebra Appl. 2004. Vol. 387. P. 99 – 132.
4. *Поплавский В. Б.* О равенстве обратных булевых матриц симметрической разности ориентированных присоединенных матриц // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов, 2005. Вып. 7. С. 94 – 97.
5. *Поплавский В. Б.* Ориентированные определители произведения булевых матриц // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов, 2004. Вып. 6. С. 111 – 114.
6. *Chesley D. S., Bevis J. H.* Determinants for matrices over lattices // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1969. A 68, № 2. P. 138 – 144.
7. *Poplavski V. B.* Orientation and permanent decomposition of Boolean matrices // Abstracts The 9<sup>th</sup> Asian Logic Conference. 16 – 19 aug. 2005, Novosibirsk, Russia. Novosibirsk State University, Sobolev Institute of Mathematics. Novosibirsk, 2005. P. 117 – 119.

УДК 517.95

**Д. В. Поплавский**

### МЕТОД ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЕКТОРНОГО МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КДФ НА ПОЛУОСИ\*

Рассматривается следующая краевая задача при  $x \geq 0, t \geq 0$

$$\left. \begin{aligned} u_t + 2u_x(3u^2 + v^2) + 4uvv_x + u_{xxx} &= 0, \\ v_t + 2v_x(3v^2 + u^2) + 4vuu_x + v_{xxx} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), v|_{t=0} = v_0(x), \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial^{k-1} u}{\partial x^{k-1}} \right|_{x=0} = u_k(t), \quad \left. \frac{\partial^{k-1} v}{\partial x^{k-1}} \right|_{x=0} = v_k(t), \quad k = \overline{1,3}. \quad (3)$$

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 04-01-00007).

Здесь  $u_k, v_k, k = \overline{0,3}$  – непрерывные комплекснозначные функции. Известно [1], что система (1) допускает эквивалентное представление нулевой кривизны, а следовательно, смешанная задача (1) – (3) может быть решена методом обратной спектральной задачи, в котором нелинейная задача (1) – (3) сводится к обратной задаче на полуоси для соответствующей дифференциальной системы первого порядка по матрице Вейля. В данной статье получены нелинейные эволюционные уравнения для элементов матрицы Вейля и дан алгоритм решения задачи (1) – (3). При этом активно привлекаются результаты по обратной задаче на полуоси для дифференциальных систем с кратными корнями характеристического многочлена [2, 3].

Пусть  $D = \{(x, t) : x \geq 0, t \geq 0\}$ . Обозначим через  $J$  множество вектор-функций  $(f(x, t), g(x, t))$  таких, что функции  $\partial^j f / \partial x^j, \partial^j g / \partial x^j, j = \overline{0,3}, \partial f / \partial t, \partial g / \partial t$  непрерывны в  $D$  и суммируемы на полуоси  $x \geq 0$  при каждом фиксированном  $t \geq 0$ . Будем говорить, что  $\{u(x, t), v(x, t)\} \in P$ , если  $(u(x, t), v(x, t)) \in J$ . Решение задачи (1) – (3) будем искать в классе  $P$ .

Систему (1) можно представить в виде условия совместности двух линейных уравнений

$$\begin{aligned} Y_x &= GY, \\ Y_t &= FY, \end{aligned} \quad (4)$$

которое записывается в виде

$$G_t - F_x + GF - FG = 0,$$

где  $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)^T, G(x, t, \lambda) = i \begin{pmatrix} -\lambda & u & v \\ u & \lambda & 0 \\ v & 0 & \lambda \end{pmatrix},$

$$F(x, t, \lambda) = 4i \begin{pmatrix} -\lambda w & uw + \frac{1}{2}i\lambda u_x - \frac{1}{4}u_{xx} & vw + \frac{1}{2}i\lambda v_x - \frac{1}{4}v_{xx} \\ uw - \frac{1}{2}i\lambda u_x - \frac{1}{4}u_{xx} & \lambda(\lambda^2 - \frac{1}{2}u^2) & -\frac{1}{2}\lambda uv \\ vw - \frac{1}{2}i\lambda v_x - \frac{1}{4}v_{xx} & -\frac{1}{2}\lambda uv & \lambda(\lambda^2 - \frac{1}{2}v^2) \end{pmatrix},$$

$w = \lambda^2 - \frac{1}{2}(u^2 + v^2), \lambda$  – спектральный параметр.

Пусть  $\{u(x, t), v(x, t)\}$  – решение задачи (1) – (3). При фиксированном  $t \geq 0$  рассмотрим векторное уравнение (4) или, что то же самое, систему

$$Y' - i \begin{pmatrix} 0 & u & v \\ u & 0 & 0 \\ v & 0 & 0 \end{pmatrix} Y = i\lambda \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 \end{pmatrix} Y, \quad \beta_1 = -1, \beta_2 = 1. \quad (5)$$

Рассмотрим сектора

$$S_0 = \{\lambda : \operatorname{Re}(\lambda\beta_1) < \operatorname{Re}(\lambda\beta_2)\}, \quad S_1 = \{\lambda : \operatorname{Re}(\lambda\beta_2) < \operatorname{Re}(\lambda\beta_1)\}.$$

Обозначим  $\Phi(x, t, \lambda) = (\Phi_1(x, t, \lambda), \Phi_2(x, t, \lambda), \Phi_3(x, t, \lambda)) := [\Phi_{kj}(x, t, \lambda)]_{k, j=\overline{1,3}}$ , где  $\Phi_k(x, t, \lambda)$ ,  $k=\overline{1,3}$  – решения системы (5) такие, что а) при  $\lambda \in S_0$ :  $\Phi_{11}(0, t, \lambda) = 1$ ;  $\Phi_{12}(0, t, \lambda) = 0$ ,  $\Phi_{22}(0, t, \lambda) = 1$ ,  $\Phi_{32}(0, t, \lambda) = 0$ ;  $\Phi_{13}(0, t, \lambda) = 0$ ,  $\Phi_{23}(0, t, \lambda) = 0$ ,  $\Phi_{33}(0, t, \lambda) = 1$ ;  $\Phi_1(x, t, \lambda) = O(\exp(\lambda\beta_1 x))$ ,  $x \rightarrow \infty$ ; б) при  $\lambda \in S_1$ :  $\Phi_{11}(0, t, \lambda) = 1$ ;  $\Phi_{21}(0, t, \lambda) = 0$ ,  $\Phi_{12}(0, t, \lambda) = 0$ ,  $\Phi_{22}(0, t, \lambda) = 1$ ;  $\Phi_{13}(0, t, \lambda) = 0$ ,  $\Phi_{23}(0, t, \lambda) = 0$ ,  $\Phi_{33}(0, t, \lambda) = 1$ ;  $\Phi_k(x, t, \lambda) = O(\exp(\lambda\beta_2 x))$ ,  $k=1,2$ ,  $x \rightarrow \infty$ . Введем матрицу  $M(t, \lambda) = [M_{kj}(t, \lambda)]_{k, j=\overline{1,3}}$  следующим образом:

а) при  $\lambda \in S_0$

$$M(t, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ M_{21}(t, \lambda) & 1 & 0 \\ M_{31}(t, \lambda) & 0 & 1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \Phi_{21}(0, t, \lambda) & 1 & 0 \\ \Phi_{31}(0, t, \lambda) & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

б) при  $\lambda \in S_1$

$$M(t, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ M_{31}(t, \lambda) & M_{32}(t, \lambda) & 1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \Phi_{31}(0, t, \lambda) & \Phi_{32}(0, t, \lambda) & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $M(t, \lambda)$  называется *матрицей Вейля* для системы (5). Введем также матрицу  $F^0(t, \lambda) = [F_{kj}^0(t, \lambda)]_{k, j=\overline{1,3}}$  по формуле

$$F^0(t, \lambda) = 4i \begin{pmatrix} -\lambda w_1 & u_1 w_1 + \frac{1}{2} i \lambda u_2 - \frac{1}{4} u_3 & v_1 w_1 + \frac{1}{2} i \lambda v_2 - \frac{1}{4} v_3 \\ u_1 w_1 - \frac{1}{2} i \lambda u_2 - \frac{1}{4} u_3 & \lambda(\lambda^2 - \frac{1}{2} u_1^2) & -\frac{1}{2} \lambda u_1 v_1 \\ v_1 w_1 - \frac{1}{2} i \lambda v_2 - \frac{1}{4} v_3 & -\frac{1}{2} \lambda u_1 v_1 & \lambda(\lambda^2 - \frac{1}{2} v_1^2) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где  $w_1 = \lambda^2 - \frac{1}{2}(u_1^2 + v_1^2)$ .

**ТЕОРЕМА 1.** Элементы матрицы Вейля  $M(t, \lambda)$  удовлетворяют следующим нелинейным эволюционным уравнениям по переменной  $t$ :

а) при  $\lambda \in S_0$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} M_{21} &= -M_{21}^2 F_{12}^0 + M_{21}(F_{22}^0 - F_{11}^0) - M_{21} M_{31} F_{13}^0 + M_{31} F_{23}^0 + F_{21}^0, \\ \frac{\partial}{\partial t} M_{31} &= -M_{31}^2 F_{13}^0 + M_{31}(F_{33}^0 - F_{11}^0) - M_{21} M_{31} F_{12}^0 + M_{21} F_{32}^0 + F_{31}^0; \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

б) при  $\lambda \in S_1$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} M_{31} &= -M_{31}^2 F_{13}^0 + M_{31}(F_{33}^0 - F_{11}^0) - M_{31}M_{32}F_{23}^0 - M_{32}F_{21}^0 + F_{31}^0, \\ \frac{\partial}{\partial t} M_{32} &= -M_{32}^2 F_{23}^0 + M_{32}(F_{33}^0 - F_{22}^0) - M_{31}M_{32}F_{13}^0 - M_{31}F_{12}^0 + F_{32}^0. \end{aligned} \right\} (8)$$

Используя эволюционные уравнения (7), (8) и решение обратной задачи восстановления потенциала системы (5) по матрице Вейля, строим алгоритм решения краевой задачи (1) – (3).

Алгоритм 1. Пусть заданы функции  $u_0(x)$ ,  $v_0(x)$ ,  $u_k(t)$ ,  $v_k(t)$ ,  $k = \overline{1,3}$ .

1. Находим матрицу  $F^0(t, \lambda) = [F_{kj}^0(t, \lambda)]_{k, j = \overline{1,3}}$  по формуле (6).

2. По функциям  $u_0(x)$ ,  $v_0(x)$  строим  $M^0(\lambda) = [M_{kj}^0(\lambda)]_{j, k = \overline{1,3}}$  – матрицу Вейля при  $t = 0$ .

3. Решая эволюционные уравнения (7), (8) при начальных условиях  $M_{kj}^0(\lambda)$ , находим матрицу Вейля  $M(t, \lambda)$  при всех  $t \geq 0$ .

4. Находим функции  $u(x, t)$  и  $v(x, t)$ , решая обратную задачу по  $M(t, \lambda)$  методом, изложенным в [2, 3].

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Наянов В. И.* Многополевые солитоны. М.: Наука, 2005. 278 с.
2. *Yurko V. A.* An inverse spectral problem for differential systems on the half-line with multiplied roots of characteristic polynomial // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2005. Vol. 13, № 5. P. 503–512.
3. *Юрко В. А.* Обратная спектральная задача для сингулярных несамосопряженных дифференциальных систем // Мат. сб. 2004. Т. 195, № 12. С. 123–155.

УДК 004.77

**А. А. Попов**

#### ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ СЕРВИСОВ ИНТЕРНЕТ

Появление первого сервиса (предоставление информации в виде html-страниц) можно отнести к 1990 году – времени создания глобальной сети Интернет. Сейчас по некоторым оценкам специалистов, отслеживающих список новых сетевых сервисов, (<http://www.emilychang.com/go/ehub>), их количество измеряется сотнями. Резкий скачок популярности интернет-сервисов в последние годы во многом, помимо наблюдаемого ныне многообразия общедоступных источников информации, связан с тем, что технологический прогресс, наконец, достиг возможности, предоставляемые сетью. Среди конечных пользователей нормой стали не модемные, а ши-

рокополосные соединения, за счет этого сервисы могут наращивать новые мультимедийные возможности. Под интернет-сервисом, или интернет-службой можно понимать любые информационные услуги, предоставляемые сервером приложений сети Интернет. Удобно разделять сервисы по нескольким категориям:

1. По представлению информации, доставляемой сервисами: в текстовой форме, графической, в режиме видео, в режиме аудио, в форме тактильных ощущений (тренажеры виртуальной реальности и т.п.), либо в другой двоичной форме.
2. По тематике информации, поставляемой посредством данных сервисов (новостные, развлекательные, познавательные и т.п.).
3. По характеру услуг, предоставляемых сервисами: виртуальные услуги (в виде каких-либо данных) и материальные (заказ чего-либо через Интернет, вызов специалистов и т.п.)

Чтобы понять структуру глобальной сети и предоставляемых ей сервисов, автор предлагает использовать следующую приближенную биологическую модель ее структуры.

1. Телесной оболочкой сети является техническая составляющая:
  - программные модули – клетки, строительный материал тела;
  - рабочие станции, оконечное оборудование – органы чувств, по которым поступает информация;
  - линии связи – нервные окончания;
  - серверы приложений, обрабатывающие запросы – нервные узлы;
  - данные, информация – память сети.
2. Протоколы передачи данных – профессиональные языки, которые «понимает» сеть.
3. Окружающая среда сети – это пользователи сети.
4. Тогда сервисы не что иное, как возможности, способности сети.

Развитие возможностей современного Интернета так или иначе определяется всеми перечисленными составляющими. В данной же статье уделяется внимание только тем тенденциям развития данной области, которые отличаются принципиальной новизной и наибольшим эффектом.

#### *Семантические сети и новые протоколы прикладного уровня*

Одной из особенностей использования современной глобальной сети является реализация концепции «длинного хвоста», когда в клиентскую сеть организации, предоставляющей услуги посредством Интернет, вовлекаются мелкие и мельчайшие партнеры [1]. Их взаимодействие обеспечивается сетью сервисов схожих тематик и распределенными хранилищами однородной информации. Экономическая обоснованность данного подхода очевидна: явных ограничений на количество и территориальное распределение партнеров сервисной сети не существует, и потребители могут выбрать тот узел сети, который им доступнее. Отсюда следует, что отличии



тельной чертой интернет-сервисов нового поколения должна быть открытость их интерфейсов, а также поддержка единых протоколов обмена информацией между ними, зависящих не от платформ, а лишь от сути контента, предоставляемого сервисами.

Тенденция объединения схожих сервисов должна породить поисковые системы и системы ранжирования, предоставляющие информацию по данным сервисам. При этом будет наблюдаться их дифференцирование по:

- географическим критериям (см. особенности успешного развития концепции длинного хвоста);
- тематическим критериям (см. классификацию сервисов);
- видам представления информации (кому-то важно иметь изображение товара, кому-то качество его звучания).

Проблема индексирования источников информации, предоставляемых в данном географическом регионе, уже успешно решена, что демонстрируют как сайты, привязанные к специфическому контенту ([www.googlemaps.com](http://www.googlemaps.com), [worldwind.arc.nasa.gov](http://worldwind.arc.nasa.gov)), так и универсальные глобальные поисковики типа [www.yandex.ru](http://www.yandex.ru) и др. Карта основных узлов сети меняется редко, и определить их географическое положение по IP-адресу не составляет труда.

Получить качественную информацию заданной области или в конкретном представлении в обычном массовом поисковике довольно затруднительно: подобные задачи не имеют универсального решения и требуют разработки поисковых движков, использующих специализированные алгоритмы и протоколы. Поэтому в ближайшем будущем возможна ситуация, когда пользователи будут все чаще применять специализированные локальные поисковики по информации различного вида.

Исправить сложившуюся ситуацию призвано применение семантических сетей – следующего эволюционного этапа развития глобальной сети, на котором вся информация, опубликованная в Интернете, в обязательном порядке должна содержать метаданные, то есть данные о данных, позволяющие понять смысл и назначение той или иной информации, а также связь между отдельными ее составляющими.

В основе семантической сети, как говорит один из авторов ее концепции Тим Бернерс-Ли [2], лежат три принципа: агрегация, безопасность и логика. Агрегация означает совместное использование данных. Подобно тому как гипертекст является неотъемлемой частью WWW и благодаря ему «всё можно связать со всем», в семантической сети при решении поставленной задачи могут быть использованы любые данные. Для этих данных будет создана соответствующая семантическая информация (онтологии), позволяющая использовать их надлежащим образом. Для описания онтологий используются различные формальные языки, основанные на веб-стандартах: XML, OWL и др. В основу безопасности, обеспечивающей доверие к семантической сети, положены цифровые подписи, которые могут использоваться агентами и компьютерами для проверки того, что ин-

формация получена из достоверного источника, например, от какого-то публичного сервиса или персонального агента другого доверенного пользователя. Логика – это набор правил описания информационной структуры данных, протоколы прикладного уровня и язык описания страниц. Именно логика дает семантической сети правила вывода для проведения рассуждений и методики выбора тактики выполнения операций с данными, чтобы получить ответы на вопросы.

Очевидно, что с помощью семантических сетей станет возможным создание новых сервисов, которые технически невозможны при нынешних принципах организации и работы сети.

### *Поисковые роботы и интеллектуальные агенты*

Подход к проблеме обработки растущих как снежный ком объемов информации с точки зрения развития программ, интерпретирующих и анализирующих эту информацию, приводит к упоминанию об интеллектуальных агентах [3]. Агенты рассматриваются как активные объекты, представленные в виде отдельных программных единиц, которые, в отличие от обычных (пассивных) объектов, не «засыпают» до получения следующего сообщения (от пользователя или из внешней среды) и его выполнения, а постоянно функционируют, решая порученные им задачи. Таким образом, главная их особенность состоит в том, что они сами являются инициаторами действий по изменению своего поведения в окружающей среде. Интеллектуальный агент обладает рядом знаний о себе и окружающем мире, и его поведение определяется этими знаниями. Агент способен обладать свойством мобильности, т.е. не быть привязанным к системе, на которой он был запущен. Он обладает способностью перемещаться из одной системы в другую, полностью сохраняя свое состояние и перенося свой код.

На данный момент существует ряд технологий, таких как нейронные сети и генетические алгоритмы, нечеткая логика и другие, которые успешно применяются в различных мультиагентных системах. Повышенное внимание к агентским технологиям начали уделять около 10 лет назад, но и за такое сравнительно короткое время интерес к ним уже переместился из области академических исследований в сферу коммерческих и промышленных приложений и интернет-служб.

### *Возможности пользователей*

Одной из характеристик платформы веб 2.0, как показывает время, является использование массовых сервисов, дающих возможность пользователям самостоятельно производить контент (информационное наполнение сети) – дневники, статьи, фотоальбомы, сборники ссылок, – а также манипулировать связями между своими и чужими материалами в сети (настраивать собственные ленты для чтения избранных веблогов или новостей, встраивать собственные материалы в коллективные блоги и википедии, и т.д.) [4]. Конечно, вопрос: Кому доверить создание и распространение

ния веб-контента? – довольно спорный: действительно ли информированности авторов «из Сети» следует безоговорочно доверять? Здесь можно говорить о делении пользователей на обычных и пользователей-экспертов в заданной области знаний, причем последних можно выделять двумя способами:

- либо из общей массы пользователей при наличии механизмов социальной системы управления контентом, позволяющей их выявлять и привлекать к интересной для них деятельности;
- либо привлечением специалистов со стороны коммерческих организаций, предоставляющих сервисы.

В любом случае пользователи сети выступают здесь как ее соразработчики, соавторы, причем на добровольной основе, и, конечно, во многом делают это более качественно, чем те же интеллектуальные агенты.

Подытоживая вышесказанное, хочется еще раз обратить внимание на то, что, согласно приведенной выше грубой модели, внешней средой по отношению к глобальной сети выступают, прежде всего, пользователи, поэтому сеть развивается только вместе с пользователями и с их помощью. Каким будет завтра Интернет и какие услуги он сможет нам предложить, однозначно могут сказать только они – потребители информационных ресурсов.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *О'Рейли Т.* Что такое Веб 2.0: Использование коллективного разума. <http://www.computerra.ru/think/234344>.
2. *Berners-Lee T.* Semantic Web – XML2000. <http://www.w3.org/2000/Talks/1206-xml2k-tbl>
3. *Кальченко Д.* Интеллектуальные агенты семантического Web'a. <http://www.compress.ru/Archive/CP/2004/10/48>
4. [http://ru.wikipedia.org/wiki/Web\\_2.0](http://ru.wikipedia.org/wiki/Web_2.0)

УДК 517.5

**И. А. Привалов**

### ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИИ $\frac{1}{x}$ ПОЛИНОМАМИ НА $[-1, -a] \cup [a, 1]^*$

Известна роль [1], которую играет в численных методах решение задачи о наилучшем приближении функции  $\frac{1}{x-a}$  многочленами. В частности, в работе М. Хассона «The degree of approximation by polynomials on some disjoint intervals in the complex plane» приводится вид многочлена

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 04-0401-0 0060).

почти наилучшего приближения  $\frac{1}{x}$  на  $[-b, -a] \cup [a, b]$ , то есть такого многочлена, который даёт погрешность

$$K \log(2n+1) E_{2n+1}(h; [-b, -a] \cup [a, b]), \text{ где } h(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b] \\ -1, & x \in [-b, -a]. \end{cases}$$

Целью статьи является нахождение точного решения задачи поиска полинома, наименее уклоняющегося от  $\frac{1}{x}$  на  $[-1, -a] \cup [a, 1]$ , то есть

$$\left\| \frac{1}{x} - (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) \right\|_{C([-1, a] \cup [-a, 1])} \rightarrow \min. \quad (1)$$

Известен следующий результат, принадлежащий П.Л. Чебышёву [2].

ТЕОРЕМА 1. Пусть дан многочлен

$$w(x) = \left(1 - \frac{x}{b_1}\right) \left(1 - \frac{x}{b_2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{b_{2q}}\right),$$

положительный в замкнутом интервале  $[-1, 1]$  (степень  $w(x)$  будет нечётной, если взять  $b_{2q} = \infty$ ). Пусть

$$x = \frac{1}{2} \left(v + \frac{1}{v}\right) \quad (|v| \leq 1), \quad b_k = \frac{1}{2} \left(c_k + \frac{1}{c_k}\right) \quad (|c_k| < 1, k = 1, 2, \dots, 2q),$$

$$\Omega(v) = \prod_{k=1}^{2q} \sqrt{v - c_k}, \quad L_m = \frac{1}{2^{m-1}} \prod_{k=1}^{2q} \sqrt{1 + c_k^2}.$$

При этом

$$T_m(x; w) = \frac{L_m}{2} \left( v^{2q-m} \frac{\Omega\left(\frac{1}{v}\right)}{\Omega(v)} + v^{2m-q} \frac{\Omega(v)}{\Omega\left(\frac{1}{v}\right)} \right) \sqrt{w(x)}, \quad m \geq q, \quad (2)$$

будет являться многочленом степени  $m$  со старшим коэффициентом 1. Тогда

$$\min_{A_k} \max_{-1 \leq x \leq 1} \frac{|x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m|}{\sqrt{w(x)}} = L_m,$$

причём экстремальным многочленом является  $T_m(x; w)$ .

Перейдём теперь к решению задачи (1).

ТЕОРЕМА 2. Решение задачи

$$\left\| \frac{1}{x} - (a_1 x + \dots + a_{2n+1} x^{2n+1}) \right\|_{C([-1, a] \cup [-a, 1])} \rightarrow \min$$

имеет вид

$$P_n^*(x) = \frac{1}{x} \frac{T_{n+1}\left(\frac{2x^2 - (1+a^2)}{1-a^2}\right)}{xT_{n+1}(b_1)} = \frac{T_{n+1}(b_1) - T_{n+1}\left(\frac{2x^2 - (1+a^2)}{1-a^2}\right)}{xT_{n+1}(b_1)},$$

где  $T_{n+1}(x)$  – полином вида (2) с  $q=1$ ,  $b_1 = \frac{a^2+1}{a^2-1}$ ,  $b_2 = \infty$ .

Для доказательства теоремы вначале сделаем замену  $t = x^2$ . Тогда задача (1) перейдет в равносильную задачу

$$\left\| \frac{1 - (a_1 t + a_3 t^2 \dots + a_{2n+1} t^{n+1})}{\sqrt{t}} \right\|_{C([a^2, 1])} \rightarrow \min. \quad (3)$$

Пусть  $a_{2n+1}^*$  – коэффициент при старшей степени в решении задачи (3). Поделим тогда (3) на  $a_{2n+1}^*$  и осуществим отображение, переходящее от  $t \in [a^2, 1]$  к  $y \in [-1, 1]$ . Тогда получим на  $[-1, 1]$  равносильную задачу

$$\left| a_{2n+1}^* \right| \frac{\left( \frac{1-a^2}{2} \right)^{n+1}}{\sqrt{\frac{1+a^2}{2}}} \left\| \frac{y^{n+1} + \alpha_1 y^n + \dots + \alpha_{n+1}}{\sqrt{1 - \frac{a^2-1}{1+a^2} y}} \right\|_{C([-1, 1])} \rightarrow \min.$$

Мы можем найти коэффициенты  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ , поскольку решение этой за-

дачи описывает теорема 1. Подсчитав коэффициенты  $\frac{\left( \frac{1-a^2}{2} \right)^{n+1}}{\sqrt{\frac{1+a^2}{2}}}$  и  $a_{2n+1}^*$ ,

получаем утверждение теоремы.

Заметим, что  $T_{n+1}(b_1) - T_{n+1}\left(\frac{2x^2 - (1+a^2)}{1-a^2}\right)$  при  $x=0$  обращается в 0, сле-

довательно,  $\frac{T_{n+1}(b_1) - T_{n+1}\left(\frac{2x^2 - (1+a^2)}{1-a^2}\right)}{xT_{n+1}(b_1)}$  является многочленом.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ashby S. F.* Minimax polynomial preconditioning for Hermitian linear systems. SIAM // J. Matrix Analysis Appl. 1991. Vol. 12, № 4. P. 766 – 789.
2. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.

**ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЦЕЛЕВОЙ СТРУКТУРЫ  
ЗАДАЧИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЯ  
В ЧИСЛОВУЮ ПРЯМУЮ**

1. Целевая структура задачи принятия решения может быть задана в виде пары бинарных отношений – *отношения доминирования*  $\alpha$  и *отношения безразличия*  $\beta$ , определенных на множестве исходов  $A$  и удовлетворяющих условиям:

а) отношение доминирования  $\alpha$  асимметрично:  $\alpha \cap \alpha^{-1} = \emptyset$ ;

б) отношение безразличия  $\beta$  рефлексивно ( $\Delta \subseteq \beta$ ) и симметрично ( $\beta^{-1} \subseteq \beta$ );

в) отношения доминирования и безразличия не имеют общих пар ( $\alpha \cap \beta = \emptyset$ ).

Объединение отношения доминирования  $\overset{\alpha}{>}$  и отношения безразличия  $\overset{\beta}{\sim}$  обозначается знаком  $\gtrsim$  и называется *отношением предпочтения*.

*Представлением* структуры доминирование-безразличие  $(\alpha, \beta)$  в числовую прямую  $\mathbb{R}$  называется отображение  $\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}$ , для которого справедливы импликации:

$$a' \overset{\alpha}{>} a \Rightarrow \varphi(a') > \varphi(a); \quad (1)$$

$$a' \overset{\beta}{\sim} a \Rightarrow \varphi(a') = \varphi(a). \quad (2)$$

В данной статье указаны необходимые и достаточные условия существования представления структуры доминирование-безразличие в числовую прямую. Дано описание всех представлений структуры доминирование-безразличия, заданной на конечном множестве.

2. Подмножество  $S \subseteq A$  называется *мажорантно стабильным*, если оно удовлетворяет условию

$$a \in S, a' \gtrsim a \Rightarrow a' \in S. \quad (3)$$

Будем говорить, что семейство  $F$  мажорантно стабильных подмножеств является *разделяющим*, если для любых  $a' \overset{\alpha}{>} a$  найдется  $S \in F$ , для которого  $a \notin S$  и  $a' \in S$ .

**ТЕОРЕМА 1.** Для того чтобы структура доминирование-безразличие, заданная на множестве  $A$ , имела представление в числовую прямую, необходимо и достаточно, чтобы в  $A$  существовало не более чем счетное разделяющее семейство мажорантно стабильных подмножеств.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть  $\varphi$  – представление структуры доминирование-безразличие в числовую прямую. Рассмотрим нумерацию  $(r_n)_{n=1,2,\dots}$  множества рациональных чисел. Для любого натурального  $n \in N$  положим  $S_n = \{a \in A : \varphi(a) \geq r_n\}$ . Каждое подмножество  $S_n$  мажорантно стабильно, и семейство  $(S_n)_{n \in N}$  не более чем счетно. Пусть  $a' >^\alpha a$ . Тогда согласно (1)  $\varphi(a') > \varphi(a)$ . Возьмем рациональное число  $r_k$ , для которого  $\varphi(a) < r_k < \varphi(a')$ . Тогда подмножество  $S_k$  разделяет элементы  $a$  и  $a'$ , т.е.  $a \notin S_k$ ,  $a' \in S_k$ .

*Достаточность.* Пусть  $F = (S_n)_{n \in N}$  – не более чем счетное разделяющее семейство мажорантно стабильных подмножеств. Обозначим через  $\chi_n$  характеристическую функцию подмножества  $S_n$ . Положим

$$\varphi(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_n(a)}{2^n}. \quad (4)$$

Заметим, что числовой ряд, стоящий в правой части (4), является сходящимся при любом наборе подмножеств  $(S_n)_{n \in N}$ . Покажем, что функция  $\varphi$

является представлением. Пусть  $a' >^\alpha a$ . Тогда согласно (3) всякое мажорантно стабильное подмножество, содержащее  $a$ , содержит также  $a'$ , откуда  $\chi_n(a') \geq \chi_n(a)$  ( $n=1,2,\dots$ ). Так как семейство  $F$  разделяющее, найдется  $k \in N$ , для которого  $a \notin S_k$  и  $a' \in S_k$ , то есть  $\chi_k(a) = 0$  и  $\chi_k(a') = 1$ , отсюда  $\varphi(a') - \varphi(a) \geq \frac{1}{2^k}$ , значит,  $\varphi(a') > \varphi(a)$  и (1) доказано.

Для проверки (2) заметим, что если  $a' \sim^\beta a$ , то при любом  $n \in N$  выполняется равносильность:

$$a' \in S_n \Leftrightarrow a \in S_n,$$

отсюда  $\chi_k(a') = \chi_k(a)$ , поэтому  $\varphi(a') = \varphi(a)$ .

3. Здесь мы дадим общее описание всех представлений структуры доминирование-безразличие, заданной на конечном множестве, в числовую прямую. Заметим вначале, что в силу теоремы 1 такая структура доминирование-безразличие имеет представление в числовую прямую тогда и только тогда, когда семейство *всех* ее мажорантно стабильных подмножеств является разделяющим.

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть  $(\alpha, \beta)$  – структура доминирование-безразличие, заданная на конечном множестве  $A$ ,  $F = (S_k)_{k=1, \dots, m}$  – семейство *всех* ее мажорантно стабильных подмножеств,  $\chi_k$  – характеристическая функция

подмножества  $(S_k) (k=\overline{1,m})$ . Пусть  $F$  является разделяющим. Зафиксируем набор положительных чисел  $(c_k)_{k=1,\dots,m}$  и число  $c_0 \in \mathbb{R}$ . Тогда:

1) функция

$$\varphi = c_0 + \sum_{k=1}^m c_k \chi_k \quad (5)$$

является представлением структуры доминирование-безразличие в числовую прямую;

2) любое представление структуры доминирование-безразличие в числовую прямую может быть записано в форме (5).

Доказательство. 1) Действительно, пусть  $a' >^\alpha a$ . Тогда при любом  $k=1,\dots,m$  выполнена импликация:  $a \in S_k \Rightarrow a' \in S_k$  и найдется такое  $l=1,\dots,m$ , для которого  $a \notin S_l$ , но  $a' \in S_l$ . Таким образом, имеет место строгое включение  $\{k : a \in S_k\} \subset \{k : a' \in S_k\}$  и с учетом положительности всех  $c_k (k=1,\dots,m)$  получаем

$$\varphi(a') = c_0 + \sum_{a' \in S_k} c_k > c_0 + \sum_{a \in S_k} c_k = \varphi(a),$$

что доказывает (1). Для доказательства (2) достаточно заметить, что условие  $a' \sim^\beta a$  влечет  $\{k : a' \in S_k\} = \{k : a \in S_k\}$ , откуда  $\varphi(a') = \varphi(a)$ .

2) Справедлива следующая

ЛЕММА. Всякое представление  $\psi$  структуры доминирование-безразличие в числовую прямую, все значения которого строго положительны, представимо в виде

$$\psi = \sum_{k=1}^m c_k \chi_k \quad (6)$$

с неотрицательными коэффициентами  $c_k \geq 0$ .

В самом деле, пусть  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_r$  — расположенные по возрастанию значений функции  $\psi$ . Положим  $A_k = \{a \in A : \psi(a) \geq \lambda_k\}$  ( $k=1,\dots,r$ ). Каждое  $A_k$  является мажорантно стабильным. Имеет место легко проверяемое равенство

$$\psi = \lambda_1 \chi_{A_1} + (\lambda_2 - \lambda_1) \chi_{A_2} + \dots + (\lambda_r - \lambda_{r-1}) \chi_{A_r}. \quad (7)$$

Добавляя к правой части (7) характеристические функции оставшихся  $(m-r)$  мажорантно стабильных подмножеств с нулевыми коэффициентами, получим доказательство леммы.



Покажем теперь, что  $\psi$  может быть представлено в виде (6) с положительными коэффициентами  $c_k \geq 0$  ( $k = 1, \dots, m$ ). Для произвольного  $\delta > 0$  положим  $\psi_\delta = \sum_{k=1}^m \delta \chi_k$ . При достаточно малом  $\delta > 0$  разность  $\psi - \psi_\delta$  остается представлением с положительными значениями, и в силу леммы имеет место равенство  $\psi - \psi_\delta = \sum_{k=1}^m c_k \chi_k$ , где  $c_k \geq 0$ , откуда

$$\psi = \psi_\delta + \sum_{k=1}^m c_k \chi_k = \sum_{k=1}^m \delta \chi_k + \sum_{k=1}^m c_k \chi_k = \sum_{k=1}^m (\delta + c_k) \chi_k.$$

Так как  $\delta + c_k > 0$ , получим искомое разложение представления  $\psi$ . Наконец, случай, когда представление  $\phi$  имеет отрицательные значения, сводится к уже рассмотренному прибавлением к  $\phi$  некоторой положительной константы ( $-c_0$ ); тогда получается разложение функции  $\phi$  в виде (5).

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кирута А. Я., Рубинов А. М., Яновская Е. Б. Оптимальный выбор распределений в сложных социально-экономических задачах. Л.: Наука (Ленингр. отд-ние), 1980.
2. Розен В. В. Цель – оптимальность – решение. М.: Радио и связь, 1982.

УДК 517.984

В. С. Рыхлов

### ОБ ОДНОКРАТНОЙ ПОЛНОТЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, КОРНИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ КОТОРЫХ ЛЕЖАТ НА ОДНОМ ЛУЧЕ\*

Рассмотрим пучок  $L(\lambda)$  обыкновенных дифференциальных операторов в пространстве  $L_2[0,1]$ , порожденный дифференциальным выражением (д.в.):

$$L(y, \lambda) := \sum_{s+k=n} p_{sk} \lambda^s y^{(k)}(x), \quad p_{sk} \in \mathbb{C}, \quad p_{0n} \neq 0, \quad (1)$$

и линейно независимыми нормированными краевыми условиями специального вида

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003).

$$U_j(y, \lambda) = U_{j0}(y, \lambda) := \sum_{s+k=\kappa_j} \lambda^s \alpha_{jsk} y^{(k)}(0) = 0, \quad j = \overline{1, n-1},$$

$$U_n(y, \lambda) = U_{n0}(y, \lambda) + U_{n1}(y, \lambda) := \sum_{s+k=\kappa_n} \lambda^s (\alpha_{nsk} y^{(k)}(0) + \beta_{nj sk} y^{(k)}(1)) = 0, \quad (2)$$

где  $\alpha_{jsk}, \beta_{jsk} \in \mathbb{C}$ ,  $\kappa_j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  есть порядок  $j$ -го краевого условия.

Пусть  $\kappa = \sum_{j=0}^{n-1} \kappa_j$  есть суммарный порядок краевых условий (2).

Пусть корни  $\{\omega_j\}_{j=1}^n$  характеристического уравнения д.в. (1)  $\sum_{s+k=n} p_{sk} \omega^k = 0$  попарно различны, отличны от нуля и лежат на одном луче, исходящем из начала координат. Не нарушая общности, можно считать

$$0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n. \quad (3)$$

При  $\lambda \neq 0$  система функций  $y_k(x, \lambda) = \exp(\lambda \omega_k x)$ ,  $k = \overline{1, n}$ , является фундаментальной системой решений уравнения  $l(y, \lambda) = 0$ .

Исследуем вопрос об однократной полноте системы собственных и присоединенных функций (с.п.ф.) пучка  $L(\lambda)$  в пространстве  $L_2[0, 1]$ .

Введем вектор-столбцы

$$V_k = (v_{1k} v_{2k} \dots v_{nk})^T := \left( \frac{1}{\lambda^{\kappa_1}} U_{10}(y_k, \lambda), \dots, \frac{1}{\lambda^{\kappa_n}} U_{n0}(y_k, \lambda) \right)^T,$$

$$W_k = (w_{1k} w_{2k} \dots w_{nk})^T := e^{-\lambda \omega_k} \left( 0, \dots, 0, \frac{1}{\lambda^{\kappa_n}} U_{n1}(y_k, \lambda) \right)^T.$$

Тогда характеристический определитель пучка  $L(\lambda)$  будет иметь вид

$$\Delta(\lambda) = \det(U_j(y_k, \lambda))_{j,k=1}^n = \lambda^\kappa |V_1 + e^{\lambda \omega_1} W_1, \dots, V_n + e^{\lambda \omega_n} W_n| = \lambda^\kappa \tilde{\Delta}(\lambda),$$

причем в силу того, что  $\text{rank}(W_k, W_l) = 1$ ,  $1 \leq k, l \leq n$ , справедливо представление

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(\lambda) &= |V_1 V_2 \dots V_n| + e^{\lambda \omega_1} |W_1 V_2 \dots V_n| + \dots + e^{\lambda \omega_n} |V_1 \dots V_{n-1} W_n| = \\ &= \Delta_0 + \Delta_1 e^{\lambda \omega_1} + \dots + \Delta_n e^{\lambda \omega_n}. \end{aligned}$$

Ненулевые собственные значения являются нулями функции  $\tilde{\Delta}(\lambda)$ .

Если через  $(\Delta_0)_{jk}$  обозначить алгебраическое дополнение элемента  $(j, k)$  в определителе  $\Delta_0$ , то очевидно

$$\Delta_j = w_{nj} (\Delta_0)_{nj}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (4)$$

В качестве порождающей функции для системы с.п.ф. пучка  $L(\lambda)$ , соответствующих ненулевым собственным значениям, возьмем функцию

$$y(x, \lambda) := \begin{vmatrix} U_{10}(y_1, \lambda) & \dots & U_{10}(y_n, \lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ U_{n-10}(y_1, \lambda) & \dots & U_{n-10}(y_n, \lambda) \\ e^{\lambda\omega_1 x} & \dots & e^{\lambda\omega_n x} \end{vmatrix} \frac{1}{\lambda^{\kappa - \kappa_n}} = \begin{vmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ v_{n-11} & \dots & v_{n-1n} \\ e^{\lambda\omega_1 x} & \dots & e^{\lambda\omega_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= a_1 e^{\lambda\omega_1 x} + a_2 e^{\lambda\omega_2 x} + \dots + a_n e^{\lambda\omega_n x}, \quad (5)$$

где обозначено

$$a_1 = (\Delta_0)_{n1}, \quad a_2 = (\Delta_0)_{n2}, \quad \dots, \quad a_n = (\Delta_0)_{nn}. \quad (6)$$

Таким образом, порождающая функция есть линейная комбинация экспонент с показателями, лежащими на одном луче.

Из (4), (6) следует, что

$$\Delta_j = w_{nj} a_j, \quad j = \overline{1, n}. \quad (7)$$

Предположим далее, что 1)  $\Delta_0 \neq 0$ ; 2) при некотором  $m$  ( $2 \leq m \leq n$ )

$$a_n = a_{n-1} = \dots = a_{m+1} = 0, \quad a_m \neq 0, \quad w_{nm} \neq 0.$$

Тогда ввиду (7) будем иметь

$$\tilde{\Delta}(\lambda) = \Delta_0 + \Delta_1 e^{\lambda\omega_1} + \dots + \Delta_m e^{\lambda\omega_m},$$

$$y(x, \lambda) = a_1 e^{\lambda\omega_1} + a_2 e^{\lambda\omega_2} + \dots + a_m e^{\lambda\omega_m}.$$

Справедлива следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 1.** При выполнении условий (3) и 1), 2) система с.п.ф. пучка  $L(\lambda)$  однократно полна в  $L_2[0, 1]$  с возможным конечным дефектом в случае, когда  $\Delta_0 + \Delta_1 + \dots + \Delta_m = 0$ .

В основе доказательства этой теоремы лежит следующая лемма.

**ЛЕММА 1.** При выполнении условий (3) и 1), 2) система с.п.ф. пучка  $L(\lambda)$  однократно полна в  $L_2[0, 1]$  с возможным конечным дефектом в случае, когда  $\Delta_0 + \Delta_1 + \dots + \Delta_m = 0$ , тогда и только тогда, когда уравнение

$$\frac{a_1}{\tau_1} f\left(\frac{x}{\tau_1}\right) + \frac{a_2}{\tau_2} f\left(\frac{x}{\tau_2}\right) + \dots + \frac{a_{m-1}}{\tau_{m-1}} f\left(\frac{x}{\tau_{m-1}}\right) + a_m f(x) = 0, \quad x \in [0, \tau_1],$$

$$\frac{a_2}{\tau_2} f\left(\frac{x}{\tau_2}\right) + \dots + \frac{a_{m-1}}{\tau_{m-1}} f\left(\frac{x}{\tau_{m-1}}\right) + a_m f(x) = 0, \quad x \in [\tau_1, \tau_2],$$

.....

$$\frac{a_{m-1}}{\tau_{m-1}} f\left(\frac{x}{\tau_{m-1}}\right) + a_m f(x) = 0, \quad x \in [\tau_{m-2}, \tau_{m-1}],$$

$$a_m f(x) = 0, \quad x \in [\tau_{m-1}, 1],$$

где  $\tau_j = \frac{\omega_j}{\omega_m}$ ,  $j = \overline{1, m-1}$  ( $0 < \tau_1 < \dots < \tau_{m-1} < 1$ ), имеет лишь тривиальное решение в  $L_2[0, 1]$ .

Что касается  $k$ -кратной полноты в  $L_2[0,1]$  системы с.п.ф. пучка  $L(\lambda)$  при  $2 \leq k \leq n$  и, в частности, при  $k = 2$ , то положительных результатов по этому вопросу, насколько известно автору, до сих пор не получено.

Что же касается  $k$ -кратной неполноты при  $2 \leq k \leq n$ , то известно следующее. Порождающая функция (5) есть линейная комбинация экспонент  $\exp(\lambda \omega_j x)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , где числа  $\omega_j$  удовлетворяют неравенствам (3). Именно такие порождающие функции изучались в [1, 2]. Приведем полученные там результаты применительно к с.п.ф. пучка  $L(\lambda)$ .

**ТЕОРЕМА 2.** При выполнении условия (3) система с.п.ф. пучка  $L(\lambda)$  не является  $n$ -кратно полной ни в каком пространстве  $L_2[0, \sigma]$  при  $\sigma > 0$  и имеет в каждом таком пространстве бесконечный дефект относительно  $n$ -кратной полноты.

**ТЕОРЕМА 3.** При выполнении условия (3) и условия

$$\sum_{s=1}^{n-1} \left| \frac{a_s}{a_n} \right| \left( \frac{\omega_n}{\omega_s} \right)^{\frac{1}{2}} < 1$$

система с.п.ф. пучка  $L(\lambda)$  не является 2-кратно полной ни в каком пространстве  $L_2[0, \sigma]$  при  $\sigma > 0$  и имеет в каждом таком пространстве бесконечный дефект относительно 2-кратной полноты.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Рыхлов В. С. О кратной неполноте собственных функций пучков обыкновенных дифференциальных операторов // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов, 2001. Вып. 3. С. 114 – 117.

2. Рыхлов В. С. О кратной неполноте собственных функций пучков дифференциальных операторов, корни характеристических уравнений которых лежат на одном луче // Докл. РАЕН. Саратов, 2004. № 4. С. 72 – 79.

УДК 517.51: 519.642.8

С. Ю. Советникова

### О ТОЧНОЙ ПО ПОРЯДКУ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА

Рассматривается интегральное уравнение

$$Au \equiv \int_0^x \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} u(t) dt = f(x)$$

и предполагается, что  $u \in M_{A^*} \subset C[0,1]$ , где

$$M_{A^*} = \{u(x) \in C[0,1] : u = A^* v, \|v\|_{L_2} \leq 1\},$$

а функция  $f(x)$  задана ее  $\delta$ -приближением  $f_\delta(x)$  в  $L_2[0,1]$ . Для данного интегрального уравнения получена точная по порядку оценка погрешности на классе  $M_{A^*}$  при применении метода регуляризации Тихонова нулевого порядка. В указанном методе регуляризации приближение к решению ищется с помощью семейства операторов:

$$R_\alpha = (\alpha E + A^* A)^{-1} A^* \quad (\alpha > 0 - \text{параметр}).$$

Известно [1], что этот метод дает приближение к решению в метрике пространства  $L_2[0,1]$ , а для рассматриваемого случая – и в метрике пространства  $C[0,1]$  [2].

Для получения оценки погрешности на классе  $M_{A^*}$  используется метод из [3], основывающийся на известной двусторонней оценке:

$$\frac{1}{2} \varphi(\delta, R_\alpha, M_{A^*}) \leq \Delta(\delta, R_\alpha, M_{A^*}) \leq \varphi(\delta, R_\alpha, M_{A^*}),$$

где  $\varphi(\delta, R_\alpha, M_{A^*}) = \delta \|R_\alpha\|_{L_2 \rightarrow C} + \Delta_1(R_\alpha A, M_{A^*})$ ,

$$\Delta_1(R_\alpha A, M_{A^*}) = \sup_x \{ \|R_\alpha A u - u\|_C : u \in M_{A^*} \},$$

$$\Delta(\delta, R_\alpha, M_{A^*}) = \sup_x \{ \|R_\alpha f_\delta - u\|_C : u \in M_{A^*}, \|f_\delta - Au\|_{L_2} \leq \delta \}.$$

ТЕОРЕМА 1. Имеет место асимптотическое по  $\alpha$  при  $\alpha \rightarrow 0$  представление:

$$\Delta_1(R_\alpha A, M_{A^*}) = C_1 \alpha^{\frac{2m-1}{4m}} + o\left(\alpha^{\frac{1}{2}}\right), \quad (1)$$

где  $C_1 = \left( \frac{K}{(2m)^2} \sum_{i,k \in I} \frac{\omega_i^{m+1} \omega_k^{m+1}}{\omega_i + \omega_k} \right)^{1/2}$ ,  $K = 2 + K_1 + K_2$ ,  $K_1 = \frac{2}{\Delta_0} \sum_{l \in I} \Delta_{1l}^*$ ,

$K_2 = \frac{1}{\Delta_0^2} \sum_{l,j \in I} \Delta_{1l}^* \Delta_{1j}^*$ ,  $\Delta_{1l}^*, \Delta_{1j}^*$  получены из определителей  $\Delta_{1l}, \Delta_{1j}$  (см. [4]) после вынесения из них степеней  $\rho$  и возрастающих экспонент;  $\Delta_0$  также определен в [4],  $\omega_i$  – корни  $n$ -й степени из  $-1$ ,  $I$  – система индексов, для которой  $\text{Re} \omega_i > 0$ .

ТЕОРЕМА 2. Имеет место асимптотическое по  $\alpha$  при  $\alpha \rightarrow 0$  представление:

$$\|R_\alpha\|_{L_2 \rightarrow C} = C_2 \alpha^{\frac{2m+1}{4m}} + o\left(\alpha^{\frac{1}{2}}\right), \quad (2)$$

где  $C_2 = \left( \frac{1+K_1}{2m} \sum_{i \in I} \omega_i - \frac{K}{(2m)^2} \sum_{i,k \in I} \frac{\omega_i \omega_k}{\omega_i + \omega_k} \right)^{1/2}$ ,  $K, K_1, \omega_i, I$  определены в теореме 1.

ТЕОРЕМА 3. Имеет место двусторонняя оценка, асимптотическая по  $\delta$  при  $\delta \rightarrow 0$ :

$$C_{21}\delta^{\frac{2m-1}{4m}} + \psi_2(\delta) \leq \Delta(\delta, R_{\alpha(\delta)}, M_{A^*}) \leq C_{11}\delta^{\frac{2m-1}{4m}} + \psi_1(\delta), \quad (3)$$

где  $\alpha(\delta) = C_3\delta$ ,  $C_{11} = \frac{2m+1}{2m-1} \frac{C_2}{C_1} (C_1 + C_2)$ ,  $C_{21} = \frac{1}{2} C_{11}$ ,  $C_3 = \frac{2m+1}{2m-1} \frac{C_2}{C_1}$ ,  $\psi_1(\delta)$ ,  $\psi_2(\delta)$  имеют порядок  $O(\delta^{1/2})$ , константы  $C_1$  и  $C_2$  определены в теоремах 1, 2.

В работе [5] теоремы 1, 2 были доказаны на отрезке  $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ . В данной статье асимптотические представления по  $\alpha$  при  $\alpha \rightarrow 0$  для величин  $\Delta_1(R_\alpha A, M_{A^*})$  и  $\|R_\alpha\|_{L_2 \rightarrow C}$  получены на всем отрезке.

Доказательства теорем 1, 2, 3 основаны на следующем:

1) в данном случае  $R_\alpha A = (L + \frac{1}{\alpha} E)^{-1}$ , где  $L$  – дифференциальный оператор:

$$(-1)^m y^{(2m)} + \frac{1}{\alpha} y, \quad (4)$$

$$y(1) = y'(1) = \dots = y^{(m-1)}(1) = y^{(m)}(0) = \dots = y^{(2m-1)}(0); \quad (5)$$

2) на представлении резольвенты дифференциального оператора из [4];

3) на полученном в [6] представлении  $\Delta_1(R_\alpha A, M_{A^*})$  через функцию Грина  $\Gamma(x, t, -\frac{1}{\alpha})$  задачи (4), (5);

4) на представлении нормы  $\|R_\alpha\|_{L_2 \rightarrow C}$  через функцию  $\Gamma(x, t, -\frac{1}{\alpha})$  из [7].

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тихонов А. Н. О регуляризации некорректно поставленных задач // ДАН СССР. 1963. Т. 153, № 1. С. 49 – 52.
2. Хромова Г. В. О регуляризации интегральных уравнений первого рода с ядром Грина // Изв. вузов. Сер. Математика. 1972. № 8(123). С. 94 – 104.
3. Хромова Г. В. Об оценках погрешностей приближенных решений уравнений первого рода // ДАН. 2001. Т. 378, № 5. С. 605 – 609.
4. Гуревич А. П., Хромов А. П. Суммируемость по Риссу разложений по собственным функциям интегральных операторов // Изв. вузов. Сер. Математика. 2003. № 2(489). С. 24 – 35.
5. Советникова С. Ю. О точном порядке скорости аппроксимации решений одного класса интегральных уравнений первого рода // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 13-й Саратов. зимней шк. Саратов, 27 янв. – 3 февр. 2006 г. Саратов: ООО Изд-во «Научная книга», 2006. С. 162 – 163.

6. Хромова Г. В. О модулях непрерывности неограниченных операторов и оптимальности методов приближенного решения уравнений первого рода // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 133 – 135.

7. Хромова Г. В. О нахождении равномерных приближений к решению интегральных уравнений первого рода // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1974. Вып. 4. С. 3 – 10.

УДК 517.518.82

Е. В. Сорина

## КРИТЕРИЙ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ПОЛОСОЙ ФИКСИРОВАННОЙ ШИРИНЫ

Рассматривается задача о наилучшем хаусдорфовом приближении многозначного отображения с образами в виде отрезков

$$F(t) = [g_1(t), g_2(t)], \quad t \in [0, 1],$$

полиномиальной полосой

$$\Pi_{n,r}(A, t) = [P_n(A, t) - r, P_n(A, t) + r]$$

фиксированной ширины  $2r$ . Здесь  $P_n(A, t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$ ,  $A = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in R^{n+1}$ ,  $g_1(t), g_2(t)$  – непрерывные на  $[0, 1]$  функции, причём  $g_1(t) \leq g_2(t)$ . Она сводится к следующей экстремальной задаче:

$$\varphi(A, t) = \max_{t \in [0, 1]} \max \left\{ |g_1(t) - P_n(A, t) + r|, |g_2(t) - P_n(A, t) - r| \right\} \rightarrow \max_{A \in R^{n+1}}. \quad (1)$$

Введём обозначения

$$\rho(A) = \max_{t \in [0, 1]} \max \{ P_n(A, t) - g_1(t), g_2(t) - P_n(A, t) \},$$

$$\pi(A) = \max_{t \in [0, 1]} \max \{ g_1(t) - P_n(A, t), P_n(A, t) - g_2(t) \},$$

$$\rho^* = \min_{A \in R^{n+1}} \rho(A), \pi^* = \min_{A \in R^{n+1}} \pi(A), C_1 = \text{Arg min}_{A \in R^{n+1}} \rho(A), C_2 = \text{Arg min}_{A \in R^{n+1}} \pi(A),$$

$$\rho^- = \min_{A \in C_2} \rho(A), \pi^- = \min_{A \in C_1} \pi(A), r_1^+ = (\rho^* - \pi^-)/2, r_2^- = (\rho^- - \pi^*)/2.$$

$\rho(A)$  – наибольшее уклонение многозначного отображения от полинома  $P_n(A, t)$ ;  $\pi(A)$  – наибольшее уклонение полинома  $P_n(A, t)$  от многозначного отображения.

В настоящей статье рассматриваются необходимые и достаточные условия минимума задачи (1) в зависимости от выбора параметра  $r$ , определяющего ширину полиномиальной полосы  $\Pi_{n,r}(A, t)$ .

В работе [1] показано, что

1. При  $r \in [0, r_1^+]$  задача (1) сводится к задаче о наилучшем приближении многозначного отображения полиномом  $P_n(A, t)$

$$\rho(A) \rightarrow \min_{A \in R^{n+1}}. \quad (2)$$

2. При  $r \in (r_2^-, +\infty)$  задача (1) сводится к задаче

$$\pi(A) \rightarrow \min_{A \in R^{n+1}}. \quad (3)$$

3. При  $r \in [r_1^+, r_2^-]$  задачу (1) можно записать в виде

$$\varphi(A, r) = \max\{\rho(A) - r, \pi(A) + r\} \rightarrow \min_{A \in R^{n+1}}, \quad (4)$$

а в оптимальной точке  $A^* \in R^{n+1}$  выполняется равенство

$$\varphi(A^*, r) = \rho(A^*) - r = \pi(A^*) + r. \quad (5)$$

Необходимое и достаточное условие решения для задач (2) и (3) получено в работе И. Ю. Выгодчиковой [2].

Для  $r \in [r_1^+, r_2^-]$  необходимое и достаточное условие решения задачи (1) устанавливает следующая теорема.

**ТЕОРЕМА.** Для того чтобы точка  $A^* \in R^{n+1}$  была решением задачи (1) при  $r \in [r_1^+, r_2^-]$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство (5) и одно из двух условий:

1. Существует хотя бы одна точка  $t^* \in [0, 1]$ , в которой выполняется равенство

$$P_n(A^*, t^*) = [g_1(t^*) + g_2(t^*)]/2 \quad (6)$$

и одно из равенств

$$\varphi(A^*, r) = [g_2(t^*) - g_1(t^*)]/2 - r \text{ или } \varphi(A^*, r) = [g_1(t^*) - g_2(t^*)]/2 + r. \quad (7)$$

2. Существует упорядоченный набор точек  $\{t_i\}_{i=\overline{0, n+1}}$ :

$$0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq 1,$$

таких что

$$\varphi(A^*, r) = \max_{t \in [0, 1]} \max\{|g_1(t_i) - P_n(A^*, t_i) + r|, |g_2(t_i) - P_n(A^*, t_i) - r|\}, i = \overline{0, n+1}. \quad (8)$$

Причём если для  $t_i$ ,  $i = \overline{0, n}$ , выполняется одно из равенств

$$\varphi(A^*, r) = P_n(A^*, t_i) - g_1(t_i) - r, \quad \varphi(A^*, r) = P_n(A^*, t_i) - g_2(t_i) + r, i = \overline{0, n}, \quad (9)$$

то для  $t_{i+1}$  справедливо одно из следующих равенств

$$\begin{aligned} \varphi(A^*, r) &= g_2(t_{i+1}) - P_n(A^*, t_{i+1}) - r, \\ \varphi(A^*, r) &= g_1(t_{i+1}) - P_n(A^*, t_{i+1}) + r, i = \overline{0, n}. \end{aligned} \quad (10)$$

Если же для  $t_i$  выполняется одно из равенств

$$\varphi(A^*, r) = g_2(t_i) - P_n(A^*, t_i) - r, \quad \varphi(A^*, r) = g_1(t_i) - P_n(A^*, t_i) + r, i = \overline{0, n}, \quad (11)$$

то для  $t_{i+1}$  верно одно из равенств



$$\begin{aligned}\varphi(A^*, r) &= P_n(A^*, t_{i+1}) - g_1(t_{i+1}) - r, \\ \varphi(A^*, r) &= P_n(A^*, t_{i+1}) - g_2(t_{i+1}) + r, \quad i = \overline{0, n}.\end{aligned}\quad (12)$$

Доказательство. Необходимым и достаточным условием минимума задачи (1) в точке  $A^* \in R^{n+1}$  является включение

$$O^{n+1} \in \partial_A \varphi(A^*, r), \quad (13)$$

где  $\partial_A \varphi(A, r)$  – субдифференциал функции  $\varphi(A, r)$  по  $A$ . Учитывая вид функции  $\varphi(A, r)$  и используя субдифференциальное исчисление для выпуклых функций (например, [3]), (13) можно записать в виде

$$O^{n+1} \in \text{co}\{\xi(t) \cdot (1, t, \dots, t^n) \mid t \in Q^+(A^*) \cup Q^-(A^*)\}, \quad (14)$$

где  $Q^+(A) = Q_1^+(A) \cup Q_2^+(A)$ ,  $Q^-(A) = Q_1^-(A) \cup Q_2^-(A)$ ,

$$Q_1^\pm(A) = \{t \in [0, 1] \mid \varphi(A, r) = \pm [P_n(A, t) - g_1(t)] - r\},$$

$$Q_2^\pm(A) = \{t \in [0, 1] \mid \varphi(A, r) = \pm [P_n(A, t) - g_2(t)] + r\}.$$

$$\xi(t) = \begin{cases} 1, & t \in Q^+(A), t \notin Q^-(A); \\ -1, & t \in Q^-(A), t \notin Q^+(A); \\ \{-1, 1\}, & t \in Q^+(A) \cap Q^-(A). \end{cases} \quad (15)$$

*Необходимость.* Пусть  $A^* \in R^{n+1}$  является решением задачи (1). Тогда выполняются равенство (5) и включение (14). При этом возможны два случая.

1. Пусть  $Q^+(A^*) \cap Q^-(A^*) \neq \emptyset$ . Тогда существует хотя бы одна точка  $t^* \in [0, 1]$ , которая принадлежит обоим множествам  $Q^+(A^*)$  и  $Q^-(A^*)$ . Из определений этих множеств и равенства (5) следует справедливость равенства (6) и одного из равенств (7).

2. Пусть  $Q^+(A^*) \cap Q^-(A^*) = \emptyset$ . Тогда функция  $\xi(t)$ , построенная по правилу (15), будет однозначной при всех  $t \in Q^+(A^*) \cup Q^-(A^*)$ . Используя [4, с. 292–294], можно показать, что включение (14) равносильно существованию упорядоченного набора точек  $\{t_i\}_{i=\overline{0, n+1}} \subset Q^+(A^*) \cup Q^-(A^*)$ :  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq 1$ , таких что  $\xi(t_i) = -\xi(t_{i+1})$ ,  $i = \overline{0, n}$ . Учитывая вид множеств  $Q^+(A^*)$ ,  $Q^-(A^*)$  и равенство (5), несложно доказать, что для этих точек справедливы равенства (8) – (12).

*Достаточность.* Пусть в точке  $A^* \in R^{n+1}$  выполняется равенство (5). Рассмотрим два случая.

1. Выполнено условие 1 теоремы. Из определений множеств  $Q^+(A^*)$ ,  $Q^-(A^*)$  и равенств (5) получаем, что  $t^* \in Q^+(A^*)$  и  $t^* \in Q^-(A^*)$ . Следовательно, выпуклая оболочка в (14) содержит векторы  $(1, t^*, \dots, (t^*)^n)^T$  и

$-(1, t^*, \dots, (t^*)^n)^T$ , что означает выполнение включения (14) в точке  $A^* \in R^{n+1}$ . Значит  $A^*$  – решение задачи (1).

2. Выполнено условие 2 теоремы. Тогда  $Q^+(A^*) \cap Q^-(A^*) = \emptyset$ , и функция  $\xi(t)$ , построенная по правилу (15), будет однозначной. Равенство (8) приводит к включению  $\{t_i\}_{i=0, n+1} \subset Q^+(A^*) \cup Q^-(A^*)$ . Из равенств (9) – (12) следует, что  $\xi(t_i) = -\xi(t_{i+1}), i = 0, n$ . Наличие упорядоченного набора точек с перечисленными свойствами, как и в силу [4, с. 292 – 294] свидетельствует о выполнении включения (14) в точке  $A^*$ , то есть  $A^*$  – решение задачи (1).

Теорема доказана.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сорина Е. В. О наилучшем приближении многозначного отображения полиномиальной полосой // Современные проблемы теории функций и их приложение: Тез. докл. 13-й Сарат. зимней шк. Саратов, 27 янв. – 3 февр. 2006 г. Саратов: ООО Изд-во «Научная книга», 2006. С. 164 – 165.
2. Выгодчикова И. Ю. О сведении задачи о псевдовнутренней оценке многозначного отображения полиномом к задаче о внешней оценке // Современные проблемы теории функций и их приложение: Тез. докл. 13-й Сарат. зимней шк. Саратов: ООО Изд-во «Научная книга», 2006. С. 45 – 46.
3. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.
4. Демьянов В. Ф., Малозёмов В. Н. Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.

УДК 517.15

Г. А. Сорокин

### О НЕКОТОРЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ФОРМУЛАХ ДЛЯ ФАКТОРИАЛА $n!$

В теоретических исследованиях и практических расчетах встречается необходимость в приближенном представлении выражения  $n!$  с помощью элементарной функции от  $n$ . Такое представление дает формула Стирлинга [1, с. 59]

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\Theta}{12n}} \quad (0 < \Theta < 1).$$

Эта формула в виде точных неравенств

$$\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} < n! < \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n + \frac{1}{12n}} \quad (1)$$

позволяет получить хорошие оценки снизу и сверху для больших чисел  $n!$ .

В [2, с. 107 – 109] получена следующая более точная оценка:

$$\frac{3}{64} \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{191}{48} + \frac{1}{12n}} \leq n! \leq \frac{3}{64} \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{9423}{2368} + \frac{49}{592n}}. \quad (2)$$

В данной статье рассматриваются две асимптотические формулы для факториала  $n!$ , позволяющие вычислить  $n!$  точнее, чем формулы (1) и (2).

При изложении применяются две леммы.

ЛЕММА 1. Для любой последовательности  $\{a_n\}$  и любого натурального  $n \geq 1$  справедливо тождество

$$\sum_{k=1}^n a_k = na_{n+1} + \sum_{k=1}^n k(a_k - a_{k+1}). \quad (3)$$

Равенство (3) проверяется непосредственно.

ЛЕММА 2. Для любого натурального числа  $n \geq 7$  справедливо равенство

$$\ln n! = \ln \left( \frac{720}{7^{6,5}} \sqrt{nn^n} \right) - \sum_{k=7}^{n-1} \left( k + \frac{1}{2} \right) \ln \frac{k+1}{k}. \quad (4)$$

Доказательство. Положим в формуле (3)  $a_k = \ln k$ .

Имеем

$$\ln n! = \sum_{k=1}^n \ln k = n \ln(n+1) + \sum_{k=1}^n k \ln \frac{k}{k+1}.$$

В правой части этого равенства выделим из суммы последнее слагаемое, а оставшуюся сумму представим следующим образом:

$$\ln n! = n \ln n - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \ln \frac{k}{k+1} + \sum_{k=1}^{n-1} \left( k + \frac{1}{2} \right) \ln \frac{k}{k+1} = \ln(\sqrt{nn^n}) - \sum_{k=1}^{n-1} \left( k + \frac{1}{2} \right) \ln \frac{k+1}{k}.$$

Выделив из последней суммы шесть первых слагаемых, будем иметь

$$\ln n! = \ln \left( \frac{720}{7^{6,5}} \sqrt{nn^n} \right) - \sum_{k=7}^{n-1} \left( k + \frac{1}{2} \right) \ln \frac{k+1}{k}.$$

Мы получили равенство (4).

С помощью леммы 2 доказывается основная

ТЕОРЕМА 1. При любом натуральном  $n \geq 7$  справедливо неравенство

$$\frac{720}{7^{6,5}} \sqrt{nn^n} e^{(7-n) \left( 1 + \frac{1}{84n} \right)} \leq n! \leq \frac{720}{7^{6,5}} \sqrt{nn^n} e^{(7-n) \left( 1 + \frac{74n-1,13}{6216n^2} \right)}. \quad (5)$$

Доказательство. При  $n=7$  (5) обращается в равенство. При  $n=8$  и  $n=9$  справедливость (5) проверяется непосредственно. Имеем

$$40319,89 < 8! < 40320,004; \quad 362878,4 < 9! < 362880,24.$$

Для доказательства (5) при  $n \geq 10$  рассмотрим следующие функции и их производные:

$$\varphi(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} - 2x \left( 1 + \frac{74n-1,13}{222n} \cdot \frac{x^2}{1-x^2} \right), \quad \Psi(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} - 2x \left( 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{1-x^2} \right);$$

$$\varphi'(x) = \frac{x^2}{(1-x^2)^2 111n} (3,39 - (148n+1,13)x^2), \quad \Psi'(x) = -\frac{4x^2}{3(1-x^2)^2} \leq 0.$$

Далее достаточно выяснить знаки  $\varphi$  и  $\Psi$  в промежутке  $[0; \frac{1}{2n+1}]$ .

На этом промежутке  $\Psi(x)$  убывает от нуля, поэтому  $\Psi(x) \leq 0$ .

$$\begin{aligned} 3,39 - (148n+1,13)x^2 &\geq 3,39 - (148n+1,13) \frac{1}{(2n+1)^2} = \\ &= \frac{1}{(2n+1)^2} (n(13,56n-135,44) + 2,26) > 0 \text{ при } n \geq 10. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\varphi(x)$  возрастает от нуля и  $\varphi(x) \geq 0$ . Отсюда и из неравенства  $\Psi(x) \leq 0$  следует, что

$$2x \left( 1 + \frac{74n-1,13}{222n} \cdot \frac{x^2}{1-x^2} \right) \leq \ln \frac{1+x}{1-x} \leq 2x \left( 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{1-x^2} \right).$$

Разделим это неравенство на  $2x$  и возьмем  $x = \frac{1}{2k+1}$ , где  $k \geq 10$  —

произвольное натуральное число. Так как тогда  $\frac{1+x}{1-x} = \frac{k+1}{k}$  и

$\frac{1}{2k+1} \in \left[ 0; \frac{1}{21} \right]$ , то мы получим неравенства

$$1 + \frac{74n-1,13}{222n} \cdot \frac{1}{4k(k+1)} \leq \left( k + \frac{1}{2} \right) \ln \frac{k+1}{k} \leq 1 + \frac{1}{12k(k+1)}.$$

Эти неравенства верны и при  $k=7, 8, 9$ .

Сложим эти неравенства по  $k$  от  $k=7$  до  $k=n-1$

и заметим, что  $\sum_{k=7}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{7} - \frac{1}{n}$ . В результате будем иметь

$$(n-7) \left( 1 + \frac{74n-1,13}{6216n^2} \right) \leq \sum_{k=7}^{n-1} \left( k + \frac{1}{2} \right) \ln \frac{k+1}{k} \leq (n-7) \left( 1 + \frac{1}{84n} \right).$$

Из этого неравенства и леммы 2 следует неравенство (5).

Обозначим левую и правую части (5) соответственно через  $A_n$  и  $B_n$ .

Из (5) вытекает

$$\text{ТЕОРЕМА 2. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{B_n} = 1.$$

Действительно, разделив (5) на  $A_n$ , получим

$$1 \leq \frac{n!}{A_n} \leq e \frac{(7-n)(-1,13)}{6216n^2} \leq e \frac{1,13}{6216n}. \quad (6)$$

Отсюда имеем  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{A_n} = 1$ . После деления (5) на  $B_n$  аналогично получим

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{B_n} = 1$ . Таким образом, мы получили две асимптотические формулы для  $n!$ :  $A_n \approx n!$  и  $n! \approx B_n$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Эти формулы точнее асимптотической формулы Стирлинга.

В заключение сравним результаты вычисления  $n!$  по формуле Стирлинга и по формуле (5). Правая часть (6) при  $n \geq 10$  не превосходит числа  $\frac{1,13}{62160} = 1,000018\dots$ , а при  $n \geq 100$  не превосходит числа 1,0000019. Следовательно, относительная ошибка, происходящая при вычислении  $n!$  по формуле (5), не превосходит 0,002% при  $n \geq 10$  и 0,0002% при  $n \geq 100$ . По формуле Стирлинга относительная ошибка не превосходит 1% при  $n \geq 10$  и 0,1% при  $n \geq 100$  [3, с. 328]. Так, например, по формуле Стирлинга  $10! \approx 3598696$ , между тем как точное значение  $10! = 3628800$ . Относительная ошибка составляет 0,83%. По формуле (5)  $3628780 < 10! < 3628800,7$ . Правая часть дает точное значение, а левая с ошибкой меньше 0,0006%.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Фихтенгольц Г. М.* Основы математического анализа: В 2 т. М.: Наука, 1968. Т. 2.
2. *Сорокин Г. А.* О двухсторонней оценке факториала  $n!$  // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. 2003, Вып. 5. С. 107 – 108.
3. *Франклин Ф.* Математический анализ: В 2 т. М.: Изд-во иностр. лит., 1950. Т. 2.

УДК 517.5

**П. А. Терехин**

### ВСПЛЕСКИ НАД КОЛЬЦОМ ЦЕЛЫХ $P$ -АДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ\*

Пусть  $p$  – простое число и  $\mathbb{Q}_p$  – поле  $p$ -адических чисел. Напомним, что всякое  $p$ -адическое число  $x \in \mathbb{Q}_p$  допускает разложение в ряд по возрастающим степеням числа  $p$ :

$$x = a_{-m} \frac{1}{p^m} + \dots + a_{-1} \frac{1}{p} + a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n + \dots,$$

---

\* Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для молодых ученых – кандидатов наук (проект МК-2569-2005.1) и РФФИ (проект 06-01-00003).

с коэффициентами  $a_k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ ,  $k \geq -m$ . Для ненулевого  $p$ -адического числа  $x$  существует и единственно целое рациональное число  $-m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  такое, что  $a_{-m} \neq 0$ . В этом случае величину  $|x|_p = p^m$  называют  $p$ -адической нормой числа  $x$ . Если  $|x|_p \leq 1$ , то число  $x$  называют целым  $p$ -адическим. Множество всех целых  $p$ -адических обозначают  $\mathbb{Z}_p$ . Таким образом, любое целое  $p$ -адическое число  $x \in \mathbb{Z}_p$  однозначно представляется в виде

$$x = a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n + \dots,$$

где  $a_k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ ,  $k \geq 0$ . Примем следующие обозначения:

$A = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{0, 1, \dots, p-1\}^k$  – семейство всех конечных последовательностей

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ , состоящих из чисел  $0, 1, \dots, p-1$ ;

$|\alpha|$  – длина последовательности  $\alpha \in A$ , т.е.  $|\alpha| = k$  при  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ ;

$\Delta(\alpha) = \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \{x \in \mathbb{Z}_p : a_{k-j} = \alpha_j, 1 \leq j \leq k\}$ , где  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in A$  и

$a_0, \dots, a_{k-1}$  – коэффициенты в представлении целого  $p$ -адического числа  $x$ .

Семейство  $S = \{\emptyset\} \cup \{\Delta(\alpha) : \alpha \in A\}$  образует полукольцо множеств и функция множества  $|\Delta(\alpha)| = p^{-|\alpha|}$  является мерой на полукольце  $S$ , лебеговское продолжение которой совпадает с индуцированной на  $\mathbb{Z}_p$  нормированной мерой Хаара  $dx$  в поле  $\mathbb{Q}_p$ .  $p$ -адическая норма  $|\cdot|_p$  определяет топологию в поле  $\mathbb{Q}_p$ , в которой множества  $\Delta(\alpha)$ ,  $\alpha \in A$ , являются открыто-замкнутыми шарами и любое открытое множество в  $\mathbb{Z}_p$  является конечным или счетным объединением таких шаров (см., например, [1, с. 24]). Отсюда следует, что  $\sigma$ -алгебра  $\mathfrak{B}$  всех борелевских множеств в  $\mathbb{Z}_p$  совпадает с наименьшей  $\sigma$ -алгеброй  $\mathfrak{A}(S)$ , содержащей все множества полукольца  $S$ .

Пусть  $C(\mathbb{Z}_p)$  – пространство вещественных непрерывных функций на компакте  $\mathbb{Z}_p$  и  $V(\mathbb{Z}_p)$  – пространство регулярных борелевских мер на  $\mathbb{Z}_p$ . Напомним, что принадлежность  $\mu \in V(\mathbb{Z}_p)$  означает, что  $\mu$  – счетно-аддитивная вещественная функция, определенная на  $\mathfrak{B}$  и такая, что для любого множества  $E \in \mathfrak{B}$  и произвольного  $\varepsilon > 0$  найдутся открытое множество  $G \supset E$  и замкнутое множество  $F \subset E$  такие, что  $|\mu|(G \setminus E) < \varepsilon$  и  $|\mu|(E \setminus F) < \varepsilon$ , где  $|\mu|(A)$  – полная вариация меры  $\mu$  на множестве  $A \in \mathfrak{B}$ . Из теоремы Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала следует, что пространство, сопряженное к  $C(\mathbb{Z}_p)$ , изометрически изоморфно пространству  $V(\mathbb{Z}_p)$  с нормой  $\|\mu\|_V = Var(\mu) = |\mu|(\mathbb{Z}_p)$ , причем  $\int_{\mathbb{Z}_p} f(x) d\mu$  – общий вид непрерывного линейного функционала в  $C(\mathbb{Z}_p)$ .

ЛЕММА. Справедливо равенство

$$\|\mu\|_V = \sup_{k \geq 0} \sum_{|\alpha|=k} |\mu(\Delta(\alpha))|.$$

Доказательство. По определению полной вариации меры  $\mu$  и с учетом равенства  $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}(S)$  имеем  $\mu(Z_p) = \sup_n \sum |\mu(\Delta(\alpha_n))|$ , где верхняя грань берется по произвольным конечным наборам попарно непересекающихся множеств  $\Delta(\alpha_n)$  из полукольца  $S$ . Положим для такого набора  $k = \max_n |\alpha_n|$ . Тогда  $\Delta(\alpha)$ ,  $|\alpha|=k$ , – система составляющих для набора  $\Delta(\alpha_n)$ . Поэтому

$$\sum_n |\mu(\Delta(\alpha_n))| = \sum_n \left| \sum_{\{\alpha: |\alpha|=k: \Delta(\alpha) \subset \Delta(\alpha_n)\}} \mu(\Delta(\alpha)) \right| \leq \sum_{|\alpha|=k} |\mu(\Delta(\alpha))|,$$

откуда  $|\mu|(Z_p) \leq \sup_{k \geq 0} \sum_{|\alpha|=k} |\mu(\Delta(\alpha))|$ . Обратное неравенство очевидно, поскольку  $\Delta(\alpha)$ ,  $|\alpha|=k$ , – частные случаи рассматриваемых наборов. Лемма доказана.

Пусть функция  $f \in C(\mathbb{Q}_p)$  имеет носитель  $\text{supp} f \subset Z_p$ . Для каждого  $i = 0, 1, \dots, p-1$  рассмотрим операторы  $V_i f(x) = f(p^{-1}(x-i))$ . Далее, обозначим  $V(\alpha) = V_{\alpha_k} \dots V_{\alpha_1}$  – произведение операторов,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in A$ , где первым действует оператор  $V_{\alpha_1}$ , последним –  $V_{\alpha_k}$ . Ясно, что  $V(\alpha)$ ,  $\alpha \in A$ , – изометрические операторы в пространстве  $C(\mathbb{Z}_p)$  и  $\text{supp} V(\alpha)f \subset \Delta(\alpha)$ .

Определение. Пусть функция  $\varphi \in C(\mathbb{Q}_p)$  имеет носитель  $\text{supp} \varphi \subset Z_p$ . Семейство функций  $\{V(\alpha)\varphi: \alpha \in A\}$  назовем *семейством функций-всплесков, порожденным функцией*  $\varphi$ .

ТЕОРЕМА. Пусть функция  $\varphi \in C(\mathbb{Q}_p)$  имеет носитель  $\text{supp} \varphi \subset Z_p$  и положительна  $\varphi(x) > 0$  для всех  $x \in Z_p$ . Тогда семейство функций-всплесков  $\{V(\alpha)\varphi: \alpha \in A\}$  является системой представления в пространстве  $x \in Z_p$  в следующем смысле: для любой функции  $f \in C(\mathbb{Z}_p)$  справедливо представление

$f = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} c(\alpha) V(\alpha)\varphi$ , ряд в правой части которого сходится

абсолютно по индексу  $k$ , т.е.  $\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \sum_{|\alpha|=k} c(\alpha) V(\alpha)\varphi \right\|_C < \infty$ .

Доказательство. Пусть  $X$  – пространство числовых семейств  $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$  с нормой  $\|x\|_{1, \infty} = \sum_{k=0}^{\infty} \max_{|\alpha|=k} |x_\alpha| < \infty$ . Сопряженным к про-

пространству  $X$  будет пространство  $Y$  числовых семейств  $y = (y_\alpha)_{\alpha \in A}$  с нормой  $\|y\|_{\infty,1} = \sup \sum_{k \geq 0} \sum_{|\alpha|=k} |y_\alpha| < \infty$ . Определим оператор  $T: X \rightarrow C(\mathbb{Z}_p)$  посредством равенства

$Tx = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} x_\alpha V(\alpha)\varphi$ . Сопряженный оператор

$T^*: V(\mathbb{Z}_p) \rightarrow Y$  имеет вид  $T^*\mu = \left\{ \int_{\mathbb{Z}_p} V(\alpha)\varphi d\mu : \alpha \in A \right\}$ . Для  $\varphi = \chi$  — характеристической функции множества  $\mathbb{Z}_p$  соответствующий оператор  $T$  обозначим через  $T_0$ . Будем иметь  $T_0^*\mu = \{\mu(\Delta(\alpha)) : \alpha \in A\}$ . С учетом леммы находим  $\|T_0^*\mu\|_{\infty,1} = \|\mu\|_V$ . Пусть теперь  $c > 0$ . Вычислим

$$\begin{aligned} \|cT_0^*\mu - T^*\mu\|_{\infty,1} &= \sup \sum_{k \geq 0} \sum_{|\alpha|=k} \left| \int_{\mathbb{Z}_p} (cV(\alpha)\chi - V(\alpha)\varphi) d\mu \right| \leq \\ &\leq \sup \sum_{k \geq 0} \sum_{|\alpha|=k} \|cV(\alpha)\chi - V(\alpha)\varphi\|_C |\mu(\Delta(\alpha))| = \|c\chi - \varphi\|_C \|\mu\|_V. \end{aligned}$$

Отсюда  $\|T^*\mu\|_{\infty,1} \geq c\|T_0^*\mu\|_{\infty,1} - \|cT_0^*\mu - T^*\mu\|_{\infty,1} \geq (c - \|c\chi - \varphi\|_C)\|\mu\|_V$ . Выберем  $c > 0$  так, чтобы  $\gamma = c - \|c\chi - \varphi\|_C > 0$ . По условию теоремы имеем

$0 < m \leq \varphi(x) \leq M < \infty$  для всех  $x \in \mathbb{Z}_p$ . Положим  $c = \frac{M+m}{2}$ . Тогда  $|c - \varphi(x)| \leq c - m = M - c = \frac{M-m}{2} < c$ , откуда  $\|c\chi - \varphi\|_C < c$ , так что  $\gamma > 0$ .

Итак, установлено неравенство  $\|T^*\mu\|_{\infty,1} \geq \gamma\|\mu\|_V$ , которое показывает, что

оператор  $T^*$  является инъекцией. Следовательно, оператор  $T$  отображает пространство  $X$  на  $C(\mathbb{Z}_p)$ . Поэтому для любой функции  $f \in C(\mathbb{Z}_p)$  существует числовая последовательность  $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A} \in X$  такая, что  $f = Tx$ .

Последнее означает, что справедливо представление  $f = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} x_\alpha V(\alpha)\varphi$ ,

причем ряд в правой части сходится абсолютно

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \sum_{|\alpha|=k} x_\alpha V(\alpha)\varphi \right\|_C = \sum_{k=0}^{\infty} \max_{|\alpha|=k} |x_\alpha| \|V(\alpha)\varphi\| = \|\varphi\|_C \|x\|_{1,\infty} < \infty.$$

Теорема доказана.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Владимиров В. С., Волович И. В., Зеленов Е. И.  $p$ -адический анализ и математическая физика. М.: Физматлит, 1994.



А. Ю. Трынин

**ПРИНЦИП ЛОКАЛИЗАЦИИ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ  
ЛАГРАНЖА – ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ\***

Пусть  $y(x, \lambda_n)$  – собственная функция задачи Штурма – Лиувилля

$$\begin{aligned} y'' + (\lambda - q(x)) &= 0, \\ U(y) = y'(0) - hy(0) &= 0, \\ V(y) = y'(\pi) + Hy(\pi) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

с потенциалом  $q$  ограниченной вариации на  $[0, \pi]$ , соответствующая собственному значению  $\lambda_n$ . А  $x_{k,n}$  –  $k$ -й нуль (после нумерации в порядке возрастания) этой собственной функции, попадающий в отрезок  $[0, \pi]$ . Назовём интерполяционным процессом Лагранжа – Штурма – Лиувилля последовательность линейных операторов, определённых на некотором классе  $F$  функций  $f$ , заданных на отрезке  $[0, \pi]$

$$L_n(f, x) = \sum_{x_{k,n} \in [0, \pi]} \frac{y(x, \lambda_n)}{y'(x_{k,n}, \lambda_n)(x - x_{k,n})} f(x_{k,n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{x_{k,n} \in [0, \pi]} l_{k,n}(x) f(x_{k,n}). \quad (2)$$

Будем говорить, что для интерполяционного процесса (2) на классе функций  $F$  в точке  $x_0 \in [0, \pi]$  имеет место принцип локализации, если для любых функций  $f$  и  $g$ , принадлежащих  $F$  таких, что в некоторой окрестности  $O_\delta(x_0)$  точки  $x_0$   $f(x) = g(x)$  следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{L_n(f, x_0) - L_n(g, x_0)\} = 0.$$

**ТЕОРЕМА.** В любой точке  $x_0 \in [0, \pi]$  на классе интегрируемых в смысле Римана на  $[0, \pi]$  функций для интерполяционного процесса Лагранжа – Штурма – Лиувилля (2) имеет место принцип локализации.

Рассмотрим случай  $|h| < \infty, |H| < \infty$ . Для доказательства теоремы нам потребуется вспомогательное утверждение, доказательство которого можно найти в [1, с. 318 – 326]. Вместе с И. А. Егоровой будем называть групповым интервалом  $I$  объединение конечного числа отрезков, содержащихся в  $[A, B]$  таких, что соответствующие им интервалы не пересекаются. Пусть  $\{x_{k,n}\}_{k=1, n=1}^{n, \infty}$  – произвольная система точек в отрезке  $[A, B]$ :  $A \leq x_{1,n} < x_{2,n} < \dots < x_{n,n} \leq B$ . Каждому  $x_{k,n}$  поставим в соответствие действительное число  $A_{k,n}$ .

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 04-01-00060).

ЛЕММА 1 Егоровой. Пусть функция  $f$  интегрируема в смысле Римана на  $[A, B]$ ,  $x_0 \in [A, B]$  и  $O_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [A, B]$ . Для того чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k: x_{k,n} \in [A, B] \setminus O_\delta(x_0)} A_{k,n} f(x_{k,n}) = 0, \quad (3)$$

необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты  $A_{k,n}$  удовлетворяли условиям:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k: x_{k,n} \in [a, b]} A_{k,n} = 0$ , где  $[a, b]$  – произвольный отрезок, содержащийся в  $[A, B] \setminus O_\delta(x_0)$ ;
2.  $\max_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k: x_{k,n} \in [A, B] \setminus O_\delta(x_0)} |A_{k,n}| \leq M < \infty$ ;
3. Для любой последовательности групповых сегментов  $\{I_j\}_{j=1}^\infty$  таких, что  $[A, B] \setminus O_\delta(x_0) \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_j \supset \dots$ ,  $m I_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{k: x_{k,n} \in I_j} |A_{k,n}| = 0.$$

Кроме леммы Егоровой нам потребуется ряд хорошо известных асимптотических формул, доказательство которых в случае более жёстких требований на потенциал  $q$  можно найти, например, в [2 – 4]. С помощью более громоздкого доказательства несложно проверяется, что эти асимптотические формулы сохраняют свой вид при указанных для (1) требованиях на  $q$ .

ЛЕММА 2. Пусть  $y(x, \lambda_n)$ ,  $\lambda_n$  и  $x_{k,n}$  определены как в (1). Тогда имеют место следующие асимптотические формулы:

$$y(x, \lambda_n) = \cos(nx) + \frac{\beta(x)}{n} \sin(nx) + O(n^{-2}), \quad (4)$$

$$y'(x_{k,n}, \lambda_n) = (-1)^k n + O(n^{-1}), \quad (5)$$

$$\sqrt{\lambda_n} = n + O(n^{-1}), \quad (6)$$

$$x_{k,n} = \frac{2k-1}{2n} \pi + \frac{\beta(\frac{2k-1}{2n} \pi)}{n^2} + O(n^{-3}), \quad (7)$$

где  $\beta(x) = -\frac{1}{\pi}(h + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt)x + h + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt$ , а оценка остаточного члена равномерна по  $x \in [0, \pi]$ .

Доказательство теоремы. Пусть  $x_0 \in [0, \pi]$ . Тогда любая собственная функция задачи (1) имеет ровно  $n$  простых нулей  $0 < x_{1,n} < x_{2,n} < \dots < x_{n,n} < \pi$ . Зафиксируем любое положительное  $\delta$  и возьмём произвольную интегрируемую по Риману на  $[0, \pi]$  функцию, равную нулю при любом  $x \in O_\delta(x_0)$ .

В силу леммы Егоровой для того, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(f, x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{x_{k,n} \in [0, \pi]} \frac{y(x_0, \lambda_n)}{y'(x_{k,n}, \lambda_n)(x - x_{k,n})} f(x_{k,n}) = 0, \quad (8)$$

необходимо и достаточно, чтобы для  $l_{k,n}(x_0)$  выполнялись условия:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k: x_{k,n} \in [a, b]} l_{k,n}(x_0) = 0$ , где  $[a, b]$  – произвольный отрезок, содержащийся в  $[0, \pi] \setminus O_\delta(x_0)$ ;
2.  $\max_{n \in N} \sum_{k: x_{k,n} \in [0, \pi] \setminus O_\delta(x_0)} |l_{k,n}(x_0)| \leq M < \infty$ ;
3. Для любой последовательности групповых сегментов  $\{I_j\}_{j=1}^\infty$  таких, что  $[A, B] \setminus O_\delta(x_0) \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_j \supset \dots$ ,  $mI_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ ,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{k: x_{k,n} \in I_j} |l_{k,n}(x_0)| = 0.$$

В силу (4) – (7) и формулы конечных приращений Лагранжа

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^n |l_{k,n}(x)| - \frac{|y(x, \lambda_n)|}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{|x - x_{k,n}|} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n \left\{ |l_{k,n}(x)| - \frac{|y(x, \lambda_n)|}{n} \frac{1}{|x - x_{k,n}|} \right\} \right| \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^n \left| l_{k,n}(x) - \frac{y(x, \lambda_n)}{n} \frac{(-1)^k}{(x - x_{k,n})} \right| = \sum_{k=1}^n \left| \frac{y(x, \lambda_n)}{x - x_{k,n}} \left\| \frac{y'(x_{k,n}, \lambda_n) - (-1)^k n}{(-1)^k n y'(x_{k,n}, \lambda_n)} \right\| \right| = O(n^{-1}). \quad (9) \end{aligned}$$

Поэтому

$$\left| \sum_{k: x_{k,n} \in [a, b]} l_{k,n}(x_0) \right| = \frac{|y(x_0, \lambda_n)|}{n} \left| \sum_{k: x_{k,n} \in [a, b]} \frac{(-1)^k}{x_0 - x_{k,n}} \right| + O(n^{-1}). \quad (10)$$

Пусть для определённости  $x_0$  лежит слева от отрезка  $[a, b]$ , тогда  $0 \leq x_0 < x_0 + \delta \leq a < b \leq \pi$ . Обозначим через  $x_{k_0, n}$  узел, ближайший справа к  $x_0$ , а через  $x_{k_1, n}$  и  $x_{k_2, n}$  – наименьший и наибольший из узлов, попадающих в отрезок  $[a, b]$ . В силу (7) можно выбрать  $n_1 \in N$  таким образом, чтобы для всех  $n \geq n_1$  выполнялись неравенства  $k_1 - k_0 \geq \left[ \frac{\delta}{2\pi} n \right] > 2$ ,  $\left| \frac{4 \|B\|_{C[0, \pi]}}{n^2} + O(n^{-3}) \right| < \frac{\pi}{n}$ . Положим  $x_{0, n} = 0$ . В силу выбора узла  $x_{k_0}$  имеем представление  $x_0 = x_{k_0, n} - \alpha(x_{k_0, n} - x_{k_0 - 1, n})$ , где  $0 \leq \alpha < 1$ . Отсюда и из (7) для любого  $k: 1 \leq k \leq n$  получаем  $x_{k, n} - x_0 = \frac{\pi}{n}(k - k_0 + \alpha + O(n^{-1}))$ .

После выбора нормировки собственных функций задачи (1) таким образом, чтобы выполнялись соотношения (4), обозначим через

$M = \sup\{|y(x, \lambda_n)| : x \in [0, \pi], n \in N\}$ . Возьмём произвольное положительное  $\varepsilon$ . Для достаточно больших  $n > n_2 \geq n_1$  таких, что

$$\left| \sum_{l=\left[\frac{\delta}{2\pi}n\right]}^{k_2-k_0} \frac{(-1)^{l+k_0}}{l} \right| + \sum_{l=\left[\frac{\delta}{2\pi}n\right]}^{k_2-k_0} \left| \frac{2}{l(l-2)} \right| < \frac{\varepsilon\pi}{2M},$$

имеем оценку

$$\begin{aligned} & \left| \frac{y(x_0, \lambda_n)}{n} \right| \sum_{k: x_{k,n} \in [a, b]} \frac{(-1)^k}{x_0 - x_{k,n}} \Big| \leq \\ & \leq \frac{|y(x_0, \lambda_n)|}{\pi} \left\{ \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{(-1)^k}{k - k_0} \right| + \sum_{k=k_1}^{k_2} \left| \frac{\alpha + O(n^{-1})}{(k - k_0)(k - k_0 + \alpha + O(n^{-1}))} \right| \right\} \leq \\ & \leq \frac{|y(x_0, \lambda_n)|}{\pi} \left\{ \sum_{l=k_1-k_0}^{k_2-k_0} \frac{(-1)^{l+k_0}}{l} \right| + \sum_{l=k_1-k_0}^{k_2-k_0} \left| \frac{2}{l(l-2)} \right| \right\} < \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Отсюда, (9) и (10) получаем, что первое условие леммы 1 Егоровой выполняется.

Рассуждая так же как при оценке сверху функций Лебега процесса (2) (см., например, [5]), убеждаемся в верности неравенства

$$\sum_{k: x_{k,n} \in [a, b]} |l_{k,n}(x_0)| \leq C m \varepsilon [a, b], \text{ где } [a, b] \in [0, \pi] \setminus O_\delta(x_0).$$

Откуда следует справедливость второго и третьего условий леммы 1 Егоровой, а значит, и (8). Теорема доказана.

*Замечание.* Используя соответствующие асимптотические формулы, аналогично устанавливается принцип локализации в случае  $|h| = \infty$  или  $|H| = \infty$ .

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Егорова И. А. О принципе локализации в теории интерполирования // Учён. зап. Ленинград. пед. ин-та. 1949. Вып. 86. С. 317 – 335.
2. Левитан Б. М., Сергсян И. С. Операторы Штурма – Лиувилля и Дирака. М., 1988.
3. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1953. Т. 1, 2.
4. Юрко В. А. Обратные спектральные задачи и их приложения. Саратов, 2001.
5. Трынин А. Ю. О равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа – Штурма – Лиувилля. Саратов, 1991. 32 с. Деп. в ВИНТИ 26.04.91, № 1763 – В91.

С. В. Тышкевич

## ЧЕБЫШЁВСКИЕ ПОЛИНОМЫ НА ДУГАХ ЕДИНИЧНОЙ ОКРУЖНОСТИ\*

Задачи о нахождении полинома степени  $n$  с заданным старшим коэффициентом, наименее уклоняющегося от нуля в метриках  $C([-1,1])$  и  $L_1([-1,1])$ , были решены П. Л. Чебышёвым [1, 2]. В метрике  $C([-1,1])$  наименее уклоняющимися от нуля многочленами являются многочлены Чебышёва первого рода

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n \arccos x,$$

в метрике  $L_1([-1,1])$  – многочлены Чебышёва второго рода

$$U_n(x) = \left(x - \cos \frac{\pi}{n+1}\right) \dots \left(x - \cos \frac{\pi n}{n+1}\right).$$

В 2004 г. А. Л. Лукашов [3] решил задачу о рациональной тригонометрической функции с фиксированным знаменателем, наименее уклоняющейся от нуля на нескольких отрезках на периоде.

Известно, что полиномы Чебышёва, нули которых расположены на фиксированном компакте комплексной плоскости, применяются, например, при изучении свойств его трансфинитного диаметра, для оценки оптимальной ошибки экстраполяции с конечного множества целых функций из класса Винера [4].

Цель настоящей статьи – найти многочлен, наименее уклоняющийся от нуля на дугах единичной окружности, с нулями на этих дугах.

На множестве

$$\Gamma_E = \left\{z \in C : z = e^{i\varphi}, \varphi \in E\right\},$$

где  $E = [\varphi_1, \varphi_2] \cup \dots \cup [\varphi_{2l-1}, \varphi_{2l}]$ ,  $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_{2l} < 2\pi$ ,  $l \geq 2$ ,

будем рассматривать многочлены  $P_n(z) = \prod_{j=1}^n (z - z_j)$ ,  $z_j \in \Gamma_E$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

Множество таких многочленов обозначим  $\wp_n(E)$ .

Напомним, функция  $\omega(z, G, C \setminus \Gamma_E)$  называется *гармонической мерой* множества  $G \subset \Gamma_E$  в точке  $z \in C \setminus \Gamma_E$  относительно области  $C \setminus \Gamma_E$ , если:

- 1)  $\omega(z, G, C \setminus \Gamma_E)$  – гармоническая и ограниченная в  $C \setminus \Gamma_E$ ;
- 2)  $\omega(z, G, C \setminus \Gamma_E) = 1$  при  $z \in G$  и  $\omega(z, G, C \setminus \Gamma_E) = 0$  при  $z \in \Gamma_E \setminus G$ .

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 04-01-00060).

Обозначив через  $g_E(\zeta, z)$  функцию Грина области  $C \setminus \Gamma_E$ ,  $n$  – внешней нормаль в точке  $\zeta$ ,  $\Gamma_{E_k} = \{\zeta : \zeta = e^{i\varphi}, \varphi \in E_k = [\varphi_{2k-1}, \varphi_{2k}]\}$ , для гармонической меры  $\omega_k(z) = \omega(z, \Gamma_{E_k}, C \setminus \Gamma_{E_k})$  можем записать соотношение

$$\frac{1}{\pi} \int_{\varphi_{2k-1}}^{\varphi_{2k}} \frac{\partial}{\partial n} g_E(\zeta, z) |d\zeta| + \frac{1}{\pi} \int_{\varphi_{2k-1}}^{\varphi_{2k}} \frac{\partial}{\partial n} g_E(\zeta, \bar{z}) |d\zeta| = \omega_k(z) + \omega_k(\bar{z}).$$

ТЕОРЕМА. Если гармонические меры  $\omega_k(\infty)$  дуг  $\Gamma_{E_k}$ ,  $k = \overline{1, l}$ , – рациональные числа,  $\varpi(z, x)$  – плотность гармонической меры, определяемая равенством

$$\varpi(z, x) = \frac{\partial}{\partial x} \omega(z, \Gamma_E \cap \{e^{i\varphi} : 0 \leq \varphi \leq x\}, C \setminus \Gamma_E),$$

то минимум в экстремальной задаче

$$\max_{z \in \Gamma_E} |P_n(z)| = \min_{P_n(z) \in \mathcal{P}_n(E)} \max_{z \in \Gamma_E} |P_n(z)| \quad (1)$$

доставляют многочлены

$$P_n^*(z) = A_n \varepsilon \cos \left( \frac{\pi n}{2} \int_{E \cap [0, \varphi]} (\varpi(\infty, \zeta) + \varpi(0, \zeta)) d\zeta \right),$$

где  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ ,  $A_n = \text{const}$ .

Доказательство. Тригонометрический полином  $T_m(\varphi)$  порядка  $m$  может быть записан через свои корни следующим образом:

$$T_m(\varphi) = c \prod_{j=1}^{2m} \sin \frac{\varphi - \varphi_j}{2} = c \prod_{j=1}^{2m} e^{-i \frac{\varphi + \varphi_j}{2}} \frac{1}{2i} (e^{i\varphi} - e^{i\varphi_j}) = \hat{c} z^{-m} \prod_{j=1}^{2m} (z - z_j),$$

$$\hat{c} = \frac{c}{4^m} \prod_{j=1}^{2m} e^{-i \frac{\pi + \varphi_j}{2}},$$

где  $c = \text{const}$ .

Следовательно, алгебраический многочлен степени  $n$  представим в виде

$$P_n(z) = \frac{1}{\hat{c}} e^{i \left[ \frac{n}{2} \right] \varphi} T_{\left[ \frac{n}{2} \right]}(\varphi),$$

где  $T_{\left[ \frac{n}{2} \right]}(\varphi)$  – тригонометрический полином полуцелого порядка, причем каждому корню  $\varphi_j$  полинома  $T_{\left[ \frac{n}{2} \right]}(\varphi)$  соответствует корень  $z_j = e^{i\varphi_j}$  той же кратности многочлена  $P_n(z)$  и наоборот.

Таким образом,

$$\min_{P_n \in \mathcal{P}_n(E)} \max_{z \in \Gamma_E} |P_n(z)| = \frac{2^n}{c} \min_{\varphi_j \in E} \max_{\varphi \in E} \left| T_{\left[ \frac{n}{2} \right]}(\varphi) \right|.$$

В работе [3] приводится решение задачи

$$\min_{a_i, b_i \in R} \max_{\varphi \in E} |A \cos N\varphi + B \sin N\varphi + a_1 \cos(N-1)\varphi + b_1 \sin(N-1)\varphi + \dots + a_{[n]} \cos\left(N - 2\left[\frac{N}{2}\right]\right)\varphi + b_{[n]} \sin\left(N - 2\left[\frac{N}{2}\right]\right)\varphi|, \quad (2)$$

где  $N$  – полуцелое,  $N \in \mathbb{N}/2$ ,  $A, B \in R$ ,  $A^2 + B^2 \neq 0$ .

Анализируя доказательство теоремы 2 [3], можно заметить, что нули тригонометрического полинома  $T_{\left[ \frac{n}{2} \right]}(\varphi)$ , решающего задачу (2), лежат на

множестве  $E$ , значит, нули алгебраического многочлена  $P_n^*(z)$ , решающего задачу (1), лежат на множестве  $\Gamma_E$ . Поэтому будем иметь

$$P_n^*(z) = A_n \varepsilon \cos\left(\frac{\pi n}{2} \int_{E \cap [0, \varphi]} (\varpi(\infty, \zeta) + \varpi(0, \zeta)) d\zeta\right),$$

где  $\varpi(z, x) = \frac{\partial}{\partial x} \omega(z, \Gamma_E \cap \{e^{i\varphi} : 0 \leq \varphi \leq x\}, C \setminus \Gamma_E)$ ,  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ , константа  $A_n$  выражается в терминах автоморфных функций.

Теорема доказана.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Чебышёв П. Л. Теория механизмов, известных под названием параллелограммов: Полн. собр. соч. М.; Л., 1947. Т. 2. С. 23 – 51.
2. Чебышёв П. Л. Об интерполировании в случае большого числа данных, доставленных наблюдением: Полн. собр. соч. М.; Л., 1947. Т. 2. С. 244 – 313.
3. Лукашов А. Л. Неравенства для производных рациональных функций // Изв. РАН. Сер. Математическая. 2004. Т. 68, № 3. С. 115 – 138.
4. Маергойз Л. С. Полиномы Чебышёва на заданном компакте и их приложения // Комплексный анализ и его приложения: Тез. докл. междунар. шк.-конф., посвященной памяти профессора И. П. Митюка. Краснодар, 11 – 17 сент. 2005 г. Краснодар, 2005. С. 75 – 76.

## СУММИРУЕМОСТЬ ПО РИССУ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ \*

В пространстве  $L[0,1]$  рассматривается интегральный оператор вида

$$Af(x) = \alpha_1 \int_0^x A(x,t)f(t)dt + \alpha_2 \int_0^{1-x} A(1-x,t)f(t)dt + \sum_{k=1}^m (f, v_k)g_k(x), \quad (1)$$

где  $A(x,t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$ ,  $\beta = \alpha_1^2 - \alpha_2^2 \neq 0$ ,  $v_k(t) \in C^n[0,1]$ ,  $g_k(x) \in C^n[0,1]$ ,

$\{v_k(t)\}_1^m$  и  $\{g_k^{(n)}(x)\}_1^m$  линейно независимые,  $(f, v_k) = \int_0^1 f(t)v_k(t)dt$ .

В данной статье рассматриваются средние по Риссу спектральных разложений оператора (1), представимые в виде

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) R_\lambda f d\lambda, \quad (2)$$

где  $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1} A$  – резольвента Фредгольма оператора  $A$ ,  $E$  – единичный оператор,  $\lambda$  – спектральный параметр. Функция  $g(\lambda, r)$  удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $g(\lambda, r)$  непрерывна по  $\lambda$  в круге  $|\lambda| \leq r$  и аналитична по  $\lambda$  в круге  $|\lambda| < r$  при любом  $r > 0$ ;
- 2) при фиксированном  $\lambda$   $\lim_{r \rightarrow \infty} g(\lambda, r) = 1$ ;
- 3) существует такая константа  $C > 0$ , что  $|g(\lambda, r)| \leq C$  при всех  $r > 0$  и  $|\lambda| \leq r$ .

Средние по Риссу вида (2) обобщают средние по Риссу вида

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \left(1 - \frac{\lambda^4}{r^4}\right)^l R_\lambda f d\lambda, \quad l > 0,$$

которые исследовал М. Стоун в [1], где  $R_\lambda$  – резольвента интегрального оператора  $Af(x) = \int_0^1 A(x,t)f(t)dt$ , в случае, когда  $A(x,t)$  – функция Грина дифференциального оператора  $n$ -го порядка с регулярными по Биркгофу

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003).



краевыми условиями. Он показал, что на каждом  $[a, b] \subset (0, 1)$  имеет место равносуммируемость их с такими же средними обычных тригонометрических разложений в ряды Фурье.

В работе [2] А. П. Гуревичем и А. П. Хромовым для оператора (1) при  $n=1$  найдены необходимые и достаточные условия на  $f(x)$ , обеспечивающие равномерную сходимость к ней на всем отрезке  $[0, 1]$  обобщенных средних Рисса вида (2) с дополнительным условием на функцию  $g(\lambda, r)$ . В данной статье этот результат обобщается на случай произвольного  $n$ .

Важным достоинством оператора (1) является то, что для него условия существования обратного оператора выписываются в явном виде [3]. Кроме того, явно выписываются и константы в краевых условиях, получающихся при обращении оператора  $A$ , что позволяет проверить эти условия на регулярность. Существование  $A^{-1}$  и регулярность краевых условий необходимы для получения основной теоремы, и, вообще говоря, трудно проверяемы.

Пусть выполняется условие теоремы 1 из [3]. Тогда в силу теоремы 2 из [3] область значений оператора  $A$  состоит из всех функций, имеющих абсолютно непрерывные производные до  $(n-1)$ -го порядка включительно, и удовлетворяющих условиям

$$V_j(y) = U_j(y) - (y, \varphi_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3)$$

где

$$U_j(y) = a_j y^{(\sigma_j)}(0) + b_j y^{(\sigma_j)}(1) + \sum_{k=0}^{\sigma_j-1} [a_{jk} y^{(k)}(0) + b_{jk} y^{(k)}(1)] = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$\varphi_j \in C[0, 1]$ ,  $0 \leq \sigma_1 \leq \dots \leq \sigma_n \leq n-1$ ,  $\sigma_j < \sigma_{j+2}$ ,  $|a_j| + |b_j| > 0$ , причем, если  $\sigma_j = \sigma_{j+1}$ , то считаем, что  $a_j = 1$ ,  $a_{j+1} = 0$ ,  $b_j = 0$ ,  $b_{j+1} = 1$ .

Считаем, что условия (3), представляющие собой условия из теоремы 2 из [3] после приведения линейных форм к нормированному виду, регулярны по Биркгофу.

Обозначим через  $\omega_i$  различные корни  $n$ -й степени из 1,  $d = \sqrt[n]{|d_0|} \exp(i \frac{\arg d_0}{n})$ ,  $d_0 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}$ ,  $0 \leq \arg d_0 < 2\pi$ ,  $\lambda$  – спектральный параметр. Положим  $\lambda = \rho^n$  и разобьем область  $0 \leq \arg \rho \leq 2\pi/n$  на секторы  $\gamma_{j-1} \leq \arg \rho \leq \gamma_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ,  $0 = \gamma_0 < \dots < \gamma_N = 2\pi/n$ ) таким образом, что числа  $\omega_i, d\omega_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) можно перенумеровать через  $\tilde{\omega}_k$  ( $k = 1, \dots, 2n$ ) так, чтобы при любых  $\rho$  из рассматриваемого сектора выполнялось

$$\operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_1 \geq \dots \geq \operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_n \geq 0 \geq \operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_{n+1} \geq \dots \geq \operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_{2n}.$$

Обозначим через  $S_{\delta_0, j}$  – область, получающаяся из сектора  $\gamma_{j-1} \leq \arg \rho \leq \gamma_j$  удалением всех нулей квазимногочлена вида

$$a_{0, j} + a_{1, j} e^{-2\rho \tilde{\omega}_n} + a_{2, j} e^{-\rho(\tilde{\omega}_{n-1} + \tilde{\omega}_n)} + a_{3, j} e^{-2\rho \tilde{\omega}_{n-1}} + a_{4, j} e^{-2\rho(\tilde{\omega}_{n-1} + \tilde{\omega}_n)}$$

где  $a_{i, j} \neq 0$  ( $i = 0, 2, 3, 4$ ) асимптотически приближающихся к соответствующим корням  $n$ -й степени из собственных значений оператора  $A^{-1}$ , вместе с их круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса  $\delta_0$ .

Пусть  $g(\lambda, r)$  удовлетворяет еще одному условию:

4) для каждой области  $S_{\delta_0, j}$  существуют числа  $h_j > 0, \beta_j > 0$  такие,

что при  $\left| \varphi + \alpha - \frac{\pi}{2} \right| \leq h_j$  имеет место равномерная по  $r$  оценка

$$g(r \exp(in\varphi), r) = O\left(\left| \varphi + \alpha - \frac{\pi}{2} \right|^{\beta_j}\right), \text{ где } \varphi = \arg \rho, \alpha = \arg \tilde{\omega}_n.$$

Примерами таких функций могут служить функции вида

$$g(\lambda, r) = g_1(\lambda, r) g_2(\lambda, r),$$

$$\text{где } g_1(\lambda, r) = \left(1 - \frac{\lambda}{r}\right)^{\beta_1} \left(1 + \frac{\lambda}{r}\right)^{\beta_2} \left(1 - \frac{\lambda}{r} e^{i(\arg d - \pi/2)}\right)^{\beta_3} \left(1 - \frac{\lambda}{r} e^{i(\arg d + \pi/2)}\right)^{\beta_3},$$

$$g_2(\lambda, r) = \prod_{k=1}^l \left(1 - \frac{f_k(\lambda)}{M_r(f_k)}\right)^{s_k}, \quad l = 1, 2, \dots, \quad s_k \geq 0, \quad f_k(\lambda) \text{ целые по } \lambda,$$

$$M_r(f) = \max_{|\lambda|=r} |f(\lambda)|.$$

ТЕОРЕМА. Для того чтобы выполнялось соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) R_\lambda f d\lambda \right\|_{C[0,1]} = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы  $f(x)$  принадлежала множеству всех непрерывных на  $[0, 1]$  функций, удовлетворяющих тем краевым условиям из (3), которые не содержат производных.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Stone M. H. A comparison of the series of Fourier and Birkhoff // Trans. Amer. Math. Soc. 1926. Vol. 28, № 4. P. 695 – 761.
2. Гуревич А. П., Хромов А. П. Суммируемость по Риссу спектральных разложений для конечномерных возмущений одного класса интегральных операторов // Изв. вузов. Сер. Математика. 2003. № 2(489). С. 24 – 35.
3. Халова В. А. Задача обращения одного класса интегральных операторов // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 125 – 127.

## ОПЕРАТОР ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ НА ПРОСТЕЙШЕМ ГРАФЕ ИЗ ДВУХ РЕБЕР И СОДЕРЖАЩЕМ ЦИКЛ\*

Рассмотрим связный граф  $\Gamma$ , состоящий из двух ребер, причем концы одного ребра и один конец другого ребра связаны в один узел. Таким образом, граф состоит из одного узла и одного ребра (начало свободного ребра находится в узле). Зададим оператор дифференцирования  $Ly = y'(x)$ ,  $x \in \Gamma$  и при этом считаем, что  $y(x)$  непрерывна на  $\Gamma$ , включая узел, а на каждом ребре дифференцируема. Тогда [1] уравнение

$$Ly = \lambda y(x) + f(x), \quad x \in \Gamma,$$

эквивалентно следующей краевой задаче:

$$y_1'(x) = \lambda y_1(x) + f_1(x), \quad y_2'(x) = \lambda dy_2(x) + df_2(x), \quad x \in [0,1], \quad (1)$$

$$y_1(0) = y_1(1) = y_2(0). \quad (2)$$

Здесь  $d > 0$  и означает, что ребра графа могут быть разной длины. Собственные значения соответствующей однородной системы есть  $\lambda_k = 2k\pi i$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), а собственные функции есть  $\varphi_k(x) = (\varphi_{1k}(x), \varphi_{2k}(x))^T$  ( $T$  – знак транспонирования), где  $\varphi_{1k}(x) = e^{2k\pi ix}$ ,  $\varphi_{2k}(x) = e^{2k\pi dix}$ . Особенностью краевой задачи (1), (2) является то, что краевые условия нерегулярны по Биркгофу и поэтому использование метода контурного интеграла сопряжено с трудностями, обусловливаемыми экспоненциальным ростом резольвенты по  $\lambda$ . Пусть  $R_\lambda$  – резольвента задачи (1), (2). Тогда, если  $f = (f_1, f_2)^T$ ,  $y = (y_1, y_2)^T$ , то из (1), (2) получаем  $y = R_\lambda f$ , когда  $\lambda \neq \lambda_k$ . Известно, что

$$S_r(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_\lambda g d\lambda, \quad (3)$$

где  $S_r(f, x)$  – частичная сумма ряда Фурье вектор-функции  $f(x)$  по собственным функциям  $\varphi_k(x)$  для тех номеров  $k$ , для которых  $|2k\pi| < r$ .

ЛЕММА. Пусть  $\{\psi_k(x)\}$  – система вектор-функций, биортогональная  $\{\varphi_k(x)\}$ . Тогда

$$\psi_k(x) = (\psi_{1k}(x), \psi_{2k}(x))^T, \quad \text{где } \psi_{1k}(x) = \varphi_{1k}(x), \quad \psi_{2k}(x) \equiv 0.$$

Из этой леммы следует, что  $f_2(x)$  в (3) можно брать произвольной. Покажем, как за счет выбора  $f_2(x)$  можно достичь того, что  $R_\lambda f$  будет ограниченной по  $\lambda$  и тем самым можно изучить сходимость разложений по собственным функциям методом контурного интегрирования Коши – Пуанкаре. Именно имеет место

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003).

ТЕОРЕМА. Пусть  $N_0$  – неотрицательное целое число такое, что  $N_0 < d \leq N_0 + 1$ . Тогда для второй компоненты  $y_2(x, \lambda)$  вектор-функции  $R_\lambda f$  имеет место формула

$$y_2(x, \lambda) = \frac{e^{\lambda(xd-j+1)}}{1-e^\lambda} \left\{ \int_0^{xd-j} e^{-\lambda(1+t)} f_1(t) dt + \int_{xd-j}^1 e^{-\lambda t} f_1(t) dt \right\},$$

где  $x \in [jd^{-1}, (j+1)d^{-1}]$  ( $j=0, 1, \dots, N_0$ ) и при таких  $x$   $f_2(x) = f_1(xd-j)$  (при этом считаем, что  $(N_0+1)d^{-1}$  заменено на 1).

Доказательство. Имеем

$$y_2(x, \lambda) = R_\lambda^0 f_1 \Big|_{x=1} e^{\lambda xd} + \int_0^x e^{\lambda d(x-t)} df_2(t) dt, \quad (4)$$

где  $R_\lambda^0 f = \frac{e^{\lambda x}}{1-e^\lambda} \int_0^1 e^{\lambda(1-t)} f_1(t) dt + \int_0^x e^{\lambda(x-t)} f_1(t) dt$ .

Пусть  $x \in [jd^{-1}, (j+1)d^{-1}]$ . Тогда из (4) имеем

$$\begin{aligned} y_2(x, \lambda) &= e^{\lambda xd} \left\{ \frac{1}{1-e^\lambda} \int_0^1 e^{\lambda(1-t)} f_1(t) dt + \int_0^{xd} e^{-\lambda t} f_2\left(\frac{t}{d}\right) dt \right\} = \\ &= e^{\lambda xd} \left\{ \frac{1}{1-e^\lambda} \int_0^1 e^{\lambda(1-t)} f_1(t) dt + \left( \int_0^1 + \int_1^2 + \dots + \int_{j-1}^j + \int_j^{xd} \right) e^{-\lambda t} f_2\left(\frac{t}{d}\right) dt \right\} = \\ &= e^{\lambda xd} \left\{ \frac{1}{1-e^\lambda} \int_0^1 e^{\lambda(1-t)} f_1(t) dt + \int_0^1 e^{-\lambda t} f_1(t) dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_1^2 e^{-\lambda t} f_1(t-1) dt + \dots + \int_{j-1}^j e^{-\lambda t} f_1(t-j+1) dt + \dots + \int_j^{xd} e^{-\lambda t} f_1(t-j) dt \right\} = \\ &= e^{\lambda xd} \left\{ \frac{1}{1-e^\lambda} \left[ e^\lambda + (1-e^\lambda) + e^\lambda(1-e^{-\lambda}) + \dots + e^{-\lambda(j-1)}(1-e^\lambda) \right] \int_0^1 e^{-\lambda t} f_1(t) dt + \right. \\ &\quad \left. + e^{-\lambda j} \int_0^{xd-j} e^{-\lambda t} f_1(t) dt \right\} = e^{\lambda xd} \left\{ \frac{e^{-\lambda(j-1)}}{1-e^\lambda} \int_0^1 e^{-\lambda t} f_1(t) dt + e^{-\lambda j} \int_0^{xd-j} e^{-\lambda t} f_1(t) dt \right\} = \\ &= e^{\lambda(xd-j)} \left\{ \frac{e^\lambda}{1-e^\lambda} \left[ \int_0^{xd-j} + \int_{xd-j}^1 \right] e^{-\lambda t} f_1(t) dt + \int_0^{xd-j} e^{-\lambda t} f_1(t) dt \right\} = \\ &= \frac{e^{\lambda(xd-j)}}{1-e^\lambda} \left\{ \int_0^{xd-j} e^{-\lambda t} f_1(t) dt + e^\lambda \int_{xd-j}^1 e^{-\lambda t} f_1(t) dt \right\}. \quad \text{Теорема доказана.} \end{aligned}$$

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Покорный Ю. В. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: Физматгиз, 2004. 272 с.

## О МОДУЛЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ ОПЕРАТОРА $m$ -КРАТНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И ОПТИМАЛЬНОСТИ МЕТОДА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА\*

Данная статья представляет собой обобщение результата, полученного в [1].

Пусть  $f(x)$  – функция, удовлетворяющая условиям:

$$f^{(2m)}(x) \in L_2[0,1]; \quad (1)$$

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(m-1)}(0) = f^{(m)}(1) = \dots = f^{(2m-1)}(1) = 0.$$

Рассмотрим следующий модуль непрерывности:

$$\omega(\delta,1) = \sup \left\{ \|f^{(m)}(x)\|_{C[0,1]} : \|f^{(2m)}(x)\|_{L_2[0,1]} \leq 1, \|f(x)\|_{L_2[0,1]} \leq \delta, \right. \quad (2)$$

$$\left. f(0) = f'(0) = \dots = f^{(m-1)}(0) = f^{(m)}(1) = \dots = f^{(2m-1)}(1) = 0 \right\}.$$

ТЕОРЕМА 1. Для модуля непрерывности (2) справедлива двусторонняя оценка, точная по порядку, асимптотическая по  $\delta$  при  $\delta \rightarrow 0$ :

$$C_2 \delta^{\frac{2m-1}{4m}} + \psi_2(\delta) \leq \omega(\delta,1) \leq C_1 \delta^{\frac{2m-1}{4m}} + \psi_1(\delta), \quad (3)$$

где константа  $C_1$  совпадает с константой  $C_{11}$  из теоремы 3 в [2],

$C_2 = \frac{m!}{2K_0}$ ,  $\psi_1(\delta)$  и  $\psi_2(\delta)$  суть  $o(\delta^{\frac{2m-1}{4m}})$ , константа  $K_0$  определена ниже.

Доказательство. Величину  $\omega(\delta,1)$  можно рассматривать как модуль непрерывности оператора, обратного к оператору

$$Au = \int_0^x \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} u(t) dt$$

на классе функций  $M_{A^*} = \{u(x) \in C[0,1] : u(x) = A^*v, \|v\|_{L_2} \leq 1\}$ .

В работе [2] исследован вопрос о приближенном решении уравнения  $Au = f$  методом регуляризации Тихонова нулевого порядка и получена порядковая оценка величины

$$\Delta(\delta, R_{\alpha(\delta)}, M_{A^*}) = \sup \left\{ \|R_{\alpha(\delta)} f_\delta - u\|_{C[0,1]} : u \in M_{A^*}, \|f_\delta - Au\|_{L_2[0,1]} \leq \delta \right\},$$

где  $R_\alpha$  – семейство регуляризирующих операторов,  $f_\delta$  – приближение к  $f$  в среднеквадратичной метрике,  $\alpha(\delta)$  – согласование параметра регуляризации с погрешностью исходных данных, обеспечивающее наименьший порядок по  $\delta$  в оценке  $\Delta(\delta, R_{\alpha(\delta)}, M_{A^*})$ .

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003).

Поскольку  $\omega(\delta, 1) \leq \Delta(\delta, R_{\alpha(\delta)}, M_{A^*})$  [3, с. 115], то отсюда получаем оценку сверху в (3). Для получения оценки снизу построим функцию  $\tilde{f}_0(x)$ , удовлетворяющую условиям (1), условию  $\|\tilde{f}_0(x)\|_{L_2[0,1]} \leq \delta$  и имеющую оценку:

$$\|\tilde{f}_0^{(m)}(x)\|_{C[0,1]} \geq C\delta \frac{2m-1}{4m}, \text{ где } C \text{ не зависит от } \delta.$$

$$\text{Возьмем } \tilde{f}_0(x) = x^m \delta \frac{2m-1}{4m} e^{-\delta \frac{1}{2m}x} + C_1 x^m + \dots + C_m x^{2m-1}.$$

Константы  $C_1, \dots, C_m$  определим из краевых условий в точке  $x = 1$ .

То, что  $\tilde{f}_0(x)$  удовлетворяет остальным указанным выше условиям, базируется на следующих фактах:

1) коэффициенты  $C_k, k = 1, \dots, m$  стремятся к нулю при  $\delta \rightarrow 0$  быстрее любой степени  $\delta$ ;

$$2) \|\tilde{f}_0^{(m)}(x)\|_{C[0,1]} \geq |\tilde{f}_0^{(m)}(0)| = m! \delta \frac{2m-1}{4m} + o(\delta \frac{2m-1}{4m});$$

$$3) \|\tilde{f}_0(x)\|_{L_2[0,1]}^2 = 2^{-(2m+1)} \delta^2 + o(\delta^2).$$

Теперь рассмотрим норму  $\|\tilde{f}_0^{(2m)}(x)\|_{L_2[0,1]}$ .

Имеем:

$$\tilde{f}_0^{(2m)}(x) = \delta \frac{2m-1}{4m} \sum_{s=0}^m C_{2m}^s (x^m)^s (e^{-\beta x})^{2m-s}, \quad \beta = \delta \frac{1}{2m}.$$

При подсчете нормы обращаем внимание, что все отрицательные степени  $\delta$  погасятся положительными, откуда следует, что

$$\|\tilde{f}_0^{(2m)}(x)\|_{L_2[0,1]} = K_0 + \psi(\delta),$$

где  $K_0$  не зависит от  $\delta$ , а  $\psi(\delta)$  стремится к нулю быстрее любой степени  $\delta$ .

Если теперь положить  $f_0(x) = \frac{\tilde{f}_0(x)}{2K_0}$ , то для этой функции при доста-

точно малых  $\delta$  будет выполняться условие  $\|f_0^{(2m)}(x)\|_{L_2[0,1]} \leq 1$  и тогда, оче-

видно,  $\omega(\delta, 1) \geq |f_0^{(m)}(x)| \geq \frac{m!}{2K_0}$ .

**ТЕОРЕМА 2.** Метод регуляризации нулевого порядка является оптимальным по порядку для уравнения  $Au = f$  на классе  $M_{A^*}$ .

Доказательство следует из того что порядок по  $\delta$  величины  $\Delta(\delta, R_{\alpha(\delta)}, M_{A^*})$ , приведенный в теореме 2 из [2], совпадает с порядком модуля непрерывности  $\omega(\delta, 1)$ .

1. Хромова Г. В. О модулях непрерывности неограниченных операторов и оптимальности методов приближенного решения уравнений первого рода // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 132 – 134.
2. Советникова С. Ю. О точной по порядку оценке погрешности приближенного решения одного интегрального уравнения первого рода // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 124 – 127.
3. Иванов В. К., Васин В. В., Танава В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.

УДК 517.984

Д. Г. Шалтыко

## О СХОДИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ОДНОЙ ТРЕХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ\*

Рассмотрим на отрезке  $[0,1]$  краевую задачу, порожденную простейшим дифференциальным уравнением

$$l[y] = y^{(n)} - \lambda y = 0, \quad (1)$$

и трехточечными распадающимися краевыми условиями

$$y(0) = \dots = y^{(k-1)}(0) = 0, \quad (2)$$

$$y(\alpha) = 0, \quad (0 < \alpha < 1) \quad (3)$$

$$y(1) = \dots = y^{(k-1)}(1) = 0, \quad (4)$$

где  $n = 2k + 1$ ,  $k = 2\nu$ ,  $\lambda$  – спектральный параметр.

Краевые условия (2) – (4) являются нерегулярными, т.е. функция Грина данной задачи имеет экспоненциальный рост при больших  $|\lambda|$ . Это представляет собой существенную трудность при исследовании вопроса о сходимости разложений по собственным и присоединенным функциям данной краевой задачи. Заметим, что задача о сходимости спектральных разложений в случае  $\alpha = 0$  (и для более общих дифференциальных операторов с произвольными распадающимися краевыми условиями) получила окончательное решение в работе А. П. Хромова [1]. Исследование же задач вида (1) – (4) и даже более общими многоточечными краевыми задачами занимался Г. Фрайлинг [2]. Им были получены достаточные условия разложимости функций в ряды по собственным и присоединенным функциям таких задач. К сожалению, эти условия налагают серьезные требования на аналитичность разлагаемых функций и далеки от необходимых условий. В настоящей статье приводятся достаточные условия для сходимости спектральных разложений, усиливающее результат Фрайлинга для случая задачи (1) – (4).

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003).

Обозначим корни из “-1”  $n$ -й степени через  $\omega_j = \exp\left(\frac{2j-1}{n}\pi i\right)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Далее, пусть  $G(x, t, \lambda)$  является функцией Грина задачи (1) – (4), и  $\rho^n = -\lambda$ ,  $\rho \in S = \left\{ \arg \rho \in \left[-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right] \right\}$ .

Справедливы следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Краевая задача (1) – (4) имеет бесконечное множество собственных значений, которые можно разложить в две серии:

$$\lambda_{j,1} = -\left(\rho_{j,1}^{(0)} + O\left(\frac{1}{j}\right)\right)^n, \quad \rho_{j,1}^{(0)} = \frac{j\pi}{\alpha \sin \frac{2\nu+1}{n}\pi}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$\lambda_{j,2} = -\left(\rho_{j,2}^{(0)} + O\left(\frac{1}{j}\right)\right)^n, \quad \rho_{j,2}^{(0)} = \frac{(2j+1)\pi}{2(1-\alpha)\sin \frac{2\nu}{n}\pi} \omega_1, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

При этом все собственные значения, достаточно большие по модулю, простые.

Через  $\varphi_{j,1}(x)$  и  $\varphi_{j,2}(x)$  обозначим собственные функции, соответствующие этим собственным значениям, а  $\{\psi_{j,1}(x)\}$  и  $\{\psi_{j,2}(x)\}$  – биортогональные к ним системы функций. Обозначим через  $S_\delta$  область, получающуюся из  $S$  удалением всех  $\rho_{j,m} = \lambda_{j,m}^{\frac{1}{n}}$  ( $m=1,2$ ) вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса  $\delta > 0$ .

ТЕОРЕМА 2. Предположим, что ряд  $\sum a_j \varphi_{j,1}(x) + \sum b_j \varphi_{j,2}(x)$  сходится равномерно на некотором  $[x_0, x_1] \subset (0,1)$  к  $f(x)$ , причем его части  $\sum a_j \varphi_{j,1}(x)$  и  $\sum b_j \varphi_{j,2}(x)$  сходятся к  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  соответственно. Тогда  $f_1(x)$  аналитична на  $[0, x_1)$ , для нее выполняются краевые условия (2) и (3) (если  $\alpha \in (x_0, x_1)$ ) и  $f_1(x) \perp \{\psi_{j,2}\}$  на  $[0,1]$  и  $f_2(x)$  аналитична на  $(x_0, 1]$ , для нее выполняются краевые условия (4) и (3) (если  $\alpha \in (x_0, x_1)$ ) и  $f_2(x) \perp \{\psi_{j,1}\}$  на  $[0,1]$ .

Сформулируем теперь достаточное условие сходимости.

ТЕОРЕМА 3. Пусть  $f(x) \in L_2[0,1]$  и  $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ , причем  $f_1(x)$  удовлетворяет следующим условиям:

- А)  $f_1$  аналитична на  $[0, b]$  ( $\alpha < b$ );
- Б)  $f_1, I[f_1], I^2[f_1], \dots$  удовлетворяют краевым условиям (2) и (3);
- В)  $f_1(x)$  ортогональна  $\{\psi_{j,2}(x)\}$ ;



$$\Gamma) \frac{d^p}{dx^p} l^q [f_1] = O \left( \left( \frac{1 + \varepsilon}{(b - \varepsilon - x) \cos \frac{k}{n} \pi} \right)^{nq+p} (nq + p)! \right), x \in [0, b - \varepsilon]$$

( $0 < \varepsilon < b$ ).

Далее, предположим, что  $f_2(x)$  удовлетворяет условиям:

Д)  $f_2$  аналитична на  $[a, 1]$  ( $a < \alpha$ );

Е)  $f_2, l[f_2], l^2[f_2], \dots$  удовлетворяют краевым условиям (3) и (4);

Ж)  $f_2(x)$  ортогональна  $\{\psi_{j,l}(x)\}$ ,

З) для  $f_2(x)$  выполняется условие  $\Gamma$ ) (с заменой  $x$  на  $1 - x$ )

Тогда  $f(x)$  разлагается на  $(a, b)$  в равномерно сходящийся ряд Фурье по собственным и присоединенным функциям (1) – (4).

Приведем ряд наиболее важных лемм, используемых для доказательства теоремы 3.

ЛЕММА 1. В области  $S_\delta$  справедливы оценки:

$$G(x, t, \lambda) = \begin{cases} O \left( \frac{1}{\rho^{n-1}} \exp(-\Delta |\rho|(t-x)) \right), & \alpha \leq x \leq t; \\ O \left( \frac{1}{\rho^{n-1}} \exp(-\Delta |\rho|(x-t)) \right), & t \leq x \leq \alpha, \end{cases}$$

где  $\Delta > 0$ .

ЛЕММА 2. В области  $S_\delta$  справедливы оценки:

$$G(x, t, \lambda) = \begin{cases} O \left( \frac{1}{\rho^{n-1}} \exp \left( \cos \frac{k\pi}{n} |\rho|(t-x) \right) \right), & x \leq t; \\ O \left( \frac{1}{\rho^{n-1}} \exp \left( \cos \frac{k\pi}{n} |\rho|(x-t) \right) \right), & t \leq x. \end{cases}$$

ЛЕММА 3. Пусть  $x \in [0, b - \varepsilon]$  и для функции  $f_1(x)$  выполняются условия А), Б), В), Г). Тогда

$$f_1 - S_l(f_1) = o(1) \text{ при } l \rightarrow \infty,$$

где  $S_l(f_1)$  представляет собой частичную сумму ряда Фурье функции  $f_1$  по всем собственным значениям, попавшим в круг  $\{|\lambda| < l\}$ .

ЛЕММА 4. Пусть  $x \in [a + \varepsilon, 1]$  и для функции  $f_2(x)$  выполняются условия Д), Е), Ж), З) Тогда

$$f_2 - S_l(f_2) = o(1) \text{ при } l \rightarrow \infty,$$

где  $S_l(f_2)$  представляет собой частичную сумму ряда Фурье функции  $f_2$  по всем собственным значениям, попавшим в круг  $\{|\lambda| < l\}$ .

1. Хромов А. П. Дифференциальный оператор с нерегулярными распадающимися краевыми условиями // Мат. заметки. 1976. Т. 19, № 5. С. 763 – 772.
2. Freiling G. Irregulare Mehrpunkt-Eigenwertprobleme mit zerfallenden Randbedingungen: Habilitationsschrift dem Fachbereich 11 – Mathematik, Duisburg, 1979. 90 s.

УДК 517.51

А. В. Шаталина

## АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ\*

Пусть  $AC$  – множество аналитических в единичном круге  $|z| < 1$  и непрерывных в его замыкании функций с равномерной нормой

$$\|f\| = \sup_{z \in D} |f(z)|$$

и обычным модулем непрерывности  $\omega(f, \delta)$ ;  $M = \{z_{k,n}\}$  – треугольная матрица узлов интерполирования,  $M \in \{|z|=1\}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Напомним,  $M$  называется правильной матрицей, если узлы каждой ее  $n$ -й строки являются вершинами правильного  $n$ -угольника, вписанного в единичный круг.

Пусть  $\{H_{n,k}(M, f, z)\}$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ ,  $n = 1, 2, \dots$  – последовательность интерполяционных полиномов, интерполирующих функцию  $f$  в узлах  $z_{k,n}$ . При  $k = 1$  – это многочлены Лагранжа степени  $n$ ; при  $k = 2$  – это многочлены Эрмита – Фейера степени  $np - 1$ ,  $p \geq 2$ ; при  $k = 3, 4$  – это многочлены соответственно третьего и усредненного процессов Бернштейна степени  $n$ .

Обозначим через  $\Omega$  множество функций  $\omega(\delta)$  типа модуля непрерывности, то есть непрерывных, полуаддитивных, неубывающих на полуоси  $[0; \infty)$  функций таких, что  $\omega(0) = 0$ . Каждую функцию  $\omega(\delta) \in \Omega$  назовем мажорантой.

Введем классы, заданные мажорантой:

$AC(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ , – функции  $f$  из  $AC$ , у которых  $\omega(f, \delta) = O(\omega(\delta))$ .

$AC^*(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ , – функции  $f$  из  $AC$ , у которых  $\omega(f, \delta) = o(\omega(\delta))$ .

При исследовании сходимости интерполяционных процессов  $\{H_{n,k}(M, f, z)\}$  в действительном случае было обнаружено, что они обладают абсолютно разными аппроксимативными свойствами [1]. Что изменится в комплексном случае?

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 04-01-00060).

В качестве  $M$  сначала рассмотрим конкретную матрицу узлов интерполирования, составленную из корней  $n$ -й степени из  $(-1)$ .

ТЕОРЕМА 1. Пусть для  $\omega \in \Omega$  выполнено условие

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \omega \left( \frac{1}{n} \right) \ln n > 0, \quad (1)$$

Тогда существуют функции  $f \in AC(\omega)$ , для которых процессы  $\{H_{n,k}(M, f, z)\}$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ , расходятся всюду на единичной окружности.

Если выполнено условие

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \omega \left( \frac{1}{n} \right) \ln n = \infty, \quad (2)$$

то существуют функции  $f \in AC^*(\omega)$ , для которых процессы  $\{H_{n,k}(M, f, z)\}$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ , неограниченно расходятся всюду на единичной окружности.

Для произвольных правильных матриц с некоторым ограничением на распределение узлов найдена метрическая характеристика множества точек расходимости рассматриваемых процессов.

Определение. Говорят, что матрица узлов интерполирования  $M$  удовлетворяет условию  $(B_m)$ , пишут  $M \in (B_m)$ , если для любого  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ , существуют числа  $q = q(\varepsilon)$ ,  $m$ , для которых можно указать последовательность номеров  $\{n_i\}$  такую, что для любого натурального  $\mu$  существует натуральное  $\nu$ , для которых

$$\varepsilon \cdot \sum_{i=\mu}^{\nu} \frac{1}{n_i} \geq 2\pi; \quad n_\nu \leq n_\mu^q$$

и все узлы  $z_{k,n_j}$ ,  $z_{k,n_i}$ ,  $\mu \leq i \neq j \leq \nu$ , расстояние между которыми меньше  $n_\mu^{2q}$ , принадлежат множеству  $B_m$ , содержащему не более  $m$  дуг окружности  $|z| = 1$ , длиной меньше  $2n_\mu^{-2q}$  каждая.

Примером таких матриц могут служить матрицы корней  $n$ -й степени из любого комплексного числа.

ТЕОРЕМА 2. Пусть  $M \in (B_m)$  – правильная матрица и выполнено условие (1). Тогда существуют функции  $f \in AC(\omega)$ , для которых процессы  $\{H_{n,k}(M, f, z)\}$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ , расходятся почти всюду на единичной окружности, то есть

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f(z) - H_{n,k}(M, f, z)| > 0,$$

причем  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f(z) - H_{n,k}(M, f, z)| = 0$ .

Если выполнено условие (2), то существуют функции  $f \in AC^*(\omega)$ , для которых процессы  $\{H_{n,k}(M, f, z)\}$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ , неограниченно расходятся почти всюду на единичной окружности, то есть

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f(z) - H_{n,k}(M, f, z)| = \infty,$$

причем  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f(z) - H_{n,k}(M, f, z)| = 0$ .

Сформулированные выше результаты первоначально были получены для интерполяционного процесса Лагранжа [2]. Доказательство можно условно разбить на следующие этапы:

– при каждом натуральном  $n$  для точек единичной окружности с «вырезанными» узлами найдена оценка снизу функции Лебега

$$H_{n,1}(M, z) \leq C_1 \ln n, \quad (3)$$

где константа  $C_1$  зависит только от того, какую часть единичной окружности «вырезали»;

– строится вспомогательное, используемое в дальнейшем множество  $\varepsilon_\mu$ , каждой точке которого соответствует своя функция Лебега, а точнее номер  $n = n_\rho$ , для которого справедливо (3) (всего выбирается некоторая пачка номеров  $\mu < \rho < \gamma$ ). Отметим, что  $\varepsilon_\mu$  состоит из конечного числа непересекающихся дуг единичной окружности, которые полностью ее покрывают за исключением множества меры, меньшей  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < \pi$ ), причем каждой дуге соответствует номер  $n_\rho$  такой, что дуга заключена между двумя соседними узлами  $z_{k,n_\rho}$  и  $z_{k+1,n_\rho}$  и выполняется оценка (3) для всех точек этой дуги;

– свойство круга о том, что  $\arg l_{k,n}(M, z)$  ( $l_{k,n}(M, z)$  – фундаментальные многочлены Лагранжа) остается постоянным для всех  $z$ , лежащих между соседними узлами, дает возможность определить такие числа  $w_{k,n}$ , что

$$\left| \sum_{k=0}^n w_{k,n} l_{k,n}(M, z) \right| = H_{n,1}(M, z) = \sum_{k=0}^n |l_{k,n}(M, z)|.$$

Таким образом, если рассмотреть вспомогательную функцию, совпадающую с  $w_{k,n}$  в узлах  $z_{k,n}$ , то оценка (3) будет справедлива уже для соответствующего полинома Лагранжа.

Построенные вспомогательные множества  $\varepsilon_\mu$  и функция  $f_\mu$ , связаны с соответствующей пачкой строк в матрице узлов интерполирования. Идея разбиения последовательности натуральных чисел на счетное число непересекающихся последовательностей позволила объединить пачки и найти итоговую функцию в виде двойного ряда и множество, которые удовлетворяют утверждениям теоремы 2. При доказательстве теоремы 1, именно специальный вид матрицы  $M = \{z_{k,n}\}$  позволил при построении множества  $\varepsilon_\mu$

точек расходимости «перекрыть пропуски» и построить функцию, для которой процесс Лагранжа расходится всюду.

Метод, разработанный в [2], построения функций из класса  $AC(\omega)$  или  $AC^*(\omega)$ , для которых процесс Лагранжа расходится почти всюду (либо всюду) на единичной окружности применим для исследования других интерполяционных процессов. Установлено, что многочлены Эрмита – Фейера и многочлены третьего и усредненного процессов Бернштейна можно представить как сумму интерполяционного многочлена, аналогичного многочлену Лагранжа, и некоторого «добавочного» слагаемого. Полученные удобные для дальнейших рассуждений оценки этого слагаемого, позволили использовать уже известные факты для построения функций с нужными свойствами.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лозинский С. М. Об интерполяционном процессе Fejer'a // ДАН СССР. 1939. Т. 24. С. 318–321.
2. Шаталина А. В. Расходимость интерполяционных процессов Лагранжа на единичной окружности. Саратов, 1990. 30 с. Деп. в ВИНТИ 19.07.90, №4060 – В90.

УДК 517.5

**В. И. Шевцов**

### ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ УТОЧНЕННЫХ ПОРЯДКОВ ОБОБЩЕННЫМИ РЯДАМИ ЭКСПОНЕНТ

Рассматриваются ряды вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k f(\lambda_k z), \quad (1)$$

где  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  – целые порядка  $\rho$ ,  $0 < \rho < \infty$  и типа  $\sigma$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[k]{|a_k|} = (\sigma e \rho)^{\frac{1}{\rho}}. \quad (2)$$

Представления функций такими рядами изучались многими математиками. Фундаментальные исследования по теории представления функций рядами (1) проведены А. Ф. Леонтьевым [1, 2] и его учениками.

Пусть  $L_1(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k$  – целая функция уточненного порядка  $\rho_1(r)$ ,

$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho_1(r) = \rho_1$  ( $\rho_1 > \rho$ ) и типа  $\sigma_1^{(1)}$ ,  $L_2(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \lambda^k$  – целая функция уточ-

ненного порядка  $\rho_1(r)$  и типа  $\sigma_1^{(2)}$ . Предположим, что все нули функций  $L_1(\lambda)$  и  $L_2(\lambda)$  – простые и эти функции не имеют общих нулей, обозначим их соответственно  $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$  и  $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ .

По определению функция  $\rho(r)$  называется *уточненным порядком*, если существуют  $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = p$ ,  $\lim_{r \rightarrow \infty} r\rho'(r) \ln r = 0$ . Обозначим через  $r = \varphi_1(t)$  функцию, обратную к функции  $t = r^{\rho_1(r)}$ . Будем считать в дальнейшем, что

$$\frac{t^{1/\rho}}{\varphi_1(t)} \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Последнее условие означает, что  $\frac{r\rho_1(r)}{r^p} \rightarrow \infty, \quad r \rightarrow \infty$ .

Введем необходимые для дальнейшего обозначения

$$\varphi(x, y) = (x\rho_2)^{\frac{1}{\rho_2}} (y\rho_1)^{\frac{1}{\rho_1}} (\sigma\rho)^{\frac{1}{\rho}},$$

где

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{\rho}, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad \sigma_1 = \max(\sigma_1^{(1)}, \sigma_1^{(2)}), \quad \tilde{\sigma}_1 = \sigma_1^{(1)} + \sigma_1^{(2)}. \quad (4)$$

Обозначим через  $B(L)$  класс целых функций  $F(z)$ , коэффициенты  $b_k$  которых таковы, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^{\frac{1}{\rho}}}{\varphi_1(k)} \sqrt[k]{|b_k|} = (\sigma_2 e \rho_2)^{\frac{1}{\rho_2}}, \quad (5)$$

где  $\sigma_2 < b$ ,  $\varphi(b, \sigma_1) = 1$ . При условии (3) класс  $B(L)$  действительно состоит из целых функций.

По определению выражение

$$D^n F = D^n(F, f) = \sum_{k=n}^{\infty} b_k \frac{a_{k-n}}{a_k} z^{k-n}$$

называется *обобщенной производной порядка  $n$  функции  $F(z)$ , порожденной функцией  $f(z)$* .

Обозначим через  $B_L^*$  подкласс  $B(L)$  такой, что любая функция  $F \in B_L^*$  удовлетворяет следующей системе уравнений бесконечного порядка в обобщенных производных:

$$\begin{aligned} M_{L_1}(F) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k D^k F(z) = 0, \\ M_{L_2}(F) &= \sum_{k=0}^{\infty} d_k D^k F(z) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

В классе целых функций  $B(L)$  ряды в (6) сходятся равномерно на любом компакте.

ТЕОРЕМА 1. Если  $F \in B_L^*$  и  $\sigma_2 < a$ , где  $\varphi(a, \tilde{\sigma}_1) = 1$ , то  $F(z) \equiv 0$ .

В случае обычных порядков и типов эта теорема доказана в [3].

Рассмотрим класс  $B_L^*$ , когда  $a \leq \sigma_2 < b$ , где  $\varphi(a, \tilde{\sigma}_1) = 1$ . Предположим, что такой класс непустой. Функции  $F \in B_L^*$ , приведем в соответствие ряды

$$F(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} A_k f(\lambda_k z), \quad (7)$$

$$F(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} B_k f(\mu_k z). \quad (8)$$

где  $A_k = \frac{\omega_{L_1}(\lambda_k, F)}{f(0)L_1'(\lambda_k)}$ ,  $B_k = \frac{\omega_{L_2}(\mu_k, F)}{f(0)L_2'(\mu_k)}$ ,  $\omega_{L_j}(\mu, F)$  – интерполирующие функции, введенные А. Ф. Леонтьевым [1, 2].

Рассмотрим случай, когда функция удовлетворяет условию: существуют окружности  $|\lambda| = r_k$ ,  $r_k \uparrow \infty$ , на которых

$$\ln|L(\lambda)| > (\sigma_1 - \varepsilon)r^{\rho_1(r)}, \quad r = |\lambda| = r_k, \quad k > K(\varepsilon), \quad (9)$$

где  $\varepsilon > 0$  любое.

ТЕОРЕМА 2. Если  $F \in B_L^*$ ,  $a \leq \sigma_2 < b$ , функция  $L(\lambda)$  удовлетворяет условию (9), тогда последовательность

$$Q_k(z) = \sum_{\substack{|\lambda_j| < r_k \\ |\mu_j| < r_k}} [A_j f(\lambda_j z) - B_j f(\mu_j z)]$$

сходится к нулю равномерно на любом компакте и справедлива следующая оценка:  $|Q_k(z)| < B(\varepsilon)e^{(\gamma+\varepsilon)|z|^{p_2}}$ , где  $\gamma$  определяется из уравнений

$$\varphi(\sigma_2, \sigma_1 + \delta) = 1, \quad \varphi(\gamma, \delta) = 1.$$

В случае обычных порядков и типов теорема, аналогичная теореме 2, приведена в [4].

Из теоремы 2 следует следующее утверждение: если в условиях теоремы 2 ряд (7) сходится равномерно на любом компакте и сумма его равна  $F(z)$ , тогда последовательность  $\sum_{|\mu_j| < r_k} B_j f(\mu_j z)$  сходится равномерно на любом компакте к функции  $F(z)$ .

1. Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент. М., 1976.
2. Леонтьев А. Ф. Обобщения рядов экспонент. М., 1981.
3. Шевцов В. И. Об одной системе уравнений бесконечного порядка // Теория функций и приближений. Саратов, 1983. С. 40 – 45.
4. Шевцов В. И. Представление целых функций обобщенными рядами экспонент // Математика. Механика. Сб. науч. тр. Саратов, 2004. Вып. 6. С. 146 – 149.

УДК 519.642.8

Е. В. Шишкова

## О СКОРОСТИ АППРОКСИМАЦИИ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА I РОДА В ПРОСТРАНСТВЕ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

В данной статье решена задача нахождения асимптотически точных верхних граней отклонений решения интегрального уравнения Вольтерра I рода вместе с производными решения от их приближений, построенных с помощью некоторого семейства интегральных операторов

Рассмотрим уравнение

$$Au \equiv \int_0^x A(x,t)u(t) dt = f(x), \quad (1)$$

где  $A(x,t)$  удовлетворяет условиям: существуют и непрерывны производ-

ные  $A_{x^i}(x,t)$  ( $i = \overline{1,n}$ )  $\left( A_{x^i}(x,t) = \frac{\partial^i}{\partial x^i} A(x,t) \right)$ ,  $A_{x^{n_i}}(x,t)$  ( $i = \overline{1,n}$ ),

$$A_{x^i}(x,x) = 0 \quad (i = \overline{0, n-2}), \quad A_{x^n}(x,x) = 1,$$

$$A_{x^{n_i}}(x,x) = 0 \quad (i = \overline{0, n-1}).$$

Для  $n=1$  уравнение (1) рассматривалось в [1].

Пусть  $u(x) \in C^q[0,1]$ . Рассмотрим семейство операторов:

$$R_\alpha^p = T_{\alpha k}^p A^{-1} \quad (p = \overline{0, q}, \quad q + n \leq k),$$

где

$$T_{\alpha k}^p u = a_k \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} \frac{\partial^p \left( (t-x)^2 - \alpha^2 \right)^k}{\partial x^p} u(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots, \quad p = \overline{0, q}, \quad q = \overline{0, k},$$

$\alpha > 0$  – параметр,  $a_k = A_k \alpha^{-(2k+1)}$ ,  $A_k = (-1)^k \frac{(2k+1)!}{(k!)^2 2^{2k+1}}$ .

Операторы  $R_\alpha^p$  являются регуляризирующими для уравнения (1) в случае, если они являются ограниченными, действующими из  $L_2[0,1]$  в  $C_\varepsilon[0,1]$  операторами [2].



Известно [3], что  $\|T_{\alpha k}^p u - u^{(p)}\|_{C_\varepsilon} \rightarrow 0$  ( $p = \overline{0, k}$ ) при  $\alpha \rightarrow 0$   
 $C_\varepsilon[0, 1] = C[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ ,  $\varepsilon > \alpha$ . Следовательно,

$$\|R_{\alpha}^p f - u^{(p)}\|_{C_\varepsilon} = \|T_{\alpha k}^p u - u^{(p)}\|_{C_\varepsilon} \rightarrow 0.$$

ТЕОРЕМА 1. Операторы  $R_{\alpha}^p$  имеют вид

$$R_{\alpha}^p f = R_{\alpha 0}^p f + R_{\alpha N}^p f,$$

где

$$R_{\alpha 0}^p f = T_{\alpha k}^{p+n} f,$$

$$R_{\alpha N}^p f = (-1)^n a_k \left( \int_0^{x-\alpha} \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} \frac{\partial^p ((\tau-x)^2 - \alpha^2)^k}{\partial x^p} N_{l,n}(\tau, t) d\tau f(t) dt + \right. \\ \left. + \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} \int_t^{x+\alpha} \frac{\partial^p ((\tau-x)^2 - \alpha^2)^k}{\partial x^p} N_{l,n}(\tau, t) d\tau f(t) dt \right),$$

$N$  – интегральный оператор с ядром  $N(x, t)$ , имеющий вид

$$N = -A_{x^n} + A_{x^n}^2 - A_{x^n}^3 + \dots,$$

$A_{x^n}$  – интегральный оператор с ядром  $A_{x^n}(x, t)$ .

Рассмотрим классы:

$$M_2^{q+1}[0, 1] = \{u(x) \in W_2^{q+1}[0, 1]: \|u\|_{W_2^{q+1}} \leq 1\},$$

где  $W_2^{q+1}[0, 1]$  – одномерные пространства Соболева с нормой:

$$\|u\|_{W_2^{q+1}} = \left( \int_0^1 \left[ (u(t))^2 + (u^{(q+1)}(t))^2 \right] dt \right)^{1/2},$$

и величины:

$$\Delta_1^{(p)}(R_{\alpha}^p A, M_2^{q+1}) = \sup \left\{ \|R_{\alpha}^p f - u^{(p)}\|_{C_\varepsilon} : u(x) \in M_2^{q+1}[a, b] \right\} \quad (q + n = \overline{1, k}),$$

характеризующие скорость аппроксимации  $u^{(p)}(x)$  с помощью операторов  $R_{\alpha}^p$  на классе  $M_2^{q+1}[0, 1]$ .

ТЕОРЕМА 2. Имеют место асимптотические по  $\alpha$  при  $\alpha \rightarrow 0$  представления

$$\Delta_1^{(p)}(R_{\alpha}^p A, M_2^{q+1}) = P_{k p q} \alpha^m + O(\alpha^l), \quad p = \overline{0, q}, \quad q = \overline{0, k},$$

где

$$m = \frac{1}{2}, \quad l = \frac{7}{2} \quad \text{при } p = q; \quad m = \frac{3}{2}, \quad l = \frac{7}{2} \quad \text{при } p = q - 1;$$

$$m = 2, \quad l = 3 \quad \text{при } p = q - 2; \quad m = 2, \quad l = 4 \quad \text{при } p < q - 2,$$

$$\begin{aligned}
P_{k q q} &= \left( \frac{(-1)^k A_k}{2(k+1)} - 2(q!)^2 A_k^2 \sum_{s=0}^{[k-\frac{q}{2}]} (-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^q \times \right. \\
&\times \left. \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^{n+q} C_k^n C_{2k-2n+2q+2}^{2q+1}}{(4k-2n-2s+3)} \sum_{i=0}^{2q+1} \frac{(-1)^i}{(2q+1-i)!i!(2(k-n)+i+1)} \right)^{1/2}, \\
P_{k q-1 q} &= \left( \frac{(-1)^{k+1} A_k}{12(k+1)(k+2)} - \frac{A_k^2}{q(q+1)(k+1)} \sum_{s=0}^{[k-\frac{q-1}{2}]} \frac{(-1)^{s+q+k} C_k^s C_{2(k-s)}^{q-1}}{2(k-s)+3} - \right. \\
&- 2((k-1)!)^2 A_k^2 \sum_{s=0}^{[k-\frac{k-1}{2}]} (-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^{k-1} \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^{n+k} C_k^n C_{2k-2n+2q+2}^{q-1}}{4k-2n-2s+5} \times \\
&\times \left. \sum_{i=0}^{2q+1} \frac{(-1)^i}{(2q+1-i)!i!(2(k-n)+i+1)} \right)^{1/2}, \\
P_{k p q} &= \left( \frac{(-1)^{p+q+1} 2 A_k^2}{(p+1)(p+2)} \sum_{s=0}^{[k-\frac{p}{2}]} \frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p}{2(k-s)+3} \cdot \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n C_k^n}{2(k-n)+3} \times \right. \\
&\times \left. \left\| \left( G_{\xi}^{(p+2)} \right)_{\eta}^{(p+2)}(x, x) \right\| \right)^{1/2}, \quad p = \overline{0, q-2},
\end{aligned}$$

$G(\xi, \eta)$  – функция Грина дифференциального оператора, порожденного дифференциальным выражением  $l(y) = (-1)^{q+1} y^{(2q+2)}(t) + y(t)$  и краевыми условиями:  $y^{(i)}(a) = y^{(i)}(b) = 0$ ,  $i = q+1, \dots, 2q+1$ . Константы в выражениях, обозначенных через  $O(\dots)$ , зависят от  $\varepsilon$ .

$P_{k p q}$  ( $p = \overline{0, q}$ ) отличны от нуля.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромова Г. В. О регуляризации одного класса интегральных уравнений первого рода // Журн. вычислительной математики и математической физики. 2005. Т. 45, № 10. С. 1810 – 1817.
2. Хромова Г. В. Об одном способе построения методов регуляризации уравнений первого рода // Журн. вычислительной математики и математической физики. 2000. Т. 40, №7. С. 907 – 1002.
3. Хромова Г. В. О дифференцировании функций, заданных с погрешностью // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика. 1984. Вып. 6. С. 53 – 58.

## ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ\*

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$Y'(x) + B(x)Y(x) = \rho B_0 Y(x), \quad 0 \leq x \leq T, \quad (1)$$

на конечном интервале  $[0, T]$ . Здесь  $\rho$  – спектральный параметр,  $B_0 = \text{diag}[\beta_k]_{k=1, \overline{n}}$ ,  $\beta_k \neq 0$  – различные комплексные числа,  $B(x) = [\beta_{kj}(x)]_{k, j=1, \overline{n}}$ ,  $\beta_{kj}(x) \in L(0, T)$  – комплекснозначные функции,  $\beta_{kk}(x) \equiv 0$ . Матрица  $B(x)$  называется *потенциалом*.

Изучается обратная спектральная задача восстановления потенциала по заданным спектральным характеристикам. Основным методом исследования является метод спектральных отображений [1]. Развивая идеи этого метода применительно к системам вида (1), мы получаем конструктивную процедуру решения обратной задачи по матрице Вейля и по системе спектров.

Пусть заданы матрицы  $h = [h_{\xi v}]_{\xi, v=1, \overline{n}}$  и  $H = [H_{\xi v}]_{\xi, v=1, \overline{n}}$ , где  $h_{\xi v}, H_{\xi v}$  – комплексные числа, причем  $\det h \neq 0, \det H \neq 0$ . Введем линейные формы  $U(Y) = [U_{\xi}(Y)]'_{\xi=1, \overline{n}}, V(Y) = [V_{\xi}(Y)]'_{\xi=1, \overline{n}}$  по формулам  $U(Y) = hY(0), V(Y) = HY(T)$ , т.е.  $U_{\xi}(Y) = [h_{\xi 1}, \dots, h_{\xi n}]Y(0), V_{\xi}(Y) = [H_{\xi 1}, \dots, H_{\xi n}]Y(0)$ .

Пусть вектор-функции  $\Phi_m(x, \rho) = [\Phi_{vm}(x, \rho)]'_{v=1, \overline{n}}, m = \overline{1, n}$  ( $t$  – знак транспонирования) являются решениями системы (1) при условиях  $U_{\xi}(\Phi_m) = \delta_{\xi m}, \xi = \overline{1, m}, V_{\eta}(\Phi_m) = 0, \eta = \overline{1, n-m}$ . Здесь и далее  $\delta_{\xi m}$  – символ Кронекера. Пусть  $M_{m\xi}(\rho) = U_{\xi}(\Phi_m), M(\rho) = [M_{m\xi}(\rho)]_{m, \xi=1, \overline{n}}, \Phi(x, \rho) = [\Phi_1(x, \rho), \dots, \Phi_n(x, \rho)] = [\Phi_{vm}(x, \rho)]_{v=1, \overline{n}}$ . Функции  $\Phi_m(x, \rho)$  и  $M_{m\xi}(\rho)$  называются *решениями Вейля* и *функциями Вейля* соответственно. Матрица  $M(\rho)$  называется *матрицей Вейля* системы (1).

*Постановка обратной задачи.* По заданной матрице Вейля  $M(\rho)$  построить потенциал  $B(x), 0 < x < T$ .

Для решения этой задачи получены следующие результаты.

1) Исследованы аналитические, асимптотические и структурные свойства матрицы Вейля.

2) Доказана теорема единственности решения обратной задачи.

**ТЕОРЕМА 1.** Задание матрицы Вейля  $M(\rho)$  однозначно определяет потенциал  $B(x)$  на  $[0, T]$ .

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 04-01-00007).

3) Получена конструктивная процедура решения обратной задачи восстановления потенциала  $B(x)$  по заданной матрице Вейля  $M(\rho)$ . Показано, что эта нелинейная обратная задача сводится к решению так называемого *основного уравнения*, которое является линейным уравнением в соответствующем банаховом пространстве ограниченных последовательностей  $m$ . Основное уравнение имеет вид

$$\tilde{\psi}(x) = \psi(x)(E + \tilde{H}(x)), \quad (2)$$

где  $x \in [0, T]$  играет роль параметра (т.е. уравнение рассматривается при каждом фиксированном  $x$ ),  $E$  – единичный оператор, а оператор  $\tilde{H}(x): m \rightarrow m$  и элементы  $\tilde{\psi}(x), \psi(x) \in m$  определены в [2]. При этом  $\tilde{H}(x)$  и  $\tilde{\psi}(x)$  строятся по заданной матрице Вейля  $M(\rho)$  и с точки зрения обратной задачи являются известными.

**ТЕОРЕМА 2.** При каждом фиксированном  $x \in [0, T]$  оператор  $E + \tilde{H}(x)$  имеет ограниченный обратный, т.е. уравнение (2) однозначно разрешимо.

С использованием решения основного уравнения получена явная формула для вычисления потенциала  $B(x)$ .

2. Пусть  $I := \{(m, k): 1 \leq m < k \leq n, 1 \leq m = k \leq n-1\}$ . Это множество состоит из  $(n-1)(n+2)/2$  элементов. Пусть  $\Lambda_{mk}, (m, k) \in I$  – спектр (т.е. множество собственных значений с учетом кратностей) краевой задачи для системы (1) с краевыми условиями

$$U_1(Y) = \dots = U_{m-1}(Y) = U_k(Y) = V_1(Y) = \dots = V_{n-m}(Y) = 0.$$

Рассмотрим обратную задачу восстановления  $B(x)$  по системе спектров  $\{\Lambda_{mk}\}_{(m,k) \in I}$ .

**ТЕОРЕМА 3.** Задание системы спектров  $\{\Lambda_{mk}\}_{(m,k) \in I}$  однозначно определяет матрицу Вейля  $M(\rho)$ .

Получена явная формула построения  $M(\rho)$  по  $\{\Lambda_{mk}\}_{(m,k) \in I}$ . Тем самым обратная задача по системе спектров сводится к обратной задаче по матрице Вейля.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Yurko V. A. Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht: VSP, 2002.
2. Yurko V. A. Inverse spectral problems for differential systems on a finite interval // Results in Math. 2006. Vol. 48, № 3/4. P. 371 – 386.

Э. В. Антоненко, Н. С. Хлопцева

**ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ФОРМА ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ  
ТОНКОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРОВ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ**

1. При равномерном осевом сжатии тонкостенной круговой цилиндрической оболочки погонными осевыми усилиями  $q$  ось оболочки остается прямолинейной, а поверхность её при потере устойчивости получает осесимметричные радиальные перемещения  $w(x)$ , зависящие только от координаты  $x$ .

При потере устойчивости оболочки с переменной вдоль её оси толщиной  $\delta(x)$  напряжения сжатия в различных поперечных сечениях оказываются различными, а величина критического погонного усилия  $N_* = \sigma(x)\delta(x)$  остается постоянной. Задача потери устойчивости в этой ситуации сводится к определению  $N_*$ .

Несущая способность такой оболочки оценивается величиной осевой критической силы  $P_* = N_* 2\pi R$ , если  $R$  – радиус срединной поверхности оболочки.

Определим  $N_*$  прямым энергетическим методом в ситуации безразличного равновесия, когда работа внутренних сил (энергия деформаций) равна работе внешней осевой критической силы. Полагаем справедливым закон Гука и гипотезы Кирхгофа-Лява.

Энергия деформации в осесимметричной задаче формируется за счет изгиба образующих погонными моментами  $m_x$  и растяжения – сжатия поперечных сечений усилиями  $N_\varphi$ , где обозначения соответствуют [1, 2] (штрихами обозначены производные по координате  $x$ ).

Полная потенциальная энергия оболочки

$$U = \int_0^l \Gamma dx, \tag{1}$$

где  $\Gamma$  – потенциальная энергия единицы длины оболочки.

$$\Gamma = \int \left[ \frac{1}{2} m_x \chi_x + \frac{1}{2} \sigma_\varphi \delta \varepsilon_\varphi - \frac{1}{2} N_* (w')^2 \right] R d\varphi =$$

$$= \left[ \bar{E} \delta^3 (w'')^2 + E \delta \left( \frac{w}{R} \right)^2 - N_* (w')^2 \right] \pi R, \quad (2)$$

где  $\delta = \delta(x)$ ,  $w = w(x)$ ,  $\bar{E} = \frac{E}{12(1-\mu^2)}$ .

Из условия безразличного равновесия, когда  $U = 0$ , получим

$$N_* = \left( \bar{E} \int_0^l \delta^3(x) [w''(x)]^2 dx + ER^{-2} \int_0^l \delta(x) w^2(x) dx \right) / \int_0^l [w'(x)]^2 dx. \quad (3)$$

2. Рассмотрим устойчивость составной цилиндрической оболочки, когда  $\delta = \delta_1$  ( $0 \leq x \leq l_1$ ),  $\delta = \delta_2$  ( $l_1 \leq x \leq l$ ), края шарнирно оперты,

$$w(x) = A \sin \frac{m\pi x}{l}. \quad (4)$$

Выражение (3) принимает вид

$$N_* = \frac{\bar{E}(I_1 + I_2) + ER^{-2}(I_3 + I_4)}{I_5}, \quad (5)$$

$$I_1 = \int_0^{l_1} \delta_1^3 [w''(x)]^2 dx; \quad I_2 = \int_{l_1}^l \delta_2^3 [w''(x)]^2 dx; \quad I_3 = \int_0^{l_1} \delta_1 w^2(x) dx;$$

$$I_4 = \int_{l_1}^l \delta_2 w^2(x) dx; \quad I_5 = \int_0^l [w'(x)]^2 dx.$$

Величина  $N_*$  — характеристика всей оболочки:  $N_* = \sigma_{*1} \delta_1 = \sigma_{*2} \delta_2$ , здесь используется первое равенство.

Подстановка (4) в (5) дает:

$$N_* = \bar{E} \delta_1^3 \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 \Phi_1 + \frac{E \delta_1}{R^2} \left( \frac{l}{m\pi} \right)^2 \Phi_2, \quad (6)$$

$$\Phi_1 = a \left( 1 - \bar{\delta}^3 \right) + \bar{\delta}^3, \quad \Phi_2 = a \left( 1 - \bar{\delta} \right) + \bar{\delta}, \quad a = \bar{l} - \frac{\sin 2m\pi \bar{l}}{2m\pi}, \quad \bar{\delta} = \frac{\delta_2}{\delta_1}, \quad \bar{l} = \frac{l_1}{l}.$$

Число полуволн  $m$  в (6) необходимо выбирать из условия минимума  $N_*$ :

$$\frac{\partial N_*}{\partial \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2} = \bar{E} \delta_1 \Phi_1 + \frac{E \delta_1}{R^2} \Phi_2 \left( \frac{l}{m\pi} \right)^4 = 0; \quad \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 = \sqrt{\frac{E}{\bar{E}} \frac{1}{R^2} \frac{\Phi_2}{\delta_1^2 \Phi_1}}. \quad (7)$$

С учетом (7) из (6) находим:

$$N_* = N_{*1} \sqrt{\Phi_1 \Phi_2}; \quad N_{*1} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\mu)^2}} \frac{\delta_1^2}{R},$$

где  $N_{*1}$  – критические усилия для оболочки с толщиной  $\delta_1$ , а величина  $\sqrt{\Phi_1\Phi_2}$  – поправочный коэффициент.

3. Критические усилия гладкой оболочки с толщиной, меняющейся по закону  $\delta(x) = \delta_0 e^{-cx}$ , при шарнирном опирании краев оболочки получим из зависимости (3):

$$N_* = N_{*0} \sqrt{K_1 K_2}, \quad N_{*0} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\mu)^2}} \frac{\delta_0^2}{R}, \quad (8)$$

$$K_1 = \frac{1 - e^{-3cl}}{3cl} - \frac{3cl(1 - e^{-3cl})}{9(cl)^2 + 4(m\pi)^2}; \quad K_2 = \frac{1 - e^{-cl}}{cl} - \frac{cl(1 - e^{-3cl})}{(cl)^2 + 4(m\pi)^2}.$$

В формуле (8)  $N_{*0}$  – критическое усилие оболочки с толщиной  $\delta_0$ . Это выражение совпадает с известными зависимостями [1, 3].

Более точные выражения для критических усилий оболочки с переменной толщиной можно найти из дифференциального уравнения задачи.

4. Дифференциальное уравнение задачи устойчивости оболочки переменной толщины получим из условия минимума функционала (1) с учетом (2). Используя уравнение Эйлера вариационной задачи

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial w} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial w'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial w''} \right) = 0$$

и выполняя предписанные им действия, получим:

$$w''''(x) + 6 \frac{\delta'(x)}{\delta(x)} w'''(x) + \left( 6 \left[ \frac{\delta'(x)}{\delta(x)} \right]^2 + 3 \frac{\delta''(x)}{\delta(x)} + \frac{N_*}{E\delta^3(x)} \right) w''(x) + \frac{E}{ER^2\delta^2(x)} w(x) = 0. \quad (9)$$

Из уравнения (9) как частный случай получим результат для  $\delta(x) = \delta = \text{const}$

$$w''''(x) + \frac{N_*}{E\delta^3} w''(x) + \frac{E}{ER^2\delta^2} w(x) = 0; \quad N_* = \frac{E}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \frac{\delta^2}{R}.$$

Последние зависимости совпадают с известными результатами.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кан С. Н. Строительная механика оболочек. М.: Машиностроение, 1966. 508 с.
2. Антоненко Э. В., Хлопцева Н. С. Критическое давление составных цилиндрических оболочек // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 156 – 158.
3. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1974. 640 с.

## К ЗАДАЧЕ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ КРУГОВОЙ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА, РАССМАТРИВАЕМОЙ КАК НЕИЗМЕНЯЕМАЯ ФИГУРА

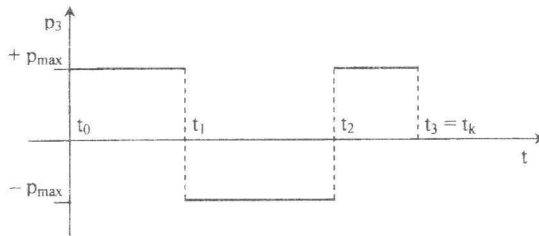
Рассматривается перевод круговой орбиты космического аппарата (КА) из заданного начального состояния в конечное состояние с помощью управления, ортогонального плоскости орбиты КА, при наличии двух переключений. Кватернионное уравнение движения центра масс КА сведено к четырем линейным дифференциальным уравнениям второго порядка, построены общие решения полученных уравнений, сформулирована краевая задача переориентации круговой орбиты КА.

В задаче оптимального в смысле быстрогодействия управления ориентацией круговой орбиты, рассматриваемой как неизменяемая фигура, компоненты  $p_1$  и  $p_2$  вектора управления  $\mathbf{p}$  равны нулю, модуль  $r$  радиус-вектора  $\mathbf{r}$  центра масс КА и модуль  $c$  вектора момента скорости КА  $\mathbf{c}$  постоянны. Поэтому уравнения движения центра масс КА примут вид [1]

$$2\dot{\lambda} = \lambda \circ \omega_\eta, \quad \omega_\eta = \omega_1 \mathbf{i}_1 + \omega_3 \mathbf{i}_3 = gc^{-1} p_3 \mathbf{i}_1 + cr^{-2} \mathbf{i}_3, \quad (1)$$

$$\varphi_{tr} = cr^{-2}, \quad c, r = \text{const.}$$

Рассмотрим перевод орбиты КА из заданного начального состояния  $\lambda(t_0) = \lambda_0$  в конечное состояние  $\lambda(t_k) = \lambda_k$  с помощью управления  $p_3 = \pm p_{\max}$  при наличии двух переключений в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  (рисунок).



Запишем уравнение (1) в скалярном виде

$$2\dot{\lambda}_0 = -\lambda_1 p_3 gc^{-1} - \lambda_3 cr^{-2}, \quad 2\dot{\lambda}_1 = \lambda_0 p_3 gc^{-1} + \lambda_2 cr^{-2},$$

$$2\dot{\lambda}_2 = \lambda_3 p_3 gc^{-1} - \lambda_1 cr^{-2}, \quad 2\dot{\lambda}_3 = -\lambda_2 p_3 gc^{-1} + \lambda_0 cr^{-2}. \quad (2)$$

Систему (2) сведем к четырем независимым линейным дифференциальным уравнениям второго порядка. Для этого продифференцируем каждое из уравнений системы (2) по времени:

$$\lambda_0'' = -(p_3^2 r^2 c^{-2} + c^2 r^{-4}) \lambda_0, \quad \lambda_1'' = -(p_3^2 r^2 c^{-2} + c^2 r^{-4}) \lambda_1,$$

$$\lambda_2'' = -(p_3^2 r^2 c^{-2} + c^2 r^{-4}) \lambda_2, \quad \lambda_3'' = -(p_3^2 r^2 c^{-2} + c^2 r^{-4}) \lambda_3. \quad (3)$$

Обозначим  $(p_3^2 r^2 c^{-2} + c^2 r^{-4}) = a$ . Тогда (3) переписывается в следующем виде:

$$\lambda_0'' + a\lambda_0 = 0, \quad \lambda_1'' + a\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2'' + a\lambda_2 = 0, \quad \lambda_3'' + a\lambda_3 = 0. \quad (4)$$



Построим общее решение каждого из уравнений (4), выразив постоянные интегрирования через заданные начальные условия

$$\lambda_j(t_0) = \lambda_{j0} \quad (j = 0, 3).$$

Вид этих решений таков:

$$\begin{aligned} \lambda_0(t) &= (- (1/2)a^{-1/2}\lambda_{10}p_3rc^{-1} - (1/2)a^{-1/2}\lambda_{30}cr^{-2})\sin(a^{1/2}t) + \lambda_{00}\cos(a^{1/2}t), \\ \lambda_1(t) &= ((1/2)a^{-1/2}\lambda_{00}p_3rc^{-1} + (1/2)a^{-1/2}\lambda_{20}cr^{-2})\sin(a^{1/2}t) + \lambda_{10}\cos(a^{1/2}t), \\ \lambda_2(t) &= ((1/2)a^{-1/2}\lambda_{30}p_3rc^{-1} - (1/2)a^{-1/2}\lambda_{10}cr^{-2})\sin(a^{1/2}t) + \lambda_{20}\cos(a^{1/2}t), \\ \lambda_3(t) &= (- (1/2)a^{-1/2}\lambda_{20}p_3rc^{-1} + (1/2)a^{-1/2}\lambda_{00}cr^{-2})\sin(a^{1/2}t) + \lambda_{30}\cos(a^{1/2}t). \end{aligned} \quad (5)$$

Рассмотрим первый участок движения с начального момента времени  $t = t_0 = 0$  до момента  $t = t_1$ . На этом участке  $p_3 = + p_{\max}$  (см. рисунок). Запишем соотношения (5) для этого участка движения КА:

$$\begin{aligned} \lambda_0^{(1)}(t) &= (- (1/2)a^{-1/2}\lambda_{10}^{(1)}(+ |p_3|)rc^{-1} - (1/2)a^{-1/2}\lambda_{30}^{(1)}cr^{-2})\sin(a^{1/2}t) + \\ &\quad + \lambda_{00}^{(1)}\cos(a^{1/2}t), \\ \lambda_1^{(1)}(t) &= ((1/2)a^{-1/2}\lambda_{00}^{(1)}(+ |p_3|)rc^{-1} + (1/2)a^{-1/2}\lambda_{20}^{(1)}cr^{-2})\sin(a^{1/2}t) + \\ &\quad + \lambda_{10}^{(1)}\cos(a^{1/2}t), \\ \lambda_2^{(1)}(t) &= ((1/2)a^{-1/2}\lambda_{30}^{(1)}(+ |p_3|)rc^{-1} - (1/2)a^{-1/2}\lambda_{10}^{(1)}cr^{-2})\sin(a^{1/2}t) + \\ &\quad + \lambda_{20}^{(1)}\cos(a^{1/2}t), \\ \lambda_3^{(1)}(t) &= ((1/2)a^{-1/2}\lambda_{30}^{(1)}(+ |p_3|)rc^{-1} - (1/2)a^{-1/2}\lambda_{10}^{(1)}cr^{-2})\sin(a^{1/2}t) + \\ &\quad + \lambda_{20}^{(1)}\cos(a^{1/2}t), \end{aligned}$$

здесь

$$\lambda_{00}^{(1)} = \lambda_0^{(1)}(t_0) = \lambda_{00}, \lambda_{10}^{(1)} = \lambda_1^{(1)}(t_0) = \lambda_{10}, \lambda_{20}^{(1)} = \lambda_2^{(1)}(t_0) = \lambda_{20}, \lambda_{30}^{(1)} = \lambda_3^{(1)}(t_0) = \lambda_{30}.$$

Рассмотрим второй участок движения с момента времени  $t = t_1$  до момента  $t = t_2$ . На этом участке  $p_3 = - p_{\max}$  (см. рисунок). Соотношения (5) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda_0^{(2)}(t) &= (- (1/2)a^{-1/2}\lambda_{10}^{(2)}(- |p_3|)rc^{-1} - (1/2)a^{-1/2}\lambda_{30}^{(2)}cr^{-2})\sin(a^{1/2}t) + \\ &\quad + \lambda_{00}^{(2)}\cos(a^{1/2}t), \\ \lambda_1^{(2)}(t) &= ((1/2)a^{-1/2}\lambda_{00}^{(2)}(- |p_3|)rc^{-1} + (1/2)a^{-1/2}\lambda_{20}^{(2)}cr^{-2})\sin(a^{1/2}t) + \\ &\quad + \lambda_{10}^{(2)}\cos(a^{1/2}t), \\ \lambda_2^{(2)}(t) &= ((1/2)a^{-1/2}\lambda_{30}^{(2)}(- |p_3|)rc^{-1} - (1/2)a^{-1/2}\lambda_{10}^{(2)}cr^{-2})\sin(a^{1/2}t) + \\ &\quad + \lambda_{20}^{(2)}\cos(a^{1/2}t), \\ \lambda_3^{(2)}(t) &= (- (1/2)a^{-1/2}\lambda_{20}^{(2)}(- |p_3|)rc^{-1} + (1/2)a^{-1/2}\lambda_{00}^{(2)}cr^{-2})\sin(a^{1/2}t) + \\ &\quad + \lambda_{30}^{(2)}\cos(a^{1/2}t), \end{aligned}$$

здесь

$$\begin{aligned} \lambda_{00}^{(2)} &= \lambda_0^{(1)}(t_1) = (- (1/2)a^{-1/2}\lambda_{10}^{(1)}(+ |p_3|)rc^{-1} - (1/2)a^{-1/2}\lambda_{30}cr^{-2})\sin(a^{1/2}t_1) + \\ &\quad + \lambda_{00}\cos(a^{1/2}t_1), \\ \lambda_{10}^{(2)} &= \lambda_1^{(1)}(t_1) = ((1/2)a^{-1/2}\lambda_{00}^{(1)}(+ |p_3|)rc^{-1} + (1/2)a^{-1/2}\lambda_{20}cr^{-2})\sin(a^{1/2}t_1) + \\ &\quad + \lambda_{10}\cos(a^{1/2}t_1), \\ \lambda_{20}^{(2)} &= \lambda_2^{(1)}(t_1) = ((1/2)a^{-1/2}\lambda_{30}^{(1)}(+ |p_3|)rc^{-1} - (1/2)a^{-1/2}\lambda_{10}cr^{-2})\sin(a^{1/2}t_1) + \\ &\quad + \lambda_{20}\cos(a^{1/2}t_1), \\ \lambda_{30}^{(2)} &= \lambda_3^{(1)}(t_1) = ((1/2)a^{-1/2}\lambda_{30}^{(1)}(+ |p_3|)rc^{-1} - (1/2)a^{-1/2}\lambda_{10}cr^{-2})\sin(a^{1/2}t_1) + \\ &\quad + \lambda_{20}\cos(a^{1/2}t_1). \end{aligned}$$

Рассмотрим третий участок движения с момента времени  $t = t_2$  до момента  $t = t_3 = t_k$ . На этом участке  $p_3 = + p_{\max}$  (см. рисунок). Соотношения (5) для этого участка принимают вид

$$\begin{aligned}\lambda_0^{(3)}(t) &= (-1/2)a^{-1/2}\lambda_{10}^{(3)}(+|p_3|)rc^{-1} - (1/2)a^{-1/2}\lambda_{30}^{(3)}cr^{-2}\sin(a^{1/2}t) + \\ &\quad + \lambda_{00}^{(3)}\cos(a^{1/2}t), \\ \lambda_1^{(3)}(t) &= ((1/2)a^{-1/2}\lambda_{00}^{(3)}(+|p_3|)rc^{-1} + (1/2)a^{-1/2}\lambda_{20}^{(3)}cr^{-2})\sin(a^{1/2}t) + \\ &\quad + \lambda_{10}^{(3)}\cos(a^{1/2}t), \\ \lambda_2^{(3)}(t) &= ((1/2)a^{-1/2}\lambda_{30}^{(3)}(+|p_3|)rc^{-1} - (1/2)a^{-1/2}\lambda_{10}^{(3)}cr^{-2})\sin(a^{1/2}t) + \\ &\quad + \lambda_{20}^{(3)}\cos(a^{1/2}t), \\ \lambda_3^{(3)}(t) &= (-1/2)a^{-1/2}\lambda_{20}^{(3)}(+|p_3|)rc^{-1} + (1/2)a^{-1/2}\lambda_{00}^{(3)}cr^{-2}\sin(a^{1/2}t) + \\ &\quad + \lambda_{30}^{(3)}\cos(a^{1/2}t),\end{aligned}\quad (6)$$

здесь

$$\begin{aligned}\lambda_{00}^{(3)} &= \lambda_0^{(2)}(t_2) = (1/4)a^{-1}(p_3^2 r^2 c^{-2} - c^2 r^{-4})\lambda_{00}\sin(a^{1/2}t_1)\sin(a^{1/2}t_2) + \\ &\quad + \lambda_{00}\cos(a^{1/2}t_1)\cos(a^{1/2}t_2) + (1/2)|p_3|a^{-1}r^{-1}\lambda_{20}\sin(a^{1/2}t_1)\sin(a^{1/2}t_2) + \\ &\quad + (1/2)|p_3|ra^{-1/2}c^{-1}\lambda_{10}\sin(a^{1/2}[t_2 - t_1]) - (1/2)ca^{1/2}r^2\lambda_{30}\sin(a^{1/2}[t_2 + t_1]) = \\ &\quad = f_0(r, c, p_3, \lambda_0, t_1, t_2), \\ \lambda_{10}^{(3)} &= \lambda_1^{(2)}(t_2) = f_1(r, c, p_3, \lambda_0, t_1, t_2), \lambda_{20}^{(3)} = \lambda_2^{(2)}(t_2) = f_2(r, c, p_3, \lambda_0, t_1, t_2), \\ \lambda_{30}^{(3)} &= \lambda_3^{(2)}(t_2) = f_3(r, c, p_3, \lambda_0, t_1, t_2).\end{aligned}$$

Запишем уравнения (6) в конечный момент времени  $t = t_3 = t_k$ :

$$\begin{aligned}\lambda_0^{(3)}(t_3) &= g_0(r, c, p_3, \lambda_0, t_1, t_2, t_3), \lambda_1^{(3)}(t_3) = g_1(r, c, p_3, \lambda_0, t_1, t_2, t_3), \\ \lambda_2^{(3)}(t_3) &= g_2(r, c, p_3, \lambda_0, t_1, t_2, t_3), \lambda_3^{(3)}(t_3) = g_3(r, c, p_3, \lambda_0, t_1, t_2, t_3).\end{aligned}\quad (7)$$

Значения  $\lambda_j^{(3)}(t_3)$  ( $j = 0, 3$ ) нам не известны, но нам заданы значения  $\Lambda_j^{(3)}(t_3)$  кватерниона  $\Lambda$  ориентации мгновенной орбиты КА. Кватернион  $\lambda$  выражается через кватернион  $\Lambda$  и истинную аномалию  $\varphi$  следующим образом:

$$\lambda = \Lambda \circ [\cos(\varphi/2) + \mathbf{i}_3 \sin(\varphi/2)].$$

Отсюда следует, что для конечного момента времени  $t = t_3 = t_k$  можно записать следующие равенства:

$$\begin{aligned}\lambda_0^{(3)}(t_3) &= \Lambda_0^{(3)}(t_3)\cos[(1/2)(\varphi_0 + cr^{-2}(t_3 - t_0))] - \\ &\quad - \Lambda_3^{(3)}(t_3)\sin[(1/2)(\varphi_0 + cr^{-2}(t_3 - t_0))], \\ \lambda_1^{(3)}(t_3) &= \Lambda_1^{(3)}(t_3)\cos[(1/2)(\varphi_0 + cr^{-2}(t_3 - t_0))] + \\ &\quad + \Lambda_2^{(3)}(t_3)\sin[(1/2)(\varphi_0 + cr^{-2}(t_3 - t_0))], \\ \lambda_2^{(3)}(t_3) &= \Lambda_2^{(3)}(t_3)\cos[(1/2)(\varphi_0 + cr^{-2}(t_3 - t_0))] - \\ &\quad - \Lambda_1^{(3)}(t_3)\sin[(1/2)(\varphi_0 + cr^{-2}(t_3 - t_0))], \\ \lambda_3^{(3)}(t_3) &= \Lambda_3^{(3)}(t_3)\cos[(1/2)(\varphi_0 + cr^{-2}(t_3 - t_0))] + \\ &\quad + \Lambda_0^{(3)}(t_3)\sin[(1/2)(\varphi_0 + cr^{-2}(t_3 - t_0))].\end{aligned}\quad (8)$$

Приравняв правые части (7) и (8) с учетом, что  $t_0 = 0$ , получим систему четырех алгебраических уравнений относительно неизвестных  $t_1$ ,  $t_2$  и  $t_3$ :

$$\begin{aligned}\Lambda_0^{(3)}(t_3)\cos[(1/2)(\varphi_0 + cr^{-2}t_3)] - \Lambda_3^{(3)}(t_3)\sin[(1/2)(\varphi_0 + cr^{-2}t_3)] &= \\ &= g_0(r, c, p_3, \lambda_0, t_1, t_2, t_3), \\ \Lambda_1^{(3)}(t_3)\cos[(1/2)(\varphi_0 + cr^{-2}t_3)] + \Lambda_2^{(3)}(t_3)\sin[(1/2)(\varphi_0 + cr^{-2}t_3)] &= \\ &= g_1(r, c, p_3, \lambda_0, t_1, t_2, t_3), \\ \Lambda_2^{(3)}(t_3)\cos[(1/2)(\varphi_0 + cr^{-2}t_3)] - \Lambda_1^{(3)}(t_3)\sin[(1/2)(\varphi_0 + cr^{-2}t_3)] &= \\ &= g_2(r, c, p_3, \lambda_0, t_1, t_2, t_3), \\ \Lambda_3^{(3)}(t_3)\cos[(1/2)(\varphi_0 + cr^{-2}t_3)] + \Lambda_0^{(3)}(t_3)\sin[(1/2)(\varphi_0 + cr^{-2}t_3)] &= \\ &= g_3(r, c, p_3, \lambda_0, t_1, t_2, t_3).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= g_2(r, c, p_3, \lambda_0, t_1, t_2, t_3), \\ \Lambda_3^{(3)}(t_3) \cos[(1/2)(\varphi_0 + c r^{-2} t_3)] + \Lambda_0^{(3)}(t_3) \sin[(1/2)(\varphi_0 + c r^{-2} t_3)] = \\ &= g_3(r, c, p_3, \lambda_0, t_1, t_2, t_3), \end{aligned} \quad (9)$$

Для нахождения двух моментов времени  $t_1$  и  $t_2$  переключения и конечного момента времени  $t_3 = t_k$  можно использовать три любые уравнения системы (9). Одно оставшееся уравнение может быть использовано для проверки правильности найденного решения.

Таким образом, построены алгебраические уравнения (9), позволяющие решать краевую задачу для нахождения моментов двух переключений управления и времени управляемого движения.

Следует отметить, что из соотношений (9) также можно получить условия разрешимости задачи переориентации круговой орбиты КА с двумя переключениями управления.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Челноков Ю. Н. Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. 1 // Космические исследования. 2001. Т. 39, № 5. С. 502 – 517.

УДК 539.3

**А. А. Барышев, М. И. Брюшко, О. А. Мыльцина**

### **ВИБРАЦИОННЫЙ ИЗГИБ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С УЧЕТОМ СВЯЗНОСТИ ТЕПЛООВОГО И МЕХАНИЧЕСКОГО ПОЛЕЙ**

В статье рассматривается вязкоупругая изотропная цилиндрическая оболочка [1], малой толщины  $h$ , испытывающая малые деформации под действием распределенной по поверхности  $\gamma = -h/2$  осесимметричной нагрузки  $q(\alpha, t) = q_0 \cos \omega t$ .

Принимаем справедливыми гипотезы классической теории изгиба оболочек Киргоффа – Лява и считаем, что способы закрепления концевых сечений и условия теплообмена остаются неизменными во времени.

В этом случае разрешающая система уравнений в гауссовской системе координат, описывающая напряженно-деформированное состояние (НДС), может быть записана в виде ( $\xi = \alpha/L$ ,  $L$  – длина и  $R$  – радиус оболочки)

$$\begin{aligned} \frac{du_k}{d\xi} &= -\frac{\nu L}{R} w_k + \frac{L(-1)^{k-1}}{1 - a_T b_T} \sum_{j=1}^2 (b_{k+j-1} T_\alpha^{(j)} - a_T d_{k+j-1} M_\alpha^{(j)}), \\ \frac{dw_k}{d\xi} &= -L \gamma_\alpha^{(k)}, \quad \frac{d\gamma_\alpha^{(k)}}{d\xi} = \frac{L(-1)^{k-1}}{1 - a_T b_T} \sum_{j=1}^2 (d_{k+j-1} M_\alpha^{(j)} - b_T b_{k+j-1} T_\alpha^{(j)}), \end{aligned}$$

$$\frac{dT_{\alpha}^{(k)}}{d\xi} = -L\rho h\omega^2 u_k, \quad \frac{dM_{\alpha}^{(k)}}{d\xi} = LN^{(k)} - \rho\omega^2 \frac{h^3}{12} \gamma_{\alpha}^{(k)} \quad (k=1,2),$$

$$\frac{dN^{(k)}}{d\xi} = \frac{LV}{R} T_{\alpha}^{(k)} + \frac{L}{R^2} (1-\nu^2) \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} B_{k+j-1} w_j - L\rho h\omega^2 w_k - Lq_k. \quad (1)$$

В выражениях (1) введены обозначения:  $b_k(\Theta) = B_k / (B_1^2 + B_2^2)$ ,  $d_k(\Theta) = D_k / (D_1^2 + D_2^2)$ ,  $a_T(\Theta) = b_1 C_1 + b_2 C_2$ ,  $b_T(\Theta) = d_1 C_1 + d_2 C_2$ ,

$$B_k(\Theta) = \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} E_k(\Theta(\alpha, \gamma), \omega) d\gamma, \quad C_k(\Theta) = \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} \gamma E_k(\Theta(\alpha, \gamma), \omega) d\gamma,$$

$$D_k(\Theta) = \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} \gamma^2 E_k(\Theta(\alpha, \gamma), \omega) d\gamma, \quad E_1 + iE_2 = \int_0^{\infty} K(\Theta, \omega, s) e^{i\omega s} ds, \quad E_3 = -E_1,$$

$\Theta = (T - T_0) / T_s$ ,  $T_s = T_0 - T_1$ ;  $E_1, E_2$  – составляющие комплексного модуля,  $\Theta(\xi, \zeta)$  – безразмерная установившаяся температура саморазогрева цилиндра.

Поскольку система уравнений (1) содержит неизвестную функцию  $\Theta(\xi, \zeta)$ , то к ней необходимо добавить уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \zeta^2} + \frac{h}{R} \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} + \frac{h^2}{L^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \zeta^2} + E_2(\Theta) Q(\xi, \zeta) = 0, \quad \zeta = \gamma / h, \quad (2)$$

где функция  $Q(\xi, \zeta)$  пропорциональна работе внешних сил. Для определения максимально возможной температуры предполагается, что вся работа внешних сил переходит в тепло.

Таким образом, система уравнений (1), (2) является замкнутой. Она описывает установившиеся изгибные гармонические колебания и диссипативный разогрев вязкоупругих изотропных цилиндрических оболочек в классической постановке с учетом связности механических и тепловых полей.

Для численного решения полученных краевых задач применим известный метод установления.

Согласно этому методу введем в рассмотрение следующие системы:

$$\frac{d\bar{Y}}{d\xi} = A(\xi, \Theta) \bar{Y} + \bar{F}(\xi), \quad \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \zeta^2} + h_0 \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} + h_L^2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + E_2(\Theta) Q(\zeta, \bar{Y}). \quad (3)$$

Здесь  $\bar{Y}(\xi) = \{u_k, w_k, \gamma_{\alpha}^{(k)}, T_{\alpha}^{(k)}, M_{\alpha}^{(k)}, N_{\alpha}^{(k)}\}_{k=1,2}$ , а компоненты  $A(\xi, \Theta)$ ,  $\bar{F}(\xi)$  записываются в соответствии с (1).

Во втором уравнении системы (3) заменим  $\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\Theta_{n+1} - \Theta_n}{\tau}$ , а к полученному уравнению применим метод сплайн-коллокаций [2]. Тогда краевые задачи для системы (3) можно записать в виде

$$\frac{d\bar{Y}_n}{d\xi} = A(\xi, \Theta_n)\bar{Y}_n + \bar{F}(\xi), \quad H_1\bar{Y}(0) = 0, \quad H_2\bar{Y}(1) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{d\bar{Z}_{n+1}}{d\zeta} = B(\zeta)\bar{Z}_{n+1} + \bar{G}(\zeta, \Theta_n, \bar{Y}_n), \quad Q_1 Y(-0,5) = 0, \quad Q_2 Y(-0,5) = 0. \quad (5)$$

Здесь  $B(\zeta)$ ,  $\bar{G}(\zeta, \Theta, \bar{Y})$  – известные матрица и вектор,  $\bar{Z}(\zeta)$  – неизвестная вектор-функция, состоящая из составляющих искомой температуры. Компоненты матриц  $H_1, H_2, Q_1, Q_2$  записываются в соответствии с условиями закрепления или загрузки краев и с условиями теплообмена оболочки с окружающей средой на лицевых поверхностях.

Условие на окончание итерационного процесса примем следующее:  $\max_{\xi, \zeta} |(\Theta_{n+1} - \Theta_n) / \Theta_n| < \varepsilon$  ( $\varepsilon$  – некоторое малое число).

Решение полученных краевых задач (4), (5) проводилось численно методом дискретной ортогонализации С. К. Годунова [3].

Численные расчеты по описанной методике выполнены для оболочки ( $L = R = 1\text{ м}$ ,  $h = 0,02\text{ м}$ ) из типичного вязкоупругого материала, физико-механические характеристики которого приведены в работе [4] и имеют значения:  $E_1(\Theta) = E_0 \omega^\beta (1 + \Theta)^\gamma$ ,  $E_2 = E_1 \operatorname{tg} \delta$ ,  $E_0 = 0,2 \cdot 10^{14} \text{ Н/м}^2$ ,  $\beta = 0,214$ ,  $\gamma = -3,21$ ,  $T_1 = -87,2^\circ\text{С}$ ,  $\rho = 1214 \text{ кг/м}^3$ ,  $\lambda_q = 0,15 \text{ Вт/м}\cdot\text{град}$ ,  $\nu = 0,4$ ,  $\operatorname{tg} \delta = 0,352$ ,  $T_0 = -20^\circ\text{С}$ .

Результаты численных расчетов для жесткозакрепленного контура оболочки приведены на рис. 1, 2, где изображены графики зависимости наибольших значений безразмерной амплитуды прогиба  $w/h$  и безразмерной температуры  $\Theta$  от частоты внешнего возбуждения. Кривая 1 получена при значениях  $T_0 = -20^\circ\text{С}$  и  $q_0 = 3000 \text{ Н/м}^2$ , а кривая 2 показывает соответствующие изменения для случая, когда свойства материала от температуры не зависят ( $\gamma = 0$ ), при этом для рис. 1  $q_0 = 200 \text{ Н/м}^2$ , а для рис. 2  $q_0 = 3000 \text{ Н/м}^2$ .

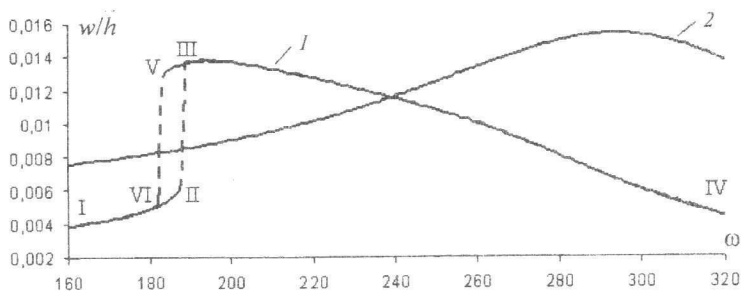


Рис. 1

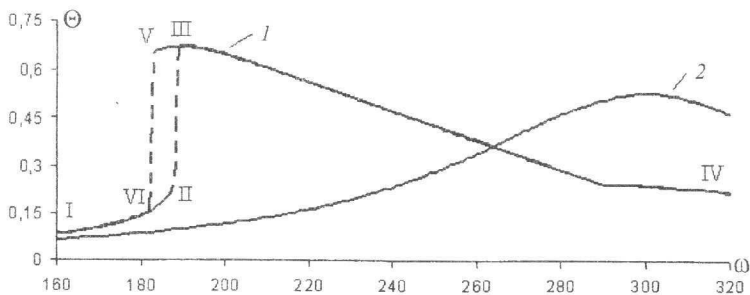


Рис. 2

Сравнительный анализ представленных кривых показывает, что учет связности механических и тепловых полей существенно влияет на зависимость амплитуд характеристик НДС и температуры саморазогрева от частоты внешнего возбуждения. Так, при увеличении частоты изменение величин идет по участкам I-II, III-IV, а при уменьшении  $\omega$  – по участкам IV-V, VI-I. Переход из состояний II, V в состояния III, VI соответственно осуществляется скачкообразно.

Следует отметить, что значения амплитуд характеристик НДС, вычисленные в несвязной постановке, значительно выше результатов, полученных в связной задаче, а для значений температуры наблюдается обратное явление.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Барышев А. А. Об учете поперечных сдвигов при изгибе тонких вязкоупругих оболочек вращения под действием осесимметричной нагрузки // *Механика деформируемых сред: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2004. Вып. 15. С. 3 – 7.*
2. Григоренко Я. М., Крюков Н. Н. Решение задач теории пластин и оболочек с применением сплайн-функций (Обзор) // *Прикл. механика. 1995. Т. 31, № 6. С. 3 – 27.*
3. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем однородных линейных дифференциальных уравнений // *УМН. 1961. Т. 16, № 3. С. 171 – 174.*
4. Карнаухов В. Г. Связанные задачи термовязкоупругости. Киев: Наук. думка, 1982. 260 с.

**ОБ ОДНОМ ЧАСТНОМ РЕШЕНИИ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО КВАТЕРНИОННОГО  
КИНЕМАТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ  
УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА\***

Рассмотрим задачу определения углового положения твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, по заданной угловой скорости, если известно его начальное угловое положение (задача Дарбу).

Угловое движение твердого тела будем описывать при помощи кватернионного кинематического дифференциального уравнения [1]:

$$2\dot{\bar{\lambda}} = \bar{\lambda} \circ \bar{\omega}. \quad (1)$$

Здесь  $\bar{\lambda}$  – кватернион, характеризующий ориентацию твердого тела относительно инерциальной системы координат,  $\bar{\omega}$  – вектор абсолютной угловой скорости твердого тела, заданный своими проекциями на оси системы координат, жестко связанной с твердым телом, символ « $\circ$ » – означает кватернионное произведение, точка – дифференцирование по времени  $t$ .

Ориентацию твердого тела в начальный момент времени  $t = 0$  будем полагать известной:

$$\bar{\lambda}(0) = \bar{\lambda}^0. \quad (2)$$

Уравнение (1) и начальное условие движения (2) в скалярной форме имеют вид

$$\begin{cases} 2\dot{\lambda}_0 = -\lambda_1\omega_1 - \lambda_2\omega_2 - \lambda_3\omega_3, \\ 2\dot{\lambda}_1 = \lambda_0\omega_1 + \lambda_2\omega_3 - \lambda_3\omega_2, \\ 2\dot{\lambda}_2 = \lambda_0\omega_2 + \lambda_3\omega_1 - \lambda_1\omega_3, \\ 2\dot{\lambda}_3 = \lambda_0\omega_3 + \lambda_1\omega_2 - \lambda_2\omega_1, \end{cases} \quad (3)$$

$$\lambda_0(0) = \lambda_0^0, \lambda_1(0) = \lambda_1^0, \lambda_2(0) = \lambda_2^0, \lambda_3(0) = \lambda_3^0,$$

где  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  – компоненты кватерниона  $\bar{\lambda}$  (параметры Эйлера), удовлетворяющие условию нормировки  $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$ ,  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  – компоненты вектора  $\bar{\omega}$ , являющиеся известными функциями времени.

Задача заключается в определении кватерниона ориентации твердого тела  $\bar{\lambda}(t)$ .

Общее решение кватернионного дифференциального уравнения (1) в случае произвольного вектора абсолютной угловой скорости  $\bar{\omega}$  не найдено. Известны лишь частные случаи решения этой задачи.

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00347).

Построим общее решение кватернионного уравнения (1) в случае, когда вектор абсолютной угловой скорости твердого тела  $\bar{\omega}$  имеет вид

$$\bar{\omega} = a \sin kt \bar{i}_1 + b \cos kt \bar{i}_2 + c \sin kt \bar{i}_3, \quad (4)$$

где  $a, b, c, k$  – постоянные величины, удовлетворяющие условию:

$$a^2 + c^2 = b^2, \quad (5)$$

$\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3$  – орты гиперкомплексного пространства (мнимые единицы Гамильтона).

Система дифференциальных уравнений (3), замкнутая соотношением для абсолютной угловой скорости (4), представляет собой систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Такая система является приводимой по Ляпунову [2], т.е. существует замена искомой кватернионной переменной  $\bar{\lambda}$  (преобразование Ляпунова), приводящая систему (3) к системе с постоянными коэффициентами.

Сделаем замену переменных по формуле

$$\bar{\lambda} = \bar{u} \circ \bar{v}, \quad (6)$$

где  $\bar{u}$  – новая кватернионная переменная,  $\bar{v}$  – оператор преобразования. Будем полагать, что  $\bar{v}$  – нормированный кватернион.

Дифференцируя соотношение (6) по времени с учетом уравнения (1), получаем кватернионное дифференциальное уравнение для новой искомой переменной  $\bar{u}$ :

$$2\dot{\bar{u}} = \bar{u} \circ (\bar{v} \circ \bar{\omega} \circ \bar{v} - 2\dot{\bar{v}} \circ \bar{v}), \quad (7)$$

где волна означает сопряженный кватернион.

С точки зрения механики соотношение (6) означает переход к новой системе координат, угловое положение которой относительно инерциальной системы координат задается кватернионом  $\bar{u}$ . Вращение этой системы координат в инерциальном пространстве происходит с угловой скоростью

$$\bar{\Omega} = \bar{v} \circ \bar{\omega} \circ \bar{v} - 2\dot{\bar{v}} \circ \bar{v}, \quad (8)$$

причем  $-2\dot{\bar{v}} \circ \bar{v}$  можно трактовать как относительную угловую скорость, а  $\bar{v} \circ \bar{\omega} \circ \bar{v}$  – как переносную.

Нужно найти такое преобразование  $\bar{v}$ , чтобы вектор угловой скорости  $\bar{\Omega}$  был постоянен по модулю и направлению.

Зададим преобразование  $\bar{v}$  с помощью соотношения

$$\bar{v} = \cos\left(\frac{kt}{2}\right) - \frac{c}{b} \bar{i}_1 \sin\left(\frac{kt}{2}\right) + \frac{a}{b} \bar{i}_3 \sin\left(\frac{kt}{2}\right). \quad (9)$$

Кватернион  $\bar{v}$  является нормированным в силу условия (5).

Подставим соотношение (9) в уравнение (7) и учтем выражения (4) и (5). Для этого предварительно вычислим  $\dot{\bar{v}}$ , а затем – относительную  $-2\dot{\bar{v}} \circ \bar{v}$  и переносную  $\bar{v} \circ \bar{\omega} \circ \bar{v}$  угловые скорости:

$$\dot{\bar{v}} = -\frac{k}{2} \sin\left(\frac{kt}{2}\right) - \frac{kc}{2b} \bar{i}_1 \cos\left(\frac{kt}{2}\right) + \frac{ka}{2b} \bar{i}_3 \cos\left(\frac{kt}{2}\right),$$



$$-2\dot{\bar{v}} \circ \bar{v} = \frac{kc}{b} \bar{i}_1 - \frac{ka}{b} \bar{i}_3, \quad (10)$$

$$\bar{v} \circ \bar{\omega} \circ \bar{v} = b\bar{i}_2. \quad (11)$$

Подставляя соотношения (10) и (11) в выражение (8), находим вектор угловой скорости  $\bar{\Omega}$ :

$$\bar{\Omega} = \frac{kc}{b} \bar{i}_1 + b\bar{i}_2 - \frac{ka}{b} \bar{i}_3, \quad (12)$$

следовательно, уравнение (7) принимает вид

$$2\dot{\bar{u}} = \bar{u} \circ \left( \frac{kc}{b} \bar{i}_1 + b\bar{i}_2 - \frac{ka}{b} \bar{i}_3 \right). \quad (13)$$

Как видно из соотношения (12), вектор абсолютной угловой скорости  $\bar{\Omega}$  постоянен по модулю и направлению, и, следовательно, преобразование, задаваемое соотношением (9), является преобразованием Ляпунова, а дифференциальное кватернионное уравнение (13) может быть решено аналитически. Общее решение уравнения (13) имеет вид [1]

$$\bar{u} = \bar{C} \circ \left( \cos\left(\frac{|\bar{\Omega}|}{2}t\right) + \frac{kc}{b|\bar{\Omega}|} \bar{i}_1 \sin\left(\frac{|\bar{\Omega}|}{2}t\right) + \frac{b}{|\bar{\Omega}|} \bar{i}_2 \sin\left(\frac{|\bar{\Omega}|}{2}t\right) - \frac{ka}{b|\bar{\Omega}|} \bar{i}_3 \sin\left(\frac{|\bar{\Omega}|}{2}t\right) \right), \quad (14)$$

где  $|\bar{\Omega}| = \sqrt{b^2 + k^2}$ ,  $\bar{C}$  – постоянный кватернион.

Подставляя соотношения (14) и (9) в (6), получаем общее решение кватернионного дифференциального уравнения (1) для вектора абсолютной угловой скорости, задаваемого соотношением (4):

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} = \bar{C} \circ \left( \cos\left(\frac{|\bar{\Omega}|}{2}t\right) + \frac{kc}{b|\bar{\Omega}|} \bar{i}_1 \sin\left(\frac{|\bar{\Omega}|}{2}t\right) + \frac{b}{|\bar{\Omega}|} \bar{i}_2 \sin\left(\frac{|\bar{\Omega}|}{2}t\right) - \frac{ka}{b|\bar{\Omega}|} \bar{i}_3 \sin\left(\frac{|\bar{\Omega}|}{2}t\right) \right) \circ \\ \circ \left( \cos\left(\frac{kt}{2}\right) - \frac{c}{b} \bar{i}_1 \sin\left(\frac{kt}{2}\right) + \frac{a}{b} \bar{i}_3 \sin\left(\frac{kt}{2}\right) \right). \end{aligned}$$

Постоянный кватернион  $\bar{C}$  определяется из начальных условий движения (2):

$$\bar{C} = \bar{\lambda}^0.$$

Таким образом, найдено аналитическое решение кватернионного кинематического дифференциального уравнения углового движения твердого тела (1) в случае, когда вектор абсолютной угловой скорости твердого тела имеет вид (4) и выполняются условия (5).

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
2. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1950. 471 с.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ КРОВИ ЧЕРЕЗ МАЛЫЙ СОСУД С УЧЁТОМ ВИНТОВОЙ АНИЗОТРОПИИ

В статье рассматривается моделирование течения крови через малый цилиндрический сосуд с целью выяснения, является ли свойство винтовой анизотропии стенок причиной закручивания течения крови относительно оси сосуда? Эта задача имеет важное медицинское значение. Более глубокое изучение таких процессов может помочь в понимании причин возникновения некоторых заболеваний сосудов человека, а также улучшить методы хирургического лечения сосудистых заболеваний.

Некоторые медицинские исследования показали, что кровь в сосудах человека течёт не прямолинейно, а закручивается по спирали относительно оси сосуда. Одной из основных причин этого явления может быть наличие мышечных волокон, расположенных в стенках сосудов по спирали. Эти волокна могут быть смоделированы как винтовая анизотропия, а точнее винтовая трансверсальная изотропия стенок сосуда. Такая задача для крупных сосудов была рассмотрена в [1, 2]. В данной статье изучаются малые сосуды человека, то есть толщина стенки сосуда сравнима с просветом сосуда, для того чтобы проанализировать, будет ли именно свойство винтовой анизотропии стенок причиной закручивания крови. Вначале будет просчитана модель с изотропными стенками и рассмотрена как контрольная, а уже затем будет смоделировано течение через сосуд с заданной винтовой анизотропией. Результат будет сравнен с контрольной моделью.

### Модель

В качестве модели сосуда рассматривается круглый цилиндр, внутренний радиус этого цилиндра равен толщине его стенки (рис. 1).

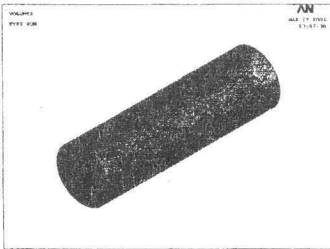


Рис. 1. Рассматриваемая модель в трёхмерном изображении

Нам необходимо сравнить течение жидкости в цилиндре с винтовой трансверсальной изотропией и в изотропном цилиндре. Только после этого мы сможем сказать, является ли данное свойство материала стенки причиной закручивания потока. Жидкость рассмотрим вязкую несжимаемую с плотностью  $1.05 \text{ г/см}^3$  и коэффициентом вязкости  $0.037$ . Изотропная стенка обладает плотностью  $1.378 \text{ г/см}^3$ , модулем Юнга  $5.5 \cdot 10^6 \text{ г/см}^2$  и коэффициентом Пуассона  $0.4$ . Анизотропная стенка же обладает следующими свойствами: в направлении трансверсальности (по касательной к винтовой линии) модуль Юнга  $7 \cdot 10^6$ , модуль сдвига  $6 \cdot 10^6$ , коэффициент Пуассона  $0.2$ , а

в остальных направлениях (в плоскости, перпендикулярной направлению трансверсальности) модуль Юнга  $5.5 \cdot 10^6$ , модуль сдвига  $8 \cdot 10^6$ , коэффициент Пуассона 0.4. Итак, мы описали модель, теперь следует кратко описать некоторые характеристики самого процесса моделирования. Решаться задача будет с момента времени 0 до момента времени 1 с через каждые 0.1 с, т. е., не считая нулевого, получаем десять моментов времени. Сосуд рассматривается закреплённым в торцах жёстко. На жидкость же на одном торце задано положительное нормальное давление в одном случае постоянной величины, в другом случае меняющееся по синусоидальному закону. На другом торце задано нулевое давление.

### Результаты

Для контрольной модели получилось всё, как и ожидалось, т. е. нет никаких поворотов сосуда (рис. 2), и течение жидкости также оказалось прямолинейным, т. е. параллельным оси сосуда (рис. 3).

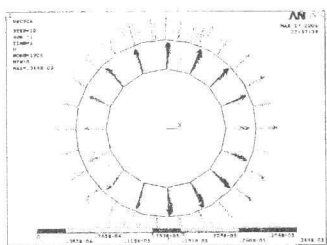


Рис. 2. Векторное поле перемещений узлов стенки трубки. Вид с торца

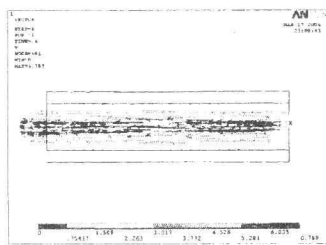


Рис. 3. Векторное поле скоростей жидкости на разрезанной вдоль оси трубке. Вид сбоку

В случае же модели с винтовой анизотропией стенок картина получилась немного другая. Если в контрольной модели сосуд просто расширился, то в данном случае он ещё и повернулся относительно своей оси (рис. 4). Но жидкость так же, как и в случае сосуда с изотропной стенкой, течёт прямолинейно, т. е. практически без каких-либо поворотов (рис. 5).

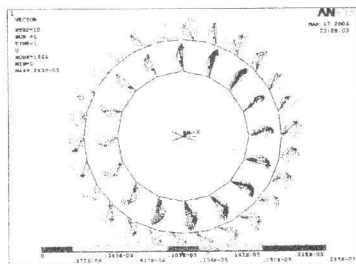


Рис. 4. Векторное поле перемещений узлов стенки трубки. Вид с торца

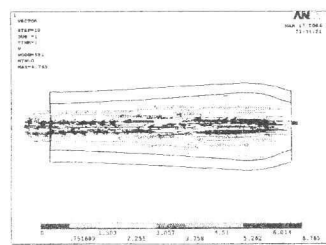


Рис. 5. Векторное поле скоростей жидкости на разрезанной вдоль оси трубке. Вид сбоку

Точнее из-за условия прилипания, слой жидкости, касающийся стенок сосуда, поворачивается, но скорость этого поворота меньше скорости основного течения на несколько порядков и, следовательно, этот поворот не может воздействовать на основной поток.

#### *Вывод*

Таким образом, исходя из полученных результатов, можно сделать вывод, что свойство винтовой анизотропии не может быть причиной закручивания потока крови в малых сосудах человека. Это же было подтверждено наблюдением течения крови с помощью доплеровского исследования. А именно кровь выходит из сердца на самом деле закрученным потоком, это объясняется особым строением желудочков сердца. Но затем в кровяном русле поток стабилизируется и становится прямолинейным и никаких закручиваний больше не наблюдается. Для крупных сосудов было проведено аналогичное исследование [1, 2], где также было получено, что в пристеночной области наблюдается малый поворот жидкости, но он настолько мал, что не может воздействовать на основной поток.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Устинов Ю. А. Некоторые задачи для упругих цилиндрических тел с винтовой анизотропией // Успехи механики. 2003. № 4. С. 37 – 62.
2. Устинов Ю. А. Модель винтового пульсового движения крови в артериальных сосудах // ДАН. 2004. Т. 398, № 3. С. 1 – 5.

УДК 536.6.011

**В. М. Гурьянов, М. А. Каргов**

### ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПРОСТЫХ ВОЛН ГИПЕРЗВУКОВОЙ АЭРОДИНАМИКИ

Стационарное течение газа в плоскости  $(x, y)$  записывается последовательно уравнениями в консервативной форме: неразрывности, количества движения в проекциях на оси  $Ox$ ,  $Oy$  и энергии. Эти записи в соответствии с [1] имеют вид

$$\begin{aligned}
 (\rho q_1)_x + (\rho q_2)_y &= 0, \\
 (\rho q_1^2 + P)_x + (\rho q_1 q_2)_y &= 0, \\
 (\rho q_1 q_2)_x + (\rho q_2^2 + P)_y &= 0, \\
 \left( \frac{1}{2} \rho q^2 q_1 + \frac{\gamma}{\gamma-1} P q_1 \right)_x + \left( \frac{1}{2} \rho q^2 q_2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} P q_2 \right)_y &= 0, \quad (1)
 \end{aligned}$$

где нижние индексы  $x, y$  означают дифференцирование по  $x$  и  $y$ ,

$q^2 = q_x^2 + q_y^2$  ( $q$  – модуль скорости),  $P$  – давление газа,  $\gamma = C_p/C_v$  – отношения удельных теплоёмкостей.

Введём новые переменные  $u_1 = q_x$ ,  $u_2 = q_y$ ,  $u_3 = \ln \rho$ ,  $u_4 = P/\rho$ . Эти переменные образуют вектор  $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ , и тогда уравнения (1) можно записать в матричной форме

$$Au_x + Bu_y = 0, \quad (2)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & u_1 & 0 \\ 2u_1 & 0 & u_1^2 + u_4 & 1 \\ u_2 & u_1 & u_1 u_2 & 0 \\ u_1^2 & u_1 u_2 & 0 & \frac{\gamma}{\gamma - 1} u_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & u_2 & 0 \\ u_2 & u_1 & u_1 u_2 & 0 \\ 0 & 2u_2 & u_2^2 + u_4 & 1 \\ u_1 u_2 & u_2^2 & 0 & \frac{\gamma}{\gamma - 1} u_2 \end{bmatrix}.$$

Матричная запись уравнения (1) позволяет воспользоваться теорией простых волн [2]. Введём характеристическую матрицу  $(A - \lambda B)$  и уравнение

$$\det |A - \lambda B| = \frac{(u_1 - \lambda u_2)^2}{\gamma - 1} \left( (u_2^2 - \gamma u_4) \lambda^2 - 2u_1 u_2 \lambda + (u_1^2 - \gamma u_4) \right),$$

которое определяет собственные значения

$$\lambda_{1,2} = \frac{u_1}{u_2}, \quad \lambda_{3,4} = \frac{u_1 u_2 \pm \sqrt{\gamma u_4 (u_1^2 + u_2^2 - \gamma u_4)}}{u_2^2 - \gamma u_4}. \quad (3)$$

Собственные корневые векторы характеристической матрицы  $(A - \lambda B)$  пропорциональны алгебраическим дополнениям любой из её строк [2] и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{r}^{(1)} &= (u_1, u_2, 0, 0), & \bar{r}^{(2)} &= (0, 0, 1, -u_4), \\ \bar{r}^{(3,4)} &= \left( -\frac{\gamma u_4}{u_1 - \lambda u_2}, \frac{\gamma \lambda u_4}{u_1 - \lambda u_2}, 1, (\gamma - 1) u_4 \right), \\ \bar{l}^{(1)} &= (-\gamma u_4, 0, 0, 1), & \bar{l}^{(2)} &= (-u_1^2 - u_2^2, u_1, u_2, 0), \\ \bar{l}^{(3,4)} &= ((\lambda u_2 - u_1) \gamma u_4, \gamma u_4, \gamma \lambda u_4, \lambda u_2 - u_1). \end{aligned}$$

Простой волной называется волна, которая представляется сложной вектор-функцией  $u = u(\varphi(x, y))$ . Поэтому

$$u_x = u' \varphi_x, \quad u_y = u' \varphi_y, \quad \left( u' = \frac{dx}{dy} \right). \quad (4)$$

Подстановка правых частей равенства (4) в уравнение (2) даёт уравнение

$$\left( A + \frac{\varphi_y}{\varphi_x} B \right) u' = 0, \quad (5)$$

в котором функция  $\varphi(x, y) = \text{const}$  определяет характеристики уравнения (5), заданные в неявной форме. Справедливы соотношения, определяющие дифференциальное уравнение характеристик:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\varphi_y}{\varphi_x} = \lambda(u). \quad (6)$$

Учитывая пропорциональность производной  $u'$  собственному вектору  $r$ , имеем по (5) и дифференциальному уравнению простых волн в матричной форме

$$(A - \lambda B)r = 0. \quad (7)$$

Вдоль характеристик  $\varphi(x, y) = \text{const}$ .

Уравнение (7) представляется в виде обыкновенных дифференциальных уравнений в векторной или координатной симметричной формах:

$$\frac{du}{d\varphi} = r(u), \quad \frac{du_1}{r_1} = \frac{du_2}{r_2} = \frac{du_3}{r_3} = \frac{du_4}{r_4} = d\varphi. \quad (8)$$

Заметим, что в качестве независимой переменной можно взять  $u_i$ , если  $r_i \neq 0$ . Этим можно сократить количество дифференциальных уравнений.

Дифференциальное уравнение характеристик  $\frac{dx}{dy} = \lambda(u)$  имеет решения в виде однопараметрического семейства прямых

$$x = C(\varphi) + \lambda(u(\varphi))y.$$

Пример. Если решается задача Коши для уравнения (8) с данными Коши  $x = x_0(\xi)$ ,  $y = y_0(\xi)$ ,  $u = u_0(\xi)$ ,  $\varphi = \xi$ , то решение получается в параметрической форме

$$\begin{aligned} x &= x_0(\varphi) + \lambda(\varphi)(y - y_0(\varphi)), \\ u &= u_0(\varphi). \end{aligned} \quad (9)$$

Поскольку решение выражено через функцию  $\varphi(x, y)$ , заданную первым равенством (9), то для её существования требуется выполнение существования неявной функции, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}(x_0(\varphi) + \lambda(\varphi)(y - y_0(\varphi))) \neq 0,$$

Только в этом случае получим решение задачи Коши в виде  $u = u(x, y)$ .

Рассмотрим случай, когда  $\lambda = \lambda_1$ :

$$\frac{du_1}{u_1} = \frac{du_2}{u_2} = \frac{du_3}{0} = \frac{du_4}{0}, \quad (10)$$

из (10) следует, что

$$u_3 = \text{const}, \quad u_4 = \text{const}$$

во всей плоскости  $(x, y)$ . Функции  $u_1, u_2$  связаны соотношением

$$u_1 = C u_2, \quad (11)$$

где  $C = \text{const}$ . Подставляя (11) в первое равенство (3), получим  $\lambda = C$ .

Учитывая это равенство, получим решение

$$u_1 = V(x - Cy) \cos \alpha,$$

$$u_2 = V(x - Cy) \sin \alpha,$$

$$x = \xi + Cy,$$

где  $V(x - Cy)$  – произвольная функция, равная модулю скорости,  $\alpha$  – угол между осью  $Ox$  и направлением вектора  $V$ , причём из (17) видно, что

$$C = \operatorname{ctg} \alpha.$$

Все характеристики указанного решения параллельны друг другу ( $\lambda = \operatorname{const}$  во всей плоскости  $(x, y)$ ) и совпадают с линиями тока, так как уравнение характеристик совпадает с уравнением линий тока. Отсюда также следует, что течение, описываемое данным решением, является плоскопараллельным.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Коул Дж., Кук Л. Транзвуковая аэродинамика. М., 1989. 358 с.
2. Бленд Д. Нелинейная динамическая теория упругости. М., 1972. 183 с.

УДК 539.3

Д. В. Иванов, С. А. Алексейчук

### ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ КРОВИ В СТЕНОЗИРОВАННЫХ АРТЕРИЯХ

Целью статьи является изучение и моделирование кровотока при условии сужения просвета артерии с учетом геометрии и механических характеристик реального сосуда [1].

Сосудистая патология является одной из основных причин смертности населения многих стран. В частности, поражения магистральных сосудов в виде сужения составляют от 25 до 65 % среди причин возникновения ишемического инсульта. Научная проблема заключается в выявлении основных свойств кровотока и напряженно-деформированного состояния стенок артерий при условии их сужения.

#### Постановка задачи

Численные исследования проведены для двумерной и трехмерной моделей в конечно-элементных пакетах Comsol Multiphysics 3.2 [2, 3] и Ansys 7.0.

Рассмотрено нестационарное движение жидкости [4] и стенок. Движение стенок смоделировано с использованием модуля плоской задачи теории упругости, с учетом того что деформации могут принимать боль-

шие значения. Перемещения и соответствующие компоненты скорости стенок обозначены через  $u, v, w, u_s, v_s, w_s$ , а компоненты скорости движения крови и давление –  $u_2, v_2, w_2$  и  $p_2$ . Для моделирования двустороннего взаимодействия крови и стенок артерий использован совместный подход Лагранжа – Эйлера [5], который отвечает за динамику жидкости, движение границ и сетки.

### Течение жидкости

Кровь предполагалась однородной, несжимаемой и ньютоновской жидкостью. Движение крови описывается системой уравнений Навье – Стокса [4, 6].

$$\begin{cases} \rho_1 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} - \nabla \cdot \left[ -p_2 I + \eta (\nabla \bar{u}_2 + (\nabla \bar{u}_2)^T) \right] + \rho_1 ((\bar{u}_2 - \bar{u}_m) \cdot \nabla) \bar{u}_2 = 0, \\ -\nabla \bar{u}_2 = 0, \end{cases}$$

где  $\rho_1$  – плотность жидкости,  $I$  – единичная матрица,  $\eta$  – динамический коэффициент вязкости жидкости,  $\bar{u}_m$  – вектор скорости системы координат.

На левой границе  $u_2 = u_m$ , на правой границе задается давление

$$p_2 = 0. \text{ На стенках и стенозе } u_2 = \frac{\partial u}{\partial t}, v_2 = \frac{\partial v}{\partial t}, w_2 = \frac{\partial w}{\partial t}.$$

### Задача теории упругости

Материал стенок и стеноза предполагался однородным, изотропным и идеально-упругим. Мы решали эту часть задачи в неподвижной системе координат. Движение стенок и стеноза в нестационарном случае описано вторым законом Ньютона в виде

$$\rho_2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - \nabla \cdot c \nabla \bar{u} = \bar{F},$$

где  $\rho_2$  – плотность стенки,  $c$  – константа,  $\bar{F}$  – вектор внешних сил. Учитывая, что деформации стенок вследствие действия на них крови могут быть большими, для записи деформаций стенок использовался тензор Грина, который имеет вид

$$\frac{\gamma_{ij}}{2} = \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right).$$

Также применялся принцип виртуальной работы, который утверждает, что суммарная работа на внутренних деформациях равна суммарной работе внешних нагрузок.

Граничные условия на стенках

$$\bar{F}_T = -\bar{n} \left( -p_2 I + \eta (\nabla \bar{u}_2 + (\nabla \bar{u}_2)^T) \right),$$

где  $\bar{n}$  – вектор внешней нормали к границе. Сила представляет собой суммарное воздействие давления и сил вязкости на стенку. Торцы стенок жестко закреплены.



Движение сетки смоделировано с использованием сглаживания Винслоу [6]. Граничные условия задают перемещения сетки, учитывая первоначальную геометрию модели. На границах это перемещение совпадает с деформацией стенок. На входе и выходе области жидкости перемещения сетки равны нулю.

Пульсирующий поток задавался линейной скоростью крови  $u_{in}$ , амплитуда которой менялась по закону [7], представленному на рис. 1.

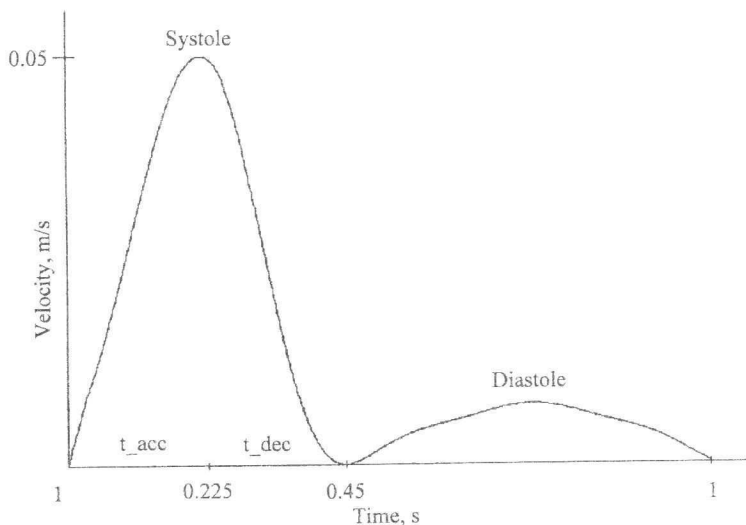


Рис. 1. Механические характеристики крови и артерии:  $\rho_2 = 1050 \text{ кг/м}^3$ ,  
 $\eta = 0.0037 \text{ Па}\cdot\text{с}$ ,  $\rho_1 = 1378 \text{ кг/м}^3$ ,  $\nu = 0.4$ ,  $E = 6 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$

### Результаты и выводы

В результате численных расчетов были получены поля скоростей движения крови, а также перемещения стенок артерий, которые представлены на рис. 2 – 4. Анализ результатов показал, что во время поздней систолы, когда скорость потока уменьшается после достижения максимума, 1) отчетливо виден вихрь, находящийся в нижней части артерии сразу же после стеноза (рис. 2); 2) наблюдается обратный ток крови над стенозом; 3) перемещение стенки артерии принимает максимальное значение в момент времени  $t = 0.33 \text{ с}$  (рис. 2), которое достигается на нижней стенке после стеноза. Более того, было получено, что максимальные значения перемещений стенок достигаются также в позднюю систолу.

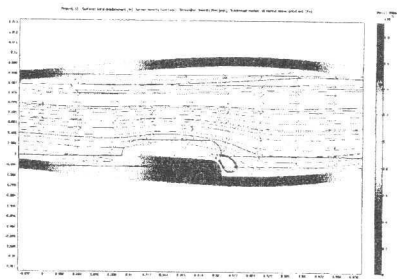


Рис. 2. Стеноз 20%, длина  $\approx 12$  мм

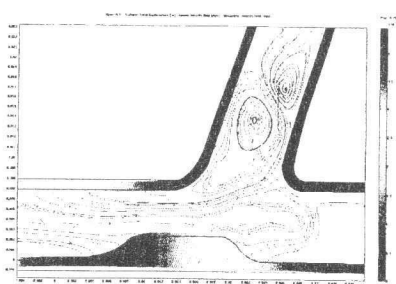


Рис. 3. Стеноз 40%, длина  $\approx 15$  мм

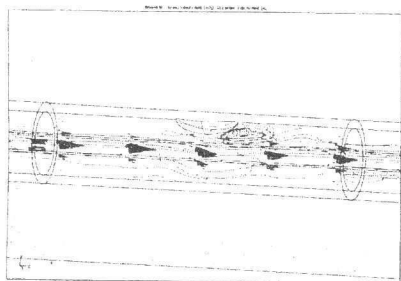


Рис. 4. Стеноз 15%, длина  $\approx 10$  мм

Аналогичные выводы можно сделать и для трехмерной модели артерии со стенозом (рис. 4): вихри появляются в потоке в позднюю систолу и в позднюю диастолу, когда скорость потока падает. Проведенное исследование позволяет отметить некоторые выводы, характерные как для двумерных, так и для трехмерных моделей:

- 1) наличие стеноза обуславливает появление вихревых зон в районе бляшки, что является патологией;
- 2) ярко выраженный обратный ток крови в районе стеноза также объясняется сужением сосуда;
- 3) максимальные значения перемещений стенок артерии достигаются в позднюю систолу;
- 4) качественные результаты численных расчетов в Comsol Multiphysics и Ansys совпадают.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пуриня Б. А., Касьянов В. А. Биомеханика крупных кровеносных сосудов человека. Рига: Зинате, 1980.
2. [www.comsol.com](http://www.comsol.com) (официальный сайт производителя Comsol Multiphysics 3.2).
3. [matlab.exponenta.ru](http://matlab.exponenta.ru) (сообщество пользователей MATLAB и Simulink).
4. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970.
5. Comsol Multiphysics 3.2 help (документация к пакету Comsol Multiphysics 3.2).
6. Иванов Д. В. Численное исследование движения крови в верхней части аорты // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 168 – 171.
7. Liu H., Yamaguchi T. Waveform Dependence of Pulsatile Flow in a Stenosed Channel // ASME J. Biomech. Eng. 2001. № 123. P. 88 – 96.

М. А. Ковырягин, А. В. Климов

### АКТИВНАЯ СХЕМА РЕГУЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМ ПОВЕДЕНИЕМ МЕХАНИЧЕСКИХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Механические деформируемые системы, в состав которых входят пластины, в том числе сложного очертания, стержни [1, 2] находятся в процессе упругого деформирования в колебательном движении. При этом возможны резонансные явления при воздействиях периодически изменяющейся нагрузкой или разрушение от приложения экстремальных импульсных, ударных нагрузок.

Дифференциальное уравнение, описывающее динамическое поведение отдельных элементов таких систем, например стержней, имеет вид [3]

$$L(w) = \rho(x)A(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ E(x)I(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] = f(x,t) \quad (1)$$

при  $-\ell/2 \leq x \leq +\ell/2, t \geq 0$ .

В уравнении (1) приняты обозначения:  $\rho(x)$  – плотность материала;  $A(x)$  – площадь поперечного сечения;  $w(x,t)$  – поперечное перемещение;  $E(x)$  – модуль Юнга (предполагается постоянным);  $I(x)$  – момент инерции площади поперечного сечения относительно нейтральной оси;  $f(x,t)$  – поперечная нагрузка.

Из физических соображений можно предположить, что перемещение  $w(x,t)$  является непрерывной дифференцируемой функцией  $x$  и  $t$ . На интервале  $[-\ell/2 \leq x \leq +\ell/2]$  функции  $\rho, A, E, I$  являются кусочно-гладкими, положительными функциями переменной  $x$ . Дополнительное предположение об однородности материала означает, что  $\rho$  и  $E$  постоянны.

Обычно рассматривается только класс слабых решений уравнения (1), удовлетворяющих следующим условиям:

а)  $w(x,t)$  – непрерывно дифференцируемая функция от  $x$  и  $t$  в  $\Omega = [-\ell/2, +\ell/2] \times [0, T]$ , то есть  $\partial w(x,t)/\partial t$  и  $\partial w(x,t)/\partial x$  – непрерывные функции от  $x$  и  $t$  в  $\Omega$ ;

б)  $\sqrt{\rho(x)A(x)}(\partial w(x,t)/\partial t)$  и  $\sqrt{E(x)I(x)}(\partial^2 w(x,t)/\partial x^2)$  – интегрируемые с квадратом функции от  $x$  в  $[-\ell/2, +\ell/2]$ , а функции энергии

$$K(t) = \frac{1}{2} \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} \rho(x)A(x) \left[ \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx, \quad (2)$$

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} E(x)I(x) \left[ \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right]^2 dx \quad (3)$$

являются непрерывными функциями от  $t$ , равномерно ограниченными в интервале  $[0, T]$  (может рассматриваться и случай  $T = +\infty$ );

в)  $w(x, t)$  удовлетворяет одному из трех приведенных ниже условий в каждой граничной точке  $x = -\ell/2, x = +\ell/2$ :

$$w(\pm \ell/2, t) = 0, \quad \frac{\partial w(\pm \ell/2, t)}{\partial x} = 0 \quad (\text{зашемленный конец}),$$

$$w(\pm \ell/2, t) = 0, \quad EI \frac{\partial^2 w(\pm \ell/2, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{свободно опертый конец}),$$

$$EI \frac{\partial^2 w(\pm \ell/2, t)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[ EI \frac{\partial^2 w(\pm \ell/2, t)}{\partial x^2} \right] = 0 \quad (\text{свободный конец});$$

г)  $w(x, t)$  удовлетворяет заданным начальным условиям вида

$$w(x, 0) = \psi(x), \quad \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = \eta(x), \quad \psi(x), \eta(x) \in C^1[-\ell/2, +\ell/2].$$

Предполагается также, что неоднородный член в уравнении (1)  $f(x, t)$  удовлетворяет какому-нибудь из следующих условий.

*Условие 1.*  $f(x, t)$  – интегрируемая с квадратом (и, следовательно, абсолютно интегрируемая) функция переменной  $t$  в интервале  $[-\ell/2, +\ell/2]$ , а

$\int_{-\ell/2}^{+\ell/2} |f(x, t)| dx$  – измеримая и равномерно ограниченная функция переменной

$t$  в интервале  $[0, T]$ . Предполагается также, что  $f(x, t)$  удовлетворяет неравенству

$$\|f(x, t)\|_{(x)}^2 = \left[ \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} |f(x, t)| dx \right]^2 \leq 1. \quad (4)$$

Заметим, что предположение типа  $\|f(x, t)\|_{(x)}^2 \leq C$  для некоторого  $C > 0$  не расширяет общности. Эти условия означают, что полная энергия стержня  $E(t) = K(t) + V(t)$  также равномерно ограничена для всех  $t \in [0, T]$ , где  $K(t)$  и  $V(t)$  определяются формулами (2) и (3) соответственно. Рассмотренный случай называется случаем распределенной нагрузки, а функция управления  $f(x, t)$ , удовлетворяющая условию (4), – *распределенным управлением*.

*Условие 2.* Предполагается, что  $f(x, t)$  имеет вид

$$f(x, t) = \sum_{i=1}^N \delta(x - \xi_i(t)) \varphi_i(t) + \sigma(x, t),$$

где  $\delta(x - \xi_i(t))$  – «перемещающаяся» вдоль координаты  $x$  дельта-функция Дирака, рассматриваемая как обобщенная функция;  $\sigma(x, t)$  – распределенное управление.

Функции  $\varphi_i(t)$  являются измеримыми функциями переменной  $t$ , удовлетворяющими условию

$$\sum_{i=1}^N |\varphi_i(t)| + \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} |\sigma(x,t)| dx \leq 1 \quad (5)$$

для всех  $t \in [0, T]$ .

Полная энергия стержня равномерно ограничена сверху некоторой константой. Если ввести в выражение (5) сосредоточенные моменты, то оно предстанет в виде

$$f(x,t) = \sum_{i=1}^N \delta(x - \xi_i(t)) \varphi_i(t) + \sum_{i=1}^N \delta'(x - \xi_i(t)) \mu_i(t) + \delta(x,t),$$

где штрих означает  $\partial/\partial x$ .

Функции  $\xi_i(t)$  измеримы, определены в области, включающей интервал  $[0, T]$ , а их область значений содержится в интервале  $[-\ell/2, +\ell/2]$ .

Для условия 2 обозначим через  $\|f(x,t)\|_{(x)}$  величину

$$\|f(x,t)\|_{(x)} = \sum |\varphi_i(t)| + \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} |\sigma(x,t)| dx.$$

Как и ранее, предположим, что  $\|f(x,t)\|_{(x)} \leq 1$ .

Первый член в левой части неравенства (10) называется *сосредоточенным управлением*. Обобщенную функцию  $f(x,t)$ , удовлетворяющую условию 1 или условию 2, называют *допустимым управлением*.

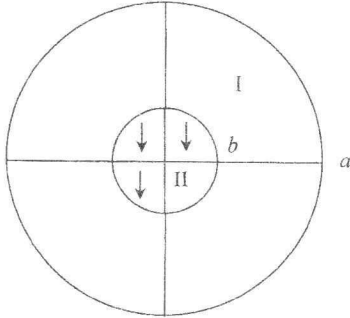
Реализация управления динамическим поведением механических упруго-деформируемых систем возможно с использованием метода «постоянного ускорения» [4, 5].

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ковырягин М. А. Регулирование напряженно-деформированного состояния и динамического поведения элементов конструкций. Саратов, 2006. 138 с.
2. Ковырягин М. А., Овчинников М. А. Управляемые конструкции (в мостостроении). Саратов, 2003. 96 с.
3. Комков В. Теория оптимального управления демпфированием колебаний простых упругих систем. М., 1975. 158 с.
4. Зылев В. Б. Вычислительные методы в нелинейной механике конструкций. М., 1999. 145 с.
5. Ковырягин М. А., Климов А. В. Явная схема исследования динамического поведения призматических стержней // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов, 2005. Вып. 7. С. 170 – 173.

## ИЗГИБ КРУГЛОЙ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ СОСТАВНОЙ ПЛИТЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НАГРУЗКИ, РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПО ВНУТРЕННЕЙ КРУГОВОЙ ПЛИТЕ

Рассмотрим круглую плиту, изготовленную из изотропного материала. Будем считать, что она изгибается под действием нормальной нагрузки, равномерно распределенной по кругу меньшего радиуса. При этом край



плиты жестко защемлен. В силу того что плита загружена таким образом, можно считать, что она состоит из двух частей. Внутреннего круга радиуса  $r = b$ , загруженного нормальной нагрузкой и внешнего кольца шириной  $(a - b)$ . Причем материалы, из которых изготовлены внутренний круг и внешнее кольцо различны. Тогда все величины, характеризующие состояние кольца, будем обозначать индексом I сверху, а величины, характеризующие состояние круга, — индексом II сверху (рисунок). Так как у нас интенсивность нормальной нагрузки  $q = \text{const}$ , то мы имеем осесимметричное загрузе- ние плиты.

Математическая модель такой задачи включает в себя уравнения [1]:

$$\nabla^2 \nabla^2 W^{\text{II}} = \frac{q}{D^{\text{II}}}, \quad (1)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 W^{\text{I}} = 0, \quad (2)$$

граничные условия: при  $r = a$   $W^{\text{I}} = W^{\text{I}'} = 0$ .

А контактные условия на контуре сопряжения плит нужно взять в виде [1]

$$\begin{aligned} \text{при } r = b \quad W^{\text{I}} &= W^{\text{II}}; \quad M_r^{\text{I}} = M_r^{\text{II}}; \\ W^{\text{I}'} &= W^{\text{II}'}; \quad N_r^{\text{I}} = N_r^{\text{II}}. \end{aligned}$$

Здесь  $W^l$  ( $l = \text{I}, \text{II}$ ) — функция прогиба,  $D^{\text{II}}$  — жесткость материала, из которого изготовлен внутренний круг;  $q$  — интенсивность нормальной нагрузки;  $M_r$  — изгибающий момент, действующий на площадке с нормалью  $r^1$ ;  $N_r$  — перерезывающая сила, действующая на той же площадке.

Так как у нас загрузе- ние осесимметричное, то уравнения (1), (2) можно проинтегрировать и получить представления для  $W^{\text{I}}$  и  $W^{\text{II}}$  [2]:

<sup>1</sup> Поскольку пластинка круглая, введем в рассмотрение полярную систему координат.

$$W^I = A^I + B^I r^2 + C^I \ln r + E^I r^2 \ln r, \quad (3)$$

$$W^{II} = A^{II} + B^{II} r^2 + C^{II} \ln r + E^{II} r^2 \ln r + \frac{qr^4}{64D^{II}}.$$

Имеем 6 условий и 8 неизвестных коэффициентов, поэтому из физических соображений ясно, что в центре прогиб и моменты не могут быть бесконечно большие  $\Rightarrow C^{II} = E^{II} = 0$ . Оставшиеся коэффициенты определим из граничных и контактных условий. Получим систему, состоящую из 6 уравнений:

$$A^I + B^I a^2 + C^I \ln a + E^I a^2 \ln a = 0,$$

$$2B^I + \frac{C^I}{a^2} + E^I(2\ln a + 1) = 0,$$

$$A^{II} + B^{II} b^2 + \frac{qb^4}{64D^{II}} = A^I + B^I b^2 + C^I \ln b + E^I b^2 \ln b,$$

$$2B^{II} + \frac{qb^2}{16D^{II}} = 2B^I + \frac{C^I}{b^2} + E^I(2\ln b + 1),$$

$$2B^{II}k(1 + \nu^{II}) + \frac{kqb^2}{16D^{II}}(3 + \nu^{II}) =$$

$$= 2B^I(1 + \nu^I) - \frac{C^I}{b^2}(1 - \nu^I) + E^I(2\ln b + 3 + \nu^I(2\ln b + 1)),$$

$$E^I = \frac{kqb^2}{8D^{II}},$$

где  $k = \frac{D^{II}}{D^I}$ , здесь  $D^I$  – жесткость материала кругового кольца,

$D^{II}$  – жесткость материала круглой плиты.

Решая эту систему аналитически, получим представления для коэффициентов, с помощью которых можно вычислить функцию прогиба по формулам (3), моменты и перерезывающие силы по формулам (4) в любой точке плиты. Выражения для моментов и перерезывающих сил в случае осесимметричного нагружения имеют следующий вид [3]:

$$M_r^l = -D^l (W^{l''} + \frac{\nu}{r} W^{l'}),$$

$$M_\theta^l = -D^l (\nu W^{l''} + \frac{1}{r} W^{l'}),$$

$$H_{r\theta} = 0,$$

$$N_r^l = -D^l (W^{l''} + \frac{1}{r} W^{l''} - \frac{1}{r^2} W^{l'}),$$

$$N_\theta = 0 \quad (l = I, II). \quad (4)$$

Результаты вычислений при  $b = 1$ ,  $a = 3$ ,  $D^I = 7.04$ ,  $D^{II} = 3.52$ ,  $\nu = 0.13$ ,  $q = 1$  приведены в таблице.

Координаты точек	$W$	$M_r$	$N_r$	$M_\theta$
(0,0)	0.080	0.240	0	0.240
(1,0)	0.053	0.040	-0.500	0.150
(1,0)	0.053	0.040	-0.500	0.290
(3,0)	0	-0.250	-0.160	-0.030

Анализ полученных результатов показывает: 1) граничные и контактные условия выполняются точно; 2) максимального значения функция прогиба достигает в центре плиты; 3) максимальным изгибающим моментом является момент  $M_\theta$ , достигающий своего максимального значения на контуре спая.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
2. Александров А. Я. Решение осесимметричных задач теории упругости при помощи аналитических функций // Докл. АН СССР. 1959. Т. 129, № 4. С. 754 – 757.
3. Беленький М. Я. Некоторые осесимметричные задачи теории упругости // Прикл. математика и механика. 1960. Т. XXIV, вып. 3. С. 582 – 584.

УДК 539.9

Л. Ю. Коссович, О. Г. Амиров

#### ПОЛЕ РЭЛЕЯ В ЗАДАЧЕ ЛЭМБА ДЛЯ ПЛАСТИНЫ\*

В данной статье рассматривается классическая задача теории упругости о распространении поверхностных волн в пластине. С помощью асимптотических методов, разработанных в [1 – 3], выводятся уравнения приближённой задачи, описывающие решение в окрестности условного фронта поверхностной волны Рэлея, и производится асимптотическое интегрирование уравнений задачи в точной постановке. Затем решения точной и приближённой задач сравниваются. Выкладки производятся для перерезывающего усилия.

Рассмотрим нестационарное напряжённо-деформированное состояние пластины, зависящее от продольной координаты  $-\infty < x < \infty$ , нормальной координаты  $-h \leq z \leq h$  ( $h$  – полутолщина пластины) и времени  $t$ . Предположим, что на её поверхностях  $z = \pm h$  действуют сосредоточенные силы.

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 06-01-00521, 06-08-00836).



Выражение напряжений через потенциальные функции:

$$\begin{cases} \sigma_{33} = \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2 h^2} \left( (1-2\kappa^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} - 2\kappa^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_2 \partial \zeta} \right), \\ \sigma_{13} = \frac{E}{2(1+\nu)h^2} \left( 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_2 \partial \zeta} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_2^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} \right), \end{cases} \quad (1)$$

где  $\sigma_{33}$  – нормальное напряжение,  $\sigma_{13}$  – касательное напряжение,  $\varphi$  – объёмный потенциал Ламе,  $\psi$  – сдвиговой потенциал Ламе.

Уравнения движения:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} - \kappa^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau_2^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau_2^2} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$\xi_2 = \frac{x}{h}, \quad \zeta = \frac{z}{h}, \quad \tau_2 = \frac{tc_2}{h}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho}}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}},$$

$$\kappa^2 = \frac{c_2^2}{c_1^2} = \frac{1-2\nu}{2-2\nu},$$

$E$ ,  $\nu$ ,  $\rho$  – модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала соответственно;  $c_1$  и  $c_2$  – скорости волн расширения и сдвига.

Граничные условия на лицевых поверхностях  $\zeta = \pm 1$ :

$$\sigma_{33} = \pm P = \pm I \delta(\xi_2) H(\tau_2), \quad \sigma_{13} = 0, \quad (3)$$

где  $P$  – сосредоточенная сила,  $I$  – амплитуда нагрузки,  $H(\tau_2)$  – функция Хевисайда,  $\delta(\xi_2)$  – функция Дирака.

Начальные условия при  $\tau_2 = 0$ :

$$\varphi = \psi = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_2} = \frac{\partial \psi}{\partial \tau_2} = 0. \quad (4)$$

Следуя методу символьного интегрирования А. И. Лурье, обозначим:

$$\partial_\xi = \frac{\partial}{\partial \xi_2}, \quad \partial_\tau = \frac{\partial}{\partial \tau_2}. \quad (5)$$

Рассмотрим большие значения времени, когда  $\tau_2 \gg 1$  (то есть когда фронты волн проходят расстояние, много большее толщины полосы):  $\tau = O(T)$ ,  $T \gg 1$ . Перейдём от операторов  $\partial_\xi, \partial_\tau$  к операторам  $\partial_y, \partial_t^*$ , выражающимся через производные по переменным  $y, t$ :

$$\xi_2 = T\xi, \quad \tau_2 = T\tau, \quad \varepsilon = \frac{1}{T} \ll 1, \quad y = \xi_2 - k_R \tau_2 = \frac{\xi - k_R \tau}{\varepsilon},$$

$$\partial_\xi = \partial_y, \quad \partial_\xi^2 = \partial_y^2, \quad (6)$$

$$\partial_\tau = -k_R \partial_y + \varepsilon \partial_\tau^*, \quad \partial_\tau^2 = k_R^2 \partial_y^2 - \varepsilon 2k_R \partial_y \partial_\tau^* + \varepsilon^2 \partial_\tau^{*2}, \quad (7)$$

где  $k_R = \frac{c_R}{c_2}$ ,  $c_R$  – скорость поверхностных волн Рэлея; коэффициент  $k_R$  является корнем известного трансцендентного уравнения:

$$(2 - k_R^2)^2 - 4\sqrt{1 - k_R^2} \sqrt{1 - \kappa^2 k_R^2}. \quad (8)$$

Операторы  $\partial_y, \partial_\tau^*$  определяются выражениями:

$$\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \partial_\tau^* = \frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (9)$$

Подставляя (6) и (7) в (1) – (3) и отбрасывая асимптотически второстепенные слагаемые, получаем уравнения:

$$\begin{cases} (1 - \kappa^2 k_R^2) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \zeta^2} = 0, \\ (1 - k_R^2) \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \zeta^2} = 0, \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad (10)$$

при следующих граничных условиях:

$$\begin{cases} \zeta = 1 & \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \tau_2^2} - k_R^2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_2^2} \right) - 2k_R B \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial \xi_2^2 \partial \zeta} = k_R B K \frac{\partial P}{\partial \xi_2}, \\ \zeta = -1 & 2k_R B \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial \xi_2^2 \partial \zeta} - \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \tau_2^2} - k_R^2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi_2^2} \right) = k_R B K \frac{\partial P}{\partial \xi_2}, \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \zeta = 1 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta} = \left( 1 - \frac{k_R^2}{2} \right) \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi_2} \right), \\ \zeta = -1 & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \zeta} = \left( 1 - \frac{k_R^2}{2} \right) \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi_2} \right), \end{cases}$$

$$K = \frac{(1 + \nu) h^2}{E}, \quad B = 2 \left[ \frac{k_R}{1 - k_R^2} + \frac{\kappa^2 k_R}{1 - \kappa^2 k_R^2} - \frac{4k_R}{2 - k_R^2} \right]^{-1},$$

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= e^{-(1-\zeta)i\sqrt{1-\kappa^2 k_R^2} \partial_{\xi}} D_1, & \varphi_2 &= e^{-(1+\zeta)i\sqrt{1-\kappa^2 k_R^2} \partial_{\xi}} D_2, \\ \psi_1 &= e^{-(1-\zeta)i\sqrt{1-k_R^2} \partial_{\xi}} D_3, & \psi_2 &= e^{-(1+\zeta)i\sqrt{1-k_R^2} \partial_{\xi}} D_4,\end{aligned}\quad (12)$$

$D_i$  ( $i=\overline{1,4}$ ) – постоянные интегрирования, определяемые из условий на лицевых поверхностях. Выражение для касательного напряжения имеет вид

$$\sigma_{13} = \frac{E}{(1+\nu)h^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \xi_2 \partial \xi} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \xi_2 \partial \xi} - \left( 1 - \frac{k_R^2}{2} \right) \left( \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi_2^2} \right) \right). \quad (13)$$

Задачи (2), (3), (4) и (10), (11) решаем с помощью метода интегральных преобразований Лапласа и Фурье. Изображения перерезывающего усилия при  $\tau_1 \rightarrow \infty$  и приближенной постановке задачи совпадают:

$$N_1^{LF} = \frac{k_R^4 B I}{\sqrt{2\pi} (1 - k_R^2) (2 - k_R^2) \left( s^2 + k_R^2 \chi^2 - 2k_R B \chi^2 e^{-2\sqrt{1-k_R^2} \chi} \right)}, \quad (14)$$

$s$  – параметр преобразования Лапласа,  $\chi$  – параметр преобразования Фурье.

Обратим изображение (14), учитывая только полюса, соответствующие первому корню уравнения Рэлея – Лэмба. Уравнение Рэлея – Лэмба имеет вид

$$\gamma^4 \frac{sh\alpha}{\alpha} ch\beta - \beta^2 \chi^2 \frac{sh\beta}{\beta} ch\alpha = 0, \quad (15)$$

здесь  $\gamma^2 = \chi^2 + \frac{1}{2}s^2$ ,  $\alpha^2 = \chi^2 + \kappa^2 s^2$ ,  $\beta^2 = \chi^2 + s^2$ .

Асимптотику первого корня уравнения (15) при  $\chi \rightarrow \infty$  возьмём в виде

$$\Omega_1 = k_R \chi - B \chi e^{\left( -2\sqrt{1-k_R^2} \chi \right)}.$$

Тогда

$$N_1 = \frac{IBk_R^4}{2\pi(1-k_R^2)(2-k_R^2)} \int_0^{\infty} \frac{1}{\Omega_1} \left( \sin(\Omega_1 \tau_2 - \chi \xi_2) + \sin(\Omega_1 \tau_2 + \chi \xi_2) \right) d\chi, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned}\Omega_1 \tau_2 - \chi \xi_2 &= \chi \left( k_R \tau_2 - \xi_2 - B \tau_2 e^{-2\sqrt{1-k_R^2} \chi} \right), \\ \Omega_1 \tau_2 + \chi \xi_2 &= \chi \left( k_R \tau_2 + \xi_2 - B \tau_2 e^{-2\sqrt{1-k_R^2} \chi} \right).\end{aligned}$$

На рис. 1, 2 представлено поведение перерезывающего усилия в окрестности условного фронта поверхностной волны Рэлея при  $\nu=0.3$ ,  $k_R^2 = 0.86$ ,  $\tau_2 = 7$ .

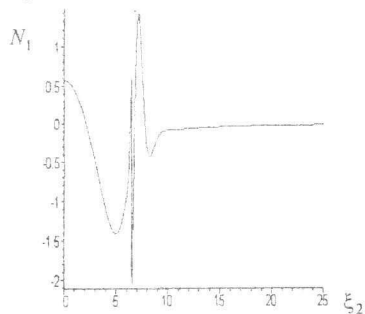


Рис. 1

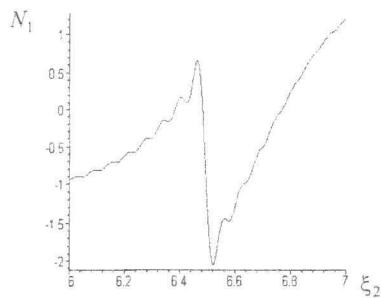


Рис. 2

Решение быстро изменяющееся, непрерывное.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Каплунов Ю. Д., Коссович Л. Ю. Асимптотическая модель для вычисления дальнего поля волны Рэлея в случае упругой полуплоскости // ДАН. 2004. Т. 395, № 4. С. 482 – 484.

2. Коссович Л. Ю., Кушечкалиев А. Н. Расщепление нестационарного НДС в задаче Лэмба для бесконечного слоя на составляющие с различными показателями изменчивости // Тр. III Всерос. конф. по теории упругости с междунар. участием. Ростов-на-Дону, Азов, 13 – 16 окт. 2003 г. Ростов н/Д, 2003. С. 232 – 234.

3. Ковалёв В. А., Коссович Л. Ю., Таранов О. В. Дальнее поле волны Рэлея для упругой полуплоскости при действии торцевой нагрузки // Изв. РАН. Сер. МТТ. 2005. № 5. С. 89 – 96.

УДК 539.3

**Н. М. Маслов, О. В. Сорокина**

#### ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ СОСТОЯНИЙ ТОНКИХ НЕОДНОРОДНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Рассматривается метод исследования нестационарных динамических состояний тонких неоднородных стержней, возбуждаемых импульсными силами со стороны торцевых сечений. Исходным является уравнение продольных колебаний общего вида

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ E(x)S(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - \rho(x)S(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

где  $E$  – модуль Юнга,  $\rho$  – плотность материала,  $S$  – площадь поперечного сечения.

Предполагается, что условия относительно перемещений и условия статического характера имеют вид соотношений

$$L\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \quad \text{при } x = 0, l.$$

Начальные условия считаются нулевыми.

Решение исходной задачи основано на использовании интегрального преобразования Фурье по временной переменной

$$U(x, \omega) = \int_0^{\infty} u(x, t) e^{-i\omega t} dt$$

и связано с интегрированием обыкновенного дифференциального уравнения в изображениях, которое названо разрешающим и имеет вид

$$\frac{U'' U(x)}{dx^2} + a(x) \frac{dU(x)}{dx} + b(x)U(x) = 0, \quad (1)$$

где  $a = \frac{1}{E(x)S(x)} \frac{d(E(x)S(x))}{dx}$ ,  $b = \frac{\rho(x)}{E(x)} \omega^2$ .

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что для уравнения общего вида (1) нельзя получить решений в квадратурах, выраженных через элементарные или специальные функции. Это обстоятельство значительно ограничивает класс задач динамики, для которых могут быть получены аналитические решения. Практически он исчерпывается задачами для стержней постоянной толщины, изготовленных из однородных материалов. Попытки расширить круг задач, для которых аналитические решения могут быть получены классическими методами, оказываются безуспешными. Сказанное, тем не менее, не исключает возможности разработки эффективных методов решения подобных задач.

В статье к решению уравнения (1) применяется метод [1], основанный на исследованиях, выполненных в [2]. Этот метод позволяет строить аналитические решения определенного класса задач о распространении волн и о колебаниях стержней с произвольными геометрическими и механическими характеристиками.

Метод построения общего решения разрешающего уравнения базируется на сведении уравнения второго порядка к системе двух уравнений первого порядка с использованием понятия матрицанта [3].

Общее решение разрешающего уравнения, построенное названным методом, определяется формулой

$$U(x) = \frac{c_1}{a_{21}(0)} m_{21}(x) + c_2 m_{22}(x).$$

Элементы  $m_{21}$ ,  $m_{22}$  матрицанта определяются соотношениями

$$m_{21} = \frac{1}{2g_{12}(0)} \sqrt{\frac{g_{12}(0)}{g_{12}(x)}} \left\{ [W_{21}(x) - W_{22}(x)] e^{-\sigma(x)} + [W_{11}(x) - W_{12}(x)] e^{\sigma(x)} \right\},$$

$$m_{22} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g_{12}(0)}{g_{12}(x)}} \left\{ [W_{21}(x) + W_{22}(x)] e^{-\sigma(x)} + [W_{11}(x) + W_{12}(x)] e^{\sigma(x)} \right\},$$

где символами  $W_{ij}$  обозначены элементы матричной функции

$$W(x) = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x).$$

Входящие в эту формулу матрицы  $B_k$  вычисляются по рекуррентным формулам

$$B_0 = E, \quad B_{k+1} = \int_0^x N(\xi) B(\xi) B_k(\xi) d\xi$$

и имеют следующую структуру

$$B_{2k} = \begin{pmatrix} b_{2k} & 0 \\ 0 & d_{2k} \end{pmatrix}, \quad B_{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & d_{2k+1} \\ b_{2k+1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$b_0 = d_0 = 1,$$

$$b_{2k+1} = \int_0^x N(\xi) b_{2k}(\xi) e^{2\sigma(\xi)} d\xi, \quad b_{2k+2} = \int_0^x N(\xi) b_{2k+1}(\xi) e^{-2\sigma(\xi)} d\xi,$$

$$d_{2k+1} = \int_0^x N(\xi) d_{2k}(\xi) e^{-2\sigma(\xi)} d\xi, \quad d_{2k+2} = \int_0^x N(\xi) d_{2k+1}(\xi) e^{2\sigma(\xi)} d\xi,$$

$$N(x) = \frac{1}{2} \frac{g'_{12}(x)}{g_{12}(x)}.$$

Параметры решения выражаются через элементы  $a_{12}, a_{21}$  матричной системы по формулам

$$g_{12} = \sqrt{a_{12}/a_{21}}, \quad g_{21} = g_{12}^{-1}, \quad \sigma(x) = \int_0^x \gamma(\xi) d\xi, \quad \gamma^2 = a_{12}a_{21}.$$

Элементы  $a_{12}, a_{21}$  связаны с коэффициентами разрешающего уравнения соотношениями

$$\frac{a'_{21}}{a_{21}} = -a(x), \quad a_{12}a_{21} = -b(x).$$

Переход в пространство оригиналов осуществляется на основе формулы обратного преобразования

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, \omega) e^{\omega t} d\omega.$$

Физическая интерпретация решения связана с представлением о волновом поле, основанном на понятии прямых и обратных локальных волн [4]. Это объясняется тем, что стержни переменной толщины, изготовленные из неоднородных материалов, представляют собой типичные интерференционные структуры с непрерывно изменяющимися геометрическими и

механическими параметрами. Деформированные состояния таких сред оказываются неоднородными, их исследование связано с решением краевых задач для уравнений с переменными коэффициентами, и разбиение волнового состояния на прямые и обратные волны в рамках линейной теории дифференциальных уравнений не происходит естественным образом, как в случае однородной среды.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Маслов Н. М. О характере волновых процессов в тонких оболочках // Тр. XVIII Междунар. конф. по теории оболочек и пластин. Саратов, 29 сент. – 4 окт. 1997 г. Саратов, 1997. Т. 1. С. 81 – 86.
2. Салий И. Н., Салий С. А., Перельмутер Г. И. Новые решения для матричных параметров нерегулярной линии передачи, Радиотехника и электроника. М., 1985. Т. XXX, вып. 8. С. 1303 – 1312.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1966.
4. Завадский В. Ю. Вычисление волновых полей в открытых областях и волноводах. М., 1972.

УДК 533.6.0116:532.529

А. А. Матутин, Г. П. Шиндяпин

### К ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНОЙ РЕФРАКЦИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Последние годы характеризуются интенсивным развитием теории взаимодействия ударных волн (УВ) в двухфазных газожидкостных средах (ГЖС). Проблема состоит в том, что скорость распространения малых возмущений ( $c_0$ ) в газожидкостных (пузырьковых) средах, может быть на порядок меньше, чем в газе, и на два порядка меньше, чем в чистой жидкости. Вследствие этого ударные волны в ГЖС возникают при сравнительно меньших скоростях звука, чем в газе или чистой жидкости. Интерес к задачам рефракции УВ обусловлен необходимостью исследования широкого класса актуальных задач, возникающих в приложениях, к которым относятся взаимодействия УВ с поверхностью океана, гидравлический удар, подводный взрыв, возникновение цунами и др.; а также сложностью и противоречивостью исследуемых явлений [1, 2].

1. При падении УВ AR (BR) (рис. 1) относительной интенсивности  $\Delta p / \rho_0 c_0^2$  ( $\Delta p$  – перепад давления,  $\rho_0, c_0$  – плотность и скорость звука в покоящейся газожидкостной среде), под углом  $\alpha$  к вертикали на свободную поверхность КА, разделяющую газовую и газожидкостную пузырьковую смеси с относительными массовыми газосодержаниями  $\gamma^+, \gamma^-$  ( $\gamma = m_{II} / m_I$ ) со стороны более плотной среды, возникают картины нерегулярной, регулярной и регулярной с ударной волной (замыкающей зону разрежения) рефракции (рис. 1, a, b, c), характеризуемые фронтами па-

дающей AR, отраженной AC (BC), преломленной AD УВ и областью разрежения AMN.

Используется локально равновесная термодинамическая модель

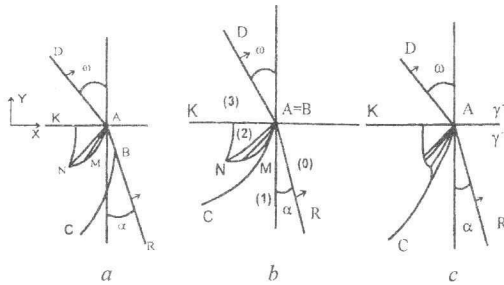


Рис. 1

термодинамическая модель ГЖС [1], позволяющая для общего случая уравнений состояния жидкой и газообразной фаз  $\rho_1 = f(p)$ ,  $p = R\rho_{II}T$  (индекс I соответствует жидкости, II – газу) записать уравнения термодинамического и калорического состояния смеси, а также формулы для адиабатической скорости звука  $c$  в виде

$$p \left[ \frac{a}{\rho} - \frac{b}{f(p)} \right] = c_V T, \quad c^2 = \frac{a+1}{a-b\rho} \frac{dp}{f(p)} \frac{p}{\rho}, \quad a = (1+\gamma)b, \quad b = \frac{c_V}{\gamma R}. \quad (1)$$

2. При исследовании рефракции УВ на свободной поверхности, разделяющей газожидкостные среды (рис. 1, b), кроме локальных условий, в точке взаимодействия A, на фронтах падающей AR, преломленной AD и отраженной AC волн, а также на свободной поверхности АК используется пространственное решение для волны разрежения AMN [1, 3]. При падении УВ относительно малой интенсивности ( $P_{10} = (p_1 - p_0)/\rho_0 c_0^2 \ll 1$ ), характерных для ГЖС пузырькового типа ( $0 \leq \gamma^- \leq 10^{-4}$ ), течение во всей области возмущения с точностью до  $P_{10}^2$  можно считать безвихревым, а следовательно, потенциальным. Вводя потенциал скорости  $\bar{W} = \nabla \Phi$  и переходя к безразмерным переменным

$$\Phi(x, y, t) = c_0^2 t f(\xi, \eta), \quad \xi = \frac{x}{c_0 t}, \quad \eta = \frac{y}{c_0 t}; \quad \frac{c}{c_0} = C^*, \quad \frac{p - p_0}{B_0} = P^*, \quad (2)$$

$$\frac{p - p_0}{\rho_0} = H, \quad \frac{u}{c_0} = f_\xi, \quad \frac{v}{c_0} = f_\eta, \quad B_0 = c_0^2 \rho_0,$$

можно свести систему уравнений динамики газожидкостной среды с уравнением состояния (1) к уравнению для потенциала  $f(\xi, \eta)$  [1,3].

Решение для центрированной волны разрежения AMN этого уравнения в переменных  $\xi - \xi_A = r \cos \theta$ ,  $\eta - \eta_A = r \sin \theta$  имеет вид ( $F_0, c = \text{const}$ )

$$\frac{u}{c_0} = \alpha \beta \sin \theta \sin \alpha (\theta + c) + \beta \cos \theta \cos \alpha (\theta + c) + \xi_A,$$

$$\frac{v}{c_0} = -\alpha \beta \cos \theta \sin \alpha (\theta + c) + \beta \sin \theta \cos \alpha (\theta + c) + \eta_A, \quad (3)$$



$$\alpha = \sqrt{(R_0 - 1)/R_0}, \quad \beta = \pm \sqrt{D/(R_0 - 1)}; \quad D = 1 + (1 - R_0)[2F_0 - (\xi_A^2 + \eta_A^2)].$$

Для случая рефракции в средах с существенно различающимися значениями скоростей звука  $c_0^+(\gamma^+)$ ,  $c_0^-(\gamma^-)$  расчеты параметров регулярной (рис. 2) рефракции  $\varepsilon_{20}$ ,  $\omega$ ,  $p_1$ ,  $\beta_k$ ,  $\delta$  при известных  $P_{10}$  или

$\varepsilon_{10} = (p_1 - p_0)/p_0$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma^+$ ,  $\gamma^-$ ;  $p_0$ ,  $T_0$  выявили ряд закономерностей процесса [1, 3]:

- границу области существования регулярной рефракции типа А (переломы и нерегулярной рефракции);
- границу типа В, соответствующую условию  $\omega = 0$ ;
- границу типа С, соответствующую верхнему предельному значению  $\gamma^-$ , при котором исчезает область разрежения.

Расчеты показывают, что относительная интенсивность преломленной волны  $\varepsilon_{30}$  весьма мала ( $\varepsilon_{20} = \varepsilon_{30} = 10^{-5} \div 10^{-3}$ ) и возрастает с ростом газосодержания  $\gamma$  до некоторого предельного значения.

3. Для случая рефракции в средах с близкими значениями  $c_0^+(\gamma^+)$ ,  $c_0^-(\gamma^-)$ , возникающего, например, на поверхности океана, разделяющей воздушную среду с  $c_0^+(\gamma^+)$  и водовоздушную ГЖС с  $c_0^-(\gamma^-)$  асимптотический анализ приводит к неожиданным результатам относительной интенсивности  $q^+$  преломленной УВ. Эта интенсивность может быть сравнима с интенсивностью падающей УВ при газосодержаниях  $\gamma^- \approx 10^{-6}$ , для относительно слабых УВ, характеризуемых малым параметром  $\bar{\varepsilon} = L_0(\gamma)\varepsilon_{10}$  ( $0 \leq L_0(\gamma) \leq 1.0$ ;  $\bar{\varepsilon} \ll 1$ ).

Вводя асимптотическое разложение для области больших градиентов (области короткой волны) [1]

$$\xi = 1 + \bar{\varepsilon}X, \quad \eta = \bar{\varepsilon}^{1/2}Y; \quad R_0/c_0t = 1 + \bar{\varepsilon}\delta, \quad \theta = \bar{\varepsilon}^{1/2}Y;$$

$$\delta = X + 1/2Y^2, \quad \frac{u}{c_0} = \bar{\varepsilon} \frac{\mu}{R_0}, \quad \frac{v}{c_0} = \bar{\varepsilon}^{3/2} \frac{\nu}{R_0}; \quad \frac{P^- P_0}{\rho_0 c_0^2} = P_{10} P^{(1)}, \quad (4)$$

$$\frac{P^- P_0}{\rho_0} = P_{10} H^{(1)}; \quad \bar{\varepsilon} = R_0 P_{10} = L_0 \varepsilon_{10},$$

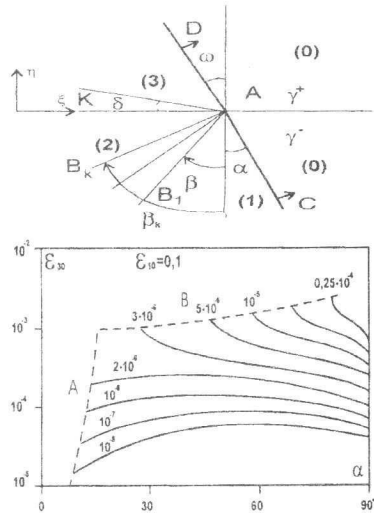


Рис. 2

получим решение (3) для волны разрежения в виде

$$\mu = -1/2z^2 + \delta_A, \quad v = 1/3z^3 - \mu Y + d, \quad z = (X - X_A)/Y, \quad (5)$$

а условие на свободной поверхности, характеризующее скорость движения точки А вдоль оси ОХ ( $N$  – скорость фронта ударной волны;  $\varepsilon^+ = (p_3 - p_0)/p_0$ ,  $\varepsilon^- = (p_1 - p_0)/p_0$ ) в виде

$$N^- / \cos \alpha = N^+ / \cos \omega, \quad N^\pm = 1 + \frac{1}{2} L_0^\pm \varepsilon^\pm. \quad (6)$$

Записывая решение (5) на переднем ( $AB_1$ ) и заднем ( $AB_k$ ) фронтах разрежения

$$\mu_1 = 1, \quad \beta_1^v = \text{tg} \beta_1 / \bar{\varepsilon}^{1/2}; \quad \mu_2 = q^+, \quad \beta_k^v = \text{tg} \beta_k / \bar{\varepsilon}^{1/2}, \quad v_2 = q^+ \omega^v, \quad \omega^v = \text{tg} \omega / \bar{\varepsilon}^{1/2},$$

получим при  $X_A = (\alpha^{v^2} + 1)/2$ ,  $\alpha^v = \text{tg} \alpha / \bar{\varepsilon}^{1/2}$ ,  $d = \alpha^{v^2} - 1/3(\alpha^{v^2} - 1)^{3/2}$  условия

$$\omega^{v^2} q^{+2} = \left[ \frac{1}{3} \left( 2(X_A - q^+) \right)^{3/2} + d \right], \quad \beta_k^v = \sqrt{2(X_A - q^+)}. \quad (7)$$

Условие (6) в обозначениях (4) примет вид

$$2c_\gamma = \left( \omega^{v^2} - \alpha^{v^2} \right) + q^+ \frac{L_0^-}{L_0^+} - 1, \quad c_\gamma = (c_0^- - c_0^+) / (c_0^- \bar{\varepsilon}). \quad (8)$$

Исключая из (7) и (8)  $\omega^{v^2}$ , получим окончательно

$$2c_\gamma = \frac{1}{q^{+2}} \left\{ \frac{1}{3} \left[ 2(X_A - q^+) \right]^{3/2} + d \right\}^2 - \alpha^{v^2} + q^+ \frac{L_0^-}{L_0^+} - 1. \quad (9)$$

Расчеты согласно (7) – (9) параметров рефракции  $q^+$ ,  $\omega$  (рис. 3) при известных  $\alpha$ ,  $\gamma^-$ ,  $\varepsilon_{10}$  выявили ряд закономерностей:

- границу области существования регулярной рефракции, типа А;
- границу Е, соответствующую переходу от регулярной рефракции, к регулярной с образованием ударной волны, замыкающей зону разрежения;
- границу типа D, на которой при  $\gamma = \gamma^*$  скорости звука в покоящихся средах  $c_0^-$ ,  $c_0^+$  совпадают ( $c_0^- = c_0^+$ ) и  $C_\gamma = 0$ ;
- границу G, на которой значение относительной интенсивности преломленной волны  $q^+$  соответствует максимальному  $q^+ = 1$ .

Расчеты показывают, что интенсивность преломленной волны  $q^+ = \varepsilon_{30} / \varepsilon_{10}$  сравнима с интенсивностью падающей волны и возрастает как при росте газосодержания среды  $\gamma^-$ , так и при увеличении угла наклона падающей волны  $\alpha$ .

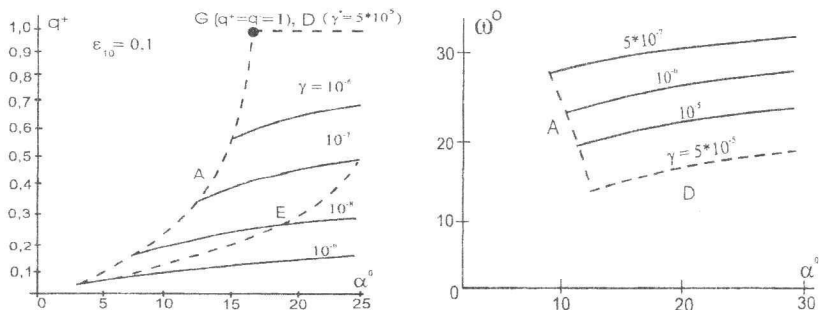


Рис. 3

В случае (рис. 3) близких значений скоростей звука  $c_0^+(\gamma^+)$ ,  $c_0^-(\gamma^-)$  ( $c_\gamma \sim O(1)$ ) в отличие от случая с существенно различающимися скоростями звука (рис. 2) интенсивность возмущений в области, занятой газом, сравнима с интенсивностью возмущений в области ГЖС и в процессе рефракции значительная часть энергии передается из газожидкостной среды в газовую.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шиндяпин Г. П. Нелинейные взаимодействия ударных волн в газах и газожидкостных средах. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1997. 104 с.
2. Кедринский В. К. Гидродинамика взрыва: эксперимент и модели. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. 435 с.
3. Шиндяпин Г. П., Маркушин А. Г. Рефракция ударной волны на свободной поверхности в газожидкостной среде с образованием волны разрежения // Аэродинамика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1991. Вып. 12 (15). С. 24 – 32.

УДК 517.958:536.2

Ю. Н. Нарар

### АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА В ЗАДАЧЕ ТЕРМОРАЗЩЕПЛЕНИЯ ГРАФИТА С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Рассмотрим процесс термического расщепления предварительно окисленного графита (ОГ), проходящий между двумя нагреваемыми пластинами пресс-формы. Ограничимся одномерным случаем, когда координата  $x$  отсчитывается по толщине слоя. Пусть первоначальная толщина слоя ОГ равна  $h_0$ , расстояние между пластинами –  $L$ .

До начала процесса в момент  $t = t_0$  слой ОГ должен нагреться до температуры термического расщепления (вспенивания) ОГ  $u_*$ . В рассматриваемом процессе выделим несколько стадий:

1) возникает фаза терморасщепленного графита (ТРГ) и начинается вспенивание, происходит свободное увеличение толщины пакета слоёв ТРГ-ОГ до момента  $t = t_1$ , когда ОГ коснется верхней пластины;

2) слой ОГ нагревается через верхнее основание вплоть до момента  $t = t_2$ ;

3) в момент  $t = t_2$  появляется второй, верхний слой ТРГ. Эта стадия характеризуется изменением плотности ТРГ вследствие того, что весь объем между пластинами занят графитом. При этом

$$\rho_{2H} = \rho_{2B} = \rho_1 \left( 1 - (1 - 1/\kappa) \frac{a}{\xi_H(t) + \xi_B(t)} \right), \quad a = \xi_H(t_2) = \frac{1 - h_0}{1 - 1/\kappa}. \quad (1)$$

Здесь  $\rho_{2H}, \rho_{2B}, \rho_1$  – плотность нижнего, верхнего слоёв ТРГ и ОГ соответственно,  $\xi_H(t), \xi_B(t)$  – толщина этих слоёв;  $\kappa = \text{const}$  ( $\kappa > 1$ ) – относительное изменение объёма при вспенивании ОГ.

Процесс завершается в момент времени  $t = t_3$ , когда границы раздела  $x = \xi_H(t)$  и  $x = 1 - \xi_B(t)$  встречаются.

Будем рассматривать последнюю стадию, для которой получаем краевую задачу нестационарной теплопроводности. Распределения температур  $u_i(x, t)$  удовлетворяют следующим уравнениям и граничным условиям (первого рода), в которые входят неизвестные положения границ  $\xi_H(t)$  и  $\xi_B(t)$ :

$$\rho_i(t) \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right), \quad i = 1, 2, 3, \quad \rho_1 \equiv 1, \quad \rho_2 = \rho_3 = \rho(t) = \rho_{2H}/\rho_1, \quad (2)$$

$$u_2(0, t) = u_3(1, t) = u_\infty > 1; \quad (3)$$

$$u_1(\xi_H(t), t) = u_2(\xi_H(t), t) = u_1(1 - \xi_B(t), t) = u_3(1 - \xi_B(t), t) = 1, \quad (4)$$

$$\left. \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \right|_{x=\xi_H(t)} = \Lambda (\dot{\xi}_H - \dot{\xi}_B), \quad \left. \left( \frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \right|_{x=1-\xi_B(t)} = \Lambda (\dot{\xi}_B + \dot{\xi}_B). \quad (5)$$

Здесь  $u$  – температура,  $k$  – коэффициент теплопроводности,  $i = 1$  для ОГ,  $i = 2, 3$  для нижнего и верхнего слоев ТРГ соответственно;  $\Lambda = \frac{\lambda}{u_* c_1 F_1}$  ( $F$  – число Фурье,  $\lambda$  – количество тепла, затрачиваемое на переход единицы массы ОГ в ТРГ),  $\dot{\xi}_r(t)$  – скорость движения всей массы ОГ.

Коэффициент теплопроводности ТРГ считаем известной функцией от его плотности:  $k_2 = k_2(\rho) = k_2^0 \cdot f(\rho)$ .

Исходя из значений теплофизических параметров ОГ и ТРГ, можно ввести малый параметр  $\varepsilon = k_2^0/k_1$ . Для одного из типовых наборов таких параметров имеем:  $k_2^0/k_1 = 0,1$ ;  $F_1 = 3,9$ ;  $F_2^0 = 51,4$ ;  $\Lambda = 0,21$ ;  $\kappa = 20$ . При этом можно положить  $F_1 \sim 1$ ,  $F_2^0 = \kappa_2/\varepsilon = \kappa_2 \cdot \varepsilon^{-1}$ ,  $\Lambda = \bar{\Lambda} \cdot \varepsilon$ .

Применим асимптотические разложения

$$\xi_H(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \cdot \xi_{Hk}(t), \quad \xi_B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \cdot \xi_{Bk}(t),$$

$$u_1(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \cdot u_{1k}(x,t), \quad u_2(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \cdot u_{2k}(x,t), \quad u_3(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \cdot u_{3k}(x,t). \quad (6)$$

Для главных членов этих разложений получим уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( f(\rho) \frac{\partial u_{20}}{\partial x} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( f(\rho) \frac{\partial u_{30}}{\partial x} \right) = 0, \quad \frac{\partial u_{10}}{\partial t} = F_1 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial x^2}, \quad (7)$$

причем  $u_{10}$  должен удовлетворять условиям

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial x} \right|_{x=\xi_H(t)} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_1}{\partial x} \right|_{x=1-\xi_B(t)} = 0. \quad (8)$$

Из первых двух уравнений (8) с учетом условий (3) находим

$$u_{20}(x,t) = 1 + \frac{(1-u_\infty)}{\xi_{H0}} x, \quad u_{30}(x,t) = u_\infty + \frac{(1-u_\infty)}{\xi_{B0}} (f(\rho) - x). \quad (9)$$

Численный эксперимент [1] показывает, что к началу третьей стадии распределение температур по координате в ТРГ становится близким к линейному, а в ОГ – близко к постоянному значению  $u = u_*$ . Поэтому можно положить  $u_1 \equiv 1$ . Тогда условия (5) примут вид

$$f(\rho) \cdot \left. \frac{\partial u_{20}}{\partial x} \right|_{x=\xi_{H0}} = \bar{\Lambda} \cdot (\dot{\xi}_{H0} - \dot{\xi}_{r0}), \quad -f(\rho) \cdot \left. \frac{\partial u_{30}}{\partial x} \right|_{x=1-\xi_{B0}} = \bar{\Lambda} \cdot (\dot{\xi}_{B0} + \dot{\xi}_{r0}). \quad (10)$$

Перепишем уравнения (10), учитывая (9),

$$f(\rho) \frac{\alpha}{\xi_{H0}} = \dot{\xi}_{H0} - \dot{\xi}_{r0}, \quad f(\rho) \frac{\alpha}{\xi_{B0}} = \dot{\xi}_{B0} + \dot{\xi}_{r0}, \quad (11)$$

здесь  $\alpha = (u_B - 1)/\bar{\Lambda}$ .

Рассмотрим случай, когда теплопроводность ТРГ линейно зависит от плотности, т.е.  $f(\rho) = 1 + \gamma(\rho - \rho_0)$ . Введем новую переменную времени  $\tilde{t} = \alpha \cdot (t - t_2)$  и обозначим  $z_1 = \xi_{H0}(t) + \xi_{B0}(t)$ ,  $z_2 = \xi_{B0}(t)$ ,  $\beta = 1 - h_0$ . Получаем систему

$$\dot{z}_1 = \frac{z_1(1+\gamma) - \gamma\beta}{z_2(z_1 - z_2)}, \quad z_2 \frac{z_1}{z_1(1+\gamma) - \gamma\beta} \frac{d}{dt} \left( z_2 - \beta \frac{z_2}{z_1} \right) = 1 \quad (12)$$

с начальными условиями

$$z_1(0) = a, \quad z_2(0) = 0. \quad (13)$$

Отсюда находим

$$z_2(z_1) = \frac{z_1}{2} - \frac{a^2}{2\kappa^2} \cdot \frac{z_1}{(z_1 - \beta)^2},$$

$$\tilde{t}(z_1) = \frac{1}{4A} \left[ \frac{z_1^2 - a^2}{2} - \frac{B}{A} \cdot (z_1 - a) + \frac{B^2}{A^2} \cdot \ln \frac{z_1 + B/A}{a + B/A} - \frac{a^4}{\kappa^4} \cdot J \right],$$

$$J = -\frac{A\beta}{3(A+1)} \cdot \left( \frac{1}{(z_1 - \beta)^3} - \frac{\kappa^3}{a^3} \right) - \left( \frac{1}{2} - \frac{(A-1)^2}{2(A+1)^2} \right) \cdot \left( \frac{1}{(z_1 - \beta)^2} - \frac{\kappa^2}{a^2} \right) -$$

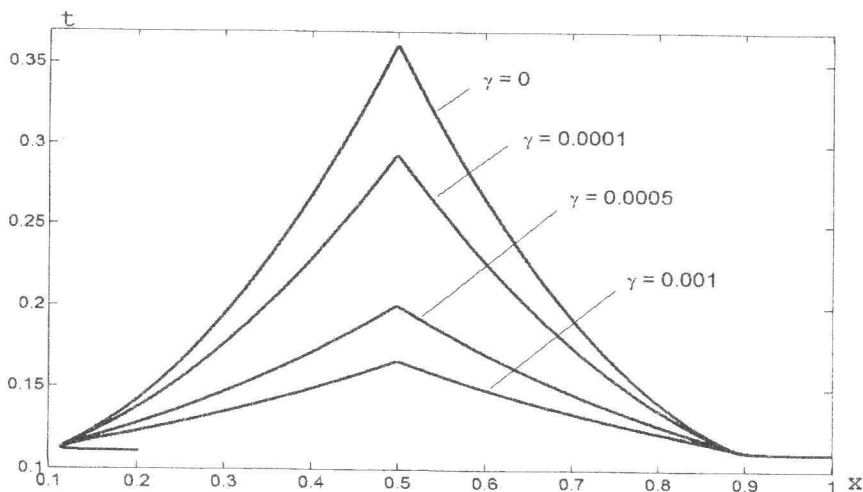
$$-\frac{A(A-1)^2}{\beta(A+1)^3} \cdot \left( \frac{1}{z_1 - \beta} - \frac{\kappa}{a} \right) - \frac{A^2(A-1)^2}{\beta^2(A+1)^4} \cdot \ln \frac{(z_1 - \beta)(a + B/A)}{(z_1 + B/A)(a - \beta)},$$

$$A = 1 + \gamma, B = \gamma\beta. \quad (14)$$

В итоге для  $\xi_{н0}(t)$  и  $\xi_{в0}(t)$  получаем параметрические задания вида

$$\begin{cases} \xi_{н0}(t) = z_1 - z_2(z_1), \\ t = \tilde{t}(z_1)/\alpha + t_2, \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_{в0}(t) = z_2(z_1), \\ t = \tilde{t}(z_1)/\alpha + t_2, \end{cases} \quad \text{где } z_1 \in [a, 1]. \quad (15)$$

По формулам (15) были построены кривые, представляющие собой движение границ раздела  $x = \xi_{н}(t)$  и  $x = \xi_{в}(t)$  с учетом найденных главных членов разложений. На рисунке приведено сравнение результатов для различных значений  $\gamma$  с результатом, полученным для случая постоянного коэффициента теплопроводности ( $\gamma = 0$ ), при  $u_{\infty}/u_* = 2$ .



1. Олышанский В. Ю., Серебряков А. В., Михайлов В. Ю. Расчет движения границ раздела компонент в одной модели тепломассопереноса при термическом расщеплении графита // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 24 – 28.

УДК 533.6.011

Е. О. Немцова

**ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ УДАРНАЯ ВОЛНА В СОПЛОВИ Течения**

Основной вопрос, который рассматривается в работе – склейка течения Мейера и несимметричного течения Томотики-Тамады на параболической ударной волне. Эта проблема в случае симметричного течения Т.-Т. исследовалась О.С. Рыжовым [1]. Основные уравнения – это уравнения К.-Ф. Строятся точные решения с ударной волной (УВ). Цель данной статьи – осуществление склейки двух различных течений на УВ. Ее форма выбирается в виде параболы 2-й степени общего вида. Для течения Мейера ( $A_1 = \text{const}$ , это ускорение газа в центре сопла):

$$u = A_1 x + \frac{A_1^2}{2} y^2, \quad v = A_1^2 xy + \frac{A_1^3}{6} y^3 \tag{1}$$

и несимметричного решения Т.-Т., полученного в аналитическом виде [2, 3], из условий на УВ

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{[v]}{[u]}, \quad \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \ddot{u} \tag{2}$$

возможны 3 случая склейки:

$$x_2 = 1/2, x_{10} = 1/5; \quad x_2 = -1/4, x_{10} = -1/4; \quad x_2 = -1/16, x_{10} = 1/32. \tag{3}$$

Результаты склейки отображены на следующих графиках (рис. 1 – 6).

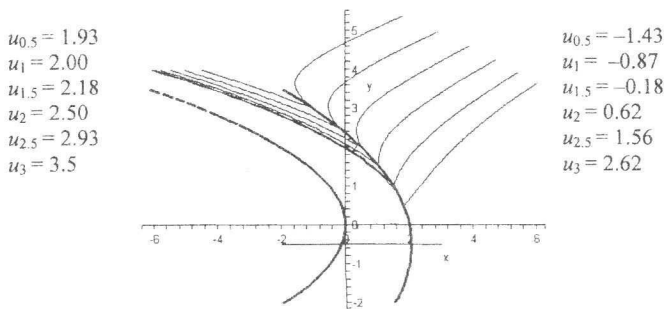
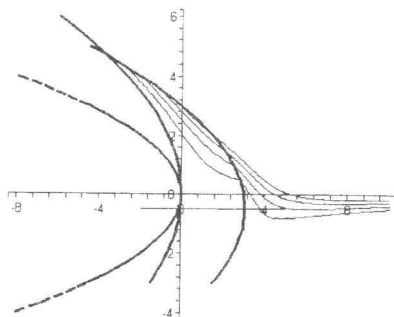


Рис. 1. Линии  $u = \text{const}$ ,  $A_1 = 1$ ,  $x_2 = -1/4$ ,  $x_{10} = -1/4$

Здесь линия  $y = -\frac{x_{10}}{2x_2}$  получена из условия  $\frac{dx}{dy} = 2x_2 y + x_{10} = 0$ .

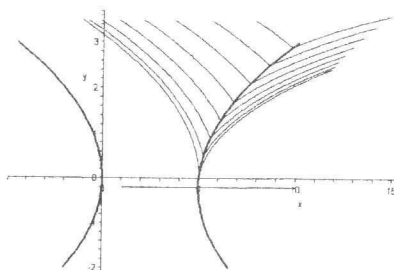
$v_{0.5} = 1.42$   
 $v_1 = 2.66$   
 $v_{1.5} = 3.65$   
 $v_2 = 4.33$



$v_{0.5} = -1.26$   
 $v_1 = -0.98$   
 $v_{1.5} = -0.71$   
 $v_2 = 0.51$

Рис. 2. Линии  $v = \text{const}$ ,  $A_1 = 1$ ,  $x_2 = -1/4$ ,  $x_{10} = -1/4$

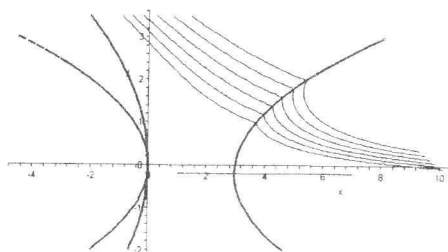
$u_{0.1} = 5.03$   
 $u_{0.5} = 5.35$   
 $u_{1.9} = 5.99$   
 $u_{1.3} = 6.95$   
 $u_{1.7} = 8.23$   
 $u_{2.1} = 9.83$   
 $u_{2.5} = 11.7$   
 $u_{2.9} = 13.9$



$u_{0.1} = 5.03$   
 $u_{0.5} = 5.35$   
 $u_{1.9} = 5.99$   
 $u_{1.3} = 6.95$   
 $u_{1.7} = 8.23$   
 $u_{2.1} = 9.83$   
 $u_{2.5} = 11.75$   
 $u_{2.9} = 13.99$

Рис. 3. Линии  $v = \text{const}$ ,  $A_1 = 1$ ,  $x_2 = 0.5$ ,  $x_{10} = 1/5$

$v_1 = 3.86$   
 $v_{1.2} = 5.04$   
 $v_{1.4} = 6.4$   
 $v_{1.6} = 8.04$   
 $v_{1.8} = 9.9$   
 $v_{2.0} = 12.1$



$v_1 = 10.49$   
 $v_{1.2} = 12.65$   
 $v_{1.4} = 14.99$   
 $v_{1.6} = 17.54$   
 $v_{1.8} = 20.33$   
 $v_{2.0} = 23.39$

Рис. 4. Линии  $v = \text{const}$ ,  $A_1 = 1$ ,  $x_2 = 0.5$ ,  $x_{10} = 1/5$



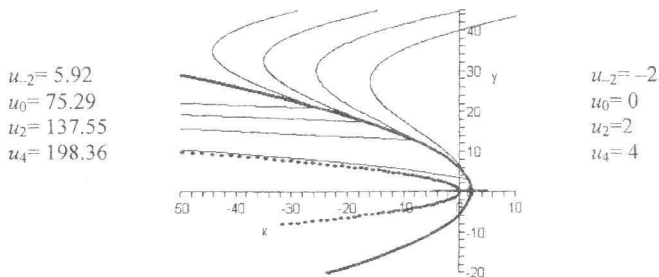


Рис. 5. Линии  $u = \text{const}$ ,  $A_1 = 1$ ,  $x_2 = -1/16$ ,  $x_{10} = 1/32$

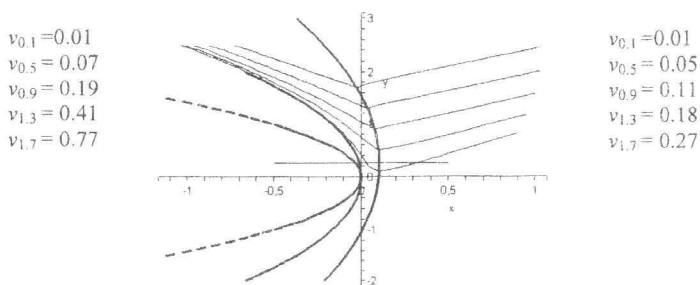


Рис. 6. Линии  $v = \text{const}$ ,  $A_1 = 1$ ,  $x_2 = -1/16$ ,  $x_{10} = 1/32$

Таким образом, в работе получено обобщение результатов Рыжова на несимметричный случай, когда требуется провести склейку симметричного и несимметричного течения.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Рыжов О. С. О работе сопел Лавала в нерасчетных режимах // Журн. вычислительной математики и математической физики. 1967. Т. 7, № 4. С. 859 – 866.
2. Немцова Е. О., Чернов И. А. Получение основных автомодельных трансзвуковых решений параметрическим методом // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 186 – 189.
3. Немцова Е. О. Параметрические решения трансзвукового уравнения и их связь с автомодельными // Лобачевские чтения – 2005: Тр. Мат. центра им. Н. И. Лобачевского. Казань: Изд-во Казан. мат. общ-ва, 2005. Т. 31. С. 110 – 113.

## ПЕРЕОРИЕНТАЦИЯ КРУГОВОЙ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ТРЕМЯ ТОЧКАМИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ УПРАВЛЕНИЯ

1. Уравнения движения центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. Космический аппарат (КА) рассматриваем как материальную точку В переменной массы  $m = m(t)$ . Движение КА рассматриваем в системе координат  $OX_1X_2X_3(X)$ , имеющей начало в центре притяжения  $O$  и координатные оси, параллельные осям инерциальной системы координат (рис. 1).

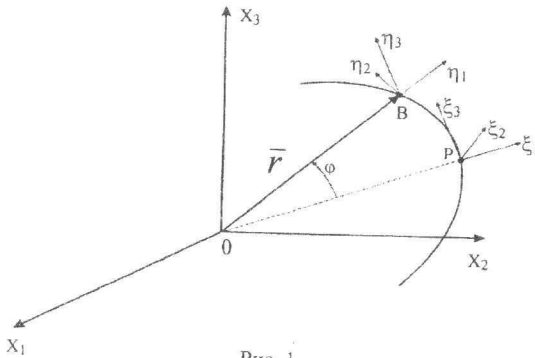


Рис. 1

Кватернионное дифференциальное уравнение ориентации круговой орбиты КА имеет вид

$$2 \frac{d\bar{\lambda}}{dt} = \bar{\lambda} \circ \bar{\omega}_\eta, \quad \bar{\omega}_\eta = p_3 \frac{r}{c} \bar{i}_1 + \frac{c}{r^2} \bar{i}_3, \quad \frac{c}{r^2} = \frac{d\varphi}{dt}, \quad (1)$$

где  $r = |\bar{r}| = \text{const}$  – модуль радиуса-вектора центра масс КА, проводимого из центра притяжения,  $p_3$  – составляющая вектора реактивного ускорения КА (управление),  $\bar{\omega}_\eta$  – ортогональная плоскости орбиты,  $\bar{\lambda} = \lambda_0 + \lambda_1 \bar{i}_1 + \lambda_2 \bar{i}_2 + \lambda_3 \bar{i}_3$  – нормированный кватернион, задающий угловое положение системы координат  $\eta$  в системе координат  $X$  (ось  $\eta_1$  направлена вдоль радиуса-вектора  $\bar{r}$ , ось  $\eta_3$  ортогональна плоскости орбиты,  $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3$  – векторные мнимые единицы Гамильтона),  $\varphi$  – истинная аномалия,  $c = \text{const}$  – постоянная площадей,  $\bar{\omega}_\eta$  – вектор абсолютной угловой скорости системы координат  $\eta$ .

Решение уравнения (1) имеет вид

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(0) \circ \left[ \cos\left(\frac{\omega}{2}t\right) + \frac{1}{\omega} \sin\left(\frac{\omega}{2}t\right) \bar{\omega}_n \right], \quad \omega = \sqrt{p_3^2 \frac{r^2}{c^2} + \frac{c^2}{r^4}}. \quad (2)$$

Кватернион  $\bar{\lambda}$  связан с кватернионом  $\bar{\Lambda}$  ориентации орбиты, характеризующим ориентацию системы координат  $\xi$ , связанной с перицентром, соотношением

$$\bar{\lambda} = \bar{\Lambda} \circ [\cos(\varphi/2) + \sin(\varphi/2) \bar{i}_3].$$

**2. Постановка задачи и её решение.** Рассмотрим перевод орбиты КА из заданного начального состояния  $\bar{\Lambda}(t_0) = \bar{\Lambda}(\varphi_0)$  в заданное конечное состояние  $\bar{\Lambda}(t^*) = \bar{\Lambda}(\varphi^*)$  с помощью управления  $p_3 = \pm p_{\max}$  при наличии трёх точек переключения управления в моменты времени  $t_1, t_2, t_3$ .

Кватернион ориентации  $\bar{\lambda}(\varphi^*)$  системы координат  $\eta$  в конечный момент времени  $t^*$  в соответствии с (2), рис. 2 и формулой сложения конечных поворотов примет вид

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}(\varphi^*) &= \bar{\Lambda}^* \circ \left\{ \cos\left[\frac{1}{2}\left(\varphi_0 + \sum_{i=1}^4 \Delta\varphi_i\right)\right] + \bar{i}_3 \sin\left[\frac{1}{2}\left(\varphi_0 + \sum_{i=1}^4 \Delta\varphi_i\right)\right] \right\} = \\ &= \bar{\lambda}(\varphi_0) \circ \Delta\bar{\lambda}_1(\Delta\varphi_1) \circ \Delta\bar{\lambda}_2(\Delta\varphi_2) \circ \Delta\bar{\lambda}_3(\Delta\varphi_3) \circ \Delta\bar{\lambda}_4(\Delta\varphi_4). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\Delta\bar{\lambda}_k(\Delta\varphi_k)$  – кватернион конечного поворота орбиты КА на  $k$ -м активном участке движения ( $k = \overline{1,4}$ ).

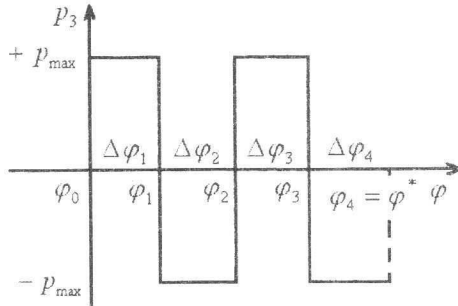


Рис. 2

Поставим следующую задачу: зная  $\varphi_0$ ,  $\bar{\Lambda}(\varphi_0)$  (или  $\bar{\lambda}(\varphi_0)$ ),  $\bar{\Lambda}^*$  найти  $\Delta\varphi_1$ ,  $\Delta\varphi_4$  и  $\varphi^*$  при условии, что

$$\omega^* \Delta\varphi_2 = \omega^* \Delta\varphi_3 = \pi, \quad \omega^* = (r^2/c)\omega. \quad (4)$$

Отметим, что поставленная задача вытекает из решения задачи оптимального (в смысле быстродействия) разворота орбиты КА с помощью принципа максимума. Это решение сводится к нахождению времени оптимального движения  $t^*(\varphi^*)$ , количества активных участков движения КА и их длительностей (величин  $\Delta\varphi_i$ ,  $i = \overline{1,2,\dots,n}$ ). Условие (4) следует из ре-

зультатов численного решения вышеуказанной задачи оптимальной переориентации орбиты КА.

После ряда преобразований уравнения (3) приходим к системе четырех трансцендентных уравнений относительно переменных  $\Delta_1, \Delta_4, \varphi^*$ :

$$\begin{aligned} \lambda_0^{(3)} \cos \frac{\varphi^*}{2} - \lambda_3^{(3)} \sin \frac{\varphi^*}{2} &= \lambda_0^{(23)} \cos \Delta_1 \cos \Delta_4 + \frac{\sin \Delta_1 \sin \Delta_4}{(\omega^*)^2} [(u^2 - 1) \lambda_0^{(23)} \mp 2u \lambda_2^{(23)}], \\ \lambda_1^{(3)} \cos \frac{\varphi^*}{2} + \lambda_2^{(3)} \sin \frac{\varphi^*}{2} &= \frac{\sin(\Delta_1 - \Delta_4)}{\omega^*} [\pm u \lambda_0^{(23)} - \lambda_2^{(23)}], \\ \lambda_2^{(3)} \cos \frac{\varphi^*}{2} - \lambda_1^{(3)} \sin \frac{\varphi^*}{2} &= \lambda_2^{(23)} \cos \Delta_1 \cos \Delta_4 + \frac{\sin \Delta_1 \sin \Delta_4}{(\omega^*)^2} [(1 - u^2) \lambda_2^{(23)} \mp 2u \lambda_0^{(23)}], \\ \lambda_3^{(3)} \cos \frac{\varphi^*}{2} + \lambda_0^{(3)} \sin \frac{\varphi^*}{2} &= \frac{\sin(\Delta_1 + \Delta_4)}{\omega^*} [\pm u \lambda_2^{(23)} + \lambda_0^{(23)}], \end{aligned} \quad (5)$$

связанных условием нормирования: суммы квадратов левых и правых частей уравнений (5) равны единице.

$$\text{Здесь } \Delta_1 = (1/2)\omega^* \Delta\varphi_1; \quad \Delta_4 = (1/2)\omega^* \Delta\varphi_4; \quad \omega^* = \left[1 + (p_3 r^3 / c^2)^2\right]^{1/2};$$

$u = \frac{r^3}{c^2} p_{\max}$ ;  $\lambda_0^{(3)}, \lambda_0^{(23)}, \lambda_2^{(23)}$  – величины, выражаемые через известные параметры задачи; верхний знак берётся, если на первом активном участке движения КА  $p_3 = +p_{\max}$ , нижний – в противном случае.

Из этой системы вытекают два уравнения относительно неизвестных  $\Delta_1, \Delta_4$ :

$$\operatorname{tg}(\Delta_1 + \Delta_4) = \mp \alpha(\varphi^*), \quad \operatorname{tg}(\Delta_1 - \Delta_4) = \mp \beta(\varphi^*), \quad (6)$$

где  $\alpha(\varphi^*), \beta(\varphi^*)$  есть сложные выражения, содержащие тригонометрические функции относительно  $\varphi^*$ . Разрешая (6), имеем

$$\Delta\varphi_1 = (1/\omega^*) (\arctg(\alpha(\varphi^*)) + \arctg(\beta(\varphi^*))) + \pi(k+n), \quad k, n \in Z, \quad (7)$$

$$\Delta\varphi_4 = (1/\omega^*) (\arctg(\alpha(\varphi^*)) - \arctg(\beta(\varphi^*))) + \pi(k-n), \quad k, n \in Z. \quad (8)$$

Из (5) получаем тригонометрическое уравнение для нахождения  $\varphi^*$ :

$$a(u) \cos^2 \frac{\varphi^*}{2} + 2b(u) \cos \frac{\varphi^*}{2} \sin \frac{\varphi^*}{2} c(u) \sin^2 \frac{\varphi^*}{2} = \frac{1}{(\omega^*)^4}, \quad (9)$$

где  $a(u), b(u), c(u)$  – полиномы относительно известных параметров задачи.

Решая уравнение (9), находим

$$\varphi^* = \gamma + \arccos \left( \frac{2/(\omega^*)^4 - (a(u) + c(u))}{\sqrt{(a(u) + c(u))^2 + 4b^2(u)}} \right) + 2\pi k, \quad k \in Z, \quad (10)$$

$$\cos \gamma = \frac{a(u) - c(u)}{\sqrt{(a(u) + c(u))^2 + 4b^2(u)}}, \quad \sin \gamma = \frac{2b(u)}{\sqrt{(a(u) + c(u))^2 + 4b^2(u)}}.$$

*Заключение.* В статье рассмотрена задача четырёхимпульсной переориентации круговой орбиты космического аппарата. Полученные формулы (7), (8), (10) дают аналитическое решение поставленной задачи.

УДК 301.15.15.0702

Я. Г. Сапунков

## ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВСТРЕЧЕЙ ДВУХ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ С УЧЕТОМ ВОЗМУЩЕНИЯ ОТ ВТОРОГО ЦЕНТРА ПРИТЯЖЕНИЯ\*

С помощью принципа максимума Понтрягина решена задача оптимального управления о встрече двух космических аппаратов (КА), один из которых управляемый, а второй неуправляемый, с учетом возмущения от второго центра притяжения. Функционал, определяющий качество процесса управления, представляет собой свертку с весовыми множителями двух критериев, определяющих время и энергию, затраченные в процессе управления. Задача решена с использованием кватернионных элементов орбиты [1].

1. Движение управляемого КА в поле гравитации центрального тела с массой  $M$  с учетом возмущения от второго центра с массой  $M_b$  в декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$ , начало которой совпадает с центральным телом, в безразмерных кватернионных элементах орбиты  $\mathbf{A}=(A_0, A_1, A_2, A_3)$ ,  $\mathbf{B}=(B_0, B_1, B_2, B_3)$  описывается системой уравнений:

$$\frac{d\mathbf{A}}{d\varphi} = -\varepsilon(\mathbf{F}_1 + \delta\mathbf{F}_2)Q \sin \varphi, \quad \frac{d\mathbf{B}}{d\varphi} = \varepsilon(\mathbf{F}_1 + \delta\mathbf{F}_2)Q \cos \varphi, \quad \frac{dt}{d\varphi} = \mathbf{u}^2(2Q)^{1/2}, \quad (1)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{p}) = \mathbf{u}^2 P(\mathbf{u})\mathbf{p} + \mathbf{w}(\mathbf{w}, P(\mathbf{u})\mathbf{p}), \quad \mathbf{F}_1 = \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{p}), \quad \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{f}),$$

$$\mathbf{f} = \frac{1}{r_b^3} \left( 3 \frac{(\mathbf{r}_b, \mathbf{r})}{r_b^2} \mathbf{r}_b - \mathbf{r} \right).$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} \cos \varphi + \mathbf{B} \sin \varphi, \quad \mathbf{w} = -\mathbf{A} \sin \varphi + \mathbf{B} \cos \varphi, \quad Q = A^2 + B^2,$$

$$P(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_0 & -u_3 & u_2 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ -u_2 & u_1 & u_0 \\ -u_3 & -u_0 & u_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = P^T(\mathbf{u})\mathbf{u}, \quad \mathbf{v} = \frac{2}{r(2Q)^{1/2}} P^T(\mathbf{u})\mathbf{w}. \quad (2)$$

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 05-01-00347).

$$|\mathbf{p}| \leq 1. \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{p}$  – безразмерный управляющий параметр, на который налагается ограничение (3),  $\mathbf{f}$  – безразмерная возмущающая сила от второго центра притяжения,  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{v}$  – безразмерные радиус вектор и вектор скорости центра масс КА,  $\mathbf{r}_b$  – безразмерный радиус вектор второго центра относительно центрального тела,  $\varphi$  – независимая переменная,  $t$  – безразмерное время.

При переходе к безразмерным переменным масштабом длины выбран радиус  $R_0$  некоторой характерной круговой орбиты КА вокруг центрального тела, если центральным телом является Земля, то масштабом длины может являться экваториальный радиус Земли  $R_3$ , масштабом времени  $(R_0^3(\gamma M)^{-1})^{1/2}$ ,  $\gamma$  – гравитационная постоянная. Для величин

$\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{w}$  масштабным множителем является  $R_0^{1/2}$ , радиус вектор  $\mathbf{r}_b$  отнесен к  $a_b$  – большой полуоси орбиты возмущающего тела, для величины  $\mathbf{p}$  масштабным множителем является максимальная величина тяги  $p^*_{\max}$ , отнесенная к единице массы КА. Малые параметры определяются соотношениями

$$\varepsilon = p^*_{\max} R_0^{-2} (\gamma M)^{-1}, \quad \delta = \varepsilon_1 \varepsilon_2^3 \varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon_1 = M_b M^{-1}, \quad \varepsilon_2 = R_0 a_b^{-1}. \quad (4)$$

Параметр  $\varepsilon$  характеризует отношение максимальной тяги к силе притяжения к центральному телу на расстоянии  $R_0$ .

Уравнения движения неуправляемого КА

$$\frac{d\mathbf{A}_a}{d\varphi_a} = -\varepsilon_1 \varepsilon_2^3 \mathbf{F}_{2a} Q_a \sin \varphi_a, \quad \frac{d\mathbf{B}_a}{d\varphi_a} = \varepsilon_1 \varepsilon_2^3 \mathbf{F}_{2a} Q_a \cos \varphi_a, \quad \frac{dt}{d\varphi_a} = u_a^2 (2Q_a)^{1/2},$$

$$\mathbf{F}_{2a} = \mathbf{u}_a^2 P(\mathbf{u}_a) \mathbf{f}_a + \mathbf{w}_a (\mathbf{w}_a, P(\mathbf{u}_a) \mathbf{f}_a), \quad \mathbf{f}_a = \frac{1}{r_b^3} \left( 3 \frac{(\mathbf{r}_b, \mathbf{r}_a)}{r_b^2} \mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a \right),$$

$$\mathbf{u}_a = \mathbf{A}_a \cos \varphi_a + \mathbf{B}_a \sin \varphi_a, \quad \mathbf{w}_a = -\mathbf{A}_a \sin \varphi_a + \mathbf{B}_a \cos \varphi_a, \quad Q_a = A_a^2 + B_a^2. \quad (5)$$

Начальное состояние управляемого КА задано соотношениями:

$$\text{при } t=0 \quad \varphi=0, \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}_0, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0, \quad (6)$$

а неуправляемого КА – соотношениями:

$$\text{при } t=0 \quad \varphi_a=0, \quad \mathbf{A}_a = \mathbf{A}_{a0}, \quad \mathbf{B}_a = \mathbf{B}_{a0}. \quad (7)$$

Связь между переменными  $\varphi_a$  и  $\varphi$  определяется уравнением

$$\frac{d\varphi_a}{d\varphi} = \frac{\mathbf{u}_a^2 Q^{1/2}}{\mathbf{u}_a^2 Q_a^{1/2}} \quad (8)$$

и начальными условиями (4) и (5).

Условие мягкой встречи аппаратов определяется соотношениями:

$$P^T(\mathbf{u}(\varphi_k)) \mathbf{u}(\varphi_k) = P^T(\mathbf{u}_a(\varphi_a(\varphi_k))) \mathbf{u}_a(\varphi_a(\varphi_k)), \quad (9)$$

$$\frac{1}{Q^{1/2}(\varphi_k)} P^T(\mathbf{u}(\varphi_k)) \mathbf{w}(\varphi_k) = \frac{1}{Q_a^{1/2}(\varphi_a(\varphi_k))} P^T(\mathbf{u}_a(\varphi_a(\varphi_k))) \mathbf{w}_a(\varphi_a(\varphi_k)), \quad (10)$$

а условие жесткой встречи – лишь соотношением (9).

Для оптимального процесса управления функционал качества

$$I = \int_0^{t_k} (\alpha_1 + \alpha_2 \varepsilon^2 p^2) dt = \int_0^{\varphi_k} (\alpha_1 + \alpha_2 \varepsilon^2 p^2) \mathbf{u}^2 (2Q)^{1/2} d\varphi \quad (11)$$

принимает минимальное значение. С помощью изменения весовых множителей  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  можно усиливать влияние одного из критериев, входящих в функционал.

2. Для решения поставленной задачи с помощью принципа максимума Понтрягина составляется функция Гамильтона – Понтрягина, составлялась система уравнений для сопряженных переменных. Оптимальное управление определялось через фазовые и сопряженные переменные из условия максимума.

В поставленной задаче оптимального управления правый конец траектории находится на подвижном многообразии, которое определяется условиями (9) и (10) или (9) в зависимости от варианта встречи. По этой причине на правом конце траектории должны выполняться соответствующие условия трансверсальности.

В результате решение задачи оптимального управления о встрече двух КА, поставленной в п. 1, сведено к решению краевой задачи для системы дифференциальных уравнений по определению фазовых и сопряженных переменных с соответствующими с граничными условиями.

3. На рис. 1 представлена в центральном поле Земли с учетом влияния Луны траектория оптимального движения управляемого КА, которая начинается в точке В, и траектория движения неуправляемого КА, начинающаяся в точке А. На рис. 2 представлена зависимость оптимального управления от времени.

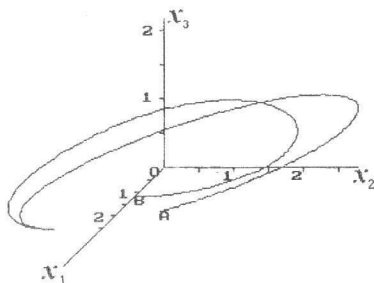


Рис. 1. Траектории полета

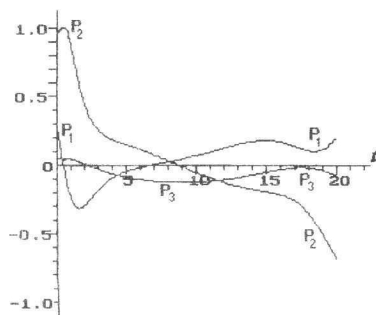


Рис. 2. Управления  $p_1, p_2, p_3$

Ниже приводятся результаты расчетов в безразмерных переменных для  $\alpha_1 = 0.2$ ,  $\alpha_2 = 40$ ,  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\delta = 0.000125$ , что соответствует влиянию Луны на движение КА вокруг Земли с радиусом орбиты  $R_0 = 38647.4$  км. В таблице представлены координаты радиуса вектора положения и вектора скорости управляемого КА в начальный момент времени (первая строка), неуправляемого КА в начальный момент времени (вторая строка), те же величины в момент мягкой встречи без учета влияния Луны (третья строка) и с учетом влияния Луны (четвертая строка).

$t$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$V_1$	$v_2$	$v_3$
0.0	1.2100	0.0	0.0	0.0	0.9091	0.0
0.0	2.3100	0.7500	0.1750	-0.1006	0.6037	0.1409
19.8683	1.9433	-0.8998	-0.2100	0.3934	0.5743	0.1340
19.8683	1.9462	-0.8964	-0.2094	0.3922	0.5745	0.1340

Для перехода к размерным переменным необходимо использовать масштабы длины  $R_0 = 38647.4$  км, времени  $T = 12034$  с = 3.3428 ч, скорости  $V = 3.2115$  км/с.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сапунков Я. Г. Оптимальные траектории и управления в задаче о встрече космических аппаратов // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2003. Вып. 5. С. 171 – 174.

УДК 629.78

Я. Г. Сапунков, А. В. Молоденков, К. А. Глазков

### ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ УГЛОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ ТВЕРДОГО ТЕЛА С УЧЕТОМ СИЛ СОПРОТИВЛЕНИЯ\*

В статье с помощью принципа максимума Понтрягина решается задача об оптимальном управлении угловым движением твердого тела с одной неподвижной точкой с учетом момента сопротивления. Приводятся результаты численного решения с учетом и без учета сопротивления краевой задачи, к которой принцип максимума сводит задачу оптимального управления.

1. Вращательное движение твердого тела с одной неподвижной точкой под действием управляющего момента  $\mathbf{M}$  и момента сил сопротивления  $-(\beta_1 + \beta_2 \|\omega\|)\omega$ , ( $\beta_i = \text{const} \geq 0$ ,  $i = 1, 2$ ) описывается системой уравнений:

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 05-01-00347).



$$\frac{d\Lambda}{dt} = \frac{1}{2}L(\Lambda)\omega, \quad \frac{d\omega}{dt} = R_0\mathbf{M} - R_1(\omega)\omega,$$

$$L(\Lambda) = \begin{vmatrix} -\Lambda_1 & -\Lambda_2 & -\Lambda_3 \\ \Lambda_0 & -\Lambda_3 & \Lambda_2 \\ \Lambda_3 & \Lambda_0 & -\Lambda_1 \\ -\Lambda_2 & \Lambda_1 & \Lambda_0 \end{vmatrix}, \quad R_0 = \begin{vmatrix} A^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & C^{-1} \end{vmatrix},$$

$$R_1(\omega) = \begin{vmatrix} A^{-1}(\beta_1 + \beta_2|\omega|) & 0 & A^{-1}(C-B)\omega_2 \\ B^{-1}(A-C)\omega_3 & B^{-1}(\beta_1 + \beta_2|\omega|) & 0 \\ 0 & C^{-1}(B-A)\omega_1 & C^{-1}(\beta_1 + \beta_2|\omega|) \end{vmatrix}, \quad (1)$$

где  $t$  – время,  $\Lambda = (\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$  – кватернион положения тела,  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  – вектор угловой скорости и его проекции на оси подвижной системы координат, оси которой совпадают с главными осями инерции для неподвижной точки тела,  $A, B, C$  – главные моменты инерции. На управляющий момент наложено ограничение

$$|\mathbf{M}| \leq M_*. \quad (2)$$

В начальный момент времени фазовое состояние определяется условиями:

$$t = 0 \quad \Lambda = \Lambda_N, \quad \omega = \omega_N. \quad (3)$$

В конечный момент времени, который заранее не задается, фазовое состояние тела задается условиями:

$$t = t_T = ? \quad \text{vect}(\Lambda(t_T) \circ \tilde{\Lambda}_T) = 0, \quad \omega = \omega_T, \quad (4)$$

где  $\Lambda_T$  – кватернион конечного положения тела.

Требуется найти оптимальное управление  $\mathbf{M} = \mathbf{M}(t)$ , удовлетворяющее ограничению (2), которое переводит управляемую систему (1) из начального состояния (3) в конечное состояние (4) и сообщает минимальное значение функционалу качества

$$I = \int_0^{t_T} (\alpha_1 + \alpha_2 |\mathbf{M}|) dt, \quad \alpha_1 \geq 0, \quad \alpha_2 \geq 0. \quad (5)$$

2. Для решения задачи с помощью принципа максимума составляет функция Гамильтона – Понтрягина с сопряженными переменными  $\mathbf{p}, \Psi$ :

$$H = -(\alpha_1 + \alpha_2 |\mathbf{M}|) + \frac{1}{2}(\mathbf{p}, L(\Lambda)\omega) + (\Psi, R_0\mathbf{M} - R_1(\omega)\omega), \quad (6)$$

$$\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2, p_3), \quad \Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3).$$

Сопряженные переменные удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{1}{2}L(\mathbf{p})\omega, \quad \frac{d\Psi}{dt} = -\frac{1}{2}L^T(\Lambda)\mathbf{p} + R_2(\omega)\Psi, \quad (7)$$

$$R_2(\omega) = \begin{pmatrix} \frac{1}{A} \left[ \beta_1 + \beta_2 \left( |\omega| + \frac{\omega_1^2}{|\omega|} \right) \right] & \frac{1}{B} \left[ (A-C)\omega_3 + \beta_2 \frac{\omega_2\omega_1}{|\omega|} \right] & \frac{1}{C} \left[ (B-A)\omega_2 + \beta_2 \frac{\omega_1\omega_3}{|\omega|} \right] \\ \frac{1}{A} \left[ (C-B)\omega_3 + \beta_2 \frac{\omega_1\omega_2}{|\omega|} \right] & \frac{1}{B} \left[ \beta_1 + \beta_2 \left( |\omega| + \frac{\omega_2^2}{|\omega|} \right) \right] & \frac{1}{C} \left[ (B-A)\omega_1 + \beta_2 \frac{\omega_2\omega_3}{|\omega|} \right] \\ \frac{1}{A} \left[ (C-B)\omega_2 + \beta_2 \frac{\omega_1\omega_3}{|\omega|} \right] & \frac{1}{B} \left[ (A-C)\omega_1 + \beta_2 \frac{\omega_2\omega_3}{|\omega|} \right] & \frac{1}{C} \left[ \beta_1 + \beta_2 \left( |\omega| + \frac{\omega_3^2}{|\omega|} \right) \right] \end{pmatrix},$$

где  $L^T(\Lambda)$  – транспонированная матрица.

Из условия максимума для функции Гамильтона – Понтрягина следует, что оптимальное управление  $\mathbf{M}_{opt}(t)$  определяется по формуле:

$$\mathbf{M}_{opt} = \frac{R_0\Psi(t)}{|R_0\Psi(t)|} M_*, \text{ если } |R_0\Psi(t)| \geq \alpha_2, \text{ иначе } \mathbf{M}_{opt} = 0. \quad (8)$$

Согласно условию (4) правый конец траектории в фазовом пространстве  $\Lambda \times \omega$  является подвижным и, следовательно, на нем должно выполняться условие трансверсальности

$$(\mathbf{p}, \Lambda_T) = 0. \quad (9)$$

Решение задачи оптимального управления сводится к решению краевой задачи для системы дифференциальных уравнений (1), (7) с учетом (8) с граничными условиями (3) при  $t = 0$ , условиями (4), (9) и условием  $H = 0$  при  $t = t_T$ .

3. Удобно ввести вместо кватернионной переменной  $\mathbf{p}$  векторную переменную  $\mathbf{v}$  с помощью соотношения

$$\mathbf{v} = L^T(\Lambda)\mathbf{p}, \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3). \quad (10)$$

Система сопряженных уравнений (7) с участием  $\mathbf{v}$  примет вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = [\omega\mathbf{v}], \quad \frac{d\Psi}{dt} = -\frac{1}{2}\mathbf{v} + R_2(\omega)\Psi, \quad (11)$$

а функция Гамильтона – Понтрягина предстанет в виде

$$H = -(\alpha_1 + \alpha_2|\mathbf{M}|) + \frac{1}{2}(\mathbf{v}, \omega) + (\Psi, R_0\mathbf{M} - R_1(\omega)\omega). \quad (12)$$

Тогда решение задачи оптимального управления сведется к решению краевой задачи для системы уравнений (1), (11) с учетом (8) с граничными условиями (3) при  $t = 0$ , условиями (4) и условием  $H = 0$  при  $t = t_T$ .

4. Для численного решения краевой задачи п. 3 с использованием ЭВМ составлена программа на языке *PASCAL*, в которой реализована комбинация метода Ньютона и градиентного метода. На рис. 1 с учетом момента сопротивления представлены графики изменения компонент кватерниона  $\Lambda$ , угловой скорости и управляющего момента. Результаты расчетов представлены в безразмерных переменных:

$$\tau = tT^{-1}, \quad \mathbf{r} = \omega T, \quad \mathbf{u} = \mathbf{M}M_*^{-1}, \quad a = AI_*^{-1}, \quad b = BI_*^{-1}, \quad c = CI_*^{-1},$$

$$\bar{\alpha}_2 = \alpha_2 M_*, \quad \bar{\beta}_1 = \beta_1 TI_*^{-1}, \quad \bar{\beta}_2 = \beta_2 I_*^{-1},$$

$$I_* = \sqrt{\frac{1}{3}(A^2 + B^2 + C^2)}, \quad T = \sqrt{\frac{I_*}{M_*}}. \quad (13)$$

Расчеты проведены для следующих исходных данных:

$\bar{\beta}_1 = 0.25, \bar{\beta}_2 = 0.125, \alpha_1 = 0.25, \bar{\alpha}_2 = 0.35, A = 1.4324, B = 0.7358, C = 0.6377;$   
 $\tau = 0, \Lambda_0 = 0.7898, \Lambda_1 = 0.2468, \Lambda_2 = -0.5528, \Lambda_3 = 0.0987, r_1 = 0.5, r_2 = 0.75,$   
 $r_3 = -0.75;$   
 $\tau = \tau_T, \Lambda_0 = 0.0, \Lambda_1 = 0.6, \Lambda_2 = 0.8, \Lambda_3 = 0.0, r_1 = 0.0, r_2 = 0.0, r_3 = 0.0.$

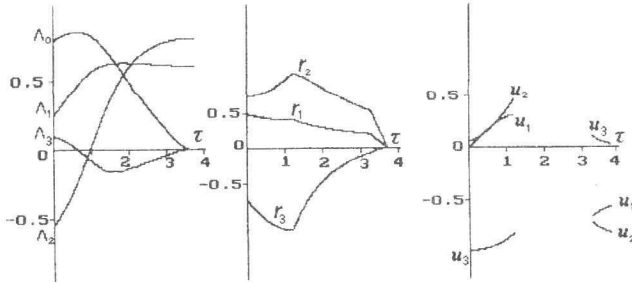


Рис. 1

Время движения  $\tau_T = 3.7249$ , интервал движения с  $\mathbf{M} = 0$   $1.1976 \leq \tau \leq 3.2669$ .

На рис. 2 для тех же исходных данных приведены результаты расчетов без момента сопротивления. В этом случае время движения  $\tau_T = 3.3682$ , интервал движения с  $\mathbf{M} = 0$   $0.5384 \leq \tau \leq 2.2954$ .

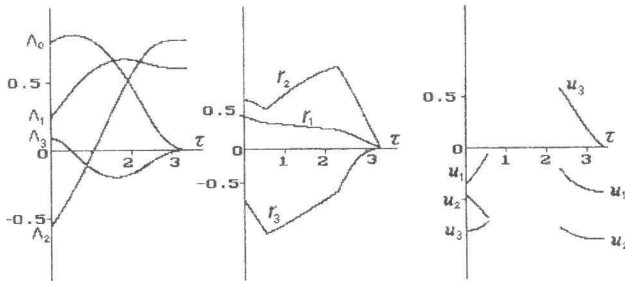


Рис. 2

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сапунов Я. Г., Молоденков А. В. Оптимальное управление угловым движением твердого тела с произвольным распределением массы // Проблемы и перспективы прецизионной механики и управления в машиностроении: Сб. тр. Междунар. конф. Саратов, 14 – 19 окт. 2002 г. ИПТМУ РАН. Саратов, 2002. С. 102 – 104.

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ИЗГИБА КОСОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОПЕРЕЧНОЙ НАГРУЗКИ

Рассмотрим тонкую изотропную пластинку в форме параллелограмма, длины сторон которого равны  $a$  и  $b$ , а толщина —  $h$  (рис. 1). Два противоположных края пластины зашпелены жестко, а на других задана любая комбинация из следующих граничных условий: жесткая заделка, свободное опирание, свободный край. На верхнюю грань пластины действует поперечная распределенная нагрузка интенсивности  $q(x, y)$ .

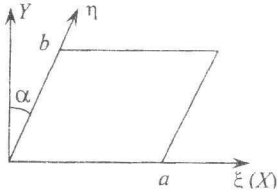


Рис. 1

Данная статья посвящена численному исследованию напряженно-деформированного состояния (НДС) такой пластинки. Подобная задача решалась П. В. Боровским, П. М. Варваком и В. Г. Пискуновым [1] с использованием метода сеток. Н. Н. Крюков [2] рассматривал задачу о

косоугольной пластинке, весь контур которой жестко зашпелен.

Для определения НДС косоугольной пластины необходимо проинтегрировать основное уравнение теории изгиба пластин

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q(x, y)}{D}$$

в области, имеющей вид параллелограмма, с граничными условиями:

$$\text{при } y=0, \quad y=b \cos \alpha \quad w=0, \quad \frac{dw}{dy} = 0;$$

при  $x = y \sin \alpha, \quad x = a + y \sin \alpha$ :

жесткая заделка	свободное опирание	свободный край
$\begin{cases} w=0 \\ \frac{dw}{dn} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} w=0 \\ M_n = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} M_n = 0 \\ N_n^* = 0 \end{cases}$

Для решения задачи перейдем к косоугольным координатам  $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$ :

$$\begin{aligned} x &= \tilde{\xi} + \tilde{\eta} \sin \alpha, \\ y &= \tilde{\eta} \cos \alpha. \end{aligned}$$

Кроме этого, введем безразмерные переменные  $\xi, \eta$  и прогиб  $W$  по формулам:

$$\tilde{\xi} = a\xi, \quad \tilde{\eta} = a c \eta, \quad w = hW.$$

Здесь  $c = b/a$  — безразмерный параметр.

Пересчитаем выражения для моментов и перерезывающих сил, а также основное уравнение теории пластин в новой системе координат:

$$\begin{aligned}
 M_x &= -\frac{D^* a^2}{\cos^2 \alpha} \left[ (\cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha) \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} - 2c \nu \sin \alpha \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} + c^2 \nu \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right], \\
 M_y &= -\frac{D^* a^2}{\cos^2 \alpha} \left[ (\nu \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} - 2c \sin \alpha \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} + c^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right], \\
 H_{xy} &= -\frac{D^* a^2}{\cos \alpha} (1 - \nu) \left[ -\sin \alpha \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + c \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} \right], \\
 N_x &= -\frac{D^* a}{\cos^2 \alpha} \left[ \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} - 2c \sin \alpha \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^2 \partial \eta} + c^2 \frac{\partial^3 W}{\partial \xi \partial \eta^2} \right], \\
 N_y &= -\frac{D^* a}{\cos^3 \alpha} \left[ -\sin \alpha \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} + c(3 - 2\cos^2 \alpha) \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^2 \partial \eta} - 3c^2 \sin \alpha \frac{\partial^3 W}{\partial \xi \partial \eta^2} + c^3 \frac{\partial^3 W}{\partial \eta^3} \right], \\
 \frac{1}{\cos^4 \alpha} \left[ \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} - 4c \sin \alpha \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^3 \partial \eta} + 2c^2(1 + 2\sin^2 \alpha) \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} - 4c^3 \sin \alpha \frac{\partial^4 W}{\partial \xi \partial \eta^3} + \right. \\
 \left. + c^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} \right] &= \frac{q}{D^*},
 \end{aligned}$$

где  $D^* = D \frac{h}{a^4}$  – приведенная жесткость пластины на изгиб.

Согласно методу сплайн-коллокации [3] примем для функции прогиба выражение  $W = \sum_{i=0}^N \varphi_i(\eta) W_i(\xi)$ . Здесь  $\varphi_i(\eta)$  – линейные комбинации  $B$ -сплайнов пятой степени, тождественно удовлетворяющие граничным условиям на краях  $\eta = 0$ ,  $\eta = b$ , а  $W_i(\xi)$  – искомые функции.

Выберем  $N+1$  точку коллокации  $\eta = \eta_j^*$  и запишем основное уравнение вдоль этих прямых. Получим систему  $N+1$  обыкновенного дифференциального уравнения 4-го порядка относительно искомых функций. Введя дополнительные неизвестные, соответствующие производным искомых функций до третьего порядка включительно, перепишем данную систему в виде  $4N+4$  уравнений 1-го порядка. Приведем систему к нормальной форме Коши. Тогда ее векторная запись примет вид

$$\begin{aligned}
 \frac{d\bar{W}}{d\xi} &= A\bar{W} + \bar{Q}, \\
 \bar{W} &= \left( W_0, W_1, \dots, W_N, \frac{dW_0}{d\xi}, \dots, \frac{dW_N}{d\xi}, \dots, \frac{d^3 W_N}{d\xi^3} \right).
 \end{aligned}$$

Добавив к этой системе уравнений граничные условия на краях  $\xi = 0$  и  $\xi = a$ , записанные в каждой точке коллокации, получим краевую задачу, которую будем решать методом ортогональной прогонки С. К. Годунова [4].

Такая методика применялась для решения задач с различными значениями углового параметра  $\alpha$  и различным соотношением сторон пластины  $C$ . В частности, была установлена зависимость максимального значения прогиба  $\frac{EW}{q}$  от угла  $\alpha$  для различных вариантов граничных условий на краях  $\xi = 0$  и  $\xi = a$  при постоянной поперечной нагрузке  $q$  в случае ромбической пластинки (рис. 2).

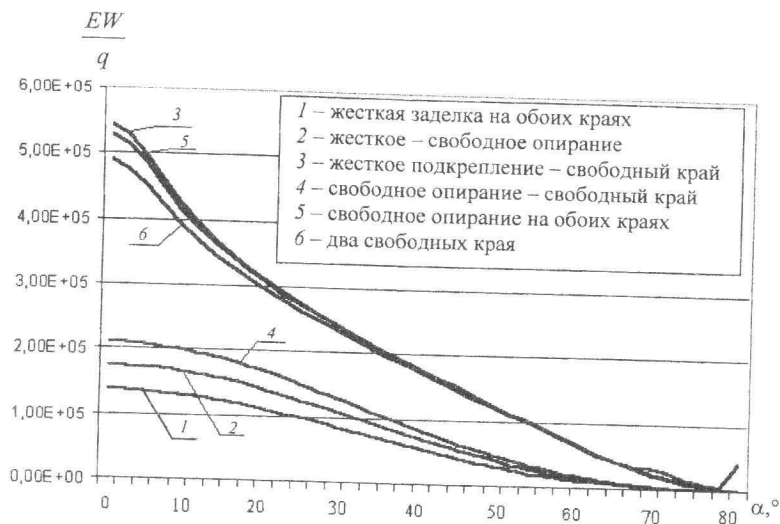


Рис. 2

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Боровский П. В., Варвак П. М., Пискунов В. Г. Изгиб и колебания параллелограммных пластинок // Тр. VI Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. Баку, 1966. М.: Наука, 1966. С. 183 – 187.
2. Крюков Н. Н. Расчет косоугольных и трапециoidalных пластин с помощью сплайн-функций // Прикладная механика. 1997. Т. 33, № 5. С. 77 – 81.
3. Григоренко Я. М., Крюков Н. Н. Решение задач теории пластин и оболочек с применением сплайн-функций (Обзор) // Прикладная механика. 1995. Т. 31, № 6. С. 3 – 27.
4. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН. 1961. Т. XVI, № 3(99). С. 171 – 174.

## УРАВНЕНИЕ ДЛЯ УГЛА НУТАЦИИ В КИНЕМАТИКЕ ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

В кинематической задаче Дарбу (G. Darboux) [1] требуется аналитически определить движение тела с неподвижной точкой (т. е. углы Эйлера  $\varphi, \psi, \theta$  как функции времени  $t$ ) по известной мгновенной угловой скорости  $\bar{\omega}(p, q, r)$  тела, где  $p(t), q(t), r(t)$  — ее известные координаты на оси связанной с телом системы  $x, y, z$ . Орт  $\bar{\zeta}^0$  неподвижной оси  $\zeta$  имеет координаты на оси  $x, y, z$ :

$$\gamma_1 = \sin\theta \sin\varphi, \quad \gamma_2 = \sin\theta \cos\varphi, \quad \gamma_3 = \cos\theta, \quad (1)$$

которые удовлетворяют линейным уравнениям Пуассона [1]:

$$\dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = -r\gamma_1 + p\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2, \quad (2)$$

имеющим квадратичный интеграл  $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ .

Функция  $\gamma_3 = \cos\theta$  описывает нутацию тела. Отделим ее из уравнений (2).

Обозначим знаком « ' » производную по безразмерному интегральному времени  $\tau$ :

$$\tau = \int_0^t \Omega dt, \quad \Omega^2 = p^2 + q^2, \quad \int_0^\infty \Omega dy = \infty. \quad (3)$$

Тогда система (2) примет вид ( $p = \Omega \cos\chi, q = \Omega \sin\chi$ ):

$$\begin{aligned} \gamma_1' &= \frac{r}{\Omega} \gamma_2 - \gamma_3 \sin\chi, & \gamma_2' &= -\frac{r}{\Omega} \gamma_1 + \gamma_3 \cos\chi, \\ \gamma_3' &= -\sin\theta \cos(\varphi + \chi) = \gamma_1 \sin\chi - \gamma_2 \cos\chi. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $\chi$  — известный угол между связанной осью  $x$  и известным вектором  $\bar{\Omega}(p, q)$  в плоскости  $x, y$ .

Дифференцируя по  $\tau$  последнее равенство в (4) и используя два другие и (1), получим:

$$\gamma_3'' = \sin\theta \sin(\varphi + \chi) \sigma - \gamma_3,$$

где введена известная функция  $\sigma$  (в которую  $r$  входит линейно):

$$\sigma(\tau) = \frac{r}{\Omega} + \chi', \quad \chi = \arctg \frac{q}{p}. \quad (5)$$

Тогда придем к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению 2-го порядка для  $\gamma_3(r)$ :

$$\gamma_3^2 + \gamma_3'^2 + \left( \frac{\gamma_3'' + \gamma_3}{\sigma} \right)^2 = 1, \quad (6)$$

т. е. в уравнениях Пуассона (2) функция  $\gamma_3 = \cos \theta$ , описывающая нутацию, отделилась. Это уравнение в [2] получено из кинематических уравнений Эйлера. Дифференцируя (6) по  $\tau$ , придем к *линейным уравнениям*:

$$\left( \frac{\gamma_3'' + \gamma_3}{\sigma} \right) = -\sigma \gamma_3'; \quad \gamma_3'' + \gamma_3 = 0. \quad (7)$$

Определив  $\gamma_3(\tau)$ , из (4) и (1) имеем

$$\theta' = \cos(\varphi + \chi) = -\frac{\gamma_3'}{\sqrt{1 - \gamma_3^2}},$$

т. е. найдем  $\varphi(\tau)$ ; используя кинематическое равенство  $\Omega^2 = \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2$ , получим

$$\psi' = \pm \frac{\gamma_3'' + \gamma_3}{|\sigma| \sqrt{1 - \gamma_3^2}},$$

откуда определим  $\psi(\tau)$ ; с помощью (3) находим закон движения тела  $\theta(t)$ ,  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$  по начальным значениям этих углов.

Обозначив переменные

$$s_1 = \gamma_3, \quad s_2 = \gamma_3', \quad s_3 = \frac{\gamma_3'' + \gamma_3}{\sigma}, \quad (8)$$

с помощью первого уравнения в (7) для них получим [2] линейную однородную систему с кососимметричной вырожденной матрицей, которая, как и (2), приводится методом Дарбу к комплексному уравнению Риккати (первого порядка) [1], [3, пример 8.50].

Из (8) и (6) следует, что в пространстве  $s_1 s_2 s_3$  изображающая точка движется по единичной сфере  $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1$ , при этом возрастанию  $s_1$  (уменьшению  $\theta$ ) соответствует  $s_2 > 0$ .

В [2] рассмотрен частный класс решений (6) – (7) при постоянной  $\sigma = \sigma_c$ . Тогда из (5) определяем  $r$  через достаточно произвольные функции  $p$  и  $q$ . В этом классе из (7) и (6) имеем общее решение [2]:

$$\begin{aligned} \gamma_3 = \cos \theta = s_1 = c_* + a \sin(k\tau + \alpha), \quad k^2 = 1 + \sigma_c^2, \\ a^2 = k^{-2} - c_*^2 / (k^2 - 1). \end{aligned} \quad (9)$$

Дадим механическую интерпретацию этого периодического решения. Вычислив  $s_3$  в (8), получим в пространстве  $s_1 s_2 s_3$  уравнение из (9)

$$\sigma_c s_1 + s_3 = \left( \sigma_c + \frac{1}{\sigma_c} \right) c_*$$

для семейства параллельных плоскостей, перпендикулярных плоскости  $s_1 s_3$  ( $c_*$  – параметр) и пересекающих единичную сферу по окружностям (рисунок). Касательная к сфере плоскость  $l$  определяет в точке касания ре-

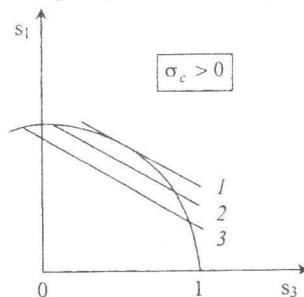


гулярную прецессию тела (на неподвижной единичной сфере в неподвижном пространстве  $\xi\eta\zeta$  апекс оси  $z$  движется по параллели; ось  $\zeta$  определяет полюс); окружность при пересечении сферы плоскостью 2 соответствует волнообразному движению апекса оси  $z$  между двумя параллелями,

так как  $\psi' = \pm \frac{s_3}{1-s_1^2}$  сохраняет знак; наконец, на окружности пересечения

сферы плоскостью 3  $s_3$  меняет знак, как и  $\psi'$ , что приводит к петлеобразному движению апекса оси  $z$  между двумя параллелями. Движение тела для данного класса ( $\sigma = \sigma_c$ ) отличается от движений в случаях Эйлера – Пуансо и Лагранжа – Пуассона ( $\sigma \neq \sigma_c$ ), так как выражается в элементарных функциях ( $\theta, \varphi, \psi$  как функции  $\tau$  элементарны).

Функции  $\theta(t)$  и  $\psi(t)$  при  $\sigma = \sigma_c$  имеют период  $T$ , если  $\Omega(t)$  имеет этот же период и  $\tau(T) = 2\pi n/k$  ( $n$  – натуральное, ). Заметим, что уравнение 2-го порядка для  $\gamma_3(t)$  можно получить из (2), дифференцируя 3-е уравнение по  $t$ , и из полученного равенства (с учетом 1-го и 2-го уравнения) и 3-го уравнения находим  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , которые подставляем в квадратичный интеграл, однако это уравнение имеет громоздкий вид по сравнению с (6).



#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961.
2. Севостьянов Г. Д. О линейности кинематической задачи Дарбу для тела с неподвижной точкой // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 195 – 198.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 2-е изд., перераб. и доп. / Пер. с нем. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961.

УДК 519.872: 519.622.2

С. М. Тиховод

### ЕЩЕ ОДИН МЕТОД ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Моделирование динамических процессов в реальных устройствах приводит к необходимости составления и численного интегрирования систем дифференциальных уравнений высокого порядка. Предлагается новый метод численного интегрирования систем линейных дифференциальных уравнений, позволяющий сократить затраты компьютерного времени.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$\alpha x' + \beta x = f(t) \quad (1)$$

в области  $t_1 \leq t \leq t_4$ .

Допустим, что производную решения (1) можно аппроксимировать полиномом степени 3:

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = p(t) = a_1 + a_2 t + a_3 t^2 + a_4 t^3. \quad (2)$$

Интервал изменения аргумента разобьем на три одинаковых отрезка длиной  $h$  точками  $t_1, t_2, t_3, t_4$ . Для аппроксимирующего полинома (2) зададим дополнительное условие, чтобы в точках  $t_k$  деления интервала изменения аргумента выполнялось условие:

$$x'(t_k) = p(t_k) \quad (k = 1, 2, 3, 4). \quad (3)$$

Если условие (3) записать для каждой точки  $t_k$ , то получим систему линейных алгебраических уравнений, если принять, что  $t_1 = 0$ . В матричной форме эта система имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & h & h^2 & h^3 \\ 1 & 2h & (2h)^2 & (3h)^3 \\ 1 & 3h & (3h)^2 & (3h)^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'(0) \\ x'(h) \\ x'(2h) \\ x'(3h) \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Пусть номер  $k$  отрезка, на которые разделен интервал изменения аргумента, совпадает с номером точки деления  $t_k$ , расположенной слева отрезка. Проинтегрируем выражение (3) на  $k$ -м отрезке.

$$x_{k+1} - x_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} p(t) dt. \quad (5)$$

Подстановка в (5) выражения (2) после интегрирования дает:

$$x_{k+1} - x_k = \frac{a_1}{1}(t_{k+1} - t_k) + \frac{a_2}{2}(t_{k+1}^2 - t_k^2) + \dots + \frac{a_N}{N}(t_{k+1}^N - t_k^N), \quad k = \overline{1, 3}. \quad (6)$$

Если уравнение (6) записать для  $k = 1, 2, 3$ , то получим систему алгебраических уравнений, которая в матричной форме имеет вид

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & & \\ & -1 & 1 & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{h}{1} & \frac{h^2}{2} & \frac{h^3}{3} & \frac{h^4}{4} \\ \frac{h}{1} & \frac{3h^2}{2} & \frac{7h^3}{3} & \frac{15h^4}{4} \\ \frac{h}{1} & \frac{5h^2}{2} & \frac{19h^3}{3} & \frac{65h^4}{4} \\ \frac{h}{1} & \frac{5h^2}{2} & \frac{19h^3}{3} & \frac{65h^4}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}. \quad (7)$$



Это значит, что, зная коэффициенты полинома и решение в опорных точках, мы можем получить решение во всех произвольных точках любого из трех отрезков в области изменения независимой переменной.

Расчеты показывают, что при  $t > 3h$  аппроксимация производной полиномом приводит к значительным осцилляциям найденной интегральной кривой между опорными точками.

Матричное уравнение, соответствующее таблице, примет вид

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{F}. \quad (10)$$

В результате решения уравнения (10) получим значения коэффициентов  $a_1, \dots, a_4$ . Следовательно, мы можем получить решение на трех отрезках в виде

$$x(t) = x_k + \frac{a_1}{1}(t - t_k) + \frac{a_2}{2}(t^2 - t_k^2) + \frac{a_3}{3}(t^3 - t_k^3) + \frac{a_4}{4}(t^4 - t_k^4),$$

$$t_k \leq t \leq t_{k+1}, \quad k = 1, 2, 3.$$

На больших интервалах изменения независимой переменной  $t \gg 3h$  решение можно получить методом прогонки. Решение систем дифференциальных уравнений производится аналогично.

Сравнение расчетов по предложенному методу и по методам Гира, Адамса – Маултона, Адамса – Башфорта [1] показало, что для системы уравнений порядка 30 скорость расчета увеличена более чем в два раза.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ортега Дж., Пулл У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986. 288 с.

УДК 539.3

Н. С. Хлопцева

### ОЦЕНКА МАТЕРИАЛОЕМКОСТИ СТЕРЖНЕЙ И КОЛЕЦ, РАБОТАЮЩИХ НА СЖАТИЕ

Весовая выгодность стержней и колец, работающих в условиях сжатия, определяется максимальным значением отношения критических сил  $P_*$  к весу стержня или кольца  $G$ . Для оценки этого отношения введем понятие удельной критической силы

$$\bar{P} = \frac{P_*}{G}. \quad (1)$$

Будем рассматривать стержни трубчатого поперечного сечения и кольца прямоугольного поперечного сечения.

Для определения  $P_*$  воспользуемся прямым энергетическим методом определения критических нагрузок. Полагая рассматриваемые объекты упругими системами, запишем условие безразличного равновесия, ко-

гда потенциальная энергия деформации  $U$  равна работе внешних сил  $A$ . Для стержня и кольца, соответственно, получим:

$$U_c = \frac{1}{2} \int_0^l D(x) [w''(x)]^2 dx; \quad U_k = \frac{1}{2} \oint D(\varphi) \chi_\varphi^2 R d\varphi, \quad \chi_\varphi = -\frac{1}{R^2} (w'' + w);$$

$$A_c = \frac{1}{2} \int_0^l p_* [w'(x)]^2 dx; \quad A_k = \frac{1}{2} \oint p_* R^2 \chi_\varphi d\varphi.$$

Условие  $U = A$  дает:

$$p_{*c} = \int_0^l D(x) [w''(x)]^2 dx / \int_0^l [w'(x)]^2 dx, \quad p_{*k} = \frac{n^2 - 1}{R^3 \pi} \oint D(\varphi) \cos^2 n\varphi d\varphi, \quad (2)$$

где  $w(x)$  – функция прогиба оси стержня,  $w = w(\varphi)$  – радиальные перемещения кольца. Тогда  $D(x) = E\pi R^3 \delta(x)$ ,  $D(\varphi) = E \frac{b}{12} \delta^3(\varphi)$ , где  $b$  – ширина кольца,  $\delta$  – толщина стенки стержня и кольца.

Из (2) можно получить  $p_* = kp_{*0}$ , где  $p_{*0}$  – критическая сила однородного стержня или кольца с жесткостью  $D = D_0$  [1], а  $k$  – поправочный коэффициент, учитывающий закон изменения жесткости и граничные условия.

Для однородного стержня критическая сила потери устойчивости при различных граничных условиях вычисляется по формулам [2]:

$$p_{*ш}^0 = (m\pi/l)^2 D_0 \text{ – для шарнирного опирания краев стержня;}$$

$$p_{*з}^0 = 4 p_{*ш}^0 \text{ – в случае заземления краев стержня;}$$

$$p_{*к}^0 = \frac{1}{4} p_{*ш}^0 \text{ – для консольного опирания.}$$

Вес однородного стержня при любых граничных условиях находится по формуле  $G_c^0 = \gamma F(\delta)l$ , где  $\gamma$  – удельный вес материала,  $F$  – площадь поперечного сечения стержня, а  $l$  – собственно длина. Для тонкостенного стержня кругового поперечного сечения толщиной  $\delta_0$  и радиусом срединной поверхности  $R$  имеем

$$G_c^0 = g\rho \int_0^l 2\pi R \delta_0 dx = g\rho 2\pi R \delta_0 l.$$

Отношение критической силы к весу (для трех граничных условий, перечисленных выше) соответственно вычисляется по формулам:

$$\bar{p}_{*ш}^0 = \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 \frac{E R^2}{\rho} \frac{1}{2}, \quad \bar{p}_{*з}^0 = 4 \bar{p}_{*ш}^0, \quad \bar{p}_{*к}^0 = \frac{1}{4} \bar{p}_{*ш}^0. \quad (3)$$

Вес неоднородного стержня для любых граничных условий будет иметь значение  $G_c^H = g\rho \int_0^l 2\pi R \delta(x) dx$ . Рассмотрены различные случаи из-

менения  $\delta(x)$ . Например, для  $\delta(x) = \delta_0(1 + a \sin \frac{\pi x}{l})$  критическая сила потери устойчивости составит  $P_*^H = kP_*^0$ , где  $k = 1 + a8/3\pi$  – для шарнирного опирания краев стержня,  $k = 1 + a56/30\pi$  – в случае защемления,  $k = 1 + a22/6\pi$  – для консольного опирания. Вес стержня в этом случае составит  $G_c^H = g\rho 2\pi R \delta_0 l \left(1 + \frac{2a}{\pi}\right)$ .

Для неоднородного стержня удельная критическая сила для трех рассматриваемых граничных условий (шарнирного опирания, защемления краев стержня и консольного опирания) соответственно составит:

$$\bar{P}_{ш}^H = \left(\frac{\pi l}{l}\right)^2 \frac{E R^2}{\rho l} 1,13, \quad \bar{P}_3^H = 3,2 \bar{P}_{ш}^H, \quad \bar{P}_к^H = 0,3 \bar{P}_{ш}^H. \quad (4)$$

Сравнивая соответствующие формулы (3) и (4) расчета удельной критической силы для каждого из трех рассмотренных видов граничных условий, приходим к выводу, что неоднородный стержень является более выгодным в весовом отношении по сравнению с однородным. Так для классических граничных условий имеем выигрыш в 1,13 раза, а в случае консольного опирания – в 1,32 раза.

Для однородного кольца критическая сила потери устойчивости вычисляется по формуле [3]

$$P_*^0 = \frac{n^2 - 1}{R^3} D_0.$$

Вес однородного кольца находится по формуле  $G_k^0 = \gamma F(\delta)b$ , где  $\gamma$  – удельный вес материала,  $F$  – площадь поперечного сечения кольца,  $b$  – ширина кольца. Для кольца прямоугольного поперечного сечения толщиной  $\delta_0$  и радиусом срединной поверхности  $R$  имеем

$$G_k^0 = g\rho 2\pi R \delta_0 b.$$

Отношение критической силы к весу вычисляется по формуле (1)

$$\bar{P}^0 = \frac{E \delta_0^2}{12\rho R^4} \frac{(n^2 - 1)}{2\pi}. \quad (5)$$

Вес неоднородного кольца будет иметь значение  $G_k^H = 2g\rho \int_0^\pi 2\pi R \delta(\varphi) b dx$ . Например, для  $\delta(\varphi) = \delta_0(1 + a \sin \varphi)$  критическая

сила потери устойчивости составит  $P_*^H = kP_*^0$ , где  $k = \frac{2 + 3a^2}{2} + \frac{6a + 1,4a^3}{\pi}$ .

Вес кольца в этом случае составит  $G_k^H = g\rho 2\pi R \delta_0 b \left(1 + \frac{2a}{\pi}\right)$ .

Для неоднородного кольца отношение критической силы к весу будет вычисляться по формуле

$$\frac{p^{-n}}{p} = p^{-n} \frac{2\pi + 3a^2\pi + 12a + 2.8a^2}{2\pi + 4a}. \quad (6)$$

Сравнивая формулы (5) и (6) для различных значений  $a$ , можно заметить, что неоднородное кольцо в весовом отношении более выгодно, чем однородное. Более точные значения для критической силы потери устойчивости неоднородного стержня и кольца можно получить из дифференциальных уравнений.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Антоненко Э. В., Хлопцева Н. С. Устойчивость неоднородных элементов оболочечных конструкций // Смешанные задачи механики деформируемого тела. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2005. С. 39 – 42.
2. Прочность. Устойчивость. Колебания: Справочник: В 3 т. М.: Машиностроение, 1968. Т. 3. 568 с.
3. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1974. 640 с.

УДК 629

Ю. Н. Челноков

### ОПТИМАЛЬНАЯ ПЕРЕОРИЕНТАЦИЯ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПОСРЕДСТВОМ РЕАКТИВНОЙ ТЯГИ, ОРТОГОНАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ ОРБИТЫ\*

Рассматривается задача оптимального управления ориентацией орбиты космического аппарата (КА) с помощью управления, ортогонального плоскости орбиты. При таком управлении орбита КА поворачивается в пространстве как неизменяемая фигура. Для решения задачи используется кватернионное дифференциальное уравнение ориентации орбиты и принцип максимума.

**1. Постановка задачи.** Требуется определить ограниченное по модулю управление  $u$ :

$$-u_{\max} \leq u \leq u_{\max} < \infty, \quad u = \pm |u|, \quad (1)$$

ортогональное плоскости орбиты космического аппарата, переводящее орбиту КА, движение центра масс которого описывается уравнениями

$$2d\lambda/dt = \lambda \circ \omega_\eta, \quad \omega_\eta = \omega_1 i_1 + \omega_2 i_2 + \omega_3 i_3 = (r/c) u i_1 + (c/r^2) i_3, \quad (2)$$

$$d\varphi/dt = c/r^2, \quad c = \text{const}, \quad r = p/(1 + e \cos\varphi), \quad (3)$$

из заданного начального состояния

$$t = t_0 = 0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \lambda(0) = \lambda^{(0)} = \Lambda^{(0)} \circ (\cos(\varphi_0/2) + i_3 \sin(\varphi_0/2)) \quad (4)$$

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00347).

в конечное состояние, принадлежащее многообразию

$$t = t_1, \quad \lambda^{(1)} = \lambda(t_1) = \Lambda^* \circ (\cos(\varphi_1/2) + \mathbf{i}_3 \sin(\varphi_1/2)), \quad (5)$$

и минимизирующее функционал

$$J = \int_0^{t_1} (\alpha_1 + \alpha_2 u^2) dt, \quad \alpha_1, \alpha_2 = \text{const} \geq 0 \quad (6)$$

или функционал

$$J = \int_0^{t_1} (\alpha_1 + \alpha_2 |u|) dt, \quad \alpha_1, \alpha_2 = \text{const} \geq 0. \quad (7)$$

При  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$  имеем задачу переориентации орбиты, оптимальную в смысле быстрогодействия.

Фигурирующая в краевых условиях кватернионная переменная  $\Lambda$  характеризует ориентацию орбиты КА. Эта переменная связана с фазовой кватернионной переменной  $\lambda$  соотношением

$$\lambda = \Lambda \circ (\cos(\varphi/2) + \mathbf{i}_3 \sin(\varphi/2)),$$

где  $\varphi$  – истинная аномалия.

В уравнениях (2), (3)  $r$  – модуль радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  центра масс КА,  $c$  – постоянная площадей,  $\lambda$  – кватернион ориентации системы координат  $\eta$ , ось  $\eta_1$  которой направлена вдоль радиуса-вектора КА, а ось  $\eta_3$  перпендикулярна плоскости орбиты,  $p$  и  $e$  – параметр и эксцентриситет орбиты. Величины  $c, p, e, \varphi_0, \Lambda^{(0)}(\lambda^{(0)})$  и  $\Lambda^*$  заданы. Подлежит определению оптимальный закон управления  $u = u(t)$  и величины  $t_1, \varphi_1$ .

Компоненты  $\Lambda_j, (j = \overline{0,3})$  кватерниона  $\Lambda$  удовлетворяют условию  $\Lambda_0^2 + \Lambda_1^2 + \Lambda_2^2 + \Lambda_3^2 = 1$ , поэтому краевое условие (5) заменим на условие

$$\text{vect} [\tilde{\lambda}(t_1) \circ \Lambda^* \circ (\cos(\varphi_1/2) + \mathbf{i}_3 \sin(\varphi_1/2))] = 0, \quad (8)$$

где верхняя волна означает сопряженный кватернион.

Из (8) получаются следующие скалярные условия на правом конце траектории:

$$\text{при } t = t_1 \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_0 \sin(\varphi/2) + a_3 \cos(\varphi/2) = 0, \quad (9)$$

или следующие условия:

$$\text{при } t = t_1 \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 + \sin(\varphi/2) = 0,$$

где  $a_j, (j = \overline{0,3})$  – компоненты кватерниона  $\mathbf{a} = \tilde{\lambda} \circ \Lambda^*$ .

**2. Законы оптимального управления.** Поставленную задачу будем решать с помощью принципа максимума. Для этого введем дополнительные переменные  $\mu$  и  $\chi$ , сопряженные по отношению к фазовым переменным  $\lambda$  и  $\varphi$ . Функция Гамильтона – Понтрягина имеет вид

$$H = -\sigma + \frac{1}{2} [(r/c)v_1 u + (c/r^2)(v_3 + 2\chi)],$$

где  $v_j, (j = \overline{0,3})$  – компоненты кватерниона  $\mathbf{v} = \tilde{\lambda} \circ \mu$ ; для функционала (6)  $\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 u^2$ , для функционала (7)  $\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 |u|$ , в случае быстрогодействия  $\sigma = 1$ .

Система уравнений для сопряженных переменных имеет вид

$$2d\mu/dt = \mu \circ \omega_\zeta^*, \quad \omega_\zeta^* = \omega_\eta = \omega_1 \mathbf{i}_1 + \omega_3 \mathbf{i}_3 = (r/c) u \mathbf{i}_1 + (c/r^2) \mathbf{i}_3, \quad (10)$$

$$d\chi/dt = [(1/r)(v_3 + 2\chi) - (r^2/(2c^2))v_1 u] dr/dt. \quad (11)$$

Уравнение (11) может быть записано в другом виде:



$$d(c\chi/r^2)/dt = d((d\phi/dt)\chi)/dt = [-1/2 [(v_1/c)u + (c/r^3)v_3] dr/dt. \quad (12)$$

Из (11) или (12) видно, что в случае круговой орбиты

$$\chi = \chi_0 = \text{const}, \quad (c/r^2)\chi = \text{const}. \quad (13)$$

Законы оптимального управления находятся из условий максимума функции  $H$  по переменной  $u$  с учетом наложенного ограничения (1) и имеют вид:

a) в случае  $\sigma \equiv 1$  (быстродействия)

$$u^0 = \begin{cases} u_{\max}, & \text{если } v_1 \geq 0, \\ -u_{\max}, & \text{если } v_1 < 0; \end{cases} \quad (14)$$

c) в случае  $\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 u^2$

$$u^0 = \begin{cases} \frac{1}{4\alpha_2} \frac{r}{c} v_1, & \text{если } \frac{1}{4\alpha_2} \frac{r}{c} |v_1| \leq u_{\max}, \\ u_{\max} \text{sign } v_1, & \text{если } \frac{1}{4\alpha_2} \frac{r}{c} |v_1| > u_{\max}; \end{cases} \quad (15)$$

c) в случае  $\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 |u|$

$$u^0 = \begin{cases} u_{\max} \text{sign } v_1, & \text{если } \frac{1}{2\alpha_2} \frac{r}{c} |v_1| - 1 > 0, \\ 0, & \text{если } \frac{1}{2\alpha_2} \frac{r}{c} |v_1| - 1 < 0, \\ \forall u \in [0, u_{\max}], & \text{если } \frac{1}{2\alpha_2} \frac{r}{c} |v_1| - 1 = 0. \end{cases} \quad (16)$$

**3. Условия трансверсальности.** Вводя неопределенные множители Лагранжа  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ , получим условия трансверсальности, соответствующие многообразию конечных состояний (5), в следующем виде:

$$\begin{aligned} \text{при } t = t_1, \quad \mu - \Lambda^* \circ \gamma = 0, \quad \gamma = \gamma_1 \mathbf{i}_1 + \gamma_2 \mathbf{i}_2 + \gamma_3 \mathbf{i}_3, \\ \chi + 1/2 \gamma_3 \cos(\phi/2) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Из (17) получаем следующие условия трансверсальности, не содержащие неопределенных множителей Лагранжа:

$$\begin{aligned} \text{при } t = t_1 \quad \Lambda_0^* \mu_0 + \Lambda_1^* \mu_1 + \Lambda_2^* \mu_2 + \Lambda_3^* \mu_3 = 0, \\ 2\chi + (\Lambda_0^* \mu_3 - \Lambda_1^* \mu_2 + \Lambda_2^* \mu_1 - \Lambda_3^* \mu_0) \cos(\phi/2) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Вместо условий (18) могут быть использованы другие формы условий трансверсальности, получаемые из (17) и имеющие вид

$$\begin{aligned} \text{при } t = t_1 \quad v_0 \cos(\phi/2) - v_3 \sin(\phi/2) = 0, \\ 2\chi + [v_3 \cos(\phi/2) + v_0 \sin(\phi/2)] \cos(\phi/2) = 0 \end{aligned}$$

или

$$\text{при } t = t_1 \quad 2\chi + v_3 = 0, \quad v_0 \cos(\phi/2) + 2\chi \sin(\phi/2) = 0.$$

**4. Анализ задачи.** Задача сведена к краевой задаче с подвижным правым концом траектории, описываемой системой нелинейных дифференциальных уравнений (2), (3) (14) (или (15), или (16)), (10), (11) десятого

порядка и восемью краевыми условиями (4), (9), которые необходимо дополнить двумя условиями трансверсальности (18) и равенством

$$H^0|_{t_1} = H(\lambda, \mu, \chi, u^0)|_{t_1} = 0,$$

имеющим место для оптимального управления  $u^0$  и оптимальной траектории.

Уравнения задачи имеют интегралы

$$\|\lambda\|^2 = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \|\lambda(0)\|^2 = 1,$$

$$\|\mu\|^2 = \mu_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 = \|\mu(0)\|^2 = \text{const},$$

$$H(\lambda, \mu, \chi, u^0) = 0,$$

$$\mu \circ \tilde{\lambda} = \mathbf{v}^* = v_0^* + v_1^* \mathbf{i}_1 + v_2^* \mathbf{i}_2 + v_3^* \mathbf{i}_3 = \text{const},$$

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = \mathbf{v}_v^2 = \mathbf{v}_v^{*2} = \text{const}, \quad \mathbf{v}_v = \text{vect}(\tilde{\lambda} \circ \mu).$$

В случае круговой орбиты уравнения задачи имеют также первый интеграл (13).

Учет первых интегралов и использование в качестве новых переменных компонент  $v_k$ , ( $k = 1, 2, 3$ ) кватерниона  $\mathbf{v} = \tilde{\lambda} \circ \mu$  позволяют понизить порядок полученной системы дифференциальных уравнений краевой задачи (без ее усложнения) на 6 единиц и привести ее к уравнениям

$$dv_1/dt = (c/r^2)v_2,$$

$$dv_2/dt = -(c/r^2)v_1 + (r/c)v_3 u, \quad dv_3/dt = -(r/c)v_2 u,$$

дополняемым уравнением (11). В случае круговой орбиты уравнение (11) заменяется первым интегралом (13), и размерность краевой задачи понижается еще на единицу.

УДК 533.6.011

И. А. Чернов

## ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТРАНСЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

Получены новые законы сохранения и, в частности, для автомодельного течения, описывающего картину дальнего поля при обтекании тела звуковым потоком.

Система трансзвуковых К-Ф-уравнений в осесимметричном случае с использованием цилиндрических координат  $(x, y)$  имеет вид

$$u u_x = v_y + v/y, \quad u_y = v_x. \quad (1)$$

Здесь  $(u, v)$  – приведенные компоненты скорости возмущения однородного звукового потока. Если ввести вместо  $v$  величину,  $w = uv$ , то (1) примет вид

$$u u u_x = w_y, \quad u u_y = w_x. \quad (2)$$

Назовем законом сохранения (ЗС) для системы (2) пару функций  $\{\xi(x,y,u(x,y),v(x,y)), \eta(x,y,u(x,y),v(x,y))\}$ , для которых выполняется соотношение

$$\partial \xi / \partial x = \partial \eta \quad (3)$$

вдоль любого решения  $\{u(x,y), v(x,y)\}$  системы (2). Это равенство означает существование функции  $D(x,y)$ , для которой  $dD = \eta dx + \xi dy$ .

Известны (П. Жермен) два закона сохранения: 1) массы и 2) продольной составляющей количества движения:

$$\{\xi_1 = yu^2/2, \dots, \eta_1 = w\}, \dots, \{\xi_2 = yu^2 + 2w^3/y^2, \dots, \eta_2 = 2uw\}. \quad (4)$$

Они были найдены [1] как асимптотические трансзвуковые приближения основных законов сохранения, положенных в основу газовой динамики.

Ограничимся поиском новых ЗС вида

$$\{\xi(u(x,y),v(x,y)), \eta(u(x,y),v(x,y))\}. \quad (5)$$

Подставим (5) в (3) и, используя (2), получим

$$(\xi_u - \eta_w v) u_x + (\xi_w - \eta_u) u_y = 0, \quad (6)$$

что выполняется с любой функцией  $u(x,y)$ . Отсюда получим систему, определяющую ЗС:

$$\xi_u = u \eta_w, \quad u \xi_w = \eta_u. \quad (7)$$

Приведение (2) к виду (3) осуществляется умножением 1-го уравнения из (2) на  $\eta_w$ , 2-го – на  $\xi_w$  и суммированием.

Система (7) совпадает с годографическими уравнениями, эквивалентными (2), для обратных функций  $\{x = x(u,w), y = y(u,w)\}$ :

$$x_u = u y u_w, \quad y x_w = y_u.$$

Данное совпадение допускает такую интерпретацию: любое решение К-Ф-уравнений (1) можно трактовать: 1) как некоторое конкретное течение, 2) как закон сохранения для системы (2). Подобное свойство присуще К-Ф-уравнениям и в случае плоско-параллельных течений [1]. Нахождение ЗС для течения Мейера в плоском сопле посвящена работа [2].

Изученными точными решениями К-Ф-уравнений являются автомодельные вида

$$u = y^{2n-2} U(\zeta), \quad v = y^{3n-3} V(\zeta), \quad w = y^{3n-2} W(\zeta), \quad \zeta = xy^{-n}. \quad (8)$$

Годографическое представление их таково

$$x = w^{1-m} X(z), \quad y = w^{(2-3m)/2} Y(z), \quad z = u/w^m, \quad m = 2(n-1)/(3n-2). \quad (9)$$

Известно (Л. И. Седов – задача о сильном взрыве, П. Жермен [1]), что наличие закона сохранения обеспечивает квадратуру для ОДУ, описывающего автомодельные течения, и определяет показатель автомодельности. Этот факт можно выразить так: с автомодельным ЗС связано некоторое ассоциированное с ним автомодельное течение. В плоском случае по-

казатель  $n$  закона сохранения и показатель  $n_1$  ассоциированного с ним автомодельного течения связаны формулой  $nn_1=1$  [1]. В осесимметричном случае эта связь оказывается такой:  $nn_1=2/3$ .

Приведем список автомодельных решений, полученных автором [3]. Частично они опубликованы в [4]. Заметим, что решения группируются по два в соответствии со связью  $nn_1=2/3$ . Каждое из решений представляет некоторый ЗС для системы (1). Эти решения удобно записывать в переменных фазовой плоскости  $(s, t)$ :

$$t = U / \zeta^2, \quad \tau = V / \zeta^3, \quad s = (\tau + nt) / (3n - 2).$$

Список точных решений для системы (1)

- |                                     |   |                  |                   |
|-------------------------------------|---|------------------|-------------------|
| 1.a) $n = 1$ :                      | $s = t$ ;   | 1.b) $n = 2/3$ : | $\tau = -2/3$ ;   |
| 2.a,b)                              | $n = 1 \pm 3^{1/2}/3$ ;   |                  | $s = t - 4/9$ ;   |
| 3.a) $n = 4/3$ :                    | $s = 2t/3 + t^2/8$ ;  | 3.b) $n = 1/2$ : | $s = -t + 2t^2$ ; |
| 4.a,b) $n = 4/3 \pm (10)^{1/2}/3$ : | $s = (11/81)(-1 + 3t) + 7t^2/36 \pm 10^{1/2}(2/81(-1+3t) - t^2/18)$ ; |                  |                   |
| 5.a) $n = 4$ :                      | $s = 4(16 + 3t)/25 \pm 2(13)^{1/2}(t - 16)(1/3 + t/24)^{1/2}/25$ ;    |                  |                   |
| 5.b) $n = 1/6$ :                    | $s = (16 + 3t)/81 \pm 4(13)^{1/2}(t - 2/3)(1/3 + t)^{1/2}/27$ ;       |                  |                   |
| 6.a) $n = 2$ :                      | $s = (4 + 5t)/8 \pm (-4 + t)(1 + t)^{1/2}/8$ ;                        |                  |                   |
| 6.b) $n = 1/3$ :                    | $s = 2/9 \pm (-2 + 3t)(1 + 6t)^{1/2}/9$ ;                             |                  |                   |
| 7.a) $n = 7/6$ :                    | $s = 7(-49 + 135t)/729 \pm (343/729)(1 - 36t/49)^{3/2}$ ;             |                  |                   |
| 7.b) $n = 4/7$ :                    | $s = -28/9 + 5t \pm 28(1 - 3t/2)^{3/2}/9$ .                           |                  |                   |

Решение 6.b) определяет ЗС для осесимметричного соплового течения Мейера, решение 7.a) – для дальнего поля при обтекании тела звуковым потоком.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Germain P. Ecoulements Transsoniques Homogenes // Progress in Aeronautical Sciences. 1964. Vol. 5. P. 143 – 273.
2. Чернов И. А. Законы сохранения для трансзвуковых течений // Аэродинамика: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1978. Вып. 6(9). С. 10 – 17.
3. Чернов И. А. Автомодельные решения в околосзвуковой газовой динамике: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 1964. 146 с.
4. Фалькович С. В., Чернов И. А. Обтекание тел вращения звуковым потоком газа // ПММ. 1964. Т. 28, вып. 2. С. 280 – 284.

## СОДЕРЖАНИЕ

### СЕКЦИЯ МАТЕМАТИКИ

АКИМОВА С. А. Конкретная характеристика универсальных упорядоченных автоматов .....	3
АМЕЛИН Р. В. Проблема правовой оценки уничтожения файлов в современном уголовном законодательстве .....	6
БАННИКОВ К. В. Теория и практика создания программных продуктов .....	10
БЕЙКЕР Р., БЕЛГОРОДСКИЙ А. В. О применении эмпирического байесовского подхода к проблеме формирования портфеля ценных бумаг .....	13
БРЕДИХИН Д. А. О многообразии полугрупп бинарных отношений с операцией прямоугольного замыкания .....	17
БРЭГМАН Л. М., БРЭГМАН Т. Т., ФОКИН И. Н. Мультипликативное представление стратегий в комбинаторных матричных играх .....	19
БУТЕРИН С. А. Об обратной задаче для невольтерровых интегро-дифференциальных уравнений .....	22
ВАСЮКОВ Р. Р. Меры ортогональности для ортонормальных матричных многочленов с периодическими коэффициентами рекуррентных соотношений .....	25
ВЫГОДЧИКОВА И. Ю. Свойства решения задачи о наилучшем приближении непрерывного многозначного отображения алгебраическим полиномом .....	27
ГАЛАЕВ С. В., ГОХМАН А. В. Пример редукции допустимой симплектической структуры .....	31
ГУДОШНИКОВА Е. В. Собственные числа операторов Баскакова .....	34
ГУМЕНЮК П. А. Функции Кёнигса сходящейся последовательности аналитических эндоморфизмов круга .....	36
ГУРЕВИЧ А. П. Об одной слабо нерегулярной краевой задаче .....	38
ДУДОВ С. И., КОНОПЛЕВ А. Б. О приближении непрерывного многозначного отображения постоянным многозначным отображением с шаровыми образцами .....	41
ДУДОВА А. С. Свойства функции расстояния до строго и сильно выпуклого множества .....	44
ЗЮЗИН В. С., ЧЕРЕПАНОВ Е. К. Приближение решения уравнений в частных производных с начальными условиями интервальными многочленами Тейлора .....	47
ИГНАТЬЕВ М. Ю. О решении одной смешанной задачи для уравнения КдФ на полусоси с неоднородными краевыми условиями .....	50
КОНОПЛЕВ А. Б. Формула субдифференциала одной негладкой функции .....	53
КОРНЕВ В. В. Достаточный признак абсолютной и равномерной сходимости разложений по собственным функциям дифференциальных операторов .....	56
КУПРИЯНОВА Ю. В. Об оценке производной по направлению Эрмитова сплайна на треугольнике .....	59
ЛУКАШОВ А. Л. Об асимптотике средних ортогональных многочленов Ахиезера ..	62
ЛУКОМСКИЙ Д. С., ЛУКОМСКИЙ С. Ф. Дискретное преобразование Хаара в задаче распознавания изображения .....	65
ЛУКОНИНА А. С. О суммируемости по Риссу спектральных разложений одного функционально-дифференциального оператора с интегральным граничным условием .....	69
ЛУКЬЯНЕНКО О. А. О сходимости рядов Фурье – Виленкина в пространствах Лоренца по подпоследовательностям .....	72

МЕЛЬНИКОВ И. А. Базисность по Риссу системы собственных и присоединенных функций одного интегрального оператора .....	74
МЕСЯНЖИН А. В. К вопросу об одновременной триангуляции матричных представлений элементов фактора полиномиального кольца по нульмерному идеалу в задаче поиска корней идеала .....	77
МОЛОДЕНКОВА И. Д. Оценки точности приближения производной операторами, переводящими кубические сплайны в их производные .....	80
МОЛЧАНОВ В. А. О распознавании языков полугруппами и автоматами .....	83
МОРЕВА Н. С. О единственности рядов Уолша по подпоследовательностям .....	86
НАЗАРОВА Е. В. О равносходимости спектральных разложений для интегральных операторов, имеющих разрывы производной ядра на диагоналях .....	89
НЕБАЛУЕВ С. И., КЛЯЕВА И. А. Толерантные кубические сингулярные гомологии .....	92
НОВИКОВ В. В. О классе функций, обладающих интерполяционным аналогом усиленного С-свойства .....	95
НОВИКОВ В. Е. Насыщенные семейства минимальных генераторов концепта .....	99
ОРЕЛ А. А. Применение аппарата формальных грамматик для построения фактографических информационно-поисковых систем .....	102
ПОПЛАВСКИЙ В. Б. О разложимости определителей булевых (0,1)-матриц .....	105
ПОПЛАВСКИЙ Д. В. Метод обратной спектральной задачи для векторного модифицированного уравнения КдФ на полуоси .....	108
ПОПОВ А. А. Перспективы развития сервисов Интернет .....	111
ПРИВАЛОВ И. А. Приближение функции $\frac{1}{x}$ полиномами на $[-1, -a] \cup [a, 1]$ .....	115
РОЗЕН В. В. Представления целевой структуры задачи принятия решения в числовую прямую .....	118
РЫХЛОВ В. С. Об однократной полноте собственных функций пучков дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, корни характеристического уравнения которых лежат на одном луче .....	121
СОВЕТНИКОВА С. Ю. О точной по порядку оценке погрешности приближенного решения одного интегрального уравнения первого рода .....	124
СОРИНА Е. В. Критерий решения задачи наилучшего приближения многозначного отображения полиномиальной полосой фиксированной ширины .....	127
СОРОКИН Г. А. О некоторых асимптотических формулах для факториала $n!$ .....	130
ТЕРЕХИН П. А. Всплески над кольцом целых $p$ -адических чисел .....	133
ТРЫНИН А. Ю. Принцип локализации для процессов Лагранжа – Штурма – Лиувилля .....	137
ТЫШКЕВИЧ С. В. Чебышёвские полиномы на дугах единичной окружности .....	141
ХАЛОВА В. А. Суммируемость по Риссу спектральных разложений для конечномерных возмущений одного класса интегральных операторов .....	144
ХРОМОВ А. П. Оператор дифференцирования на простейшем графе из двух ребер и содержащем цикл .....	147
ХРОВОМОВА Г. В. О модуле непрерывности оператора $m$ -кратного дифференцирования и оптимальности метода регуляризации нулевого порядка .....	149
ШАЛТЫКО Д. Г. О сходимости спектральных разложений одной трехточечной краевой задачи .....	151
ШАТАЛИНА А. В. Аппроксимативные свойства интерполяционных процессов в единичном круге .....	154
ШЕВЦОВ В. И. Представление целых функций уточненных порядков обобщенными рядами экспонент .....	157

ШИШКОВА Е. В. О скорости аппроксимации приближенных решений интегрального уравнения Вольтера I рода в пространстве гладких функций .....	160
ЮРКО В. А. Об обратной задаче для дифференциальных систем .....	163

#### СЕКЦИЯ МЕХАНИКИ

АНТОНЕНКО Э. В., ХЛОПЦЕВА Н. С. Осесимметричная форма потери устойчивости тонкостенных цилиндров переменной толщины .....	165
АФАНАСЬЕВА Ю. В., ЧЕЛНОКОВ Ю. Н. К задаче переориентации круговой орбиты космического аппарата, рассматриваемой как неизменяемая фигура .....	168
БАРЫШЕВ А. А., БРЮШКО М. И., МЫЛЬЦИНА О. А. Вибрационный изгиб вязкоупругой цилиндрической оболочки с учетом связности теплового и механического полей .....	171
БИРЮКОВ В. Г. Об одном частном решении дифференциального кватернионного кинематического уравнения углового движения твердого тела .....	175
ВОЛОШИН В. А. Моделирование течения крови через малый сосуд с учётом винтовой анизотропии .....	178
ГУРЬЯНОВ В. М., КАРГОВ М. А. Дифференциальные уравнения простых волн гиперзвуковой аэродинамики .....	180
ИВАНОВ Д. В., АЛЕКСЕЙЧУК С. А. Численное исследование движения крови в стенозированных артериях.....	183
КОВЫРЯГИН М. А., КЛИМОВ А. В. Активная схема регулирования динамическим поведением механических деформируемых систем .....	187
КОПНИНА В. И., ДЕМИНА М. В. Изгиб круглой кусочно-однородной составной плиты под действием нагрузки, равномерно распределенной по внутренней круговой плите .....	190
КОССОВИЧ Л. Ю., АМИРОВ О. Г. Поле Релея в задаче Лэмба для пластины .....	192
МАСЛОВ Н. М., СОРОКИНА О. В. Исследование волновых состояний тонких неоднородных стержней .....	196
МАТУТИН А. А., ШИНДЯПИН Г. П. К теории нелинейной рефракции ударной волны .....	199
НАГАР Ю. Н. Асимптотический анализ движения границы раздела в задаче терморасщепления графита с переменным коэффициентом теплопроводности .....	203
НЕМЦОВА Е. О. Параболическая ударная волна в сопловом течении .....	207
ПАНКРАТОВ И. А., ЧЕЛНОКОВ Ю. Н. Переориентация круговой орбиты космического аппарата с тремя точками переключения управления .....	210
САПУНКОВ Я. Г. Оптимальное управление встречей двух космических аппаратов с учетом возмущения от второго центра притяжения .....	213
САПУНКОВ Я. Г., МОЛОДЕНКОВ А. В., ГЛАЗКОВ К. А. Оптимальное управление угловым движением твердого тела с учетом сил сопротивления .....	216
САФОНОВ Р. А. Численное решение задачи изгиба косоугольной пластины под действием поперечной нагрузки .....	220
СЕВОСТЬЯНОВ Г. Д. Уравнение для угла нутации в кинематике тела с неподвижной точкой .....	223
ТИХОВОД С. М. Еще один метод численного интегрирования систем дифференциальных уравнений .....	225
ХЛОПЦЕВА Н. С. Оценка материалоемкости стержней и колец, работающих на сжатие .....	228
ЧЕЛНОКОВ Ю. Н. Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты .....	231
ЧЕРНОВ И. А. Законы сохранения для осесимметричных трансзвуковых течений....	234

Научное издание

**МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА**

*Сборник научных трудов*

ВЫПУСК 8

Ответственный за выпуск С. П. Сидоров  
Технический редактор Л. В. Агальцова  
Корректор Е. Б. Крылова  
Оригинал-макет подготовлен О. Л. Багаевой

---

Подписано в печать 30.11.2006.

Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 13,95(15). Уч.-изд. л. 13,8. Тираж 200 экз. Заказ 202.

---

Издательство Саратовского университета.

410012, Саратов, Астраханская, 83.

Типография Издательства Саратовского университета.

410012, Саратов, Астраханская, 83.