Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА

Сборник научных трудов

ВЫПУСК 2

ИЗДАТЕЛЬСТВО САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2000

УДК [51+531]
ББК (22.1+22.2)я43
М34

Математика. Механика: Сб. науч. тр. – Саратов: Изд-во Сарат.
М34 ун-та, 2000. – Вып. 2.– 192 с.: ил.

Сборник посвящён исследованиям в области математики и механики. В нём содержатся работы по теории операторов и теории функций, геометрии и алгебре, теории дифференциальных и интегральных уравнений, а также по теории игр, теории оптимального управления; механике жидкости и газа, механике деформированного твёрдого тела и теоретической механике.

Для научных работников и специалистов в области математики, механики.

УДК [51+531]
ББК (22.1+22.2)я43

Работа издана в авторской редакции

ISSN 1609-4751

УДК 519.23

Е. Л. Александров, А. А. Никишин

О СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ КОВАРИАЦИОННЫХ ОПЕРАТОРОВ СЛУЧАЙНОГО ЭЛЕМЕНТА

Введение

Общая теория корреляции случайных функций разработана в ряде работ В. С. Пугачева (см., в частности, [1]).

Пусть $(\Omega;F;P)$ - вероятностное пространство, H - сепарабельное гильбертово пространство. Функция $\theta = \theta(\omega)$ из Ω в H называется случайным элементом H, если для любого $f \in H$ скалярное произведение (f,θ) есть случайная величина.

Всякий случайный элемент H порождает линейный, вообще говоря, неограниченный оператор Карлемана A. Будем предполагать, что этот оператор плотно задан. Теория операторов Карлемана хорошо развита в работах отечественных и зарубежных авторов. Необходимые сведения и понятия, которые мы используем, содержатся, например, в [2].

В настоящей статье по каждому случайному элементу H мы определяем пару ковариационных операторов. Изучаются их свойства и разложение случайного элемента по собственным функциям этих операторов, приводится пример.

1. Операторы Карлемана

Пусть H - сепарабельное гильбертово пространство, (X,μ) — измеримое с σ - конечное мерой пространство, $L^2(X,\mu)$ — гильбертово пространство функций, заданных на (X,μ).

Оператор A из H в $L^2(X,\mu)$ называется оператором Карлемана [2], если существует измеримая функция $k(x)$, заданная почти всюду на X, со значениями в H такая, что:

$$D(A) \subseteq D_k = \{f \in H : (f,k(\cdot)) \in L^2(X,\mu)\},$$

$$Af = (f,k(\cdot)),\ f \in D(A).$$

Равенство $(Af)(x)=(f,k(x))$ понимается μ - почти всюду. Если $D(A)=D_k$, то оператор A называется максимальным оператором Карлемана.

Пусть оператор Карлемана A порождается функцией $k(x)$. На множестве

$$D(K)=\left\{\varphi(x)\in L^2(X,\mu):\ \int_X \|k(x)\|_H\,\varphi(x)dx<+\infty\right\}$$

определим оператор K из $L^2(X,\mu)$ в H равенством

$$K\varphi=\int_X k(x)\varphi(x)dx,\ \ \varphi\in D(K).$$

Оператор K называется полукарлемановским. Известно [2], $A=K^*$.

2. Ковариационные операторы

Пусть θ — случайный элемент гильбертова пространства H, A - оператор Карлемана, порождаемый элементом θ. $Ae=(e,\theta)$, $e\in D_\theta=D(A)$.

Будем предполагать, что область определения $D(A)=D_\theta$ оператора A плотна в H. В пространствах H и $L^2(\Omega)=L^2(\Omega;F;P)$ определим, соответственно, операторы $S=A^*A$ и $S_1=AA^*$, которые будем называть ковариационными операторами θ.

ТЕОРЕМА 1. Ковариационные операторы S и S_1 случайного элемента θ являются плотнозаданными самосопряженными неотрицательными операторами. Если область значений $R(A)$ плотна в $L^2(\Omega)$, а область значений $R(A^*)$ плотна в H, то операторы S и S_1 унитарно эквивалентны, то есть существует изометрический оператор V, отображающий H на $L^2(\Omega)$ такой, что

$$S=V^*S_1V,\ S_1=VSV^*.$$

3. Разложение случайного элемента

Будем предполагать, что ковариационные операторы S и S_1 имеют дискретный спектр $SpS=SpS_1\left\{\varphi_k^2\right\}_{k=1}^{+\infty}$ так, что имеет место разложение

$$Se=\sum_{k=1}^{+\infty}a_k^2(e,e_k)e_k,\ e\in D(S), \tag{1}$$

$$S_1\xi=\sum_{k=1}^{+\infty}a_k^2(\xi,\xi_k)\xi_k,\ \xi\in D(S_1), \tag{2}$$

где $\{e_k\}$ – ортонормированная система собственных функций оператора S, $\{\xi_k\}$ – ортонормированная система собственных функций оператора S_1.

ТЕОРЕМА 2. Если для случайного элемента пространства H имеют место разложения (1) и (2), то θ представим в виде

$$\theta(\omega)=\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \xi_k(\omega) e_k , \qquad (3)$$

сходимость ряда (3) понимается в пространстве H с вероятностью 1.

4. Пример

Пусть $\theta(t), t \in [0;T]$ — случайный элемент (телеграфный сигнал), принимающий значения +1 или 1. Число перемен знака $\theta(t)$ подчиняется закону Пуассона с параметром $\lambda = 1$. Ковариационная функция $\theta(t)$ $e^{-|t-s|}$, $t,s \in [0;T]$ есть ядро ковариационного оператора S

$$(Sf)(x)=\int_0^T e^{-|t-s|} f(t)dt .$$

Собственные значения оператора S [3] есть $\lambda_k = \frac{2}{1+y_k^2}$, где y_k удовлетворяют уравнению $\mathrm{tg} y_k T = \frac{2y_k}{1-y_k^2}$. Очевидно, $\lambda_k \approx \frac{2}{1+k^2T^2}$. Соответствующие нормированные собственные функции есть $\varphi_k(t)= c_k \sin(t - T/2) y_k$, где $c_k = \left(T - \dfrac{\sin y_k T}{y_k}\right)$. Поэтому

$$\theta(\mathrm{t})=\sum_{\mathrm{k}=0}^{+\infty} \sqrt{\lambda_\mathrm{k}}\,\varphi_\mathrm{k}(\mathrm{t})\xi_\mathrm{k}(\omega),\ \mathrm{t} \in [0;\mathrm{T}]. \qquad (4)$$

Пусть $0=t_0< t_1< t_2<\ldots< t_k<\ldots<T$ — независимые случайные точки на числовой оси, в момент которых $\theta(t)$ меняет знак. Положим $\tau_0 = t_0, \tau_1 = t_1 - t_0, \tau_2 = t_2 - t_1$. Очевидно, случайные величины τ_0, τ_1, τ_2 независимы и имеют показательное распределение с параметром λ, а также

$$t_k = \tau_0 + \tau_1 + \ldots + \tau_k ,\ k = 1,2,\ldots$$

Из (4) находим

$$\xi_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}(\theta, \varphi_k) = \frac{c_k}{y_k \sqrt{\lambda_k}} \sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^{j-1} \left[\cos\left(t_{j-1}(\omega) - \frac{T}{2} \right) y_k - \cos\left(t_j(\omega) - \frac{T}{2} \right) \right].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пугачев В. С.* Обобщенная теория корреляции случайных функций // Изв. АН СССР. Сер. Математика. 1953. Т. 17, № 5. С. 401 - 420.

2. *Weidmann J.* Carleman operators // Manuscripts. Math. 1970. № 2. P. 1 - 138.

3. *Пугачев В. С.* Теория случайных функций. М.: Физматгиз, 1962.

УДК 517.977

Н. Л. Андреева

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНО-ВЫПУКЛОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим задачу оптимального управления: найти траекторию $x(t)\in L_2^n[t_0, t_1]$ и управление $u(t)\in L_2[t_0, t_1]$ такие, которые связаны дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu, \;\; t\in[t_0, t_1], \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

доставляют минимум интегральному функционалу

$$J(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} F(x, u, t)\, dt \tag{3}$$

при ограничениях на управление типа неравенства

$$|u(t)| \le 1, \;\; t\in[t_0, t_1], \tag{4}$$

здесь A – матрица размерности $n\times n$; b, x_0 – векторы размерности n; $F(x, u, t)$ – равномерновыпуклая по (x, u) функция, имеющая производные $F_x^{'}, F_u^{'}$, удовлетворяющие условию Липшица и имеющие вторые производные $F_{uu}^{''}, F_{xt}^{''}, F_{ut}^{''}$.

Задачу (1) – (4) предлагается решать, используя идею штрафных функционалов [1].

$$\Phi_k(x, u) = \frac{1}{\varepsilon_k}\left\| x(t) - e^{A(t-t_0)}x_0 - \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\xi)} b\, u(\xi)\, d\xi \right\|^2_{L_2[t_0, t_1]} +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon_k}[\|(u(t)-1)_+\|^2_{L_2[t_0, t_1]} + \|-(u(t)-1)_+\|^2_{L_2[t_0, t_1]}], \tag{5}$$

где $\varepsilon_k \downarrow 0$ – малый параметр, e^{At} – матричная экспонента, функция $y_+ = \max(0, y)$.

Штрафные функционалы (5) позволяют задачу (1) – (4) заменить на последовательность задач на экстремум

$$J_k(x, u) = J(x, u) + \Phi_k(x, u) \to \inf . \tag{6}$$

ЛЕММА. Существует единственная точка минимума $(x_k(t), u_k(t)) \in L_2^{n+1}[t_0, t_1]$ функционала $J_k(x, u)$ из (6).

Доказательство получается на основе сильной выпуклости функционала $J(x, u)$ в пространстве $L_2^{n+1}[t_0, t_1]$ и выпуклости введённых функционалов штрафов (5).

ТЕОРЕМА 1. Функции $x_k(t), u_k(t)$ являются единственным решением интегральных уравнений

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\xi)} b\, u(\xi)\, d\xi - \frac{1}{2}\varepsilon_k F_x'(x, u, t), \tag{7}$$

$$F_u'(x, u, t) + \frac{2}{\varepsilon_k}[(u(t)-1)_+ - (-u(t)-1)_+] = -\int_{t}^{t_1} \left(e^{A(\xi-t)}b,\, F_x'(x, u, \xi)\right)_{R_n} d\xi\,. \tag{8}$$

Доказательство получается из необходимого и достаточного условия минимума сильно выпуклого функционала $\operatorname{grad} J_k(x, u) = 0$. Преобразуя эти уравнения и проводя асимптотику по малому параметру ε_k, получаем уравнения (7), (8) для $(x_k(t), u_k(t))$.

Традиционным путём можно доказать, что последовательность $\{x_k(t), u_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ точек минимума функционалов (6) со штрафами слабо сходится к решению $\left(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)\right)$ задачи (1) – (4), которое существует в силу сильной выпуклости функционала $J(x, u)$ из (3), линейности дифференциальных связей (1), (2), выпуклости ограничений (4). Слабая сходимость $\{x_k(t), u_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ позволяет называть пару $(x_k(t), u_k(t))$ приближённым решением задачи (1) – (4). Использование уравнений (7), (8) с малым параметром ε_k позволяет доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Функции $x_k(t), u_k(t)$, удовлетворяющие уравнениям (7), (8), являются равномерно ограниченными и равностепенно непрерывными.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андреева Н. Л.* Алгоритм решения линейно-квадратичной задачи оптимального управления // Математика и её приложения: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд - во Сарат. ун - та, 1991. Вып. 2. С. 56 – 57.

УДК 517.51

Л. В. Борисова

К ВОПРОСУ О СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ-ЭРМИТА

Пусть $\{H_n(x)\}, n=1,2,3,...$ – последовательность многочленов Эрмита, ортонормированных на промежутке $(-\infty;+\infty)$ с весом e^{-x^2}. Для любой функции $f \in L[-\infty,+\infty;e^{-x^2}]$ через $S_n(f,x)=\sum_{k=1}^{n} a_k H_k(x)$, где $a_k = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) H_k(x) dx$, обозначим n-ю частную сумму ряда Фурье-Эрмита функции f.

Цель статьи – найти необходимые и достаточные условия сходимости ряда Фурье-Эрмита суммируемой с весом функции в точке Лебега этой функции. Отметим, что вопрос о сходимости в точке Лебега сингулярных интегралов и рядов Фурье суммируемых функций исследовался в работах [1 - 4].

Аналогичный вопрос для рядов Фурье-Эрмита не решался.

Будем говорить, что функция $f \in L[-\infty,+\infty;e^{-x^2}]$ удовлетворяет условию S_0, если выполнены следующие два условия: при любом $a>0$ $\int_{-a}^{a} |f(x)| dx$ существует и справедливо равенство

$$\int_{n}^{\infty} e^{-x^2} x^{-\frac{5}{3}} \{|f(x)|+|f(-x)|\} dx = \bar{\bar{o}}(n^{-1}), n \to \infty. \tag{1}$$

Тогда по аналогии с рядами Фурье-Лагерра имеет место

ЛЕММА 1 [5, с. 255]. Пусть $f(x)$ - измеримая в смысле Лебега функция на оси $(-\infty;+\infty)$ и удовлетворяет условию S_0. Тогда при произвольном вещественном x справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ S_n(f,x) - \frac{1}{\pi} \int_{x-\sigma}^{x+\sigma} f(t) \frac{\sin\left[(2n)^{1/2}(x-t)\right]}{x-t} dt \right\} = 0, \tag{2}$$

где σ - фиксированное положительное число. Кроме того, равенство (2) выполняется равномерно на любом конечном отрезке $[a;b] \subset (-\infty;+\infty)$.

ЛЕММА 2 [4]. Пусть функция f суммируема на отрезке $[0;\sigma]$, где σ - фиксированное положительное число. Тогда справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} \left[f(t) - f(t+\frac{\pi}{n}) \right] \frac{n \sin nt}{nt+\pi} dt =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m_n} \frac{1}{2(k+1)} \int_0^1 \left[f(\frac{\pi(t+2k)}{n}) - f(\frac{\pi(t+2k+1)}{n}) \right] \sin \pi t \, dt ,$$

в котором

$$E_n = \bigcup_{k=0}^{m_n} \left[2k\frac{\pi}{n}; (2k+1)\frac{\pi}{n} \right], \; m_n = \left[\frac{\sigma n}{2\pi} \right] - 1. \qquad (3)$$

ЛЕММА 3 [4]. Пусть функция f суммируема на отрезке $[x-\sigma; x+\sigma]$, где σ - фиксированное положительное число. Если x - точка Лебега функции f, то справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f(x\pm t) \frac{\sin nt}{t(nt+\pi)} dt = \frac{f(x)}{2},$$

в котором область интегрирования имеет вид (3).

ЛЕММА 4 [4]. Пусть функция f суммируема на отрезке $[x-\sigma; x+\sigma]$, где σ - фиксированное положительное число. Если существует значение $f(x+o)$ $(f(x-o))$, то справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f(x\pm t) \frac{\sin nt}{t(nt+\pi)} dt = \frac{f(x\pm o)}{2},$$

в котором область интегрирования имеет вид (4).

Сформулируем основной результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $f \in L[-\infty,+\infty; e^{-x^2}]$ удовлетворяет условию S_0. Если $x \in (-\infty;+\infty)$ - точка Лебега функции f, то для того, чтобы ряд Фурье-Эрмита этой функции сходился в точке x, необходимо и достаточно выполнения равенства

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m_n} \frac{1}{2(k+1)} \int_0^1 \left[\varphi(x, \frac{t+2k}{\sqrt{2n}}\pi) - \varphi(x, \frac{t+2k+1}{\sqrt{2n}}\pi) \right] \sin \pi t \, dt = 0, \qquad (4)$$

где $m_n = \left[\sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\pi} \right] - 1$ для фиксированного положительного σ и $\varphi(x,t) = f(x+t) + f(x-t)$.

При этом

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f,x) = f(x).$$

Доказательство теоремы 1 опирается на леммы 1-3.

Следствие 1. Пусть функция f непрерывна на $(-\infty;+\infty)$ и удовлетворяет условию (1). Положим $h = \frac{\pi}{\sqrt{2n}}$, $m_n = \left[\sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\pi} \right] - 1$, где σ - фиксированное положительное число.

Если выражение

$$T_n(f,x)=\sum_{k=0}^{m_n}\frac{f(x+2kh)-f(x+(2k+1)h)}{2k+1},$$

а также выражение $Q_n(f,x)$, получающееся из $T_n(f,x)$ заменой h на $-h$, стремится к нулю равномерно на $(-\infty;+\infty)$ при $n\to\infty$, то ряд Фурье-Эрмита сходится в каждой точке промежутка $(-\infty;+\infty)$, равномерно на любом отрезке $[a;b], -\infty<a<b<\infty$.

Последнее утверждение является аналогом признака равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье Р. Салема [6].

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $f\in L[-\infty,+\infty;e^{-x^2}]$ удовлетворяет условию S_0. Если в точке $x\in(-\infty;+\infty)$ существуют значения $f(x+o)$ и $f(x-o)$, то для того чтобы ряд Фурье-Эрмита функции f сходился в этой точке, необходимо и достаточно выполнения равенства (4).

При этом $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(f,x)=\dfrac{f(x+o)+f(x-o)}{2}$.

Доказательство теоремы 2 опирается на леммы 1, 2 и 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Romanovski M. P.* Quelques considerations sur la theorie des integrales singulieres // Math. Z. 1931. Bd. 34., H. 1. S. 35 - 49.

2. *Фадеев Д. К.* О представлении суммируемых функций сингулярными интегралами в точках Lebesque'a // Матем. сб. 1936. Т. 1(43), № 3. С. 351 - 367.

3. *Коровкин П. П.* Критерий сходимости ряда Фурье в точке Лебега функции. Прикладные вопросы математического анализа. Тула: Изд-во Тульск. гос. пед. ин-та, 1972. С. 69 - 72.

4. *Борисова Л. В.* Критерий сходимости рядов Фурье-Лагерра в точке Лебега. Саратов, 1988. 16 с. Деп. в ВИНИТИ 25.07.1988 г. № 5892-В88.

5. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.

6. *Salem R.* Essais sur les series trigonometriques // Actual. Sci. et Industr. Paris, 1940. N 862.

УДК 517.984

С. А. Бутерин

О ВОССТАНОВЛЕНИИ НЕСАМОСОПРЯЖЁННОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Введение. Рассмотрим краевую задачу $L=L(q(x),h,H)$:

$$-y''+q(x)y=\lambda y,\quad 0<x<\pi,\quad q(x)\in L_2(0,\pi),\tag{1}$$

$$U(y):=y'(0)-hy(0)=0,\quad V(y):=y'(\pi)+Hy(\pi)=0.\tag{2}$$

В. А. Марченко показал (см., например, [1]), что в самосопряженном случае, когда $q(x)$, h, H вещественны, задача L однозначно определяется заданием своего спектра вместе с нормами собственных функций, удовлетворяющих одним и тем же начальным условиям. Но в несамосопряженном случае таких данных, вообще говоря, недостаточно, что связано с возможностью появления кратного спектра. Целью данной заметки является обобщение результата Марченко на несамосопряженный случай.

1. Спектральные данные. Теорема единственности. Пусть функции $\varphi(x,\lambda)$, $\psi(x,\lambda)$, $S(x,\lambda)$ являются решениями уравнения (1) с начальными условиями $\varphi(0,\lambda)=\psi(\pi,\lambda)=S'(0,\lambda)=1$, $\varphi'(0,\lambda)=h$, $\psi'(\pi,\lambda)=-H$, $S(0,\lambda)=0$. Пусть $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ – спектр задачи L, тогда $\varphi_{k,n}(x)=\frac{1}{k!}\frac{d^k}{d\lambda^k}\varphi(x,\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_n}$ и $\psi_{k,n}(x)=\frac{1}{k!}\frac{d^k}{d\lambda^k}\psi(x,\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_n}$, $k=\overline{0,m_n-1}$, являются собственными и присоединенными функциями, соответствующими собственному значению λ_n кратности m_n.

Определение. Спектральными данными задачи L назовем

$$\Lambda=\left\{\lambda_n,\{\alpha_{k,n}\}_{k=0}^{m_n-1}\right\}_{n\geq 0}, \tag{3}$$

где $\alpha_{k,n}=\int_0^\pi \varphi_{k,n}(x)\varphi_{m_n-1,n}(x)dx$. Обратная задача формулируется так: даны Λ, построить L.

Наряду с задачей L будем рассматривать задачу $\tilde{L}$ такого же вида, но с другими коэффициентами $\tilde{q}(x)$, $\tilde{h}$, $\tilde{H}$. Условимся, что если некоторый символ A обозначает объект, относящийся к задаче L, то символ $\tilde{A}$ обозначает аналогичный объект, относящийся к задаче $\tilde{L}$.

ТЕОРЕМА. Если $\lambda_n=\tilde{\lambda}_n$, $m_n=\tilde{m}_n$, $\alpha_{k,n}=\tilde{\alpha}_{k,n}$, $k=\overline{0,m_n-1}$, $n=\overline{0,\infty}$, то $L=\tilde{L}$, то есть $q(x)=\tilde{q}(x)$ п. в. на $(0,\pi)$, $h=\tilde{h}$, $H=\tilde{H}$. Таким образом, задание Λ однозначно определяет L.

2. Доказательство теоремы единственности. Обозначим

$$\Delta(\lambda):=\langle\psi(x,\lambda),\varphi(x,\lambda)\rangle,$$

где $\langle y,z\rangle=yz'-y'z$. Функция $\Delta(\lambda)$ называется характеристической функцией задачи L. Пусть $\Phi(x,\lambda)$ – решение уравнения (1) при условиях $U(\Phi)=1$, $V(\Phi)=0$. Положим $\mathrm{M}(\lambda):=\Phi(0,\lambda)$. Функция $\mathrm{M}(\lambda)$ называется функцией Вейля задачи L. Очевидно, что

$$\Phi(x,\lambda)=-\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}=S(x,\lambda)+\mathrm{M}(\lambda)\varphi(x,\lambda),\ \ \mathrm{M}(\lambda)=-\frac{\psi(0,\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \tag{4}$$

$$\langle\varphi(x,\lambda),\Phi(x,\lambda)\rangle\equiv 1. \tag{5}$$

Известным методом (см., например, [2]) доказываются следующие асимптотические формулы. Пусть $\lambda=\rho^2$, тогда при $|\rho|\to\infty$

$$\varphi(x,\lambda)=\cos\rho x+O\left(|\rho|^{-1}\exp(|\operatorname{Im}\rho|x)\right),$$
$$\varphi'(x,\lambda)=-\rho\sin\rho x+O\left(\exp(|\operatorname{Im}\rho|x)\right),$$
$$\psi(x,\lambda)=\cos\rho(\pi-x)+O\left(|\rho|^{-1}\exp(|\operatorname{Im}\rho|(\pi-x))\right),$$
$$\psi'(x,\lambda)=\rho\sin\rho(\pi-x)+O\left(\exp(|\operatorname{Im}\rho|(\pi-x))\right).$$
$$|\Delta(\lambda)|\geq C_\delta|\rho|\exp(|\operatorname{Im}\rho|\pi),\ \rho\in G_\delta,\ |\rho|\geq\rho^*,$$

где $G_\delta=\{\rho:|\rho-k|\geq\delta, k=0,\pm1,\pm2,\ldots\}$, $\delta>0$.

ТЕОРЕМА 1. Справедливо представление

$$\mathrm{M}(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{m_n}\frac{C_{-k,n}}{(\lambda-\lambda_n)^k}, \tag{6}$$

где $C_{-k,n}$ – некоторые комплексные числа, m_n – кратность λ_n, $C_{-m_n,n}\neq0$.

Доказательство. Рассмотрим контурный интеграл

$$J_N(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_N}\frac{\mathrm{M}(\mu)}{\lambda-\mu}d\mu,\ \text{где}\ \Gamma_N=\left\{\lambda:|\lambda|=\left(N+\frac{1}{2}\right)^2\right\},\ N\in\mathbf{N},\ \lambda\in\operatorname{int}\Gamma_N,$$

а Γ_N проходится в положительном направлении. В силу асимптотики спектра задачи (1),(2) (см., например, [3]) для достаточно больших N контур Γ_N не проходит через какие-либо собственные значения. В силу асимптотических свойств функций $\psi(x,\lambda)$ и $\Delta(\lambda)$ (см. [3]) из (4) следует оценка $|\mathrm{M}(\lambda)|\leq C_\delta|\rho|^{-1}$ при $\rho\in G_\delta$, $|\rho|\geq\rho^*$. Отсюда $\lim_{N\to\infty}J_N(\lambda)=0$. Применяя теорему о вычетах получаем (6). □

ТЕОРЕМА 2. Если $\mathrm{M}(\lambda)=\tilde{\mathrm{M}}(\lambda)$, то $L=\tilde{L}$.

Доказательство. Положим

$$\left.\begin{aligned}P_1(x,\lambda)&:=\varphi(x,\lambda)\tilde{\Phi}'(x,\lambda)-\Phi(x,\lambda)\tilde{\varphi}'(x,\lambda),\\ P_2(x,\lambda)&:=\Phi(x,\lambda)\tilde{\varphi}(x,\lambda)-\varphi(x,\lambda)\tilde{\Phi}(x,\lambda).\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

В силу (4), а также асимптотических свойств функций φ, φ', ψ, ψ', $\Delta(\lambda)$ имеет место

$$\left|P_k(x,\lambda)-\delta_{1,k}\right|=O(\rho^{-1})\ \ k=1,2,\ \rho\in G_\delta,\ |\rho|\to\infty. \tag{8}$$

С другой стороны, согласно (4) и (7), из условия леммы следует, что при каждом x функции $P_k(x,\lambda)$, $k=1,2$ являются целыми аналитическими по λ. Вместе с (8) это дает $P_k(x,\lambda)\equiv\delta_{1,k}$. Далее, в силу (5) и (7), $\Phi(x,\lambda)\equiv\tilde{\Phi}(x,\lambda)$, а значит $L=\tilde{L}$. □

ТЕОРЕМА 3. Справедливы соотношения

$$\sum_{i=0}^{k}\alpha_{i,n}C_{-m_n+k-i,n}=\delta_{0,k},\ k=\overline{0,m_n-1},\tag{9}$$

где $\alpha_{k,n}$ и $C_{-k,n}$ определяются равенствами (3) и (6) соответственно.

Доказательство. Из (4) следует

$$\sum_{i=0}^{k}C_{-m_n+i,n}\Delta_{m_n+k-i,n}=-\psi_{k,n}(0),\ k=\overline{0,m_n-1},\tag{10}$$

где $\Delta_{m_n+p,n}$, $p=0,1,...$ – коэффициенты тейлоровского разложения функции $\Delta(\lambda)$ в окрестности точки λ_n. С другой стороны, из свойств собственных и присоединенных функций вытекает

$$\sum_{i=0}^{k}\psi_{i,n}(0)\varphi_{k-i,n}(x)=\psi_{k,n}(x),\ k=\overline{0,m_n-1}.\tag{11}$$

Кроме того, нетрудно показать, что

$$\Delta_{m_n+p,n}=-\int_0^\pi\psi_{p,n}(x)\varphi_{m_n-1,n}(x)dx,\ p=\overline{0,m_n-1}.\tag{12}$$

Из (10) – (12) следует (9). □

Возвратимся к доказательству теоремы единственности. Согласно (9), из $m_n=\tilde{m}_n$, $\alpha_{k,n}=\tilde{\alpha}_{k,n}$, $k=\overline{0,m_n-1}$ вытекает $C_{-l,n}=\tilde{C}_{-l,n}$, $l=\overline{1,m_n}$. Отсюда, в силу (6) и $\lambda_n=\tilde{\lambda}_n$, $n=\overline{0,\infty}$, получаем, что $\mathrm{M}(\lambda)=\tilde{\mathrm{M}}(\lambda)$, и следовательно, согласно теореме 3, $L=\tilde{L}$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Freiling G.* and *Yurko V. A.* Inverse spectral problems for second-order differential operators. Part 1 // Schriftenreiche des FB Mathematik der Universitaet-GN-Duisburg. 1999. Vol. 458. 118 s.

2. *Левитан Б. М.*, *Саргсян И. С.* Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988.

3. *Марченко В. А.* Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев: Наук. думка, 1977.

УДК 519.853.3 + 517.518.82

И. Ю. Выгодчикова

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ НЕПРЕРЫВНОГО МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ПОЛИНОМОМ

1. Пусть $g_1(t)$ и $g_2(t)$ - непрерывные на отрезке $[0;1]$ функции, причём $g_1(t)\le g_2(t)$ при $t\in[0;1]$. Обозначим через $p_n(A,t)=a_0+a_1t+\ldots+a_nt^n$ полином n-ой степени с вектором коэффициентов $A=(a_0,a_1,\ldots,a_n)$,

$\Phi(t)=[g_1(t),g_2(t)]$ – многозначное отображение (м.о.), сопоставляющее каждому значению $t\in[0;1]$ соответствующий отрезок.

Рассмотрим следующую задачу о наилучшем приближении м.о. $\Phi(t)$ полиномом n-ой степени:

$$\max_{t\in[0;1]}\max\{p_n(A,t)-g_1(t),g_2(t)-p_n(A,t)\}\longrightarrow\inf_{A\in R^{n+1}}. \tag{1}$$

Обозначим через $\rho=\inf\limits_{A\in R^{n+1}}\max\limits_{t\in[0;1]}\max\{p_n(A,t)-g_1(t),g_2(t)-p_n(A,t)$.

2. Рассуждениями, аналогичными [1, гл. 6, §8], сведём задачу (1) к задаче выпуклого программирования. Для этого обозначим

$$Y=(\xi,t)\in R^2,\quad G=\{(\xi,t)\in R^2/\xi\in\{-1,1\},t\in[0,1]\},$$

$$F(A,Y)=\frac{1}{2}\xi(1+\xi)[p_n(A,t)-g_1(t)]+\frac{1}{2}\xi(1-\xi)[p_n(A,t)-g_2(t)].$$

Тогда задача (1) эквивалентна задаче:

$$\varphi(A)\overset{df}{=}\max_{Y\in G}F(A,Y)\longrightarrow\inf_{A\in R^{n+1}}. \tag{2}$$

Функция $F(A,Y)$ непрерывна вместе с $\dfrac{\partial F(A,Y)}{\partial A}=\xi(1,t,\dots,t^n)$ на $R^{n+1}\times G$.

Более того, она выпукла по A на R^{n+1} при каждом фиксированном $Y\in G$. Следовательно, (см., например, [2]), и функция $\varphi(A)$ является выпуклой на R^{n+1}, причём её субдифференциал выражается формулой

$$\partial\varphi(A)=co\left\{\frac{\partial F(A,Y)}{\partial A}\Big/Y\in R(A)\right\},$$
$$R(A)=\{Y\in G/F(A,Y)=\varphi(A)\}. \tag{3}$$

Тогда, в соответствии с известной теоремой выпуклого анализа [2], имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. Для того чтобы вектор A^* был решением задачи (2), а следовательно, и задачи (1), необходимо и достаточно, чтобы $0_{n+1}\in\partial\varphi(A^*)$, где $\partial\varphi(A)$ определяется формулой (3).

3. С помощью теоремы 1, а также леммы [1, с. 292, лемма 8.1] доказаны следующие факты.

ТЕОРЕМА 2. Решение задачи (1) существует. Для того чтобы вектор A^* был решением задачи (1), необходимо и достаточно чтобы:

а) либо нашлась хотя бы одна точка $t^*\in[0;1]$, в которой уклонение м.о. $\Phi(t)$ от полинома $p_n(A^*,t)$ было максимальным на $[0;1]$ и совпадало одновременно с уклонениями $p_n(A^*,t)$ от функций $g_1(t)$ и $g_2(t)$, то есть:

$$p_n(A^*,t^*)-g_1(t^*)=g_2(t^*)-p_n(A^*,t^*)=$$

$$= \max_{t\in[0,1]} \max \left\{ p_n(A^*,t) - g_1(t), g_2(t) - p_n(A^*,t) \right\} \overset{df}{=} \rho(A^*);$$

б) либо нашлись точки $\{t_i\}, i = \overline{0, n+1}: 0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1} \le 1$, в которых уклонение м.о. $\Phi(t)$ от полинома $p_n(A^*,t)$ было максимальным на $[0;1]$, то есть $\rho(A^*) = \max\left\{p_n(A^*,t_i) - g_1(t_i), g_2(t_i) - p_n(A^*,t_i)\right\}$, $i = \overline{0, n+1}$; причём если $\rho(A^*) = p_n(A^*,t_i) - g_1(t_i)$ (соответственно, $\rho(A^*) = g_2(t_i) - p_n(A^*,t_i)$), то $\rho(A^*) = g_2(t_{i+1}) - p_n(A^*,t_{i+1})$ (соответственно, $\rho(A^*) = p_n(A^*,t_{i+1}) - g_1(t_{i+1})$) для всех $i = \overline{0,n}$.

ТЕОРЕМА 3. Если выполняется неравенство

$$\rho > \frac{1}{2} \max_{t\in[0,1]} [g_2(t) - g_1(t)], \tag{4}$$

то решение задачи (1) единственно.

Нижеследующие простые примеры показывают, что решение задачи (1), в случае, если не выполняется условие (4), может быть неединственным, и даже в случае единственности решения, оно может не совпадать с решением задачи П. Л. Чебышева об отыскании полинома наилучшего приближения для функции $g(t) = \frac{1}{2}(g_1(t) + g_2(t))$.

Возьмём $g_1(t) \equiv 0$, $g_2(t) = 1 + t$, $t \in [0;1]$.

Рассмотрим случаи:

при $n = 0$ единственным решением задачи (1) является $p_0^1(t) \equiv 1$, в то время как $p_0^2(t) \equiv 3/4$ - единственное решение соответствующей задачи П. Л. Чебышева о наилучшем приближении функции $g(t) = \frac{1}{2}(1+t)$ полиномом 0-степени на отрезке $[0;1]$;

при $n = 1$, как следует из теоремы 2 (выполняется ситуация а)), решениями задачи (1) являются все полиномы $p_1(a,t) = a + (1-a)t$, $\forall a \in [0,1]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.* Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.

2. *Демьянов В. Ф., Васильев Л. В.* Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981.

УДК 514.764

С. В. Галаев, А. В. Гохман

ОБОБЩЕННЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ НА МНОГООБРАЗИЯХ СО СВЯЗНОСТЬЮ

На гладком многообразии X_n рассматривается неголономное многообразие X_n^m, заданное вместе с оснащением X_m^{n-m}. Вводится понятие допустимой тензорной структуры, в том числе допустимой симплектической структуры. По аналогии с голономным случаем определяются допустимая гамильтонова система и гамильтониан. Приводятся примеры допустимых симплектических структур, естественным образом возникающих на некоторых расслоенных пространствах.

Под неголономным многообразием будем понимать тотальное пространство X_n^m векторного подрасслоения $\mu = (X_n^m, P, X_n)$ касательного расслоения $\tau = (T(X_n), \pi, X_n)$ гладкого класса C^∞ многообразия X_n. Многообразие X_n^m задано вместе со своим оснащением X_n^{n-m}. Т. о., в каждой точке $x \in X_n$ имеет место разложение в прямую сумму $T_x(X_n) = (X_n^m)_x \oplus (X_n^{n-m})_x$. Число m называется размерностью, а n-m коразмерностью многообразия X_n^m. Мы будем наделять X_n^m допустимыми тензорными структурами типа (s,t), понимая под ними гладкое сечение тензорных расслоений $\underbrace{X_n^m \otimes \ldots \otimes X_n^m}_{s} \otimes \underbrace{(X_n^m)^* \otimes \ldots \otimes (X_n^m)^*}_{t}$, где в каждой точке $x \in X_n$ пространства $(X_n^m)_x^*$ является пространством линейных форм, заданных на $(X_n^m)_x$. Будем обозначать с помощью $F_t^S(X_n)(F_t^S(X_n^m))$ модуль тензорных полей (допустимых тензорных полей) типа (s,t), заданных (может быть локально) на X_n. Имеет место естественное вложение $F_t^s(X_n^m) \subset F_t^s(X_n)$. Интерпретируя тензор как полилинейное отображение, мы отождествляем $t \in F_t^s(X_n^m)$ с $\bar{t} = F_t^s(X_n)$, если $t = t\Big|_{X_n^m \times \ldots \times (X_n^m)^*}$ и $\bar{t}\Big|_{X_n^{n-m} \times \ldots \times (X_n^{n-m})^*} = 0$. Например, дифференциальную форму $\lambda \in F_1^0(X_n)$ мы будем называть допустимой, если $\lambda\Big|_{X_n^{n-m}=0}$. Важнейший пример допустимой тензорной структуры дает риманова метрика на X_n^m [1], т.е. поле $g \in F_2^0(X_n^m)$.

Под допустимой аффинной связностью на X_n будем понимать закон ∇, ставящий в соответствие каждому $\overline{U} \in F_0^1(X_n^m)$ линейное отображение $\nabla_{\overline{U}}$ модуля $F_0^1(X_n^m)$ в себя, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\nabla_{f_1\overline{U}_1+f_2\overline{U}_2} = f_1\nabla_{\overline{U}_1} + f_2\nabla_{\overline{U}_2}$;

2) $\nabla_{\overline{U}}(f\overline{V}) = f\nabla_{\overline{U}_1}\overline{V} + (\overline{U}f)\overline{V}$.

Действие оператора $\nabla_{\overline{U}}$ обычным образом продолжается на произвольные допустимые тензорные поля.

Известно [1], что на X_n^m существует одна и только одна допустимая метрическая аффинная связность ∇ нулевого кручения.

Пусть $m=2k$. Назовем дифференциальную допустимую 2-форму $\omega \in F_2^0(X_n^m)$ допустимой симплектической структурой (д.с.с.), если выполняются следующие условия:

1) форма ω – замкнута: $d\omega = 0$;

2) ранг формы ω в каждой точке $x \in X_n$ равен $2k$.

Как следует из определения д.с.с. форма ω является вырожденной симплектической формой на X_n. Применяя к ω теорему Дарбу, мы в окрестности каждой точки $x \in X_n$ получаем представление формы ω в виде

$$\omega = \sum dx^i \wedge dx^{i+k},\ i = 1,...,k. \tag{1}$$

Карта $æ(x^\alpha)$ $(\alpha,\beta,\gamma = 1,...,n;\ a,b,c = 1,...,m;\ p,q = m+1,...,n)$, относительно которой записано разложение (1), обладает тем свойством, что векторное поле $\partial_p = \dfrac{\partial}{\partial x^p}$ в каждой точке $x \in pr_1 æ$ принадлежит (X_n^{n-m}).

Отсюда, в частности, следует, что оснащение X_n^{n-m} неголономного многообразия X_n^m с д.с.с. является инволютивным. Т. о., в дальнейшем мы рассматриваем X_n^m с инволютивным оснащением X_n^{n-m}. Любая карта æ на X^n будет обладать тем свойством, что $\partial_p \in F_0^1(X_n^{n-m})$.

Многообразие X_n^m с формой ω назовем неголономным симплектическим многообразием (н.с.м.). Для н.с.м. существует взаимнооднозначное соответствие между модулями $F_0^1(X_n^m)$ и $F_1^0(X_n^m)$. А именно, если $\overline{U} \in F_0^1(X_n^m)$, то в качестве соответствующей ему 1-формы $\lambda \in F_1^0(X_n^m)$ мы положим форму λ с компонентами $\lambda_\alpha = \omega_{b\,a}U^b$. Векторное поле $\overline{U} \in F_0^1(X_n^m)$ назовем допустимой гамильтоновой системой, если соответствующая ему форма замкнута. Если на X_n существует функция H такая, что $\lambda = dH$, то H называется гамильтонианом системы $\overline{U}$. Заметим, что форма dH допустима тогда и только тогда, когда $\partial pH = 0$.

Пусть теперь H - произвольная гладкая функция на многообразии X_n. Ей соответствует допустимая 1-форма, определенная равенством $\lambda = \overline{\ell}_a H dx^a$. Где $\overline{\ell}_a = \partial_a - \Gamma_a^p \partial_p$, $\overline{\ell}_a \in F_0^1(X_n^m)$. Соответствующее векторное поле $\overline{U} \in F_0^1(X_n^m)$ назовем допустимой обобщенной гамильтоновой системой.

Допустимые векторные поля образуют алгебру Ли относительно композиции взятия скобки Ли и проектирования. Легко проверить, что обобщенные гамильтоновы системы образуют ее подалгебру Ли, которая, в свою очередь, содержит в себе подалгебры Ли гамильтоновых систем.

В работе [2] был приведен пример обобщенной гамильтоновой системы, возникающей естественным образом на тотальном пространстве расслоения $\mu^* = ((X_n^m)^*, q, X_n)$. В настоящей работе мы приводим пример гамильтоновой системы, которая строится на пространстве $R(X_2)$ главного расслоения ортонормированных реперов риманова многообразия X_2. Структурной группой такого расслоения является группа ортогональных матриц $O(2)$. Обозначим буквой $\overline{C}$ фундаментальное векторное поле на $R(X_2)$, определенное элементом $\left\|\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 \end{array}\right\|$ алгебры Ли L кососимметричных матриц $\left\|\begin{array}{c|c} 0 & \lambda \\ \hline -\lambda & 0 \end{array}\right\|$, $\lambda \neq 0$. Имеет место разложение $[\overline{B}_1, \overline{B}_2] = K\overline{C}$, где B_1 и B_2 – горизонтальные векторные поля, определенные связностью Леви-Чевиты ∇, K – кривизна пространства X_2. Если отождествить алгебру L с алгеброй Ли действительных чисел, то форма связности ω превращается в 1-форму на $R(X_2)$, обладающую тем свойством, что $\omega(B_1) = \omega(B_2) = 0$, $\omega(\overline{C}) = 1$. Если $K \neq 0$, то форма $d\omega$ является д.с.с. для горизонтального распределения связности ∇.

Рассматривая кривизну K как функцию на $R(X_2)$, построенную на слоях, строим соответствующую ей допустимую гамильтонову систему.

$$\overline{\xi} = -\frac{\partial K}{\partial x^2}\overline{\varepsilon}_1 + \frac{\partial K}{\partial x^1}\overline{\varepsilon}_2,$$

где $\overline{\varepsilon}_a = \dfrac{\partial}{\partial x^a} - \Gamma_a \dfrac{\partial}{\partial x^3}$, (x^1, x^2, x^3) – специальная система координат на $R(X_2)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вагнер В. В.* Дифференциальная геометрия неголономных многообразий // VII Междунар. конкурс на соискание премии им. Н. И. Лобачевского. Казань, 1939. С. 195 - 262.

2. *Галаев С. В., Гохман А. В.* Гамильтонова система в неголономном случае. Саратов, 1999. 10 с. Деп. в ВИНИТИ 26.03.99. № 928-В99.

УДК 514.764

С. В. Галаев, В. Т. Челышев

О ДОПУСТИМЫХ ТЕНЗОРНЫХ СТРУКТУРАХ НА НЕГОЛОНОМНОМ МНОГООБРАЗИИ

На неголономном многообразии X_n^m введено понятие *допустимой финслеровой структуры* и строится дифференциально-геометрический объект соответствующей ей *финслеровой связности.* Используя X_n^m как базу, можно построить ещё одно *неголономное многообразие* X_{n+m}^{2m}, на котором индуцируется *допустимая риманова структура*. Получены коэффициенты соответствующей римановой связности.

An admissible Finsler structure on a *nonholonomic* X_n^m is introduced and the differential-geometric object of *Finsler connection* is. Using X_n^m as the base, it is possible to construct another nonholonomic manifold X_{n+m}^{2m} with the inducing admissible Riemannian structure . The object of the connection generated with this structure is obtained.

Неголономное многообразие X_n^m и его оснащение X_n^{n-m} (см. [1]) – это векторные подрасслоения касательного расслоения $TX \xrightarrow{\pi} X = X_n$, причём $TX = X_n^m \oplus X_n^{n-m}$. Пусть на X существует атлас из таких карт $\kappa(x) = \left(x^\alpha\right)_{\alpha=1}^n$, что $\left(\partial/\partial x^p\Big|_x\right)_{p=m+1}^n$ – базис слоя $\left(X_n^{n-m}\right)_x$. Закон преобразования таких карт:

$$x^{a'} = x^{a'}\left(x^a\right),\ x^{p'} = x^{p'}\left(x^a, x^p\right),\quad a, a' = 1,\dots,m;\ p, p' = m+1,\dots,n. \qquad (1)$$

Пусть $e_a = \partial_a - \Gamma_a^p \partial_p$ – поля векторов, допустимых для X_n^m, причём $dx^a(e_b) = \delta_b^a$, как в [2]. Тогда $[e_a e_b] = M_{ab}^p \partial_p \neq 0$, так как X_n^m неголономно.

Карта κ определяет на X_n^m карту $\tilde{\kappa}(\xi) = (x^\alpha, x^{n+a})$, где $\xi = x^{n+a} e_a$.

Тогда (1) дополняется формулой $x^{n+a'}=\dfrac{\partial x^{a'}}{\partial x^{a}}x^{n+a}$.

Пусть теперь O_X – образ нулевого векторного поля и на $X_n^m \setminus O_X$ задана такая дифференцируемая функция L, что

1) $L\left(x^\alpha,\lambda x^{n+a}\right)=\lambda L\left(x^\alpha,x^{n+a}\right)\ \forall\lambda>0$,

2) $L^2_{\cdot a\cdot b}\xi^a\xi^a=\dfrac{\partial^2 L^2}{\partial x^{n+a}\partial x^{n+b}}\xi^a\xi^a>0\forall\xi\neq 0$.

Назовём L *финслеровой структурой на* X_n^m. При $m=n$ получаем $X_n^m=TX_n$ и L совпадает с финслеровой структурой, введённой в [3].

Пусть $g_{ab}=\dfrac{1}{2}L^2_{\cdot a\cdot b}$, $\Gamma^a=g^{ab}(\partial_c L^2_{\cdot b}x^{n+c}-\partial_b L^2)$, $\Gamma^a_b=\Gamma^a_{\cdot b}=\Gamma^a_{bc}x^c$, $\Gamma^{\cdot b}_p=0$. Полученный геометрический объект (Γ^a_b,Γ^a_p) назовём *объектом допустимой инфинитезимальной связности на* X_n^m. Он даст следующее поле неголономного репера на базе X_n^m:

$$\varepsilon_a={}^H e_a=\partial_a-\Gamma^p_a\partial_p-\Gamma^b_a\partial_{n+b},\ \varepsilon_p={}^H\partial_p \text{(горизонтальные лифты)},$$

$$\varepsilon_{n+a}={}^V e_a \text{(вертикальные лифты)}.$$

При этом $[\varepsilon_a\varepsilon_b]=M^{\ p}_{ab}\partial_p+R^c_{ab}\partial_{n+c}$, где $M^{\ p}_{ab}=-2\left(\partial_{[a}\Gamma^p_{b]}+\partial_q\Gamma^p_{[b}\cdot\Gamma^q_{a]}\right)$, $R^c_{ab}=-2\left(\partial_{[a}\Gamma^{n+c}_{b]}+\partial_q\Gamma^{n+c}_{[b}\cdot\Gamma^q_{a]}+\partial_{n+d}\Gamma^{n+d}_{[b}\cdot\Gamma^q_{a]}\right.$, $[\varepsilon_a\partial_{n+b}]=L^c_{ab}\partial_{n+c}$, где $L^c_{ab}=\partial_{n+b}\Gamma^{n+c}_a$.

Подсистемы этого базиса задают распределения на X_n^m:
(ε_{n+a})– вертикальное $VT=VT\left(X_n^m\right)={}^V X_n^m$ и
$\left(\varepsilon_A\right)_{A=1}^{2m}=(\varepsilon_a,\varepsilon_{n+a})$– *неголономное* $X^{2m}_{n+m}={}^H X_n^m\oplus{}^V X_n^m$.

На X_n^m существует *допустимая риманова метрика* $\tilde g=g_{ab}(dx^a\otimes dx^b+dx^{a+n}\otimes dx^{b+n})$, а также может быть рассмотрена *почти комплексная структура* $J=\delta^b_a\left(dx^{n+a}\otimes\varepsilon_b-dx^a\otimes\varepsilon_{b+n}\right)$, относительно которой метрика $\tilde g$ *почти эрмитова*. Наконец, определим *почти симплектическую структуру* $\omega(\xi,\eta)=\tilde g(\xi,J\eta)$.

Введённая выше допустимая финслерова связность на X_n^m согласована с метрикой g и не имеет *кручения*, т.е. для допустимых векторных полей ξ и η

$$\nabla_{{}^H\xi}g=0,\qquad \nabla_{{}^H\xi}\eta-\nabla_{{}^H\eta}\xi=2\xi^a\left(\partial_{[a}\eta^b\right)\partial_{b]},$$

$$\nabla_{{}^V\xi}g=0,\qquad \nabla_{{}^V\xi}\eta-\nabla_{{}^V\eta}\xi=2\xi^a\left(\partial_{[a}\eta^b\right)\partial_{b]}.$$

Пусть $\nabla_{\varepsilon_a} e_b = \Gamma^c_{ab} e_c$, $\nabla_{\varepsilon_{n+a}} e_b = C^c_{ab} e_c$, тогда

$$\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd} \left(\varepsilon_a g_{db} + \varepsilon_b g_{da} - \varepsilon_d g_{ab}\right), \; C^c_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd} \left(g_{db\cdot a} + g_{da\cdot b} - g_{ab\cdot d}\right).$$

Теперь рассмотрим на X^{2m}_{n+m} связность без кручения для *допустимых* полей, согласованную уже с *римановой структурой* $\tilde{g}$:

$$\tilde{\nabla} \tilde{g} = 0, \qquad \tilde{\nabla}_{\varepsilon_A} \varepsilon_B = \Gamma^C_{AB} \varepsilon_C, \quad A, B, C = 1...m, (n+1)...n+m.$$

Её коэффициентами будут

$$\tilde{\Gamma}^{c}_{ab} = \Gamma^c_{ab}, \quad \tilde{\Gamma}^{n+c}_{ab} = -\frac{1}{2} g^{cd} \left(g_{ab\cdot d} - g_{df} R^f_{ab} \right), \; \tilde{\Gamma}^{c}_{a,n+b} = \frac{1}{2} g^{cd} \left(g_{da\cdot b} + g_{bf} R^f_{da} \right),$$

$$\tilde{\Gamma}^{n+c}_{a,n+b} = \Gamma^c_{ab} + \frac{1}{2} g^{cd} \left(g_{df} B^f_{ab} - g_{bf} B^f_{ad} \right), \quad \tilde{\Gamma}^{c}_{n+a,b} = \frac{1}{2} g^{cd} (g_{bd\cdot a} + g_{af} R^f_{bd}),$$

$$\tilde{\Gamma}^{n+c}_{n+a,b} = -\frac{1}{2} g^{cd} (g_{fa} B^f_{bd} + g_{af} B^f_{db}), \quad \tilde{\Gamma}^{n+c}_{n+a,n+b} = C^c_{ab}, \text{ где } B^c_{ab} = L^c_{ab} - \Gamma^c_{ab}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вагнер В. В.* Дифференциальная геометрия неголономных многообразий // VII Междунар. конкурс на соискание премии им. Н. И. Лобачевского. Казань, 1939. С. 195 – 262.

2. *Вагнер В. В.* Геометрия (n-1)-мерного неголономного многообразия в n-мерном пространстве // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М.: ГТТИ, 1941. Вып.5. С. 173 – 225.

3. *Рунд Х.* Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М.: Наука, 1981.

УДК 517.984

О. Б. Горбунов

О СИСТЕМЕ ДИРАКА С НЕИНТЕГРИРУЕМОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ ВНУТРИ ИНТЕРВАЛА

Рассмотрим систему Дирака вида

$$BY' + (P(x) + P_0(x))Y = \lambda Y, \; -\infty < x < +\infty, \tag{1}$$

где

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_2(x) & -p_1(x) \end{pmatrix}, \; P_0(x) = \frac{\mu}{x} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $p_k(x)$ – комплекснозначные функции, μ - комплексное число. Пусть для определенности $\mathrm{Re}\,\mu > 0, \mu + 1/2 \notin \mathrm{N}$ и пусть $p_k(x) \in W_1^1(-\infty,\infty)$, $|x|^{-2\,\mathrm{Re}\,\mu} |p_k(x)| \in L(-1,1)$, $k = 1,2$.

Система Дирака без особенности изучена достаточно полно (см., например, [1]). Целью работы является построение специальных фундаментальных систем решений (ФСР) для системы (1) и изучение их аналитических и асимптотических свойств и свойств соответствующих множителей Стокса. Эти ФСР могут быть использованы при изучении прямых и обратных задач для системы Дирака с особенностью внутри. Для оператора Штурма-Лиувилля подобные результаты получены в [2].

Для краткости удобно из векторов ФСР составить фундаментальную матрицу (ФМ), договоримся, что если некоторый символ обозначает ФМ, то этот же символ с индексом $j = 1,2$ – ее вектор-столбцы.

1. Сначала рассмотрим следующую систему в комплексной x-плоскости:

$$BY' + P_0(x)Y = Y\,. \tag{2}$$

Система (2) имеет ФМ $C(x) = \left(C_1(x), C_2(x)\right)$, где $C_j(x) = x^{\mu_j}\hat{C}_j(x)$, $\mu_j = (-1)^j\mu$, $j = 1,2$, $\left(\hat{C}_1(x), \hat{C}_2(x)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{2k}\begin{pmatrix} xc_{1,2k+1} & c_{2,2k} \\ -c_{1,2k} & xc_{2,2k+1}\end{pmatrix}$, $c_{10}c_{20} = 1$,

$$c_{j,2k} = (-1)^k c_{j0}\left(2^k k!\prod_{s=0}^{k-1}(2\mu_j + 1 + 2s)\right)^{-1}, \qquad c_{j,2k+1} = c_{j,2k}\left(2\mu_j + 1 + 2k\right)^{-1},$$

причем $\det C(x) \equiv 1$, $\hat{C}_j(x)$ – целые по x.

Здесь и далее считаем, что $x^\mu = \exp\left(\mu\left(\ln|x| + i\arg x\right)\right)$, $\arg x \in \left(-\pi, \pi\right]$.

ТЕОРЕМА 1. 1. Существует ФМ $e(x) = \left(e_1(x), e_2(x)\right)$, где $e_j(x)$ могут быть найдены из системы интегральных уравнений:

$$e_j(x) = \left(I - \frac{1}{2}P_0(x)\right)^{-1}\left(e_j^0(x) + \frac{1}{2}e^0(x)\int_{C_x} e^{0,-1}(t)\left(P_0'(t) - BP_0^2(t)\right)e_j(t)dt\right),$$

где $C_x = \{t = x + \xi, \xi \ge 0\}$, $e^0(x) = \begin{pmatrix} ie^{ix} & -ie^{-ix} \\ e^{ix} & e^{-ix}\end{pmatrix}$ –ФМ системы $BY' = Y$,

причем $\det e(x) \equiv 2i$ и $e_j(x) = e^{R_j x}\begin{pmatrix} R_j + O(x^{-1}) \\ 1 + O(x^{-1})\end{pmatrix}$ при $|x| \to \infty, |\arg x| \le \pi - \delta$,

где $R_1 = i, R_2 = -i$.

2. Пусть $C(x) = e(x)\beta^0$, тогда $\beta_{1j}^0 = (-1)^{j+1}\exp(-i\pi\mu_j)\beta_{2j}^0$, $j = 1,2$, $\beta_{21}^0\beta_{22}^0 = (4i\cos\pi\mu)^{-1}$.

Рассмотрим систему Дирака (1) с $P(x) \equiv 0$

$$BY' + P_0(x)Y = \lambda Y. \tag{3}$$

Обозначим $e(x,\lambda) := e(x\lambda)$ и $C_j(x,\lambda) := \lambda^{-\mu_j} C_j(x\lambda) = x^{\mu_j}\hat{C}_j(x\lambda)$, тогда, очевидно, что $e(x,\lambda)$, $C(x,\lambda) = (C_1(x,\lambda), C_2(x,\lambda))$ – ФМ системы (3), причем, $e_j(x,\lambda) = e^{R_j\lambda x}\begin{pmatrix} R_j + O((\lambda x)^{-1}) \\ 1 + O((\lambda x)^{-1}) \end{pmatrix}$. при $|\lambda x| \to \infty, |\arg(\lambda x)| \le \pi - \delta < \pi$, и $C(x,\lambda)$ – целая по λ.

Пусть $C(x,\lambda) = e(x,\lambda)\beta^0(\lambda)$, то $\beta^0_{kj}(\lambda) = \lambda^{-\mu_j}\beta^0_{kj}$, $k, j = 1,2$.

2. Рассмотрим систему (1) как возмущение системы (3).

Построим ФМ $S(x,\lambda) = (S_1(x,\lambda), S_2(x,\lambda))$ системы (1) из решений систем интегральных уравнений

$$S_j(x,\lambda) = C_j(x,\lambda) + \int_0^x C(x,\lambda)C^{-1}(t,\lambda)BP(t)S_j(t,\lambda)dt, \quad j = 1,2,$$

причем $\det S(x,\lambda) \equiv 1$, $S(x,\lambda)$ – целая по λ и $S(x,\lambda) = O(x^{\mu_j})$ при x и λ из компактов.

ТЕОРЕМА 2. При $x > 0$ система (1) имеет ФМ $E(x,\lambda) = (E_1(x,\lambda), E_2(x,\lambda))$ такую, что $E_j(x,\lambda)$ – регулярна в секторе $\arg\lambda \in (0, \pi - \varepsilon)$ при фиксированном $x \ne 0$ и достаточно большом $|\lambda|$, и при $|\lambda x| \ge 2|\mu|$ $E_j(x,\lambda) = e^{R_j\lambda x}\begin{pmatrix} R_j + O(|\lambda x|^{-\nu}) \\ 1 + O(|\lambda x|^{-\nu}) \end{pmatrix}$ $|\lambda| \to \infty$, равномерно по x из компакта, где $\nu = \begin{cases} 1, & \mathrm{Re}\mu \ge 1/2, \\ 2\,\mathrm{Re}\mu, & 0 < \mathrm{Re}\mu < 1/2. \end{cases}$ Функции $E_j(x,\lambda)$ удовлетворяют соответствующим системам интегральных уравнений

при $x \le a_\lambda \overset{df}{=} 2|\mu/\lambda|$

$$E_1(x,\lambda) = e_1(x,\lambda) + e(x,\lambda)\left(\int_0^\infty A(x,t,\lambda)E_1(t,\lambda)dt - \frac{1}{2}I_2 e^{-1}(a_\lambda,\lambda)Q(a_\lambda,\lambda)E_1(a_\lambda,\lambda)\right),$$

$$E_2(x,\lambda) = e_2(x,\lambda) + e(x,\lambda)\int_0^x G(t,\lambda)E_2(t,\lambda)dt,$$

при $x \ge a_\lambda$

$$E_1(x,\lambda) = e_1(x,\lambda) - \frac{1}{2}Q(x,\lambda)E_1(x,\lambda) + e(x,\lambda)\left(\int_0^\infty A(x,t,\lambda)E_1(t,\lambda)dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}I_1 e^{-1}(a_\lambda,\lambda)Q(a_\lambda,\lambda)E_1(a_\lambda,\lambda)\right),$$

$$E_2(x,\lambda) = e_2(x,\lambda) - \frac{1}{2}Q(x,\lambda)E_2(x,\lambda) + e(x,\lambda)\left(\int_0^x G(t,\lambda)E_2(t,\lambda)dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}e^{-1}(a_\lambda,\lambda)Q(a_\lambda,\lambda)E_2(a_\lambda,\lambda)\right),$$

где

$$A(x,t,\lambda) = \begin{cases} I_1 G(t,\lambda), & t \le x, \\ -I_2 G(t,\lambda), & t > x, \end{cases} \quad G(t,\lambda) = \begin{cases} e^{-1}(t,\lambda)BP(t), & t \le a_\lambda, \\ 1/2e^{-1}(t,\lambda)L(t,\lambda), & t > a_\lambda, \end{cases} \quad I_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L(x,\lambda) = Q'(x,\lambda) + BP(x) + Q(x,\lambda)B(P(x) + P_0(x) - \lambda I),$$

$$Q(x,\lambda) = \left(P_0(x) - \lambda I\right)^{-1} P(x).$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $S(x,\lambda) = E(x,\lambda)\beta(\lambda)$, тогда для множителей Стокса при $\arg\lambda \in (0, \pi - \varepsilon)$ имеет место асимптотика

$$\beta_{kj}(\lambda) = \lambda^{-\mu_j}\beta^0_{kj} \cdot (1 + O(|\lambda|^{-\nu})) \text{ при } |\lambda| \to \infty,\ k,j = 1,2.$$

ТЕОРЕМА 4. При $|\lambda x| \ge 1$

$$S_j(x,\lambda) = \beta^0_j \lambda^{-\mu_j} e^{2i\pi\mu_j m}\left(e^{-i\lambda x}\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}_0 - (-1)^j e^{i\pi\mu_j l} e^{i\lambda x}\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}_0\right), j = 1,2,$$

где $\left[\left(a_j\right)_{j=1,2}\right]_0 = \left(a_j + O(|\lambda x|^{-\nu})\right)_{j=1,2}$, $|\lambda| \to \infty$ равномерно по x из компакта, $\beta^0_1\beta^0_2 = \dfrac{1}{4i\cos\pi\mu}$, $l = \begin{cases} -1, \arg(x\lambda) \in \Pi_0, \\ 1, \arg(x\lambda) \in \Pi_{-1} \cup \Pi_1, \end{cases}$ $m = \begin{cases} 1, \arg\lambda \in \Pi_1, x < 0, \\ -1, \arg\lambda \in \Pi_{-1}, x > 0, \\ 0, \text{ост. сл.}, \end{cases}$

$\Pi_k = \{z : \arg z \in (\pi(5k-3)/(6-2k), \pi(5k+3)/(6+2k)]\}$, $k = 0, \pm 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. М.: Наука,1988.

2. *Юрко В. А.* О восстановлении дифференциальных операторов Штурма-Лиувилля с особенностями внутри интервала // Матем. заметки. 1998. Т. 64 № 1. С. 143 - 156.

УДК 517.54

Е. В. Григорьева

ОЦЕНКА ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛА ДЛЯ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ, БЛИЗКИХ К ТОЖДЕСТВЕННОЙ*

Пусть $S(M)$, $M>1$ – класс голоморфных однолистных в единичном круге D функций

$$f(z)=z+a_2z^2+\dots\ ,\ |z|<1, \tag{1}$$

таких, что $|f(z)|<M$. Функция Пика $P_M(z)\in S(M)$ отображает D на круг радиуса M с разрезом вдоль отрезка на отрицательном направлении вещественной полуоси.

Пользуясь разложением (1), рассмотрим двупараметрическое семейство линейных непрерывных функционалов пятого порядка

$$L(\alpha,\beta;f)=a_5+\alpha a_4+\beta a_3+3\alpha a_2,\ (\alpha,\beta)\in R^2$$

в классе $S(M)$. В настоящей статье найдено все множество значений (α,β), для которых $\max\limits_{f\in S(M)}\operatorname{Re}L(\alpha,\beta;f)=\operatorname{Re}L(\alpha,\beta;P_M)$ при M, близких к 1.

Решение этой конкретной экстремальной задачи основано на общей теореме автора [1], которая применительно к функционалу $L(\alpha,\beta;f)$ может быть сформулирована в следующем виде.

ТЕОРЕМА А [1]. Пусть тригонометрический многочлен

$$Q(u)=-2[\cos 4u+\alpha\cos 3u+\beta\cos 2u+3\alpha\cos u],\ Q''(\pi)<0,$$

достигает максимума на $[0,2\pi]$ только в точке $u=\pi$. Тогда существует $M=M(\alpha,\beta)>1$ такое, что для всех $M\in(1,M(\alpha,\beta))$ максимум $\operatorname{Re}L(\alpha,\beta;f)$ в классе $S(M)$ достигается только функцией Пика $P_M(z)$.

Как видно из теоремы А, решение поставленной задачи сводится к исследованию критических точек алгебраического многочлена четвертой степени. Этим обстоятельством продиктован выбор функционала $L(\alpha,\beta;f)$, точнее, специальный выбор коэффициента 3α при a_2, который позволяет провести полное исследование многочлена. Заметим, что соответствующая экстремальная задача для двупараметрического семейства функционалов четвертого порядка $N(\alpha,\beta;f)=a_4+\alpha a_3+\beta a_2$ решена Д. В. Прохоровым и Ж. Е. Васильевой [2].

Введем следующие обозначения. Положим

---

* Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-00842.

$$E_1 = \{(\alpha,\beta) : \beta > 4, \beta < 2\alpha, \beta < 3\alpha - 4\},$$
$$E_2' = \{(\alpha,\beta) : \alpha > 0, \beta < -3\alpha - 4\},$$
$$E_2'' = \{(\alpha,\beta) : \alpha > 0, \beta < 4, |\beta + 4| < 3\alpha\},$$

область E_2''' состоит из точек $(\alpha,\beta) \in E_2''$, удовлетворяющих неравенству

$$\alpha(9\alpha^2 - 32\beta + 128)^{\frac{3}{2}} > 27\alpha^4 - 144\alpha^2\beta + 576\alpha^2 + 128\beta^2 - \\ - 4096\alpha + 1024\beta + 2048, \qquad (2)$$

$E_2 = E_2' \cup E_2'''$, $E = E_1 \cup E_2$.

ТЕОРЕМА 1. Для всякой точки $(\alpha,\beta) \in E$ существует $M(\alpha,\beta) > 1$ такое, что для всех $M \in (1, M(\alpha,\beta))$ функция $P_M(z)$ доставляет максимум $\operatorname{Re} L(\alpha,\beta; f)$ в классе $S(M)$.

Доказательство. Согласно теореме А достаточно установить, что при $(\alpha,\beta) \in E$ тригонометрический многочлен $Q(u)$ достигает максимума на $[0,2\pi]$ только в точке $u = \pi$. После замены $y = \cos u$ тригонометрический многочлен $Q(u)$ сводится к алгебраическому многочлену четвертой степени

$$P(y) = Q(\arccos y) = -16y^4 - 8\alpha y^3 - (4\beta - 16)y^2 - 2 + 2\beta.$$

Осталось показать, что $P(y)$ достигает максимума на $[-1;1]$ только в точке $y = -1$.

Доказательство разбивается на два случая.

1. Пусть $\beta > 4$. В этом случае $P(y)$ имеет в точке $y = 0$ локальный максимум, а производная $P'(y)$ обращается в нуль в точках y_1, y_2, $y_3 = 0$, $y_1 < y_2 < y_3$. Многочлен $P(y)$ достигает максимума на $[-1;1]$ лишь в точке $y = -1$ при выполнении условий: $y_1 < -1$, $y_2 > -1$ и $P(-1) > P(0)$.

Совокупность первых двух из этих условий эквивалентна неравенству $\beta < 3\alpha - 4$, в то время, как третье условие приводит к неравенству $\beta < 2\alpha$. Таким образом, первый случай доказывает теорему 1 для $(\alpha,\beta) \in E_1$.

2. Пусть $\beta < 4$. В этом случае $P(y)$ имеет в точке $y = 0$ локальный минимум, а производная $P'(y)$ обращается в нуль в точках $y_1 < 0$, $y_2 = 0$, $y_3 > 0$. Многочлен $P(y)$ достигает максимума на $[-1;1]$ лишь в точке $y = -1$ в одном из двух вариантов.

a) $y_1 < -1$, $y_3 > 1$ и $P(-1) > P(1)$.

Третье условие приводит к неравенству $\alpha > 0$, а совокупность первых двух условий эквивалентна неравенству $\beta < -3\alpha - 4$. Таким образом, вариант *a*) доказывает теорему 1 для $(\alpha,\beta) \in E_2'$.

b) $y_1 < -1$, $y_2 < 1$ и $P(-1) > P(y_2)$.

Совокупность первых двух из этих условий определяет множество E_2'', в то время, как третье условие приводит к неравенству (2). Таким образом, вариант (b) доказывает теорему 1 для $(\alpha,\beta)\in E_2'''$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Григорьева Е. В.* Линейные функционалы в классе ограниченных однолистных функций // Тр. Петрозаводск. гос. ун-та. Сер. Математика. 2000. Вып.7.

2. *Prokhorov D., Vasileva Z.* Linear extremal problems for univalent function close to identity // Bull. Soc. Sci. Lettr. Lodz. 1995. Vol. 45. P. 11 - 47.

УДК 517.546

Л. Л. Громова

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СРЕДНИХ ДЛЯ МЕРОМОРФНЫХ ЗВЕЗДООБРАЗНЫХ ФУНКЦИЙ*

Обозначим через $\sum^*$ класс мероморфных функций $W=F(\zeta)$, регулярных и однолистных в области

$$D=\{\zeta:|\zeta|>1\},$$

за исключением простого полюса при $\zeta=\infty$, отображающих D на область, дополнение которой звездообразно относительно точки $w=0$.

Известно (см., например, [1]) интегральное представление для $F(\zeta)\in\sum^*$:

$$F(\zeta)=\zeta\exp\left\{2\int_{-\pi}^{\pi}\log\left(1-e^{it}\zeta^{-1}\right)d\mu(t)\right\}, \tag{1}$$

$|\zeta|>1, \mu(t)$ – неубывающая функция в промежутке $[-\pi;\pi]$ и $\int_{-\pi}^{\pi}d\mu(t)=1$.

Полагая $\mu(t)$ ступенчатой, имеющей скачки в точках t_k, $-\pi\le t_1<t_2<\cdots<t_n\le\pi$, получаем из (1) функции вида

$$F_n(\zeta)=\zeta\prod_{k=1}^{n}\left(1-\zeta^{-1}e^{it_k}\right)^{2\gamma_k}, \sum_{k=1}^{n}\gamma_k=1, \tag{2}$$

образующие подкласс $\sum_n^*\subset\sum^*$, всюду плотный в $\sum^*$.

ТЕОРЕМА. Для $F(\zeta)\in\sum_n^*$ справедливо неравенство

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-00842.

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|F'(\zeta)\right|^p d\theta \le \int_{-\pi}^{\pi}\left|F_0'(\zeta)\right|^p d\theta \tag{3}$$

при вещественном $p \ge 1$ и $\zeta = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 1$, где

$$F_0(\zeta) = \zeta\left(1 - \frac{e^{i\alpha}}{\zeta}\right)^{\lambda_1}\left(1 - \frac{e^{i\beta}}{\zeta}\right)^{\lambda_2}, \tag{4}$$

$\lambda_1, \lambda_2 \ge 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 2, \alpha, \beta$ – произвольные вещественные числа.

Доказательство. Предполагаем противное, что для экстремальной функции $F_0^n(\zeta)$ имеется более двух скачков. Положим, не уменьшая общности, что, например, $\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0, \gamma_3 > 0$, и покажем, что это приводит к противоречию.

Используем вариацию Х. Поммеренке [2]. Для этого введём вещественные числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0, \beta_4 = \cdots = \beta_n = 0$ и числа $\gamma_k^* = \gamma_k + \delta\beta_k \ge 0$ для достаточно малых δ такие, что $\sum_{k=1}^{n}\gamma_k = 1$. Обозначим через $F_n^*(\zeta)$ функцию, у которой в формуле (2) вместо γ_k записаны $\gamma_k^*, k = \overline{1, n}$. Для удобства в дальнейшем положим $F_n^*(\zeta) = F_*(\zeta)$. Тогда

$$M_{F_*}(\rho) = \int_{-\pi}^{\pi}\left|F_*'(\zeta)\right|^p d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\left|F_*'(\zeta)\right|^2\right)^{p/2} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\left|\frac{\zeta F_*'(\zeta)}{F_*(\zeta)}\right|^2 \left|\zeta^{-1}F_*(\zeta)\right|^2\right)^{p/2} d\theta.$$

Пусть $\zeta^{-1} = z$, $e^{it_k} = z_k$. Имеем

$$M_{F_*}(\rho) = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\left|\sum_{k=1}^{n}(\gamma_k + \delta\beta_k)\frac{1 + z_k z}{1 - z_k z}\right|^2 \prod_{k=1}^{n}\left|1 - z_k z\right|^{4(\gamma_k + \delta\beta_k)}\right)^{p/2} d\theta =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\left|c + \delta b\right|^2 \prod_{k=1}^{n}\left|1 - z_k z\right|^{4(\gamma_k + \delta\beta_k)}\right)^{p/2} d\theta,$$

где $c = \sum_{k=1}^{n}\gamma_k \frac{1 + z_k z}{1 - z_k z}$, $b = \sum_{k=1}^{3}\beta_k \frac{1 + z_k z}{1 - z_k z}$.

Введём вещественное l следующим равенством:

$$l = \sum_{k=1}^{3}\beta_k \log\left|1 - z_k z\right|.$$

В новых обозначениях имеем

$$M_{F_*}(\rho) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\left(|c|^2 + 2\delta \operatorname{Re}(\bar{c}b) + \delta^2 |b|^2\right)\left|zF_*\left(\frac{1}{z}\right)\right|^2 \exp\left(4\sum_{k=1}^{3}\beta_k \delta \log\left|1 - z_k z\right|\right)\right)^{p/2} d\theta =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\left(|c|^2 + 2\delta \operatorname{Re}(\bar{c}b) + \delta^2 |b|^2\right)\left|zF_*\left(\frac{1}{z}\right)\right|^2 \left(1 + 4\delta l + 8\delta^2 l^2 + O(\delta^3)\right)\right)^{p/2} d\theta =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\left|zF_n^0\left(\frac{1}{z}\right)\right|^p \left(|c|^p + \delta(p|c|^{p-2}\operatorname{Re}(\bar{c}b) + 2pl|c|^p) + \delta^2(p/2|c|^{p-2}|b|^2 + \right.$$

$$+ p(p/2-1)|c|^{p-4}[\operatorname{Re}(\bar{c}b)]^2 + 2p^2|c|^{p-2} l \operatorname{Re}(\bar{c}b) + |c|^p 4pl^2 +$$

$$\left. + 2p(p-2)l^2|c|^p) + O(\delta^3) \right) d\theta .$$

В силу экстремальности функции $F_n^0(\zeta)$ имеем неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|zF_n^0\left(\frac{1}{z}\right)\right|^p \left(\frac{|c|^{p-2}}{2}|b|^2 + \frac{p-2}{2}|c|^{p-4}[\operatorname{Re}(\bar{c}b)]^2 + \right.$$

$$\left. + 2p|c|^{p-2} l \operatorname{Re}(\bar{c}b) + 2pl^2|c|^p\right) d\theta \le 0. \qquad (5)$$

Выбираем теперь $\beta_k, k = 1,2,3,$ так, чтобы

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|zF_n^0\left(\frac{1}{z}\right)\right|^p |c|^{p-2} l \operatorname{Re}(\bar{c}b) d\theta = 0.$$

Легко доказать, что в формуле (5) второй сомножитель $P(\theta) \ge 0$ при $p \ge 1$. Отсюда следует, что для непрерывных функций $P(\theta) = 0$ или $b = 0$. Последнее равенство означает, что три различных точки $w_k = \dfrac{1+z_k z}{1-z_k z}$, k=1, 2, 3, лежат на одной прямой, чего не может быть, и экстремальная функция $F_0(\zeta)$ имеет вид (4).

Следствие. Из неравенства (3) следует оценка сверху для $|F'(\zeta)|$, $F(\zeta) \in \sum^*$, полученная ранее Р. Бутельером [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. 2-е изд. М.: Наука, 1966.

2. *Pommerenke Ch.* On meromorphic starlike function // Pacific Journal of Mathematics. 1963. Vol. 13, № 1. P. 221 - 235.

3. *Boutellier R.* Le théorème de déformation de la classe $\sum^*$ // C.R.Acad. Sci. Paris, 1978. T. 286. P. 33 - 35.

УДК 517.518.837

Е. В. Гудошникова

МНОГОМЕРНЫЕ АНАЛОГИ ОПЕРАТОРОВ САСА-МИРАКЬЯНА И БАСКАКОВА

В теории линейных положительных операторов хорошо известны и часто используются последовательности операторов Саса-Миракьяна [1,2]:

$$M_n(f,x)=\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!}e^{-nx},$$

и Баскакова [3]:

$$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n+k-1}{k}\left(\frac{x}{1+x}\right)^k(1+x)^{-n}.$$

Обе эти последовательности приближают непрерывную функцию на $[0,\infty)$.

J. Grof [4] построил аналог операторов M_n:

$$H_n(f,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)+(-1)^k f\left(-\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{(nx)^k}{2ch(nx)k!}.$$

Операторы H_n уже не являются положительными, но приближают непрерывную функцию на всей действительной оси.

Ниже будут указаны аналоги операторов M_n и B_n для функции многих переменных, приближающие функцию во всем пространстве R_r.

Введем обозначения:

для $m\in N_0$ запишем представление в двоичном формате

$m=m_1+m_2\cdot 2+m_3\cdot 2^2+\ldots+m_r\cdot 2^{r-1}$, где $m_k\in\{0;1\}$;

$\bar{x}=(x_1,\ldots,x_r)$;

$\bar{k}_{n,m}=\left(\frac{k_1}{n}(-1)^{m_1},\frac{k_2}{n}(-1)^{m_2},\ldots,\frac{k_r}{n}(-1)^{m_r}\right)$, где $k_j\in N_0$, $n\in N$;

$(\overline{mk})=m_1k_1+\ldots..+m_rk_r$.

Для функции $f:R_r\to R$ введем аналог модуля непрерывности как

$$\omega\ (f,\bar{h})=\sup_{\bar{\delta}\in Q(\bar{h})}\ \sup_{\bar{x}\in R_r}\left|f(\bar{x}+\bar{\delta})-f(\bar{x})\right|,$$

где $Q(\bar{h})=[0,h_1]\times[0,h_2]\times\cdots\times[0,h_r]$.

Рассмотрим операторы:

$$L_n(f;\bar{x})=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\dots\sum_{k_r=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{2^r-1}(-1)^{(\overline{mk})}f(\bar{k}_{n,m})\cdot p_{n,k_1,k_2,\dots,k_r}(\bar{x}),$$

где $p_{n,k_1,k_2,\dots,k_r}(\bar{x})=\prod_{i=1}^{r}\frac{(nx_i)^{k_i}}{2ch(nx_i)k_i!}$,

и операторы

$$S_n(f;\bar{x})=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\dots\sum_{k_r=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{2^r-1}(-1)^{(\overline{mk})}f(\bar{k}_{n,m})\cdot q_{n,k_1,k_2,\dots,k_r}(\bar{x}),$$

где $\quad q_{n,k_1,k_2,\dots,k_r}(\bar{x})=\prod_{i=1}^{r}w_{n,k_i}(x_i)\cdot\varphi_n(x_i),\qquad w_{n,k}(x)=\binom{n+k-1}{k}\left(\frac{x}{1+|x|}\right)^k,$

$$\varphi_n(x)=\frac{(1+2|x|)^n}{\{(1+|x|+x)^n+(1+|x|-x)^n\}(1+|x|)^n}.$$

ТЕОРЕМА 1. Для равномерно непрерывной функции $f:R_r\to R$

$$\left|L_n(f;\bar{x})-f(\bar{x})\right|\le\omega(f;\bar{h}_n)(1+r)(1+2^r),$$

где $\bar{h}_n=\left(\sqrt{\frac{|x_1|}{n}},\dots,\sqrt{\frac{|x_r|}{n}}\right)$.

Доказательство. Обозначим

$$f_i(\bar{x})=f(x_1,\dots,x_{i-1},-x_i,x_{i+1},\dots,x_r)=f(\bar{x}(i)).$$

Поскольку $L_n(f;\bar{x})=L_n(f_i,\bar{x}(i))$, доказательство утверждения теоремы сводится к случаю, когда все координаты $\bar{x}$ положительны. Для таких $\bar{x}$ обозначим

$$g(\bar{x})=\frac{1}{h_1\dots h_r}\int_0^{h_1}\dots\int_0^{h_r}f(\bar{x}+\bar{t})\,dt_1\dots dt_r,\quad \bar{x}_m=\left(x_1(-1)^{m_1},\dots,x_r(-1)^{m_r}\right),$$

где m и m_k – то же, что и выше. Тогда

$$\begin{aligned}\left|L_n(f;\bar{x})-f(\bar{x})\right|&\le\left|L_n(f;\bar{x})-L_n(g;\bar{x})\right|+\\&+\sum_{k_1=0}^{\infty}\dots\sum_{k_r=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{2^{r-1}}\left|g(\bar{k}_{n,m})-g(\bar{x}_m)\right|p_{n,k_1,\dots,k_r}(\bar{x})+\\&+\sum_{m=1}^{2^r-1}\left|g(\bar{x}_m)-g(\bar{x})\right|\prod_{i=1}^{r}\frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2ch(nx_i)}+\left|g(\bar{x})-f(\bar{x})\right|.\end{aligned}\tag{1}$$

Во-первых, очевидно, что

$$\left|g(\bar{x})-f(\bar{x})\right|\le\omega(f;\bar{h}_n)\quad\text{и}\quad\left|L_n(f;\bar{x})-L_n(g;\bar{x})\right|\le\omega(f;\bar{h}_n).$$

Во-вторых, применяя формулу конечных приращений, получаем оценку

$$\left|g(\bar{t})-g(\bar{x})\right| \le \left|\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial}{\partial x_i}g(\bar{\xi})(t_i-x_i)\right| \le \omega\,(f;\bar{h}_n)\sum_{i=1}^{r}\frac{|t_i-x_i|}{h_i}.$$

В третьих, имеет место соотношение

$$\sum_{m=1}^{2^r-1}\left[\sum_{i=1}^{r}\left\{\frac{x_i}{h_i}(1-(-1)^{m_i})\right\}\cdot\prod_{i=1}^{r}\frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2ch(nx_i)}\right]=\sum_{i=1}^{r}\frac{x_i\exp(-nx_i)}{h_i ch(nx_i)},$$

доказываемое по индукции. Поэтому, продолжая неравенство (1) и применяя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$\left|L_n(f;\bar{x})-f(\bar{x})\right| \le$$

$$\le \omega\,(f,\bar{h}_n)\left\{1+2^r+2^r\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{h_i}\sqrt{M_n((t-x_i)^2;x)}+\sum_{i=1}^{r}\frac{x_i\exp(-nx_i)}{h_i ch(nx_i)}\right\} \le$$

$$\le \omega\,(f;\bar{h}_n)(1+r)(1+2^r),$$

что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 2. Для равномерно непрерывной функции $f: R_r \to R$

$$\left|S_n(f;\bar{x})-f(\bar{x})\right| \le \omega\,(f;\bar{h}_n)(1+r)(1+2^r),$$

где $\bar{h}_n=\left(\sqrt{\dfrac{|x_1|}{n}},\ldots,\sqrt{\dfrac{|x_r|}{n}}\right)$.

Доказательство теоремы 2 во многом аналогично доказательству теоремы 1, хотя специфика функций, образующих ядро оператора Баскакова, вносит ряд трудностей технического характера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Миракьян Г. М.* Аппроксимирование непрерывных функций с помощью полиномов $e^{-nx}\sum_{k=0}^{n}c_{k,n}x^k$ // Докл. АН СССР. 1941. Т. 31. С. 201 - 205.

2. *Szasz O.* Generalization of S. Bernstein's polinomials to the infinite interval // J.Res.Nat.Bur.Standards, Sect.B. 1950. Vol. 45. P. 239 - 245.

3. *Баскаков В. А.* Об одной последовательности линейных положительных полиномиальных операторов // Уч. зап. КГПИ. Калинин, 1969. Т. 59. С. 79 - 99.

4. *Grof J.* Függvényapproximácó az egész számeqyensen, súlyozott hatványsorokkal // Mat. Lapok. 1977 - 1981. Vol. 29. № 1 - 3. C. 161 - 170.

УДК 513.88

А. П. Гуревич, А. П. Хромов

СУММИРУЕМОСТЬ ПО РИССУ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ $C^1[0,1]$*

Пусть L - оператор, порожденный дифференциальным выражением $l(y) = y''(x) + p(x)y(x)$, $x \in [0,1]$, $p(x) \in L[0,1]$, и регулярными по Биркгофу [1, с. 66, 67] краевыми условиями:

$$u_k(y) = a_{1k}y'(0) + a_{2k}y(0) + b_{1k}y'(1) + b_{2k}y(1) = 0, \quad k = 1,2. \qquad (1)$$

Обозначим через R_λ резольвенту оператора L. Для случая $p(x) \equiv 0$ будем использовать обозначения R_λ^0 и L_0 соответственно. Рассмотрим обобщенные средние по Риссу функции $f(x)$: $-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)R_\lambda f\, d\lambda$, где интегрирование ведется по окружностям $|\lambda| = r$, на которых нет собственных значений оператора L, а $g(\lambda,r)$ - произвольная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

а) при любом $r > 0$ $g(\lambda,r)$ непрерывна по λ в круге $|\lambda| \le r$ и аналитична в $|\lambda| < r$;

б) существует $C > 0$ такое, что при всех $r > 0$ и $|\lambda| \le r$ выполняется неравенство $|g(\lambda,r)| \le C$;

в) существует $\beta > 0$ такое, что $g(r\exp(i\varphi), r) = O(|\varphi - \pi|^\beta)$ (оценка равномерна по r);

г) $g(\lambda,r) \to 1$ при $r \to \infty$ и фиксированном λ.

Основным результатом настоящей статьи является

ТЕОРЕМА. Для того чтобы обобщенные средние по Риссу функции $f(x)$ сходились к ней по норме $C^1[0,1]$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x) \in C^1[0,1]$ и удовлетворяла краевым условиям (1).

Средние Рисса для дифференциальных операторов, когда $g(\lambda,r) = (1 - \frac{\lambda^4}{r^4})^\beta$, впервые изучались М. Стоуном [2]. Он показал равносуммируемость в $C[\delta, 1-\delta]$ $(0 < \delta < \frac{1}{2})$ средних любых двух дифференци-

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 00-01-00075) и программы "Ведущие научные школы" (проект № 00-15-96123).

альных операторов одного и того же порядка с произвольными регулярными краевыми условиями.

Полученный нами результат является усиление теоремы 15 из [3] для случая $n=2$. Суммируемость по Риссу для интегральных операторов изучалась в [4].

Доказательство основной теоремы базируется на следующих вспомогательных утверждениях.

ЛЕММА 1. Пусть $f(x)\in C^1[0,1]$, а $f_0(x)\in C^2[0,1]$ и удовлетворяет (1). Тогда если на окружностях $|\lambda|=r$ нет собственных значений операторов L и L_0, то справедливы формулы:

$$f^{(k)}(x)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)D_x^k R_\lambda f\,d\lambda = f^{(k)}(x)(1-g(\lambda_0,r))+g(\lambda_0,r)(f^{(k)}(x)-$$

$$-f_0^{(k)}(x))+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\frac{g(\lambda,r)}{\lambda-_0}D_x^k R_\lambda h_0\,d\lambda+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)D_x^k R_\lambda^0(f-f_0)\,d\lambda- \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)D_x^k R_\lambda(qR_\lambda^0(f-f_0))\,d\lambda,$$

где $k=0,1$; $D_x^k=\dfrac{d^k}{dx^k}$; λ_0 - произвольное комплексное число, не являющееся собственным значением операторов L и L_0, $|\lambda_0|<r$ и $f_0=R_{\lambda_0}h_0$.

Пусть $\lambda=-\rho^2$. Предположим, что $0\le\arg\rho\le\dfrac{\pi}{4}$ (остальные случаи аналогичны). В качестве фундаментальной системы решений уравнения $y''+\rho^2y=0$ возьмем $\exp\rho ix$ и $\exp(-\rho ix)$. Введем в рассмотрение функцию

$$g(x,t,\rho)=\begin{cases}\dfrac{i}{2\rho}e^{\rho i(x-t)}, & \text{если } t\le x\\ \dfrac{i}{2\rho}e^{\rho i(t-x)}, & \text{если } t\ge x\end{cases}.$$

ЛЕММА 2. Справедливо следующее представление:

$$R_\lambda^0 f=-\{e^{-\rho ix},e^{\rho ix}\}M^{-1}(\rho)\int\limits_0^1 U_x(g)f\,dt+\int\limits_0^1 g(x,t,\rho)f(t)\,dt,$$

где $M(\rho)=(U_{jk})_{j,k=1}^2$; $U_{j1}=U_j(e^{-\rho ix})$;
$U_{j2}=U_j(e^{\rho ix})$; $U_x(g)=\{U_1(g),U_2(g)\}^T$
(левые части краевых условий (1) применяются к $g(x,t,\rho)$ как функции x).

ЛЕММА 3. Предположим, что $f(x) \in C^1[0,1]$ и удовлетворяет (1). Тогда $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda,r) D_x^k R_\lambda^0 f\, d\lambda = O(\|f\|)$ при $r \to \infty$, где $\|f\|$ - норма $f(x)$ в $C^1[0,1]$; $k=0,1$.

Обозначим через Q_1 множество функций из $C^1[0,1]$, удовлетворяющих (1), а через $Q_2 = Q_1 \cap C^2[0,1]$.

ЛЕММА 4. Замыкание Q_2 в норме $C^1[0,1]$ совпадает с Q_1.

Отметим, что замыкание в $C[0,1]$ области определения дифференциального оператора впервые найдено в [5]. С помощью лемм 2 - 4 показывается, что правая часть (2) равномерно стремится к нулю при $r \to \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. 2-е изд. М.: Наука, 1969. 526 с.
2. *Stone M. H.* A comparison of the serios of Fouries and Birkhoff // Trans. Amer. Math. Sos. 1926. Vol. 28. P. 695 - 761.
3. *Kaufmann F. J.* Derived Birkhoff-series associated with $N(y) = \lambda P(y)$ // Results in mathematics. 1989. Vol. 15. P. 256 - 289.
4. *Гуревич А. П., Хромов А. П.* Суммируемость по Риссу спектральных разложений одного класса интегральных операторов // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Тез. докл. Воронежской зимней математической школы.Воронеж, 1999. С. 75.
5. *Хромова Г. В.* О регуляризации интегральных уравнений 1-го рода с ядром Грина // Изв. вузов. Математика. 1972. Т. 8(123). С. 94 - 104.

УДК 519.853.3

С. И. Дудов, И. В. Златорунская

ОБ ОЦЕНКЕ ГРАНИЦЫ ВЫПУКЛОГО КОМПАКТА ШАРОВЫМ СЛОЕМ*

1. Пусть D – заданный выпуклый компакт из конечномерного пространства R^p, C – его граница, а функция $n(x)$ удовлетворяет на R^p аксиомам нормы. Обозначим через

$$R(x) = \max_{y \in C} n(x-y), \quad r(x) = \min_{y \in C} n(x-y).$$

---

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-00048.

Тогда задачу о построении шарового, в смысле нормы $n(\cdot)$, слоя наименьшей толщины, с центром из компакта D и содержащего его границу, можно записать в виде

$$\Phi(x) \equiv R(x) - r(x) \to \min_{x \in D}. \qquad (1)$$

Для случая евклидовой нормы эта задача рассматривалась рядом авторов [1 - 9]. Видимо первыми, кто рассматривал близкую задачу, но на плоскости, то есть при $p=2$, были М. Окань [1] и А. Лебег [2]. В [1] предложен способ построения кругового кольца наименьшей ширины, содержащего заданное конечное семейство точек. В [2] выяснено, что решение рассматриваемой там задачи наилучшего приближения тесно связано с нахождением кругового кольца наименьшей ширины, содержащего границу двумерного выпуклого компакта. Свойства этого кольца, а затем и шарового слоя наименьшей толщины, содержащего границу выпуклого компакта в R^p, изучались в [3 - 9].

В данной заметке анонсируются результаты исследования задачи (1) для произвольной используемой нормы.

2. Будем использовать следующие обозначения:

$$Q^R(x) = \{y \in C / n(x-y) = R(x)\}, \quad Q^r(x) = \{y \in C / n(x-y) = r(x)\},$$

$K(x,A)$ – конус возможных направлений множества A в точке x; $\langle x, y \rangle$ - скалярное произведение элементов x и y; $K^+ = \{w \in R^p / \langle v, w \rangle \geq 0, \forall v \in K\}$ - конус, сопряженный к конусу K; coA, $intA$ – соответственно выпуклая оболочка и внутренность множества A; $n^*(w) = \max_{n(v) \leq 1} \langle v, w \rangle$; $A - B = \{a - b / a \in A, \ b \in B\}$ - разность множеств A и B; $Kv(R^p)$ - пространство непустых выпуклых компактов из R^p; 2^{R^p} - множество всех подмножеств из пространства R^p.

Известно, что функция $R(x)$ является выпуклой на R^p, а ее субдифференциал можно выразить формулой [10]:

$$\underline{\partial R(x)} = co\{\partial n(x-y) / y \in Q^R(x)\}. \qquad (2)$$

Функция $r(x)$ является вогнутой на множестве D, причем её условный супердифференциал выражает формула [11]

$$\overline{\partial r(x)} = co\{w \in K^+(z, D) / n^*(w) = 1, \ z \in Q^r(x)\}, \quad x \in D. \qquad (3)$$

Таким образом, целевая функция $\Phi(x)$ в задаче (1) является выпуклой на D и, следовательно, задача (1) является задачей выпуклого программирования.

3. Приведём некоторые результаты исследования задачи (1). Отметим сразу, что существование решения задачи (1) следует из непрерывности функции $\Phi(x)$ и компактности множества D. Необходимое и достаточное условие её решения отражает

ТЕОРЕМА 1. Для того чтобы точка $x_0 \in D$ была решением задачи (1) необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла соотношению

$$\left(\underline{\partial R(x_0)} - \overline{\partial r(x_0)}\right) \bigcap K^+(x_0, D) \neq \varnothing,$$

где $\underline{\partial R(x)}$ и $\overline{\partial r(x)}$ определяются формулами (2) и (3) соответственно.

Для случая евклидовой нормы решение задачи (1), как доказано в [7], является единственным и, как следует из работы [9], соответствующий центр шарового слоя принадлежит внутренности компакта D, если она не пуста. В общем же случае имеет место

ТЕОРЕМА 2. Если норма $n(\cdot)$ является строго квазивыпуклой функцией, то задача (1) имеет единственное решение.

Простые примеры показывают, что для случая нормы, не являющейся строго квазивыпуклой функцией, решение задачи может быть неединственным, и соответствующий центр шарового слоя может находиться на границе D, даже если $\operatorname{int} D \neq \varnothing$.

4. Обозначим через $\mathrm{X}(D)$ множество всех центров шаровых слоев наименьшей толщины, содержащих границу D. $\mathrm{X}(D)$ можно рассматривать как многозначное отображение $\mathrm{X}(\cdot) : Kv(R^p) \to 2^{R^p}$. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 3. Многозначное отображение $\mathrm{X}(\cdot)$ является полунепрерывным сверху на $Kv(R^p)$.

Следствие. Если $n(\cdot)$ – строго квазивыпуклая норма, то отображение $\mathrm{X}(\cdot) : Kv(R^p) \to 2^{R^p}$ является однозначным и непрерывным на $Kv(R^p)$.

Рассмотрим функцию $h_0(D)$, сопоставляющую выпуклому компакту $D \in Kv(R^p)$ наименьшую толщину шарового слоя, содержащего границу D. Для нее справедлива

ТЕОРЕМА 4. Функция $h_0(\cdot)$ является липшицевой с константой, равной единице на пространстве $Kv(R^p)$ с метрикой

$$h(A,B) = \max\left\{\sup_{x \in A} \inf_{y \in B} n(x-y),\ \sup_{y \in B} \inf_{x \in A} n(x-y)\right\},$$

то есть

$$\left|h_0(D_1) - h_0(D_2)\right| \leq h(D_1, D_2), \qquad \forall\ D_1, D_2 \in Kv(R^p).$$

В заключение отметим, что в случае евклидовой нормы задача (1) эквивалентна задаче о наилучшем приближении выпуклого компакта D шаром $B_n(x,r) = \{y \in R^p \,/\, n(x-y) \leq r\}$, а именно задаче

$$h(D, B_n(x,r)) \to \min_{x \in R^p, r \le 0}.$$

Этот факт доказан в работе [9]. Авторам известны и другие случаи, когда такая эквивалентность имеет место.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *D'Ocagne M.* Sur certain figures minimales // Bull. Soc. Math. France. 1884. Vol. 12. P. 168 - 177.

2. *Lebesque H.* Sur quelques questions de minimum, relatives and courbes orbiformes, et sur leurs rapportes avec le calcul des variations // J. Math. Pures. Appl. 1921. Vol. 4. P. 67 - 96.

3. *Bonnesen T., Fenchel W.* Theory der konvexen Korper. Berlin: Springer – Verl., 1934.

4. *Vincze St.* Über den Minimalkreisring einer Eiline // Acta. Sci. Math. Acta. Univ. Szeget. 1947. Bd. 11, № 3. S. 133 - 138.

5. *Vincze I.* Über Kreisringe, die eine Eiline einschlissen // Studia Sci. Math. Hungrica. 1974. Bd. 9, № 1/2. S. 155 - 159.

6. *Kritikos N.* Über konvexe Flachen und einschliessende Kugeln // Math. Ann. 1927. Bd. 96. S. 583 - 586.

7. *Barany I.* On the minimal ring Containing the boundary of convex body // Acta. Sci. Math. Acta. Univ. Szeged. 1988. Vol. 52, № 1/2. P. 93 - 100.

8. *Zucco A.* Minimal shell of a typical convex body // Proc. Amer. Math. Soc. 1990. Vol. 109, № 3. P. 797 - 802.

9. *Никольский М. С., Силин Д. Б.* О наилучшем приближении выпуклого компакта элементами аддиала//Тр. МИ РАН. 1995. Т. 211. С. 338 - 354.

10. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.

11. *Дудов С. И.* Субдифференцируемость и супердифференцируемость функции расстояния // Матем. заметки. 1997. Т. 61, № 4. С. 530 - 542.

УДК 514.76

Ю. И. Ермаков

УСЛОВИЯ ИНВАРИАНТНОСТИ ПОСЛОЙНЫХ ОБЪЕКТОВ ТВИСТОРНЫХ РАССЛОЕНИЙ

1. Воздействие сил эволюционного развития неотвратимо ведёт к формированию целостного взгляда на окружающий мир, что в научном познании стало осознаваться как необходимость перехода к новой системе взглядов, к новой парадигме, способной объединить разные виды знания о действительности. Так, наблюдавшееся долгие годы разобщение между теоретической физикой и геометрией в настоящее время начинает исчезать. Современное понятие калибровочного поля, возникшее в физике, имеет глубокие корни в физических явлениях. Поэтому физики с большим

изумлением восприняли весть о том, что калибровочные теории, с математической точки зрения, являются теорией связностей в расслоениях, теорией, разработанной математиками безотносительно к физической реальности. Теория связностей дала надёжный математический фундамент многим физическим понятиям, а калибровочные теории наполнили физическим смыслом многие понятия математики (см., например, [1]). Построение квантовой теории в современной физике требует от математического аппарата такого понятия, как топологическая сложность, поэтому для современной математической физики недостаточно одних локальных методов, необходим переход к глобальным аспектам геометрии.

Прототипом калибровочных теорий служит теория электромагнитного поля. Характеристика электромагнитного поля – электромагнитный потенциал, говоря геометрическим языком, определяет связность в главном расслоении с типовым слоем $U(1)$ над пространством Минковского. Поле электромагнитных сил является кривизной этой связности. Неабелевы калибровочные теории получаются заменой группы $U(1)$ компактной неабелевой группой Ли G. Тогда потенциал – это объект связности в главном G-расслоении над пространством Минковского, калибровочное поле есть кривизна этой связности. Волновая функция, описывающая состояние объекта, является сечением векторного расслоения, ассоциированного с главным.

Калибровочная теория впервые возникла в физике при попытках Г. Вейля объединить общую теорию относительности и магнетизм. Однако до сего времени проблема квантования гравитации не поддаётся решению. Английский математик и физик Роджер Пенроуз и его последователи надеются решить эту и другие проблемы с помощью твисторной программы [2], начало которой кладёт устанавливаемое соответствие между пространством твисторов и пространством Минковского. Более того, в настоящее время вынашивается более грандиозный замысел объединения с помощью калибровочной теории всех четырёх фундаментальных взаимодействий, создание теории супергравитации.

Целью настоящей работы является вывод условий инвариантности послойных объектов (сечений) относительно однопараметрических групп преобразований в общих векторных расслоениях, действительных или комплексных. Применение этих условий к расслоениям, возникающим в калибровочных теориях, приводит к некоторым характеристикам калибровочных полей Янга-Миллса.

2. Математическое описание калибровочных теорий естественным образом осуществляется с помощью расслоений, типовым слоем которых является некоторая группа Ли G, т. е. с помощью главных расслоений. Основной целью квантовой теории поля является стремление поместить все элементарные частицы в те же рамки, что и фотоны, кванты электромаг-

нитного излучения. Геометрическая интерпретация возникающей при этом физической ситуации такова. Рассматривается структурированная частица, находящаяся в точке x пространства R^4 и имеющая внутреннюю структуру, т. е. набор внутренних состояний, отмеченных элементами группы G. При перемещении частицы её внутреннее пространство движется вместе с ней. Таким образом, полное пространство M всех состояний такой частицы представляет собой расслоённое пространство со структурной группой G. В приложениях обычно рассматриваются пространства, на которых группа G действует линейно. Такие расслоения называются векторными расслоениями со структурной группой G.

Структура векторного расслоения (M, X, p) класса $C^r(r=1, ..., \infty)$ может быть определена [3] C^r-атласом векторных карт (вещественных или комплексных) на множестве M, заданном вместе с сюръективным отображением p на базисное многообразие X. Каждая векторная карта $\overline{C}=(U, \overline{æ}, E)$ на M задаётся биективным отображением $\overline{æ}$ множества $\overset{-1}{p}(U)$ на декартово произведение $U \times E$ открытого множества U на базе X на векторное пространство E, причём выполняется условие $p\left(\overset{-1}{\overline{æ}}(x, v)\right)=x,\ x \in U,\ v \in E$. Если задана векторная карта $\overline{C}$, то для каждой точки $x \in U$ определяется биективное отображение $\overline{C}_x$ из E на слой $M_x=\overset{-1}{p}(x)$ формулой $\overline{C}_x(v)=\overset{-1}{\overline{æ}}(x, v)$. Две векторные карты $\overline{C}=(U, \overline{æ}, E)$ и $\overline{C}'=\left(U', \overline{æ}', E\right)$ на M называются C^r-согласованными, если существует C^r-морфизм λ из открытого подмногообразия $U \cap U'$ в группу $GL(E)$ автоморфизмов линейного пространства E такой, что для любой точки $x \in U \cap U'$ имеет место равенство $\overline{C}_x=\overline{C}'_x \circ \lambda(x)$. Морфизм λ является функцией перехода для векторных карт $\overline{C}$ и $\overline{C}'$. Если x – произвольная точка базы X, то на слое M_x существует одна и только одна структура линейного пространства такая, что для всякой векторной карты $\overline{C}$ отображение $\overline{C}_x : E \to M_x$ есть изоморфизм. Задание базиса (e_i), $i=1, \dots, m$, типового слоя E определяет поле слоевых базисов $e_i(x)=\overline{C}_x(e_i)$, которое в физических приложениях называют калибровкой. При построении калибровочной теории для некомпактной группы $GL(m, \mathbf{C})$ геометрически удобно рассматривать представление этой группы в пространстве $\mathbf{C}^m$ и иметь дело с комплексными векторными расслоениями. Калибровочное преобразование есть функция $g(x) \in GL(m, \mathbf{C})$, которая задаёт замену базиса в каждой точке x. Свойство локальной тривиальности векторных карт всегда обеспечивает существование локальной калибровки. Глобальные калибровки существуют не всегда. Твисторные расслоения выделяются из общих векторных расслоений фиксированием в качестве типового слоя твисторного пространства, которым является пространство $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{C}^4$ с заданной эрмитовой формой сигнатуры $(+, +, -, -)$.

Применение векторных функторов к векторным расслоениям приводит снова к векторным расслоениям, на которых автоматически возникает структура, переносимая с исходных векторных расслоений. Если, скажем, N – векторный функтор (контравариантный, ковариантный или со смешанными переменными), то $\left(N(M), X, p^*\right)$ есть векторное расслоение с типовым словом $N(E)$, полученное действием функтора N на векторное расслоение (M, X, p) с типовым слоем E. Калибровка на исходном расслоении переходит в калибровку на векторном расслоении, порождённом действием этого функтора.

Однопараметрическая группа (о.г.) послойных φ_t-диффеоморфизмов ψ_t векторного расслоения (M, X, p) - это пара дифференцируемых отображений $(\Phi, \Psi); \Phi : R \times X \to X$, $\Psi : R \times M \to M$ таких, что для каждого $t \in R$ определены диффеоморфизм $\varphi_t : X \to X$ и φ_t-диффеоморфизм ψ_t, удовлетворяющие условиям $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$, $\psi_{t+s} = \psi_t \circ \psi_s$, $t, s \in R$. О.г. (φ_t, ψ_t) определяет на тотальном пространстве M проектируемое векторное поле B; задание такого векторного поля изначально определяет в общем случае локальную о.г. Производная Ли сечения $A : X \to M$ вдоль векторного поля B определяется формулой $(L_B A)_x = -\frac{d}{dt}\left(\psi_{t\varphi_t^{-1}(x)}\left(A_{\varphi_t^{-1}(x)}\right)\right)\Big|_{t=0}$.

Сечение A инвариантно при действии (φ_t, ψ_t) для каждого t тогда и только тогда, когда $L_B A = 0$. Понятие производной Ли естественным образом распространяется на послойные объекты, полученные действием функторов. Если N – контравариантный (для определенности) функтор, то производная Ли объекта W типа N относительно о.г. (φ_t, ψ_t) определяется как производная Ли сечения $W : X \to N(M)$ относительно индуцированной о.г. $\left(\varphi_t, N\left(\psi_t^{-1}\right)\right)$ векторного расслоения $\left(N(M), X, p^*\right)$. Равенство $L_B W = 0$ является необходимым и достаточным условием инвариантности послойного объекта W.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Атья М.* Геометрия и физика узлов. М., 1995.

2. *Пенроуз Р.* Твисторная программа // Твисторы и калибровочные поля. М., 1983. С. 13 – 27.

3. *Ермаков Ю. И.* О внутренних связностях и вторичных характеристических классах векторных расслоений с послойной тензорной структурой // Изв. вузов. Матем. 1986. № 1. С. 33 – 43.

УДК 517.928

И. И. Ефремов

БАЗИСНОСТЬ РИССА СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ИНДЕФИНИТНЫХ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ*

Введение. Пусть на отрезке [0,1] задан линейный квазидифференциальный (к.д.) оператор, определяемый выражением

$$D_n y = y^{[n]},$$

$$D_k y = y^{[k]} = iP_{kk}\frac{d}{dx}y^{[k-1]} + \sum_{j=0}^{k-1} P_{kj}y^{[j]}, \text{ где } k = n, n-1, \dots, 1, \tag{1}$$

$$D_0 y = P_{00}y, \qquad P_{kj} \in L[0,1]$$

и линейно-независимыми нормированными [1, с. 65] краевыми условиями

$$U_\nu(y) = U_{\nu 0}(y) + U_{\nu 1}(y) = 0, \qquad \nu = 1,2,\dots,n,$$

$$U_{\nu 0}(y) = \alpha_\nu y^{[k_\nu]}(0) + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \alpha_{\nu j} y^{[j]}(0), \tag{2}$$

$$U_{\nu 1}(y) = \beta_\nu y^{[k_\nu]}(1) + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \beta_{\nu j} y^{[j]}(1),$$

где $\alpha_{\nu j}, \beta_{\nu j} \in C$, $|\alpha_\nu| + |\beta_j| > 0$ для $1 \le \nu \le n$, $n-1 \ge k_1 \ge \ldots \ge k_n \ge 0$, $k_q > k_{q+2}$ для $q = 1,2,\dots,n-2$.

Если для любого $k = 0,1,\dots,n$ функции $P_{kk}(x)$ являются постоянными числами или ступенчатыми функциями (комплексными, отличными от 0), то оператор K, определенный (1), (2), называется индефинитным к.д. оператором.

Рассмотрим задачу о базисности Рисса собственных и присоединенных функций оператора K

$$Ky = \lambda y. \tag{3}$$

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 00-01-00075) и программы "Ведущие научные школы" (проект № 00-15-96123).

К.д. выражение $D_n y = y^{[n]}$ является обобщением линейного дифференциального выражения n-го порядка [1, с.13]

$$l(y) = y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \ldots + P_n y. \tag{4}$$

Спектральные задачи для оператора K являются обобщением спектральных задач о собственных и присоединенных функциях (с.п.ф.) для дифференциальных операторов с весовой функцией $r(x)$, т.е. задачи вида

$$ly = \lambda r(x) y. \tag{5}$$

Задачи, аналогичные (5), были предметом многочисленных исследований Лангера (см., например, [2]) и других авторов. В этих исследованиях $r(x)$ предполагалась достаточно гладкой функцией, а $l(y)$ имело специальный вид.

W. Eberhard, G. Freiling, A. Schneider (см., например, [3]) в наиболее общем виде рассмотрели спектральные задачи для дифференциальных операторов со ступенчатой весовой функцией $r(x)$. При этом предполагалось, что $r(x)$ принимает только действительные значения, коэффициент $P_1(x)$ в(4) либо тождественно равняется 0, либо является достаточно гладкой функцией, а краевые условия удовлетворяют определенным условиям, называемыми условиями регулярности. При этом вопрос о базисности Рисса с.п.ф. немецкими математиками не рассматривался.

Условия регулярности. Будем далее рассматривать следующие два случая:

$$P_{nn} \text{ - ступенчатая функция, } P_{kk} \equiv 1 \text{ для } k = 0,\ldots,n-1 \tag{6}$$

$$P_{00} \text{ - ступенчатая функция, } P_{kk} \equiv 1 \text{ для } k = 1,\ldots,n. \tag{7}$$

Пусть отрезок [0,1] разбит на $(m+1)$ интервалов $I_0, I_1, \ldots, I_m$,

$$I_0 = [a_0 = 0, a_1),\ I_1[a_1, a_2),\ \ldots,\ I_m = [a_m, a_{m+1}),$$
$$a_0 = 0 < a_1 < \ldots < a_m < a_{m+1} = 1.$$

Пусть в случае (6) $P_{nn}(x) = \dfrac{1}{r_p}$ для $x \in I_p$, $p = 0,1,\ldots,m$.

Пусть в случае (7) $P_{00}(x) = \dfrac{1}{r_p}$ для $x \in I_p$, $p = 0,1,\ldots,m$.

$$R_p = (-1)^{n+1} i^n r_p, \qquad p = 0,1,\ldots,m. \tag{8}$$

Пусть S - сектор ρ-плоскости, определенный в [4]. Тогда в S-секторе корни n-й степени из $(-R_k)$ - $\{\omega_{kj}\}_{j=1,\ldots n}$ можно занумеровать таким образом, что

$$\operatorname{Re}\rho\omega_{k1} \le \ldots \le \operatorname{Re}\rho\omega_{kn}, \qquad k = 0,1,\ldots,m, \qquad \rho \in S.$$

$$\theta(x_1 \ldots x_\sigma; x_\sigma \ldots x_n) = \begin{vmatrix} \alpha_1 x_1^{k_1} & \ldots & \alpha_1 x_\sigma^{k_1} & \beta_1 x_{\sigma+1}^{k_1} & \ldots & \beta_1 x_n^{k_1} \\ \alpha_2 x_1^{k_2} & \ldots & \alpha_2 x_\sigma^{k_2} & \beta_2 x_{\sigma+1}^{k_2} & \ldots & \beta_2 x_n^{k_2} \\ \ldots & & \ldots & \ldots & & \ldots \\ \alpha_n x_1^{k_n} & \ldots & \alpha_n x_\sigma^{k_n} & \beta_n x_{\sigma+1}^{k_n} & \ldots & \beta_n x_n^{k_n} \end{vmatrix}$$

Определение. Будем говорить, что оператор K порожден регулярными краевыми условиями, если в любом S-секторе отличны от 0 следующие определители:

для $n = 2\mu$

$$\theta(i\omega_{01},\ldots,i\omega_{0\mu}; i\omega_{m\mu+1},\ldots,i\omega_{\mu n}),$$
$$\theta(i\omega_{01},\ldots,i\omega_{0\mu-1}, i\omega_{0\mu+1}; i\omega_{m\mu+1},\ldots,i\omega_{\mu n}),$$
$$\theta(i\omega_{01},\ldots,i\omega_{0\mu}; i\omega_{m\mu}, i\omega_{m\mu+2},\ldots,i\omega_{\mu n});$$

для $n = 2\mu - 1$

$$\theta(i\omega_{01},\ldots,i\omega_{0\mu-1}; i\omega_{m\mu},\ldots,i\omega_{\mu n}),$$
$$\theta(i\omega_{01},\ldots,i\omega_{0\mu}; i\omega_{m\mu+1},\ldots,i\omega_{\mu n}).$$

В этом случае имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть для $n = 2\mu$ $\arg r_i - \arg r_j \ne 0$ при $i \ne j$,

для $n = 2\mu - 1$ $\arg r_0 = \ldots = \arg r_m$, где $0 \le \arg r_i$, $\arg r_j < 2\pi$.

Оператор K порожден регулярными краевыми условиями. Тогда собственные и присоединенные функции оператора K, определяемого условиями (1), (2), в случае (6) или (7), образуют базис Рисса в пространстве $L^2[0,1]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

2. *Langer R.* The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order, with spectral reference to the Stokes phenomenon // Bull. Amer. Math. Soc. 1934. Vol. 40. P. 545 - 582.

3. *Eberhard W., Freiling G., Schneider A.* Expansion theorems for a class of regular indefinite eigenvalue problems // Differential and Integral Equations. 1990. Vol. 3. November. P. 1181 - 1200.

4. *Ефремов И. И.* Асимтотика собственных значений индефинитных квазидифференциальных операторов // Математика, механика, математическая кибернетика. Саратов, 1999. С. 32.

УДК 517.984.36

М. Ю. Игнатьев

ПОДОБИЕ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ОПЕРАТОРОВ ОПЕРАТОРУ ДРОБНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ*

Рассмотрим для вещественного $\alpha > 2$ интегральный вольтерров оператор вида

$$M = J^{\alpha} + J^{\alpha+1} N, \tag{1}$$

где N - интегральный вольтерров оператор, J^{α} - оператор дробного интегрирования Римана-Лиувилля

$$J^{\alpha} f(x) = \int_{0}^{x} \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t)dt. \tag{2}$$

Статья посвящена установлению, при некоторых условиях, подобия (линейной эквивалентности) оператора M оператору дробного интегрирования J^{α}. Вопросам подобия операторов вида (1) при целых $\alpha = n \in \mathrm{N}$ n-ой степени оператора интегрирования, а также тесно связанным с ними вопросам существования оператора преобразования для дифференциальных операторов n-го порядка посвящено большое число работ различных авторов (см., например, [1 - 4] и др.). Отметим, что для порядков $n > 2$ характерно требование аналитичности ядра оператора N (или коэффициентов дифференциального оператора), причём, как показано в [5] , это требование существенно. Случай нецелых α изучался в ряде работ М. М. Маламуда (см. [6] и др.).

При получении результатов настоящей статьи использовалось развитие метода, предложенного в работах [1, 3, 4] и являющегося, в свою очередь, обобщением метода, применявшегося В. А. Марченко при построении оператора преобразования для оператора Штурма-Лиувилля. Предлагаемый метод позволяет ослабить требования, налагавшиеся в [6] на область аналитичности ядра оператора N, и добиться преемственности с результатами, полученными в [3, 4] для случая целых $\alpha = n \in \mathrm{N}$.

Введем обозначения. Через $D_a, a > 0$ обозначим четырёхугольник в комплексной плоскости с вершинами $\left\{0, a, a(1-\omega)^{-1}, a\left(1-\omega^{-1}\right)^{-1}\right\}$, где $\omega = \exp(2\pi i/\alpha)$; через V обозначим пирамиду в $\mathrm{R} \times \mathrm{C}$: $V = \{(x,\xi) : x \in [0,1], \xi \in \overline{D}_{1-x}\}$. Будем говорить, что вольтерров оператор N является оператором класса A, если он представим в виде

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00741.

$$Nf(x)=\int_0^x N(x-t,t)f(t)dt, \tag{3}$$

где функция $N(x,\xi)$ определена и непрерывна на V и при каждом фиксированном $x\in[0,1]$ аналитична по ξ в D_{1-x}.

Основным результатом статьи является следующая

ТЕОРЕМА. Пусть M - оператор вида (1), (2), N - оператор класса A. Тогда найдется вольтерров оператор K класса A такой, что $M=(E+K)J^{\alpha}(E+K)^{-1}$.

Доказательство теоремы основывается на следующих леммах, которые могут представлять также и самостоятельный интерес.

ЛЕММА 1. Пусть N_1, N_2 - вольтерровы операторы класса A. Тогда оператор $N_{2,1}=N_2N_1$ также является оператором класса A:

$$N_{2,1}f(x)=\int_0^x N_{2,1}(x-t,t)f(t)dt,$$

где

$$N_{2,1}(x,\xi)=\int_0^x N_2(x-\tau,\xi+\tau)N_1(\tau,\xi)d\tau.$$

ЛЕММА 2. Для функции

$$\varphi(z,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\frac{z^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)},\ \arg z\in(-\pi,\pi] \tag{4}$$

справедливы следующие утверждения:

1) $\varphi(x,\lambda)=\left(\left(E-\lambda J^{\alpha}\right)^{-1}1\right)(x,\lambda),\quad x>0;$

2) $\varphi\left(x\omega^j,\lambda\right)=\varphi(x,\lambda),\quad x>0, j=\overline{-m,m}, m:=[\alpha/2];$

3) $\varphi(x,\lambda)\varphi(y,\lambda)=$

$$=\frac{1}{\alpha}\sum_{j=-m}^{m}\varphi\left(x+\omega^j y,\lambda\right)+\int_0^x g(x-t,y)\varphi(t,\lambda)dt+\int_0^y g(y-t,x)\varphi(t,\lambda)dt,\quad x>0, y>0,$$

где

$$g(x,y)=\frac{-\sin\alpha\pi}{\pi}\cdot\frac{x^{\alpha-1}y^{\alpha}}{x^{2\alpha}-2x^{\alpha}y^{\alpha}\cos\alpha\pi+y^{2\alpha}}. \tag{5}$$

Рассмотрим оператор

$$\Phi_{\lambda}f(x):=\int_0^x\varphi(x-t,\lambda)f(t)dt,$$

где $\varphi(x,\lambda)$ - функция, определяемая (4).

ЛЕММА 3. Пусть для функции $f(x,\lambda)$ справедливо представление $f(x,\lambda) = F\varphi(x,\lambda)$, где F - вольтерров оператор класса A:

$$f(x,\lambda) = \int_0^x F(x-t,t)\varphi(t,\lambda)dt.$$

Тогда для функции $h = \Phi_\lambda f$ справедливо представление $h(x,\lambda) = H\varphi(x,\lambda)$, где H - также вольтерров оператор класса A:

$$h(x,\lambda) = \int_0^x H(x-t,t)\varphi(t,\lambda)dt,$$

причем

$$H(x,\xi) = \widetilde{H}(x) + \hat{H}(x,\xi) + \sum_{j=-m}^{m} H_j(x,\xi),$$

$$\widetilde{H}(x) = \int_0^x dt \int_0^t g(x-t,t-\tau)F(\tau,t-\tau)d\tau,$$

$$\hat{H}(x,\xi) = \int_0^x dt \int_0^t g(t-\tau,x-t)F(\tau,t-\tau+\xi)d\tau,$$

$$\alpha H_j(x,\xi) = \frac{\omega^j}{1-\omega^j}\int_0^x F\left(\tau,\xi+\frac{x-\tau}{1-\omega^j}\right)d\tau - \frac{1}{1-\omega^j}\int_0^x F\left(\tau,\frac{x-\tau}{1-\omega^j}\right)d\tau, \quad j \neq 0,$$

$$\alpha H_0(x,\xi) = \int_0^\xi F(x,t)dt,$$

где $g(x,y)$ - функция, определяемая равенством (5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сахнович Л. А.* О приведении вольтерровых операторов к простейшему виду и обратных задачах // Изв. АН СССР. Сер. Математика. 1957. Т. 21, № 2. С. 235 - 262.

2. *Сахнович Л. А.* Обратная задача для дифференциальных операторов порядка n>2 с аналитическими коэффициентами // Матем. сборник. 1958. Т. 46, № 1. С. 61 - 76.

3. *Хачатрян И. Г.* Об операторах преобразования для дифференциальных уравнений высших порядков // Изв. АН Арм.ССР. Сер. Математика. 1978. Т.13, № 3. С. 215 - 238.

4. *Седин О. В.* О подобии вольтеррова оператора *n*-й степени оператора интегрирования // Линейные операторы в функциональных пространствах. Грозный, 1989.

5. *Мацаев В. И.* О существовании оператора преобразования для дифференциальных операторов высших порядков // Докл. АН СССР. 1960. Т. 130, № 3. С. 499 - 502.

6. *Маламуд М. М.* Подобие вольтерровых операторов и смежные вопросы теории дифференциальных уравнений дробных порядков // Тр. ММО. 1994. Т. 55. С. 73 - 148.

УДК 517.968, 517.98

С. Н. Кабанов

ОБЩИЙ ВИД ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛА В ОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ, ПОРОЖДЁННОМ ОПЕРАТОРОМ ОБОБЩЕННОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Назовём оператором обобщённого интегрирования оператор вида

$$D_0^{-\alpha,\ell} y(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \ell(x-t) y(t) dt, \qquad (1)$$

где $x \in [0,a]$, $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция Эйлера, $0 < \alpha < 1$, $\ell(x)$ – медленно меняющаяся в нуле функция.

Для оператора (1) существует обратный интегродифференциальный оператор (см. [1]) вида

$$D_0^{\alpha,\ell^*} y(x) = \frac{d}{dx} D_0^{-(1-\alpha),\ell^*} y(x) = \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} \ell^*(x-t) y(t) dt, \quad (2)$$

где ℓ^* такова, что

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \ell(x-t) \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \ell^*(t) dt \equiv 1, \qquad \forall x \in [0,a], \qquad (3)$$

при этом

$$D_0^{\alpha,\ell^*} D_0^{-\alpha,\ell} y(x) \overset{п.в.}{=} y(x)$$

$$D_0^{-\alpha,\ell} D_0^{\alpha,\ell^*} y(x) \overset{п.в.}{=} y(x) - \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \ell(x) D_0^{-(1-\alpha),\ell^*}(y)(0). \qquad (4)$$

При попытке рассмотреть задачу на собственные функции оператора (2) возникает вопрос о естественном дополнительном условии типа краевого, которое нужно наложить, чтобы иметь возможность однозначно разрешить уравнение вида

$$D_0^{\alpha,\ell^*} y(x) - \lambda y(x) = f(x),$$

где λ – спектральный параметр.

Обозначим $\mathbf{AC}^{D_0^{-(1-\alpha),\ell^*}}$ множество функций $y(x)$, таких, что $D_0^{-(1-\alpha),\ell^*} y(x) \in \mathbf{AC}[0,a]$, при этом $D_0^{\alpha,\ell^*} y(x) \in \mathbf{L}^1[0,a]$.

Введём в $\mathbf{AC}^{D_0^{-(1-\alpha),\ell^*}}$ норму $\|\cdot\|_2$ следующим образом:

$$\|y\|_2 = | D_0^{-(1-\alpha),\ell^*}(y)(0)| + \int_0^a | D_0^{\alpha,\ell^*} y(t)| dt.$$

Положительная однородность и справедливость неравенства треугольника для нормы $\|\cdot\|_2$ легко проверяются в силу линейности рассматриваемых операторов, поэтому проверим справедливость лишь следующего свойства: $\|y\|_2 \geq 0$ и $\| y \|_2 = 0$ тогда и только тогда, когда $y(x) \overset{п.в.}{=} 0$. Неотрицательность нормы $\|\cdot\|_2$ очевидна. Если $y(x) \overset{п.в.}{=} 0$, то, очевидно, $\| y \|_2 = 0$. Пусть теперь $\| y \|_2 = 0$, тогда, в силу определения

$$D_0^{\alpha,\ell^*} y(t) \overset{п.в.}{=} 0, \tag{5}$$

$$D_0^{-(1-\alpha),\ell^*}(y)(0) = 0.$$

Теперь наше утверждение следует из формулы обращения (4) применением к (5) оператора $D_0^{-\alpha,\ell}$.

Тем самым во множестве $\mathbf{AC}^{D_0^{-(1-\alpha),\ell^*}}$ введена структура линейного нормированного пространства. Найдём общий вид линейного ограниченного функционала в пространстве $\mathbf{AC}^{D_0^{-(1-\alpha),\ell^*}}$.

Из формулы (4) видно, что

$$F_2(y) = F_2(D_0^{-\alpha,\ell} D_0^{\alpha,\ell^*} y(x)) + D_0^{-(1-\alpha),\ell^*}(y)(0) F_2\left(\frac{x^{\alpha-1}\ell(x)}{\Gamma(\alpha)}\right),$$

где F_2 – обозначает линейный функционал в пространстве $\mathbf{AC}^{D_0^{-(1-\alpha),\ell^*}}$.

Обозначим $z = D_0^{\alpha,\ell^*} y$. Покажем, что $F_2(D_0^{-\alpha,\ell} z) = F_1(z)$ есть некоторый линейный ограниченный функционал в пространстве $\mathbf{L}^1[0,a]$. В самом деле,

$$\left|F_2(D_0^{-\alpha,\ell} D_0^{\alpha,\ell^*} y)\right| \leq |F_2| \left\|D_0^{-\alpha,\ell} D_0^{\alpha,\ell^*} y\right\|_2 =$$

$$= |F_2| \left(\left| D_0^{-(1-\alpha),\ell^*}\left(y(x) - D_0^{-(1-\alpha),\ell^*}(y)(0) \frac{x^{\alpha-1}\ell(x)}{\Gamma(\alpha)}\right)\Big|_{x=0} \right| + \int_0^a \left| D_0^{\alpha,\ell^*} D_0^{-\alpha,\ell} z(t) \right| dt \right) =$$

$$= |F_2| \cdot \int_0^a |z(t)| dt = |F_2| \|z\|_1,$$

где $\|\cdot\|_1$ – обозначение нормы в пространстве $\mathbf{L}^1[0,a]$.

Здесь мы воспользовались тем обстоятельством, что в силу (3)

$$D_0^{-(1-\alpha),\ell^*} \frac{x^{\alpha-1}\ell(x)}{\Gamma(\alpha)} \equiv 1.$$

Таким образом, нахождение общего вида функционала в пространстве $\mathbf{AC}^{D_0^{-(1-\alpha),\ell^*}}$ свелось к нахождению общего вида линейного ограниченного функционала в пространстве $\mathbf{L}^1[0,a]$. Поэтому

$$F_2(y) = F_1(z) + C \cdot D_0^{-(1-\alpha),\ell^*}(y)(0),$$

где $F_1(z)$ – теперь функционал общего вида в $\mathbf{L}^1[0,a]$.

Отсюда, используя формулу для общего вида функционала в $\mathbf{L}^1[0,a]$, получим

$$F_2(y(x)) = C \cdot D_0^{-(1-\alpha),\ell^*} y(0) + \int_0^a D_0^{\alpha,\ell^*} y(t)h(t)dt, \tag{6}$$

где C – некоторая константа, $h(t) \in \mathbf{L}^\infty[0,a]$.
Сформулируем полученный результат.

ТЕОРЕМА. Формула (6) даёт общий вид линейного ограниченного функционала в пространстве $\mathbf{AC}^{D_0^{-(1-\alpha),\ell^*}}$.

Замечание. В случае $D_0^{\alpha,\ell^*} y(x) \in \mathbf{L}^p[0,a]$, $p>1$, формула (6) остаётся справедливой, только при этом $h(t) \in \mathbf{L}^q[0,a]$, $1/p + 1/q = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кабанов С. Н.* Об одном обобщённом операторе дробного дифференцирования // УМН. 1995. Т. 50, вып.4 (304). С. 123.

УДК 517.54

Г. Н. Камышова

О СВОЙСТВАХ НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕННЫХ КОНФОРМНЫХ ИНВАРИАНТОВ*

Четырехугольником Q называется жорданова область $\Omega \subset \overline{C}$ с четырьмя отмеченными граничными точками z_1, z_2, z_3, z_4, которые называются вершинами Q. Модуль $m(Q)$ четырехугольника Q равен отношению длин сторон конформно эквивалентного ему прямоугольника.

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-00842, INTAS, грант № 99-00089.

П. Дюреном и М. Шиффером [1] было введено понятие ёмкости Робена $\delta(A)$ множества, которое обобщало понятие логарифмической ёмкости $d(A)$. Для определения воспользуемся описанием $\delta(A)$ и $d(A)$ в терминах экстремальной длины. Пусть Γ - семейство локально спрямляемых кривых в области Ω. Измеримая по Борелю функция $\rho(z)\ge 0$, удовлетворяющая для всех $\gamma\in\Gamma$ неравенству $\int\limits_\gamma \rho(z)\,|\,dz\,|\ge 1$, называется допустимой метрикой для Γ. Тогда экстремальная длина $\lambda(\Gamma)$ семейства кривых Γ определяется следующим образом:

$$\frac{1}{\lambda(\Gamma)}=\inf_\rho \iint\limits_\Omega \rho^2(z)dxdy,\quad z=x+iy.$$

Обозначим через $\lambda_\Omega(C,D)$ экстремальное расстояние между связными подмножествами C и D границы Ω, которое определяется как экстремальная длина семейства кривых Γ, соединяющих C и D в Ω.

Пусть границей $\partial\Omega=A$ области $\Omega\subset\overline{C},\infty\in\Omega$, является аналитическая жорданова кривая, окружность $C_r=\{z:|\,z\,|=r\}$ содержит внутри $\partial\Omega$.

Обозначим через Ω_r часть Ω, лежащую внутри C_r. Тогда логарифмическая емкость $d(A;\Omega)$ множества A относительно Ω определяется формулой

$$d(A;\Omega)=e^{-\gamma(A)},\quad \gamma(A)=\lim_{r\to\infty}(2\pi\lambda_{\Omega_r}(A,C_r)-\log r).$$

Если $\partial\Omega=A\cup B,\ \ A\cap B=\varnothing$, то емкость Робена $\delta(A;\Omega)$ множества A относительно Ω равна

$$\delta(A;\Omega)=e^{-\rho(A)},\quad \rho(A)=\lim_{r\to\infty}(2\pi\lambda_{\Omega_r}(A,C_r)-\log r).$$

Заметим, что $\delta(A;\Omega)\le d(A;\Omega)$. П. Дюрен, Дж. Пфальтцграфф [2] предложили рассматривать конформный инвариант $\mu(Q)$, названный ими модулем Робена четырехугольника Q. Пусть A есть объединение двух дуг (z_1,z_2) и (z_3,z_4) границы $\partial\Omega$ четырехугольника Q, $B=\partial\Omega\setminus A$. Тогда $\mu(Q)=\delta(A)/\delta(B)$. Интересно установить монотонное изменение конформных инвариантов множеств при некоторых видах симметризационных преобразований, например при поляризации. В представленной работе исследуется изменение модуля Робена четырехугольника при поляризации.

1. Основные определения. Пусть $\vec{l}$ и $\overleftarrow{l}$ - две противоположные ориентации прямой l на C; $H_-(\vec{l}),H_+(\vec{l})$ - правая и левая полуплоскости по отношению к $\vec{l}$. Если A - произвольное множество, то через $A^*(\vec{l})$ обозначим множество, симметричное с A относительно $\vec{l}$.

Поляризацией множества A относительно направленной прямой $\vec{l}$ называется переход от A к множеству

$$A^0(\vec{l}) = [(A \cup A^*(\vec{l})) \cap H_-(\vec{l})] \cup [A \cap \vec{l}] \cup [(A \cap A^*(\vec{l})) \cap H_+(\vec{l})].$$

Пусть двусвязная область D имеет дополнительные континуумы E_1, E_2. Тогда множество $E_j^0(\vec{l}), j = 1,2$, содержит единственную связную компоненту $E_j^{'}, j = 1,2$, пересекающую замыкание полуплоскости $H_-(\vec{l})$. При этом $E_1^{'} \cap (E_2^{'})^* = \varnothing$, а множество $\overline{C} \setminus E_1^{'} \setminus (E_2^{'})^*$ содержит единственную двусвязную компоненту $D^{'}(\vec{l})$, которую будем называть результатом поляризации двусвязной области D относительно прямой $\vec{l}$ при заданной нумерации дополнительных континуумов E_1, E_2.

Пусть G - четырехугольник, $G \subset \overline{U_r^*}$, $U_r^* = \{z : |z| > r\}$, имеющий отмеченные стороны s_1, s_2 на окружности c_r, E_1, E_2 - связные компоненты $\overline{U_r^*}/G$; $\tilde{G}$ - четырехугольник, симметричный с G относительно окружности C_r. Пусть $D^{'}(\vec{l})$ - результат поляризации двусвязной области $D = G \cup \tilde{G} \cup s_1 \cup s_2$ относительно прямой $\vec{l}$, проходящей через начало координат. Результатом поляризации четырехугольника G относительно прямой $\vec{l}$ будем называть четырехугольник $G^{'}(\vec{l}) = D^{'}(\vec{l}) \cap \overline{U_r^*}$.

ТЕОРЕМА [3, 4]. Имеет место следующее неравенство:

$$m(G) \le m(G^{'}(\vec{l})). \tag{1.1}$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $G^{'}(\vec{l}) = G$ или $G^{'}(\vec{l}) = G^*(\vec{l})$.

2. Неравенства для модулей Робена. Пусть s_1, s_2 - отмеченные круговые стороны четырехугольника Q, $\infty \in Q$, $A = s_1 \cup s_2$, $B = \partial\Omega \setminus A$. Пусть $Q^{'}$ - результат поляризации Q относительно положительной вещественной полуоси.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть Ω и Ω_1 - области в расширенной комплексной плоскости, $f(z) = a_1 z + a_0 + a_{-1} z^{-1} + \ldots$ - конформное отображение Ω на Ω_1. Тогда

$$\delta(f(A); f(\Omega)) = |a_1| \, \delta(A; \Omega).$$

ЛЕММА. Пусть $f(z) = a_1 z + a_0 + a_{-1} z^{-1} + \ldots$ - конформное отображение Q на U, $F(z)=A_1 z+A_0+A_{-1}z^{-1}+\ldots$ - конформное отображение Q' на U. Тогда

$$|a_1|\le|A_1|. \tag{2.1}$$

Доказательство. Пусть g и G - функции Грина областей Q и Q' соответственно. Тогда $g(z)=\log|f(z)|$; $G(z)=\log|F(z)|$. Д. Бетсакос [5] показал, что для любого $x\in R$ и любой выпуклой возрастающей функции $\Phi: R\to R$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(g(x+it))dt\le\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(G(x+it))dt. \tag{2.2}$$

Используя этот факт и выбирая в качестве функции $\Phi(x)=e^{2x}$, получим

$$\Phi(g(z))=|f(z)|^2=|a_1 z|^2+|a_0|^2+\ldots+a_0\overline{a_1 z}+za_1\overline{a_0}+\ldots.$$

$$\Phi(G(z))=|F(z)|^2=|A_1 z|^2+|A_0|^2+\ldots+A_0\overline{A_1 z}+zA_1\overline{A_0}+\ldots.$$

После подстановки этих выражений в (2.2) получим

$$|a_1|^2\int_{-\infty}^{+\infty}|x+it|^2dt+\int_{-\infty}^{+\infty}|a_0|^2dt+\ldots\le|A_1|^2\int_{-\infty}^{+\infty}|x+it|^2dt+\int_{-\infty}^{+\infty}|A_0|^2dt+\ldots$$

Разделив левую и правую части этого неравенства на $\int_{-\infty}^{+\infty}|x+it|^2dt$, придем к неравенству (2.1).

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть Q - четырехугольник с двумя отмеченными круговыми сторонами, Q' - результат его поляризации относительно положительной вещественной полуоси. Тогда

$$\mu(Q)\le\mu(Q'). \tag{2.3}$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $Q'=Q$ или $Q'=Q^*$.

Доказательство. Согласно предложению 1

$$\delta(A;\Omega)=\frac{1}{|a_1|}\cdot\delta(f(A));f(\Omega)),\qquad \delta(A;\Omega')=\frac{1}{|A_1|}\cdot\delta(F(A);F(\Omega')). \tag{2.4}$$

Д. Бетсакос [5] доказал, что $\delta(A;\Omega')\le\delta(A;\Omega)$. Отсюда и из (2.4) получим, что $\delta(F(A);F(\Omega'))\setminus(|A_1|)\le\delta(f(A);f(\Omega))\setminus(|a_1|)$. Используя неравенство леммы, имеем

$$\delta(F(A);F(\Omega'))\le\delta(f(A);f(\Omega)). \tag{2.5}$$

При отображениях f и F множество A отображается на множества, которые являются объединениями двух дуг окружности, опирающихся на центральные углы α и α_1 соответсвенно. Тогда согласно [2] $\mu(Q)=tg\alpha$, $\mu(Q')=tg\alpha_1$. Известно, что

$$\delta(F(A);F(\Omega'))=\frac{1+k_1}{8k_1}\cdot\sin\alpha_1,\quad \delta(f(A);f(\Omega))=\frac{1+k}{8k}\cdot\sin\alpha, \qquad (2.6)$$

где

$$k_1=tg^2\frac{\alpha_1}{2},\quad k=tg^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (2.7)$$

Подставляя (2.6) в (2.5), получим $\frac{1+k_1}{8k_1}\cdot\sin\alpha_1\le\frac{1+k}{8k}\cdot\sin\alpha$. Так как $\frac{1+k}{8k}\cdot\sin\alpha=\frac{1}{4\cdot tg(\alpha/2)}$, $\frac{1+k_1}{8k_1}\cdot\sin\alpha_1=\frac{1}{4\cdot tg(\alpha_1/2)}$, то неравенство (2.5) примет вид

$$tg\frac{\alpha}{2}\le tg\frac{\alpha_1}{2}. \qquad (2.8)$$

Как известно (см., например, [2]), $m(Q)=\varphi(k)=\frac{2(E-(1-k)K)}{E'-kK'}$, где $K(k)$, $E(k)$ - полные эллиптические интегралы первого и второго рода, K',E' - сопряженные к ним, $m(Q')=\varphi(k_1)$. Неравенство (1.1) приводит к неравенству $\varphi(k)\le\varphi(k_1)$, где k,k_1 определяются по формулам (2.7). Функция $\varphi(k)$ является строго возрастающей, следовательно, после несложных преобразований получим $tg\alpha\le tg\alpha_1$, что приводит к неравенству

$$\mu(Q)\le\mu(Q').$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Duren P., Schiffer M.* Robin functions and energy functionals of multiply connected domains // Pacific J. Math. 1991. Vol. 148. P. 251 - 273.

2. *Duren P., Pfaltzgraff J.* Robin capacity and extremal length// J. Math. Anal. Appl. 1993. Vol. 179. P. 110 - 119.

3. *Дубинин В. Н.* Преобразование конденсаторов в пространстве // Докл. АН СССР. 1987. Т. 269, №.1. С. 18 - 20.

4. *Дубинин В. Н.* Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49, №.1. С. 1 - 76.

5. *Betsakos D.* Polarization, conformal invariants, and Brownian motion // Ann. Acad. Fenn. 1998. Vol. 23. P. 59 - 82.

УДК 517.972

А. Б. Коноплев

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ВОГНУТОСТИ ФУНКЦИИ РАССТОЯНИЯ

Пусть X, Y конечномерные нормированные пространства над R. Рассмотрим многозначное отображение $F: X \to 2^Y$, действующее из X в Y, т. е. отображение, значениями которого являются подмножества пространства Y.

Введем обозначения, которые будут использованы при изложении результата статьи. Множества

$$\operatorname{dom} F = \{x \in X \mid F(x) \neq \varnothing\}, \quad \operatorname{gr} F = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in F(x)\}$$

называются соответственно *эффективной областью* и *графиком* многозначного отображения F.

Определение. Многозначное отображение называется выпуклым, если его график является выпуклым множеством в $X \times Y$.

Хорошо известен [1, с. 101] следующий факт.

ЛЕММА. Многозначное отображение $F(x)$ является выпуклым тогда и только тогда, когда выполняется следующее включение:

$$F(\alpha\, x_1 + (1-\alpha)\, x_2) \supset \alpha\, F(x_1) + (1-\alpha\,)F(x_2),$$

для всех $x_1, x_2 \in X$ и $\alpha \in [0,1]$.

Для любых точек $x \in \operatorname{dom} F$ и $y \in Y$ определим функцию расстояния следующим образом:

$$d_F(z) = \inf_v \{\|y - v\| \mid \ v \in F(x)\}, \quad z = (x, y).$$

Эта функция используется в негладком анализе для исследования топологических и дифференциальных свойств многозначных отображений и маргинальных функций [2].

ТЕОРЕМА. Пусть $D \subset X \times Y$ - выпуклое, замкнутое множество, обладающее непустой внутренностью, а отображение F удовлетворяет условиям

$$\operatorname{dom} F = pr_X D, \qquad \operatorname{gr} F = \overline{\operatorname{dom} F \times Y \setminus D}. \tag{1}$$

Тогда функция расстояния $d_F(z)$ вогнута на множестве D, то есть для любых $z_1, z_2 \in D$ выполняется неравенство

$$d_F(\alpha z_1 + (1-\alpha) z_2) \geq \alpha\, d_F(z_1) + (1-\alpha) d_F(z_2), \quad \alpha \in [0,1].$$

Доказательство. Обозначим

$$G(x) = \{y \in Y \mid d_F(x, y) > 0\}, \quad G(x, v) = \{y \in Y \mid \ \|y - v\| < d_F(x, v)\}.$$

Из условий (1) следует, что $F(x) = \{y \in Y \mid d_F(x, y) = 0\}$ для всех $x \in \operatorname{dom} F$. По определению $G(x)$ это означает, что $F(x) = Y \setminus G(x)$ для всех $x \in \operatorname{dom} F$.

Выпуклость $G(x)$ следует непосредственно из определения многозначного отображения $G(x)$, условий (1) и свойств выпуклых множеств (см., например, [3, гл. 2]).

1. Покажем, что

$$G(x,v) \subset G(x) \tag{2}$$

для всех $x \in \operatorname{dom} F, \quad v \in Y$:

а) если $v \notin G(x)$, т. е. $d_F(x,v) = 0$, то $G(x,v) = \varnothing$ и (2) очевидно выполняется;

б) пусть теперь $v \in G(x)$, т. е. по определению $G(x)$, $d_F(x,v) > 0$. Возьмем произвольно $y \in G(x,v)$. Это означает, что

$$d_F(x,v) > \|v - y\| \geq 0. \tag{3}$$

Очевидно, что достаточно рассмотреть случай, когда $y \neq v$. Предположим противное. Пусть $y \notin G(x)$, т. е. $d_F(x,v) = 0$. Тогда $y \in F(x)$, что означает справедливость неравенства

$$\|v - y\| \geq \inf_w \{\|v - w\| \mid \quad w \in F(x)\} = d_F(x,v).$$

Это противоречит (3).

2. Возьмем произвольно точки $z_1 = (x_1, y_1), \quad z_2 = (x_2, y_2): \quad z_1, z_2 \in D$. По лемме и в силу доказанного в пункте 1 имеем

$$G(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \supset \alpha G(z_1) + (1-\alpha)G(z_2), \quad \alpha \in [0,1]. \tag{4}$$

Рассмотрим множество точек, удовлетворяющих неравенству

$$\|\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2 - y\| < \alpha d_F(z_1) + (1-\alpha)d_F(z_2), \quad \alpha \in [0,1].$$

Множество всех таких точек образует в пространстве Y открытый шар с центром в точке $\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2$ и радиусом $\alpha d_F(z_1) + (1-\alpha)d_F(z_2)$. Обозначим его S.

Покажем, что шар S будет принадлежать выпуклой комбинации $G(z_1), \quad G(z_2)$. Построим точки

$$\hat{y}_i = y_i + d_F(z_i) \cdot \frac{y - \alpha y_1 - (1-\alpha)y_2}{\alpha d_F(z_1) + (1-\alpha)d_F(z_2)}, \quad \alpha \in [0,1], \quad i = 1,2.$$

По построению видно, что $\hat{y}_i \in G(x_i, y_i), \quad y = \alpha \hat{y}_1 + (1-\alpha)\hat{y}_2$. Таким образом, любая точка шара S может быть представлена как выпуклая комбинация точек из $G(z_1), \quad G(z_2)$. Объединяя этот факт с включением (4), получим

$$S \subset G(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2), \quad \alpha \in [0,1]. \tag{5}$$

3. Заметим, что включение (5) равносильно следующему

$$Y \setminus S \supset Y \setminus G(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2), \quad \alpha \in [0,1].$$

А это означает, что справедливо неравенство

$$\inf_{v}\left\{\|\alpha y_1+(1-\alpha)y_2-v\| \quad v\notin S\right\}\le$$
$$\le\inf_{v}\left\{\|\alpha y_1+(1-\alpha)y_2-v\| \quad v\in F(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\right\}=$$
$$=d_F(\alpha z_1+(1-\alpha)z_2),\quad \alpha\in[0,1].$$

Значение левой части неравенства совпадает с радиусом шара S, откуда и следует утверждение теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М., 1980.
2. *Минченко Л. И., Борисенко О. Ф., Грицай С. П.* Многозначный анализ и возмущенные задачи нелинейного программирования. Минск, 1993.
3. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М., 1973.

УДК 513.88

В. В. Корнев, А. П. Хромов

ТЕОРЕМА О РАВНОСХОДИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПЕРЕМЕННЫМ ПРЕДЕЛОМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ*

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим интегральный оператор

$$Af=\int_0^{1-x}A(1-x,t)f(t)dt, \tag{1}$$

где $A(x,t)$ n раз непрерывно дифференцируема по x и один раз по t при $0\le t\le x\le 1$ и

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j}A(x,t)=\delta_{n-1,j} \qquad (\delta_{n-1,j}\text{ - символ Кронекера, } j=0,\ldots,n).$$

Имеет место следующая теорема равносходимости.

ТЕОРЕМА 1. Для любой $f(x)\in L[0,1]$

$$\lim_{r\to\infty}\max_{0<\delta\le x\le 1-\delta}\left|S_r(f,x)-\sigma_r(f,x)\right|=0,$$

где $S_r(f,x)$ – частичная сумма ряда Фурье по собственным и присоединенным функциям оператора (1) для тех характеристических чисел, для ко-

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 00-01-00075, и программы “Ведущие научные школы”, проект № 00-15-96123.

торых $|\lambda_k| < r^n$, $\sigma_r(f,x)$ – частичная сумма тригонометрического ряда Фурье для тех номеров k, для которых $k\pi < r$.

Для $n=1$ этот результат установлен в [1]. В настоящей статье излагается метод доказательства теоремы 1 для произвольного n.

Обозначим через $R_\lambda^0 = (E - \lambda A_0)^{-1} A_0$ резольвенту Фредгольма оператора

$$A_0 f = \int_0^{1-x} \frac{(1-x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt,$$

где E – единичный оператор, а λ – спектральный параметр. Для определенности считаем n четным (случай нечетного n рассматривается аналогично). Введем в рассмотрение краевую задачу

$$z^{(n)} - \lambda Dz = BF(x), \tag{2}$$

$$Pz^{(i)}(0) + Qz^{(i)}(1) = 0 \quad (i = 0, \ldots, n-1), \tag{3}$$

где $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$, $F(x) = (f(x), f(1-x))^T$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Обозначим через $V_j(x,\lambda)$ $(j = 1, \ldots, n)$ матрицы размера 2×2, которые образуют фундаментальную систему решений системы (2), и определим матрицу $\Delta(\lambda)$ размера $2n \times 2n$ по формуле

$$\Delta(\lambda) = (U_{ij}(\lambda))_{i,j=1,\ldots,n},$$

где $U_{ij}(\lambda) = U_i(V_j(x,\lambda))$, $U_i(V(x)) = PV^{(i-1)}(0) + QV^{(i-1)}(1)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть λ таково, что существует $\Delta^{-1}(\lambda)$. Тогда R_λ^0 тоже существует и

$$R_\lambda^0 f = z_1(x,\lambda) + z_2(x,\lambda), \tag{4}$$

а $z(x,\lambda) = (z_1(x,\lambda), z_2(x,\lambda))^T$ является единственным решением краевой задачи (2), (3), определяемым формулой

$$z(x,\lambda) = -(V_1(x,\lambda), \ldots, V_n(x,\lambda))\Delta^{-1}(\lambda)\int_0^1 U_x(g(x,t,\lambda))BF(t)dt +$$

$$+\int_0^1 g(x,t,\lambda)BF(t)dt, \tag{5}$$

где $U_x(g(x,t,\lambda)) = (U_1(g(x,t,\lambda)),...,U_n(g(x,t,\lambda)))^T$ относительно переменной x, а $g(x,t,\lambda)$ – матрица размера 2×2 такая, что $\int_0^1 g(x,t,\lambda)BF(t)dt$ является частным решением (2).

Эта теорема позволяет оценить R_λ^0 при больших $|\lambda|$. Для этого λ-плоскость разбивается на четыре сектора $(k-1)\frac{\pi}{2} \le \arg\lambda \le k\frac{\pi}{2}$ $(k = 1,2,3,4)$, в каждом из которых определенным образом выбирается фундаментальная система $\{V_j(x,\lambda)\}$ и подбирается матрица $g(x,t,\lambda)$. Далее, на основе формул (4), (5) доказывается , что в области S, получающейся из λ-плоскости после удаления нулей $\det\Delta(\lambda)$ вместе с окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса, справедливы следующие оценки.

ТЕОРЕМА 3. $\left\|R_\lambda^0 f\right\|_\infty = O(|\rho|^{1-n})\|f\|_1;$

$$\left\|R_\lambda^0 f\right\|_\infty = O(|\rho|^{1-n}\psi(\rho))\|f\|_\infty; \tag{6}$$

$$\left\|R_\lambda^0 f\right\|_1 = O(|\rho|^{1-n}\psi(\rho))\|f\|_1; \quad \left\|R_\lambda^0 \chi\right\|_\infty = O(|\rho|^{-n}),$$

где $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$ – нормы пространств $L[0,1], L_\infty[0,1]$, $\rho^n = \lambda, \psi(\rho) = = \sum_{j=1}^{2n} \frac{1-\exp(-|\operatorname{Re}\rho\omega_j|)}{|\operatorname{Re}\rho\omega_j|}$, $\omega_1,...,\omega_{2n}$- корни $2n$-й степени из 1, $\chi(x)$ – характеристическая функция произвольного интервала $[\eta_0,\eta_1] \subset [0,1]$.

Между R_λ^0 и R_λ существует следующая связь:

$$R_\lambda = R_\lambda^0 + R_\lambda^0 T(E - D^{n-1}SR_\lambda^0 T)^{-1} D^{n-1}SR_\lambda^0, \tag{7}$$

где T – интегральный оператор с ограниченным ядром, $Sf = f(1-x)$, $D = \frac{d}{dx}$.

Представление (7) и оценки (6) позволяют доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. Для любой функции $f(x) \in L[0,1]$

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r_k}(R_\lambda f - R_\lambda^0 f)d\lambda\right\|_\infty = 0,$$

где окружности $|\lambda| = r_k$ находятся в S, $r_k \uparrow \infty$.

Из этой теоремы следует, что спектральные разложения, порождаемые операторами A и A_0, равносходятся. В то же время теорема 1 справедлива для оператора A_0, так как $(A_0^2)^{-1}$ есть дифференциальный оператор $l(y)=y^{(2n)}$ с регулярными краевыми условиями. Отсюда следует справедливость теоремы 1 и для оператора A.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хромов А. П.* Теорема равносходимости для интегрального оператора с переменным верхним пределом интегрирования // Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа: Сб. статей, посвященный 70-летию П. Л. Ульянова. М.: Изд-во АФЦ, 1999. С. 255 - 266.

УДК 517.984

П. М. Кудишин

СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА СПЕКТРАЛЬНЫХ ДАННЫХ*

Рассмотрим дифференциальное уравнение и линейные формы (ℓ, V_p)

$$\ell y \equiv y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-2}\left(\frac{\nu_j}{x^{n-j}} + q_j(x)\right)y^{(j)} = \lambda y, \quad 0 < x < T, \tag{1}$$

$$V_p(y) \equiv y^{(n-p)}(T) + \sum_{j=0}^{n-p-1} v_{pj} y^{(j)}(T), \quad p = \overline{1, n-1}. \tag{2}$$

Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_n$ – корни характеристического многочлена

$$\delta(\mu) = \prod_{k=0}^{n-1}(\mu - k) + \sum_{j=0}^{n-2}\nu_j \prod_{k=0}^{j-1}(\mu - k).$$

Для определенности будем считать, что $\mu_k - \mu_j \neq sn$ $(s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ и $\Re\mu_1 < \ldots < \Re\mu_n$. Пусть функции $q_j^{(m)}(x), m = \overline{0, j-1}$, абсолютно непрерывны на $[\alpha, T]$ для любого $\alpha > 0$, и $q_j^{(m)}(x)x^{n-1-\Re(\mu_n - \mu_1) - j + m} \in L(0,T), m = \overline{0, j}$. При этом будем говорить, что система $(\ell, V_p) \in U$.

Дифференциальное уравнение (1) имеет фундаментальную систему решений $S_j(x,\lambda)$, $j = \overline{1,n}$, причем $S_j(x,\lambda)$ являются целыми по λ и

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №00-01-00741.

$$S_j^{(\nu)}(x,\lambda) = C_j^{(\nu)}(x,\lambda) - \int_0^x \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu}\Big(\sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \times$$
$$\times C_k(x,\lambda) C^*_{n-k+1}(t,\lambda)\Big)\Big(\sum_{m=0}^{n-2} q_m(t) S_j^{(m)}(t,\lambda)\Big) dt, \quad \nu = \overline{0, n-1},$$

где

$$C_j(x,\lambda) = c_{j0} x^{\mu_j} \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\prod_{s=1}^{k} \delta(\mu_j + sn)\Big)^{-1} \big(\lambda x^n\big)^k,$$
$$C^*_{n-k+1}(x,\lambda) = \det\Big[C_j^{(m)}(x,\lambda)\Big]_{m=\overline{0,n-2};\, j=\overline{1,n}\setminus k}.$$

Обозначим через Λ_{kj} множество нулей функции

$$\Delta_{kj}(\lambda) = (-1)^{k-j} \det\Big[V_p(S_m(x,\lambda))\Big]_{p=\overline{1,n-k};\, m=\overline{k,n}\setminus j}.$$

Начиная с некоторого все нули $\Lambda_{kk} = \{\lambda_{lk}\}_{l\ge 1}$ функций $\Delta_{kk}(\lambda)$ простые и справедлива асимптотика

$$\lambda_{lk} = (-1)^{n-k}\Big(\pi (T \sin k\pi n^{-1})^{-1}(l + \theta_k) + O\big(l^{-1}\big)\Big)^n, \quad l \to \infty.$$

Функции $\mathrm{M}_{kj}(\lambda) = \Delta_{kj}(\lambda)/\Delta_{kk}(\lambda), k < j$, будем называть функциями Вейля, а матрицу $M(\lambda) = \big[M_{kj}(\lambda)\big]_{k,\, j=\overline{1,n}}$, где $M_{kj}(\lambda) = \delta_{kj}, k \ge j$ (δ_{kj} – символ Кронекера) – матрицей Вейля для системы (ℓ, V_p).

Обозначим

$$\Lambda = \bigcup_{m=1}^{n-1} \Lambda_{mm}, \quad K := \max_{\lambda_0 \in \Lambda} \max_{1 \le m \le n-1} K_{mm}(\lambda_0),$$

где $K_{mm}(\lambda_0)$ – порядок нуля λ_0 функции $\Delta_{mm}(\lambda)$, или 0, если $\Delta_{mm}(\lambda_0) \ne 0$. Для всякой функции $F(\lambda)$, аналитической в окрестности λ_0, положим

$$F_{<k>}(\lambda_0) := \operatorname{res}_{\lambda=\lambda_0}\Big((\lambda - \lambda_0)^{-k-1} F(\lambda)\Big)$$

Пусть $N \ge K$. При $s = \overline{0,N\text{-}1}, p = \overline{\text{-}s, N\text{-}1\text{-}s}, k = \overline{s+2, N}, m = \overline{s+1, N}$, обозначим

$$M^*(\lambda) := M^{-1}(\lambda), \qquad D_{\text{-m,s,N-s}}(\lambda_0) := D^*_{-m,s,N-s}(\lambda_0) := 0,$$

$$D_{\text{-s-1},s,p}(\lambda_0) := \Big(\mathrm{M}_{<-p-s-1>}(\lambda_0) - \sum_{q=-N}^{-s-2} D_{q,s+1,p}(\lambda_0) \mathrm{M}_{<-q-s-1>}(\lambda_0)\Big) \times$$
$$\times \Big(M_{<0>}(\lambda_0) - \sum_{q=-N}^{-s-2} D_{q,s+1,-s-1}(\lambda_0) M_{<-q-s-1>}(\lambda_0)\Big)^{-1},$$
$$D_{\text{-k},s,p}(\lambda_0) := D_{-k,s+1,p}(\lambda_0) - D_{-s-1,s,p}(\lambda_0) D_{-k,s+1,-s-1}(\lambda_0),$$
$$D^*_{\text{-s-1},s,p}(\lambda_0) := \Big(M^*_{<0>}(\lambda_0) + \sum_{q=-N}^{-s-2} M^*_{<-q-s-1>}(\lambda_0) D^*_{q,s+1,-s-1}(\lambda_0)\Big)^{-1} \times$$
$$\times \Big(-\mathrm{M}^*_{<-p-s-1>}(\lambda_0) - \sum_{q=-N}^{-s-2} \mathrm{M}^*_{<-q-s-1>}(\lambda_0) D^*_{q,s+1,p}(\lambda_0)\Big),$$
$$D^*_{\text{-k},s,p}(\lambda_0) := D^*_{-k,s+1,p}(\lambda_0) + D^*_{-k,s+1,-s-1}(\lambda_0) D^*_{-s-1,s,p}(\lambda_0).$$

Будем говорить, что система $(\ell,V_p)\in U'$, если $(\ell,V_p)\in U$ и $\bigcap_{k=m}^{n}\Lambda_{mk}=\varnothing$, $m=\overline{1,n\text{-}1}$. Классу U', в частности, принадлежат системы (ℓ,V_p) с разделенным спектром.

Определение 1. Спектральными данными для $(\ell,V_p)\in U'$ назовем множество $D:=\left\{\lambda_0, D_{-k-1,0,p}(\lambda_0)\right\}_{\lambda_0\in\Lambda;\, k,p=\overline{0,N-1}}$.

ТЕОРЕМА 1. При $s=\overline{0,N\text{-}1}$ имеет место формула

$$\sum_{p=\max\{-s,-N+1+r+s\}}^{\min\{N-1-s,\, r+s\}} D^{*}_{-q,s,p}(\lambda_0)\, D_{-j,s,r-p}(\lambda_0)+D^{*}_{-q,s,r+j}(\lambda_0)-D_{-j,s,r+q}(\lambda_0)=0,$$

где $q,j=\overline{s+1,N}$, $-1\le r\le 2N-2$.

Обозначим

$$A_\xi(\lambda_0):=\begin{bmatrix} \left[D_{-p-1,0,s}(\lambda_0)\right]_{1,n-\xi+1} & \cdots & \left[D_{-p-1,0,s}(\lambda_0)\right]_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \left[D_{-p-1,0,s}(\lambda_0)\right]_{n-\xi,n-\xi+1} & \cdots & \left[D_{-p-1,0,s}(\lambda_0)\right]_{n-\xi,n} \end{bmatrix}_{s,p=\overline{0,N-1}}$$

Здесь $\left[D_{-p-1,0,s}(\lambda_0)\right]_{ij}$ - элемент матрицы $D_{-p-1,0,s}(\lambda_0)$, расположенный в i-й строке j-м столбце.

ТЕОРЕМА 2 (Свойство S). Справедливо равенство

$$\operatorname{rank} A_\xi(\lambda_0)=K_{n-\xi,n-\xi}(\lambda_0).$$

Структурные свойства спектральных данных D для системы (ℓ,V_p), сформулированные в виде теорем 1 и 2, позволяют доказать единственность решения обратной задачи для дифференциальных уравнений с особенностью вида (1), получить конструктивное решение обратной задачи и установить необходимые и достаточные условия на спектральные данные. Этим и другим вопросам посвящены работы [1 – 3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кудишин П. М.* Обратная задача для дифференциальных операторов высших порядков с особенностью. Саратов, 1997. 27 с. Деп. в ВИНИТИ 14.11.97, N3347-В97.

2. *Кудишин П. М.* О единственности решения обратной задачи для дифференциальных операторов высших порядков с особенностью // Молодежь и наука на пороге XXI века. Саратов, 1998. С. 60 - 61.

3. *Кудишин П. М.* О необходимых и достаточных условиях на спектральные данные для дифференциальных операторов с особенностью // Математика, механика, математическая кибернетика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999. С. 44 - 48.

УДК 517.948.34

Ю. В. Курышова

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Рассмотрим на отрезке $[0,\pi]$ спектральную задачу $L = L(q(x), M(x,t), R(x), V(x))$:

$$\ell y \equiv -y'' + q(x)y + \int_0^x M(x,t)y(t)dt + R(x)\int_0^\pi V(t)y(t)dt = \lambda y, \tag{1}$$

$$y(0) = y'(0) = 0, \tag{2}$$

где $q(x)$, $M(x,t)$, $R(x)$, $V(x)$ – непрерывные функции. Нетрудно показать, что собственные значения $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ задачи (1), (2) совпадают с нулями функции

$$\Delta(\lambda) = 1 - \int_0^\pi V(t)u(t,\lambda)dt, \tag{3}$$

где функция $u(t,\lambda)$ является решением следующей задачи Коши:

$$-u'' + q(x)u + \int_0^x M(x,t)u(t)dt + R(x) = \lambda u, \tag{4}$$

$$u(0) = u'(0) = 0.$$

То есть $\Delta(\lambda)$ есть характеристическая функция задачи (1), (2). При этом, если $\kappa_n \geq 1$ – кратность нуля λ_n функции $\Delta(\lambda)$, то функции $u_{j,n}(x) := \dfrac{\partial^j}{\partial\lambda^j} u(x,\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_n}$, $j = \overline{0,\kappa_n - 1}$, являются собственными и присоединёнными функциями задачи L.

Обозначим $\alpha_{jn} := u_{j,n}(\pi)$. Совокупность чисел $\{\lambda_n, \alpha_{jn}\}_{j=\overline{0,\kappa_n-1}, n\in N}$ называется спектральными данными (СД) задачи L. В настоящей статье рассматривается обратная задача восстановления функций $R(x)$,$V(x)$ по спектральным данным при известных $q(x)$ и $M(x,t)$, если a priori известно, что

$$R(x) \sim C_\alpha x^\alpha,\ V(\pi - x) \sim D_\beta x^\beta,\ x \to +0,\ C_\alpha \cdot D_\beta \neq 0, \tag{5}$$

$\alpha, \beta \geq 0$ – фиксированные параметры, C_α и D_β – константы.

В случае оператора 1-го порядка подобная задача рассматривалась в [1]. Пусть наравне с задачей L имеется задача $\widetilde{L} = L(q, M, \widetilde{R}, \widetilde{V})$ того же вида. Объекты последней задачи будем помечать тильдой.

Для решения обратной задачи в указанной постановке имеет место следующая теорема единственности.

ТЕОРЕМА. Пусть $\{\lambda_n, \alpha_{jn}\}$ – СД задачи L, а $\{\widetilde{\lambda}_n, \widetilde{\alpha}_{jn}\}$ – СД задачи $\widetilde{L}$. Если при любом натуральном n $\lambda_n = \widetilde{\lambda}_n$ (с учётом кратности) и $\alpha_{jn} = \widetilde{\alpha}_{jn}$, $j = \overline{0, \kappa_n - 1}$, то $R(x) = \widetilde{R}(x)$, $V(x) = \widetilde{V}(x)$, $x \in [0, \pi]$.

Схема доказательства. Пусть $S(x,\lambda)$ есть решение уравнения (4), когда $R(x) = 0$, при начальных условиях $S(0,\lambda) = 0$, $S'(0,\lambda) = 1$. Обозначим $\lambda = \rho^2$. Имеет место (см. [2]) следующее представление:

$$S(x,\lambda) = \frac{\sin \rho x}{\rho} + \int_0^x K(x,t) \frac{\sin \rho t}{\rho} dt, \tag{6}$$

где $K(x,t)$ – непрерывная функция.

Решение задачи Коши (4) может быть представлено следующим образом:

$$u(x,\lambda) = \int_0^x g(x,t,\lambda) R(t) dt, \tag{7}$$

где функция Грина $g(x,t,\lambda)$, определённая на $[0,\pi] \times [0,x]$, удовлетворяет уравнению

$$-g''(x,t,\lambda) + q(x) g(x,t,\lambda) - \lambda g(x,t,\lambda) + \int_t^x M(x,\xi) g(\xi,t,\lambda) d\xi = 0$$

и начальным условиям

$$g(t,t,\lambda) = 0, \quad g'_x(t,t,\lambda) = 1.$$

Делая замену независимого переменного в последнем уравнении $x = x' + t$ при каждом фиксированном t, придём к представлению функции $g(x,t,\lambda)$, аналогичному представлению (6):

$$g(x,t,\lambda) = \frac{\sin \rho (x-t)}{\rho} + \int_0^{x-t} P(x,t,\tau) \frac{\sin \rho \tau}{\rho} d\tau,$$

где $P(x,t,\tau)$ — непрерывная функция.

Подставляя полученное выражение для функции Грина в равенство (7), после некоторых преобразований получим формулу для функции $u(x,\lambda)$:

$$u(x,\lambda) = \int_0^x \frac{\sin \rho t}{\rho} \left(R(x-t) + \int_0^{x-t} P(x,\tau,t) R(\tau) d\tau \right) dt. \tag{8}$$

Подставляя выражение для $u(x,\lambda)$ из (8) в формулу (3), получим

$$\Delta(\lambda)=1-\int_0^{\pi}\frac{\sin\rho t}{\rho}B(t)dt, \tag{9}$$

где $B(t)=-\int_t^{\pi}V(s)(R(s-t)+\int_0^{s-t}P(s,\tau,t)R(\tau)d\tau)ds$.

Используя асимптотическое поведение (5) функций R и V на левом и правом концах отрезка, получим асимптотическое представление функции $\Delta(\lambda)$ при $|\lambda|\to\infty$, $\arg\lambda=\theta\neq 0$, $\operatorname{Im}\rho>0$

$$\Delta(\lambda)=A_\gamma\rho^{-\gamma-2}e^{-i\rho\pi}(1+O(1/\rho)), \qquad \gamma=\alpha+\beta+1, \tag{10}$$

а при $\lambda\in\mathrm{R}^+$, $\lambda\to+\infty$,

$$\Delta(\lambda)=1+O(1/\rho). \tag{11}$$

Для задачи $\widetilde{L}$ имеют место соотношения:

$$\widetilde{u}(x,\lambda)=\int_0^x g(x,t,\lambda)\widetilde{R}(t)dt, \quad \widetilde{\Delta}(\lambda)=1-\int_0^{\pi}\widetilde{V}(t)\widetilde{u}(t,\lambda)dt.$$

По условиям теоремы функция $\Delta(\lambda)[\widetilde{\Delta}(\lambda)]^{-1}$ является целой аналитической порядка $1/2$ без нулей и при $\lambda\in\mathrm{R}^+$, $\lambda\to+\infty$, $\Delta(\lambda)[\widetilde{\Delta}(\lambda)]^{-1}=1+O(\rho^{-1})$. Следовательно, $\Delta(\lambda)\equiv\widetilde{\Delta}(\lambda)$.

Рассмотрим функцию $\Phi(\lambda)=[\Delta(\lambda)]^{-1}[u(\pi,\lambda)-\widetilde{u}(\pi,\lambda)]$. В условиях теоремы функция $\Phi(\lambda)$ также является целой аналитической порядка $1/2$, причём из (8), (10) и (11) имеем, что $|\Phi(\lambda)|\leq C|\lambda|^{1/2}$ и $\lim\Phi(\lambda)=0$ при $\lambda\in\mathrm{R}^+$, $\lambda\to+\infty$. Следовательно, $\Phi(\lambda)\equiv 0$ или $u(\pi,\lambda)=\widetilde{u}(\pi,\lambda)$.
Далее, используя представление (8), приходим к тождеству

$$R(x)-\widetilde{R}(x)+\int_0^x(R(\tau)-\widetilde{R}(\tau))P(\pi,\tau,\pi-x)d\tau\equiv 0.$$

Так как однородное уравнение Вольтерра имеет только нулевое решение, заключаем, что $R(x)=\widetilde{R}(x)$. Для доказательства равенства $V(x)=\widetilde{V}(x)$ на $[0,\pi]$ нужно применить метод, использованный в [1] для доказательства аналогичного результата. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Юрко В. А.* Обратная задача для интегродифференциальных операторов 1-го порядка // Функц. анализ: Межвуз. сб. науч. тр. Ульяновск, 1984.

2. *Юрко В. А.* Обратная задача для интегродифференциальных операторов // Матем. заметки. 1991. Вып.5. Т. 50.

УДК 517.862

А. Л. Лукашов

НЕРАВЕНСТВА ТИПА БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ НА НЕСКОЛЬКИХ ОТРЕЗКАХ*

Хорошо известна та роль, которую играют неравенства Бернштейна в теории приближений и других вопросах анализа. Их различным обобщениям и уточнениям посвящена обширная литература, в том числе книги [2, 5, 6]. Тем не менее весьма мало изучен случай, когда значения полинома задаются на несвязных множествах (см.[1, 5]).

Статья посвящена получению аналогов неравенства Бернштейна для производных первого и высшего порядков многочленов на нескольких отрезках.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $p_n \in \pi_n$. Тогда для любого $x \in \operatorname{int}(E)$

$$\left|p_n'(x)\right| \le \max_{\varepsilon\in\{-1,1\}^{m-1}} \sqrt{\left|\frac{\prod\limits_{j=1}^{m-1}\left(x-a_{2j+\frac{1+\varepsilon_j}{2}}\right)}{\prod\limits_{j=1}^{m-1}\left(x-a_{2j+\frac{1-\varepsilon_i}{2}}\right)}\right|}\,\frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\|p_n\|_{C(E)}.$$

Доказательство. Из теоремы 3 [1] следует, что многочлен p_n^*, экстремальный в задаче

$$\frac{\left|p'_n(\varsigma)\right|}{\|p_n\|_{C(E)}}=\max_{q_n\in\pi_n,\,q_n\ne0}\frac{\left|q_n'(\varsigma)\right|}{\|q_n\|_{C(E)}},$$

является многочленом типа Золотарева на E , т. е. имеет на E не менее n точек альтернанса. Теперь рассуждения, аналогичные использованным в [3], показывают, что найдутся числа $\widetilde{a}_1,\ldots,\widetilde{a}_{2l}$, $1\le l\le 2m$, и $\widetilde{c}_1,\ldots,\widetilde{c}_{l-1}$, $\widetilde{a}_{2i}<\widetilde{c}_i<\widetilde{a}_{2i+1}$, $i=1,..,l-1$, такие, что

$$p^*_n(x)=c\cos\int\limits_{\widetilde{a}_1}^{x}\frac{n\prod\limits_{k=1}^{l-1}(x-\widetilde{c}_k)}{\sqrt{\left|\prod\limits_{k=1}^{2l}(x-\widetilde{a}_k)\right|}}dx.$$

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-01120, и программы “Ведущие научные школы”, проект № 00-15-96123.

Осталось заметить, что в силу расположения точек $\widetilde{a}_1,...,\widetilde{a}_{2l}$, относительно $a_1,...,a_{2m}$ можно утверждать, используя рассуждения, подобные приведенным в [1, 4], что

$$\frac{\left|\prod\limits_{k=1}^{l-1}(x-\widetilde{c}_k)\right|}{\sqrt{\left|\prod\limits_{k=1}^{2l}(x-\widetilde{a}_k)\right|}} \le \max_{\varepsilon\in\{-1,1\}^{m-1}} \sqrt{\frac{\left|\prod\limits_{j=1}^{m-1}\left(x-a_{2j+\frac{1+\varepsilon_j}{2}}\right)\right|}{\left|\prod\limits_{j=1}^{m-1}\left(x-a_{2j+\frac{1-\varepsilon_j}{2}}\right)\right|}} \cdot \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}, x\in \operatorname{int}(E).$$

В качестве примера рассмотрим случай

$$x\in(a_1,a_2), \widetilde{a}_1=a_1, \widetilde{a}_2=a_2<\widetilde{a}_3<\widetilde{a}_4<\widetilde{a}_5<\widetilde{a}_6<\widetilde{a}_7=a_3.$$

Тогда

$$\frac{\left|(x-\widetilde{c}_1)(x-\widetilde{c}_2)(x-\widetilde{c}_3)\cdot\prod\limits_{k=4}^{l-1}(x-\tau_k)\right|}{\sqrt{\left|\prod\limits_{k=1}^{2l}(x-\widetilde{a}_k)\right|}} \le \frac{|x-\widetilde{a}_3|\cdot|x-\widetilde{a}_5|\cdot|x-a_3|}{\sqrt{|x-a_1|\cdot|x-a_2|\cdot|x-\widetilde{a}_3|\cdot|x-\widetilde{a}_5|}}\times$$

$$\times\frac{\prod\limits_{k=3}^{l-1}|x-\widetilde{c}_k|}{\sqrt{|x-a_3|}\cdot\sqrt{\left|\prod\limits_{k=8}^{2l}(x-\widetilde{a}_k)\right|}} \le \sqrt{\left|\frac{x-a_3}{x-a_2}\right|}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+1}}\cdot\frac{\prod\limits_{k=3}^{l-1}(x-\widetilde{c}_k)}{\sqrt{\left|\prod\limits_{k=8}^{2l}(x-\widetilde{a}_k)\right|}}.$$

Замечание. Точность приведенной теоремы можно утверждать лишь на всем классе систем отрезков (включающем случай одного отрезка, когда теорема 1 превращается в классическое неравенство Бернштейна). Для конкретной системы отрезков ответ на вопрос о точности данного неравенства автору неизвестен.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $p\in\pi_n$. Тогда для любого $x\in\operatorname{int}(E)$ и $k<n$

$$\left|p^{(k)}(x)\right| \le \frac{k^{k-1}}{(k-1)!}\left(\frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\max_{\varepsilon\in\{-1,1\}^{m-1}}\sqrt{\frac{\left|\prod\limits_{j=1}^{m-1}\left(x-a_{2j+\frac{1+\varepsilon_j}{2}}\right)\right|}{\left|\prod\limits_{j=1}^{m-1}\left(x-a_{2j+\frac{1-\varepsilon_j}{2}}\right)\right|}}\right)^k\cdot\|p\|_{C(E)}.$$

Доказательство. Пусть $x\in(a_1,a_2)$.

Тогда $$\max_{\varepsilon\in\{-1,1\}^{m-1}} \sqrt{\left|\frac{\prod_{j=1}^{m-1}\left(x-a_{2j+\frac{1+\varepsilon_j}{2}}\right)}{\prod_{j=1}^{m-1}\left(x-a_{2j+\frac{1-\varepsilon_j}{2}}\right)}\right|} = \sqrt{\left|\frac{\prod_{j=1}^{m-1}(x-a_{2j+1})}{\prod_{j=1}^{m-1}(x-a_{2j})}\right|}.$$

Теперь положим подобно [2, с. 252]

$$a_1^{(j)} = x - \frac{(k-j)(x-a_1)}{k}, a_2^{(j)} = x + \frac{(k-j)(a_2-x)}{k},$$

$$E^{(j)} = [a_1^{(j)}, a_2^{(j)}] \bigcup (\bigcup_{i=2}^{m} [a_{2i-1}, a_{2i}]).$$

По теореме 1

$$\left\|p^{(j)}\right\|_{C(E^{(j)})} \le n \cdot \sqrt{\frac{\prod_{i=1}^{m-1}(x-a_{2i+1})}{(x-a_2^{(j-1)})\prod_{i=2}^{m-1}(x-a_{2i})}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-x)(x-a_1^{(j-1)})}} \cdot \left\|p^{(j-1)}\right\|_{C(E^{(j-1)})}.$$

Отсюда с учётом равенств

$$x - a_2^{(j-1)} = (x-a_2)\cdot\frac{k-j+1}{k}, \quad x - a_1^{(j-1)} = (x-a_1)\cdot\frac{k-j+1}{k}$$

получим $\left\|p^{(j)}\right\|_{C(E^{(j)})} \le \dfrac{k}{k-j+1}\cdot n \sqrt{\dfrac{\prod_{i=1}^{m-1}(x-a_{2i+1})}{\prod_{i=2}^{m-1}(x-a_{2i})}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \left\|p^{(j)}\right\|_{C(E^{(j-1)})}.$

Полагая в этом неравенстве последовательно $j = 1,\dots,k$, получим требуемое.

Замечание. Константа в данном неравенстве не является наименьшей даже в случае одного отрезка (см.[2, упр. Е. 5]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Borwein P. B.* Markov\`s and Bernstein\`s inequalities on disjoint intervals // Can. J. Math.1981.Vol. 33. P. 201 - 209.

2. *Borwein P., Erdelyi T.* Polynomials and polynomial inequalities. N. Y.: Springer, 1995.

3. *Lukashov A. L.* On Chebyshev – Markov rational functions over several intervals // J. Approx. Theory. 1998. Vol. 95. P. 333 - 352.

4. *Лукашов А.Л.* Неравенство типа Бернштейна для производных рациональных функций на двух интервалах // Матем. заметки. 1999. Т. 66. С. 508 - 514.

5. *Milovanovic G. V., Mitrinović D. S., Rassias Th. M.* Topics in polynomials: extremal problems, inequalities, zeros. Singapore: World Sc., 1994.

6. *Rahman Q. I., Schmeisser Q.* Les inequalites de Markoff et de Bernstein. Montreal, 1983.

УДК 517.984

Д. С. Лукомский

О МАТРИЦЕ ВЕЙЛЯ ДЛЯ ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ПОЛУОСИ*

Рассмотрим дифференциальное уравнение и линейные формы вида:

$$ly \equiv y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-2} P_k(x,\rho) y^{(k)} = 0, \quad P_k(x,\rho) = \sum_{i=k}^{n} \rho^{n-i} p_{ki}(x), \quad x \in (0,+\infty) \qquad (1)$$

$$U_\xi(y) = y^{(n-\xi)}(0) + \sum_{k=1}^{n-\xi} \rho^k u_{k\xi}(\rho) y^{(n-k-\xi)}(0), \quad u_{k\xi}(\rho) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\beta_{k,k+i}^{(\xi)}}{\rho^i}.$$

Полагаем, что $p_{kk,}\ \beta_{k,k+i}^{(\xi)}$ – константы, $p_{ki}(x) \in L(0,\infty)$, $p_{k,k+1}(x) \in W^1(0,\infty)$, $k = \overline{1,n}$, $i = \overline{k+1,n}$.

Прямые и обратные задачи для пучков дифференциальных операторов исследовались во многих работах (см. [1, 2] и литературу в них).

Пусть $\{R_k\}_{k=1}^{n}$ – корни характеристичекого уравнения $F(R) = \sum_{k=0}^{n} p_{kk} R^k = 0$, $(p_{nn} = 1)$. Считаем, что $R_k - R_j \neq 0$, $k \neq j$ и $R_k \neq 0$, $k = \overline{1,n}$.

Известно, что комплексную ρ-плоскость можно разбить на конечное число секторов S_ν так, что внутри них корни $\{R_k\}_{k=\overline{1,n}}$ можно занумеровать следующим образом:

$$\mathrm{Re}(\rho R_1) < \mathrm{Re}(\rho R_2) < \ldots < \mathrm{Re}(\rho R_n) \quad \forall \rho \in S_\nu. \qquad (2)$$

Пусть $\rho \in S_\nu$ и функции $\Phi(x,\rho) = [\Phi_m(x,\rho)]_{m=\overline{1,n}}$ являются решениями уравнения (1) при условиях $U_\xi(\Phi_m) = \delta_{\xi m}$ $(\xi = \overline{1,m})$, а также $\Phi_m(x,\rho) = O\left(e^{\rho R_m x + \alpha_m(x)}\right)$, $R_k, k = \overline{1,n}$ занумерованы в порядке (2), где

$$\alpha_m(x) = -\int_0^x \frac{\sum_{j=0}^{n-2} p_{j,j+1}(\xi) R_m^j \, d\xi}{F'(R_m)}.$$

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00741.

Обозначим

$$M_{mk}(\rho) = U_k(\Phi_m),\ k = \overline{m+1,n}.$$

Определение. Функции $M_{mk}(\rho)$, $k = \overline{m+1,n}$ называются функциями Вейля, а матрица $M(\rho) = \left[M_{mk}(\rho)\right]_{m,k=\overline{1,n}}$, $M_{mk}(\rho) = \delta_{mk}$, $k = \overline{1,m}$ называется матрицей Вейля.

Обозначим $\delta_\xi(R) = R^{n-\xi}\sum\limits_{i=0}^{n-\xi}\dfrac{\beta_{ii}^{(\xi)}}{R_i}$, $\qquad \Delta(p) = \det(\delta_\xi(R_k))_{\xi,k=\overline{1,p}}$.

Пусть для всех $p = \overline{1,n-1}$,, $\Delta(p) \neq 0$. Это условие должно выполняться для любого сектора S_ν с его собственной нумерацией корней $\{R_k\}_{k=\overline{1,n}}$.

Пусть S_ν, $(\nu = \overline{1,N})$ – сектора, в которых выполнено неравенство (2), $\{\gamma_\nu\}_{\nu=\overline{1,N}}$ – набор лучей, выходящих из начала координат; луч γ_ν является общей границей секторов S_ν и $S_{\nu+1}$ (при этом считаем $S_{N+1} = S_1$). Договоримся, что верхние индексы $+S_\nu$ и $-S_\nu$ у функции обозначают ее пределы к лучам, которые являются границами сектора S_ν по и против часовой стрелке соответственно.

Зафиксируем сектор S_ν. Тогда справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. Матрица $M(\rho)$ является регулярной в секторе S_ν $(\nu = \overline{1,N})$, за исключением не более чем счетного, ограниченного множества полюсов Λ'_{S_ν}. За исключением ограниченных множеств $\Lambda^+_{S_\nu}$ и $\Lambda^-_{S_\nu}$ существуют конечные пределы $M(\rho)^{+S_\nu}$ и $M(\rho)^{-S_\nu}$.

При фиксированном $m = \overline{1,n-1}$ и произвольном $k = \overline{m+1,n}$ функция Вейля $M_{mk}(\rho)$ является регулярной по крайней мере в одном из объединений $S_\nu \cup S_{\nu+1} \cup \gamma_\nu$ или $S_\nu \cup S_{\nu-1} \cup \gamma_{\nu-1}$, за исключением не более чем счетного множества полюсов Λ'_{mk}. За исключением ограниченных множеств Λ^-_{mk} и Λ^+_{mk} существуют конечные пределы $M_{mk}^{+S_\nu}$ и $M_{mk}^{-S_{\nu+1}}$ либо $M_{mk}^{+S_{\nu-1}}$ и $M_{mk}^{-S_\nu}$.

В прямых и обратных задачах очень большую роль играют структурные свойства матрицы Вейля. Подобные свойства матрицы Вейля для обыкновенных дифференциальных операторов были рассмотрены В. А. Юрко [3]. Продолжим рассмотрение функций $M_{mk}(\rho)$ в фиксированном секторе S_ν. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. Функции

$$M_{mk}(\rho) - M_{m,m+1}(\rho)M_{m+1,k}(\rho),\ M^*_{n-m,k}(\rho) - M^*_{n-m,m+1}(\rho)M^*_{n-m+1,k}(\rho),$$

$$\Phi_m(x,\rho) - M_{m,m+1}(\rho)\Phi_{m+1}(x,\rho),\ \Phi^*_{n-m}(x,\rho) - M_{m,m+1}(\rho)\Phi^*_{n-m+1}(x,\rho)$$

регулярны на том же луче γ_ν, ограничивающем сектор S_ν, что и функции $M_{m+1,k}(\rho)$, где функции $M^*_{mk}(\rho)$ являются функциями Вейля для сопряженного к (1) дифференциального уравнения.

Рассмотрим случай, когда характеристическое уравнение имеет вид $F(R)=R^n-1=0$. В этом случае область аналитичности и структурные свойства функций $M_{mk}(\rho)$ можно описать более точно.

ТЕОРЕМА 3. Матрица $M(\rho)$ является регулярной в секторе $S_\nu=\left\{\rho:\arg\rho\in\frac{\nu\pi}{n},\frac{(\nu+1)\pi}{n}\right\},(\nu=\overline{0,2n-1})$, за исключением не более чем счетного, ограниченного множества полюсов Λ'_{S_ν}. За исключением ограниченных множеств $\Lambda^+_{S_\nu}$ и $\Lambda^-_{S_\nu}$ существуют конечные пределы $M(\rho)^{+S_\nu}$ и $M(\rho)^{-S_\nu}$.

Функция Вейля $M_{mk}(\rho)$ является регулярной в $S_\nu \bigcup S_{\nu+(-1)^{n+\nu-m+1}}$, за исключением не более чем счетного множества полюсов Λ'_{mk}. За исключением ограниченных множеств Λ^-_{mk} и Λ^+_{mk} существуют конечные пределы $M^{+S_\nu}_{mk}$ и $M^{-S_\nu}_{mk}$.

ТЕОРЕМА 4. Функции

$$M_{mk}(\rho)-M_{m,m+1}(\rho)M_{m+1,k}(\rho),\ M^*_{n-m,k}(\rho)-M^*_{n-m,m+1}(\rho)M^*_{n-m+1,k}(\rho),$$
$$\Phi_m(x,\rho)-M_{m,m+1}(\rho)\Phi_{m+1}(x,\rho),\ \Phi^*_{n-m}(x,\rho)-M_{m,m+1}(\rho)\Phi^*_{n-m+1}(x,\rho)$$

регулярны при $\rho\in\gamma_{\nu+\frac{(-1)^{n+\nu-m}+1}{2}}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shkalikov A. A., Griniv R. O.* On an operator pencil that arises in the problem of the vibrations of a rod with internal friction // Math. Notes. 1994. Vol. 5, №№ 1-2, P. 840 - 851.

2. *Gasymov M. G., Magerramov A. M.* Direct and inverse spectral problems for a class of ordinary differential pencils on afinite interval//Diff. Equations. 1987. Vol. 23, № 6, P. 640 - 649.

3. *Юрко В. А.* Обратная задача для дифференциальных операторов. Саратов, 1989.

УДК 517.5

С. Ф. Лукомский

О ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ, БЛИЗКИХ К L^{∞}*

Пусть $(G,\sum,\mu)$ – пространство с конечной мерой μ и $\mu(G)=1$. Классы Орлича $L^0(\varphi)$ в случае, когда N-функция φ не удовлетворяет Δ_2 условию, не являются линейными. Чтобы превратить такой класс в линейное пространство, рассматривают их объединение $L(\varphi)=\bigcup_\lambda L^0(\varphi(\cdot\lambda))$ и традиционно определяют норму одним из следующих равенств:

$$\|f\|_1=\sup\left\{\int_G|fg|d\mu:\int_G\varphi^*(g)d\mu\le 1\right\},\qquad \|f\|_2=\inf\left\{\lambda>0:\int_G\varphi\left(\frac{|f|}{\lambda}\right)d\mu\le 1\right\}.$$

Мы рассмотрим пространства, лежащие по шкале пространств Орлича между $L\left(\gamma^{x^2}\right)$ и L^{∞}, определим в них норму, отличную от норм $\|f\|_1$ и $\|f\|_2$, и покажем, что полученные пространства являются Банаховыми.

<u>Определение.</u> Пусть $1<p<2$. Через $\hat{L}_p(G)$ обозначим совокупность всех измеримых, п. вс. конечных функций $f:G\to\boldsymbol{R}$ таких, что для каждой $f\in\hat{\mathrm{L}}_{\mathrm{p}}(G)$ существует:

1) положительная, непрерывная, строго возрастающая на $(0,\infty)$ функция φ такая, что

$$\int_1^{\infty}\left(\frac{\varphi^{-1}(x)}{x}\right)^p dx<\infty\qquad(\varphi^{-1}\text{ - обратная к }\varphi),\tag{1}$$

2) постоянная $\gamma>1$ такая, что

$$\int_G\gamma^{\varphi(|f|)}d\mu<\infty.\tag{2}$$

Основной результат сформулируем в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА. $\hat{L}_p(G)$ есть Банахово пространство с нормой

$$\|f\|_{\hat{p}}=\left(\int_1^{\infty}\left(\|f\|_x x^{-1}\right)^p dx\right)^{1/p}<\infty.\tag{3}$$

---

* Работа частично поддержана программой “Ведущие научные школы”, грант № 00-15-96123.

Доказательство. Покажем, что $\hat{L}_p(G)$ совпадает с множеством функций, для которых конечна величина

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\|f\|_n n^{-1}\right)^p. \tag{4}$$

1. Пусть f измерима, п. вс. конечна, $1 < p < 2$ и ряд (4) сходится. Покажем, что существует $\varphi(x) > 0$, непрерывная, строго возрастающая и такая, что интеграл (2) сходится при некотором $\gamma > 1$ и сходится интеграл (1).

Если $|f(x)| = const = A$ п. вс. на G, то в качестве φ^{-1} можно взять любую положительную, непрерывную, строго возрастающую функцию такую, что $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi^{-1}(x) = B > A$.

Если $|f(x)| \neq const$ п. вс. на G, то положим

$\varphi^{-1}(x) = \lambda x\|f\|_1$ при $0 < x \le 1$, $\quad \varphi^{-1}(x) = \lambda\|f\|_x$ при $x \ge 1 \quad (\lambda > 1)$.

Тогда $\varphi^{-1}(x)$ строго возрастает, непрерывна на $(0,+\infty)$ и, значит, существует обратная к ней φ. Очевидно, что интеграл (1) сходится.

Покажем, что интеграл (2) сходится при $1 < \gamma < \lambda$. Пусть

$$E_n = \{x : n \le \varphi(|f(x)|) < n+1\} = \{x : \varphi^{-1}(n) \le |f(x)| < \varphi^{-1}(n+1)\}. \tag{5}$$

Тогда

$$\|f\|_n^n = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{E_k}|f|^n d\mu \ge \int_{E_n}|f|^n d\mu \ge \left(\varphi^{-1}(n)\right)^n \mu E_n, \tag{6}$$

откуда находим

$$\int_G \gamma^{\varphi(|f|)}d\mu \le \gamma\sum_{k=0}^{\infty}\gamma^k \mu E_k \le \gamma\sum_{k=1}^{\infty}\gamma^k\frac{\|f\|_k^k}{\left(\varphi^{-1}(k)\right)^k} + \gamma\mu E_0 =$$

$$= \gamma\mu E_0 + \gamma\sum_{k=1}^{\infty}\gamma^k\frac{\|f\|_k^k}{\lambda^k\|f\|_k^k} = \gamma\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^k + \gamma\mu E_0 < \infty.$$

2. Покажем обратное включение. Пусть для $1 < p < 2$ интеграл (1) сходится и при некотором $\gamma > 1$ интеграл (2) сходится. Пусть снова множества E_n определены равенствами (5). Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\gamma^n\mu E_n \le \int_G \gamma^{\varphi(|f|)}d\mu = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{E_n}\gamma^{\varphi(|f|)}d\mu \le \gamma\sum_{n=0}^{\infty}\gamma^n\mu E_n.$$

Для нормы $\|f\|_n$ имеем

$$\|f\|_n^n = \int_G |f|^n d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{E_k} |f|^n d\mu \le \sum_{k=0}^{\infty} \left(\varphi^{-1}(k+1)\right)^n \mu E_k = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k \mu E_k \frac{\left(\varphi^{-1}(k+1)\right)^n}{\gamma^k}$$

или

$$\|f\|_n \le \sup_k \left(\gamma^{-\frac{k}{n}} \varphi^{-1}(k+1) \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k \mu E_k \right)^{1/n}. \tag{7}$$

Обозначим $A = \sup_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k \mu E_k \right)^{1/n}$ и пусть k_n - то значение k, при котором достигается sup в (7). Тогда (7) примет вид

$$\|f\|_n \le A\gamma\varphi^{-1}(k_n)\gamma^{-\frac{k_n}{n}}.$$

Отсюда находим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\|f\|_n}{n} \right)^p \le (A\gamma)^p \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi^{-1}(k_n)\gamma^{-\frac{k_n}{n}} \right)^p \frac{1}{n^p}. \tag{8}$$

Покажем, что ряд справа в (8) сходится. Обозначим

$K(s) = \left\{ n : s \le \dfrac{k_n}{n} < s+1 \right\}$ $(s=0,1,\ldots)$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varphi^{-1}(k_n)}{n} \right)^p \frac{1}{\gamma^{\frac{k_n}{n}p}} = \sum_s \sum_{n \in K(s)} \left(\frac{\varphi^{-1}(k_n)}{n} \right)^p \frac{1}{\gamma^{\frac{k_n}{n}p}} \le$$

$$\le \sum_s \sum_{n \in K(s)} \left(\frac{\varphi^{-1}(n(s+1))}{n(s+1)} \right)^p \frac{(s+1)^p}{\gamma^{sp}} = \sum_s \frac{(s+1)^p}{\gamma^{sp}} \sum_{n \in K(s)} \left(\frac{\varphi^{-1}(n(s+1))}{n(s+1)} \right)^p \le$$

$$\le \sum_s \frac{(s+1)^p}{\gamma^{sp}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varphi^{-1}(n)}{n} \right)^p < \infty.$$

Таким образом, множество $\hat{L}_p(G)$ совпадает с множеством всех функций, для которых ряд (4) сходится.

Очевидно, что $\hat{L}_p(G)$ является линейным пространством и любое из равенств

$$\|f\|_{\hat{p}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\|f\|_n}{n} \right)^p d\mu \right)^{1/p},$$

$$\|f\|_{\widehat{p}} = \left(\int_1^{\infty} \left(\frac{\|f\|_x}{x} \right)^p d\mu \right)^{1/p}$$

определяет в $\hat{L}_p(G)$ эквивалентные нормы. Полнота пространства $\hat{L}_p(G)$ относительно введенной нормы также очевидна. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

2. *Rodin V. A., Semyonov E. M.* Rademacher series in simmetric spaces // Analysis Mathematica. 1975. Vol. 1, № 4. P. 207 - 222.

УДК 519.23

А. Ю. Митрофанов

О СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОДНОЙ ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ

Рассмотрена стохастическая модель обратимой химической реакции

$$A + B \leftrightarrow AB, \tag{1}$$

протекающей в замкнутой системе объема V (случай, когда температура системы может изменяться квазистатически). Пусть M и N – число частиц в системе соответственно типов A и B и $M \geq N$. Тогда изменение числа частиц AB в системе описывается неоднородным процессом рождения и гибели $X = \{X(t) : X(t) \in \{0,1,...,N\},\ t \geq 0\}$, параметры которого зависят от величин M и V. Если $M >> N$, то концентрацию свободных частиц A в системе можно считать равной некой постоянной a и тогда реакция $A + B \to AB$ будет реакцией псевдопервого порядка. В этом случае изменение числа частиц AB в системе описывается неоднородным процессом рождения и гибели $Y = \{Y(t) : Y(t) \in \{0,1,...,N\},\ t \geq 0\}$, параметры которого зависят от a [1].

Определим вероятности $p_{in}^X(t) = P\{X(t) = n \mid X(0) = i\}$ и $p_{in}^Y(t) = P\{Y(t) = n \mid Y(0) = i\}$, $i, n = \overline{0, N}$. Определим также векторы $p_i^X(t) = (p_{in}^X(t))_{n=0}^N$ и $p_i^Y(t) = (p_{in}^Y(t))_{n=0}^N$, $i = \overline{0, N}$. Основная цель данной работы заключается в исследовании точности приближения функции $p_i^X(t)$ функцией $p_i^Y(t)$ при $M \to \infty$, $V \to \infty$, $MV^{-1} = const$.

Обозначим $k_1(t)$ и $k_{-1}(t)$ константы скорости прямой и обратной реакции в (1) (константы скорости являются непрерывными функциями времени $t \geq 0$, поскольку предполагается, что температура системы может изменяться). Если в системе существует n частиц AB, $n = \overline{0, N}$, то в свободном состоянии находятся $M - n$ частиц A и $N - n$ частиц B. Процесс X, пребывающий в состоянии n в момент времени t, за время Δt может перейти в состояние $n+1$ с вероятностью $k_1(t)V^{-1}(M-n)(N-n)\Delta t + o(\Delta t)$, в состояние $n-1$ с вероятностью $k_{-1}(t)n\Delta t + o(\Delta t)$ или в какое-либо другое состояние с вероятностью $o(\Delta t)$ (см., например, [2]). Положим $p_{i,-1}^X(t) \equiv p_{i,N+1}^X(t) \equiv 0$; вероятности $p_{in}^X(t)$, $n = \overline{0, N}$, удовлетворяют прямым дифференциальным уравнениям Колмогорова

$$dp_{in}^X(t)/dt = k_1(t)V^{-1}(M-n+1)(N-n+1)p_{i,n-1}^X(t) - $$
$$- [k_1(t)V^{-1}(M-n)(N-n) + k_{-1}(t)n]p_{in}^X(t) + k_{-1}(t)(n+1)p_{i,n+1}^X(t) \qquad (2)$$

и начальным условиям $p_{ii}^X(0) = 1$, $p_{in}^X(0) = 0$, $n \neq i$.

Процесс Y, пребывающий в состоянии n в момент времени t, за время Δt может перейти в состояние $n+1$ с вероятностью $k_1(t)a(N-n)\Delta t + o(\Delta t)$, в состояние $n-1$ с вероятностью $k_{-1}(t)n\Delta t + o(\Delta t)$ или в какое-либо другое состояние с вероятностью $o(\Delta t)$. Положим $p_{i,-1}^Y(t) \equiv p_{i,N+1}^Y(t) \equiv 0$; вероятности $p_{in}^Y(t)$, $n = \overline{0, N}$, удовлетворяют прямым дифференциальным уравнениям Колмогорова

$$dp_{in}^Y(t)/dt = k_1(t)a(N-n+1)p_{i,n-1}^Y(t) - $$
$$- [k_1(t)a(N-n) + k_{-1}(t)n]p_{in}^Y(t) + k_{-1}(t)(n+1)p_{i,n+1}^Y(t) \qquad (3)$$

и начальным условиям $p_{ii}^Y(0) = 1$, $p_{in}^Y(0) = 0$, $n \neq i$.

Запишем системы (2) и (3) в векторной форме:

$$dp_i^X(t)/dt = L^X(t)p_i^X(t), \quad p_i^X(0) = p_i, \qquad (4)$$
$$dp_i^Y(t)/dt = L^Y(t)p_i^Y(t), \quad p_i^Y(0) = p_i. \qquad (5)$$

Представим систему (2) в следующем виде:

$$dp_{in}^X(t)/dt = \{k_1(t)V^{-1}M(N-n+1)p_{i,n-1}^X(t) - $$
$$- [k_1(t)V^{-1}M(N-n) + k_{-1}(t)n]p_{in}^X(t) + k_{-1}(t)(n+1)p_{i,n+1}^X(t)\} + $$
$$+ k_1(t)V^{-1}\{(1-n)(N-n+1)p_{i,n-1}^X(t) + n(N-n)p_{in}^X(t)\}, \ n = \overline{0, N}.$$

Полагая $a = MV^{-1}$, получим

$$dp_{in}^X(t)/dt = \{k_1(t)a(N-n+1)p_{i,n-1}^X(t) - [k_1(t)a(N-n) + k_{-1}(t)n]p_{in}^X(t) + $$
$$+ k_{-1}(t)(n+1)p_{i,n+1}^X(t)\} + M^{-1}k_1(t)a\{(1-n)(N-n+1)p_{i,n-1}^X(t) + $$
$$+ n(N-n)p_{in}^X(t)\}, \quad n = \overline{0, N}.$$

Из этой записи системы (2) с учетом (4) и (5) видно, что справедливо представление

$$L^X(t) = L^Y(t) + M^{-1}L(t), \qquad (6)$$

где матрицы $L^Y(t)$, $L(t)$ зависят от a.

В дальнейшем знаком $\|\cdot\|$ будем обозначать 1-норму для векторов и матриц. Известными методами теории дифференциальных уравнений может быть получена оценка $\left\|p_i^X(t) - p_i^Y(t)\right\| \le\ l(l^Y M)^{-1}[\exp(l^Y T) - 1]$, где $i \in \{0,1,\dots,N\}$, $t \in [0,T]$, $l^Y = \max_t \left\|L^Y(t)\right\|$, $l = \max_t \|L(t)\|$ [1]. Покажем, что эта оценка может быть усилена.

ТЕОРЕМА. Справедлива оценка $\left\|p_i^X(t) - p_i^Y(t)\right\| \le lTM^{-1}$, $t \in [0,T]$.

Доказательство. Введем в рассмотрение вектор $z(t) = p_i^X(t) - p_i^Y(t)$. Из (4)–(6) следует, что этот вектор удовлетворяет дифференциальному уравнению $dz(t)/dt = L^Y(t)z(t) + M^{-1}L(t)p_i^X(t)$, $t \ge 0$, и начальному условию $z(0) = 0$. Пользуясь методом вариации произвольных постоянных, получим выражение для $z(t)$:

$$z(t) = M^{-1}\int_0^t \Phi(0,t)\Phi^{-1}(0,u)L(u)p_i^X(u)du,$$

где $\Phi(\tau,t)$ – нормированная при $t = \tau$ фундаментальная матрица уравнения $dx(t)/dt = L^Y(t)x(t)$, $t \ge 0$. Для $\tau, t > 0$ справедливо $\Phi(0,t) = \Phi(\tau,t)\Phi(0,\tau)$, следовательно, $z(t) = M^{-1}\int_0^t \Phi(u,t)L(u)p_i^X(u)du$ и $\|z(t)\| \le M^{-1}\int_0^t \|\Phi(u,t)\|\|L(u)\|\left\|p_i^X(u)\right\|du$. Поскольку $p_i^X(t)$ – вероятностный вектор, $\left\|p_i^X(t)\right\| \equiv 1$. Из определения матрицы $L^Y(t)$ следует, что при $u \le t$ столбцами матрицы $\Phi(u,t)$ являются вероятностные векторы, следовательно, $\|\Phi(u,t)\| = 1$. Теорема доказана.

Следствие 1. Справедлива оценка

$$|E(X(t) \mid X(0) = i) - E(Y(t) \mid Y(0) = i)| \le NlTM^{-1}, \quad t \in [0,T].$$

Доказательство. $|E(X(t) \mid X(0) = i) - E(Y(t) \mid Y(0) = i)| \le$

$$\le \sum_{n=0}^N n\left|p_{in}^X(t) - p_{in}^Y(t)\right| \le N\sum_{n=0}^N \left|p_{in}^X(t) - p_{in}^Y(t)\right| \le NlTM^{-1}.$$

Следствие 2. Справедлива оценка

$$|\mathrm{var}(X(t) \mid X(0) = i) - \mathrm{var}(Y(t) \mid Y(0) = i)| \le 3N^2 lTM^{-1}, \quad t \in [0,T].$$

Доказательство. $|\mathrm{var}(X(t) \mid X(0) = i) - \mathrm{var}(Y(t) \mid Y(0) = i)| \le$

$\le \left|\sum_{n=0}^N n^2[p_{in}^X(t) - p_{in}^Y(t)]\right| + \left|(\sum_{n=0}^N np_{in}^X(t))^2 - (\sum_{n=0}^N np_{in}^Y(t))^2\right|$. Первое слагаемое в правой части неравенства не превосходит $N^2\left\|p_i^X(t) - p_i^Y(t)\right\|$. Второе слагаемое можно представить как произведение $\left|\sum_{n=0}^{N} n[p_{in}^X(t) - p_{in}^Y(t)]\right|(\sum_{n=0}^{N} n[p_{in}^X(t) + p_{in}^Y(t)])$. Здесь первый сомножитель не превосходит $N\left\|p_i^X(t) - p_i^Y(t)\right\|$, а второй не превосходит $2N$. Отсюда $|\mathrm{var}(X(t) \mid X(0) = i) - \mathrm{var}(Y(t) \mid Y(0) = i)| \le 3N^2 \left\|p_i^X(t) - p_i^Y(t)\right\| \le 3N^2 lTM^{-1}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Митрофанов А. Ю.* Стохастическая модель химической реакции с участием трех реагентов, протекающей при избытке одного из реагентов // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2000. Т. 7. Вып. 1. С. 192–193.

2. *Pollett P. K.*, *Vassallo A.* Diffusion approximations for some simple chemical reaction schemes // Advances in Applied Probability. 1992. Vol. 24. P. 875–893.

УДК 519.21

В. Н. Михайлов, А. В. Харламов

ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИОННАЯ МОДЕЛЬ С ПОЛОЖИТЕЛЬНО ПОЛУОПРЕДЕЛЕННОЙ МАТРИЦЕЙ ОШИБОК

Рассмотрим линейную регрессионную модель [1]

$$\widetilde{Y} = F\overline{\theta} + \overline{\varepsilon}. \tag{1}$$

Здесь $\overline{Y}$ - случайный вектор наблюдаемых значений зависимой переменной Y, $(n \times 1)$; F - известная матрица размерности $(n \times m)$ ранга m; $\overline{\theta}$ - вектор неизвестных коэффициентов, $(m \times 1)$; $\overline{\varepsilon}$ - случайный вектор ошибок, $(n \times 1)$. Математическое ожидание $M\overline{\varepsilon}$ и дисперсионная матрица $D\overline{\varepsilon}$ случайного вектора $\overline{\varepsilon}$ предполагаются следующими:

$$M\overline{\varepsilon} = 0, \quad D\overline{\varepsilon} = \sigma^2 W,$$

где W - симметричная квадратная матрица порядка n и σ^2 - постоянная. Если W - положительно определенная матрица, то наилучшая несмещенная оценка вектора $\overline{\theta}$ находится методом наименьших квадратов [1].

Рассмотрим случай, когда матрица W положительно полуопределена и имеет r собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ не равных нулю, причем $n - r < m$. Известно [2], что существует ортогональная матрица T такая, что

$$T^T W T = \Lambda, \tag{2}$$

где Λ - диагональная матрица, которую можно представить в виде

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_r = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_r \end{pmatrix}.$$

С помощью матрицы T преобразуем соотношение (1) следующим образом:

$$T^T \tilde{Y} = T^T F \overline{\theta} + T^T \overline{\varepsilon}.$$

Обозначим $\tilde{Z} = T^T \tilde{Y}$, $\Phi = T^T F$ и $\overline{\delta} = T^T \overline{\varepsilon}$, тогда это уравнение примет вид

$$\tilde{Z} = \Phi \overline{\theta} + \overline{\delta}, \tag{3}$$

по форме совпадающий с (1). Так как T невырожденная матрица, то ранг Φ равен рангу F. Найдем $M\overline{\delta}$ и $D\overline{\delta}$:

$$M\overline{\delta} = T^T M\overline{\varepsilon} = 0, \quad D\overline{\delta} = D(T^T \overline{\varepsilon}) = T^T D\overline{\varepsilon} T = \sigma^2 T^T W T = \sigma^2 \Lambda. \tag{4}$$

Запишем векторы $\tilde{Z}$, $\overline{\delta}$ и матрицы Φ, T в блочной форме

$$\tilde{Z} = \begin{pmatrix} \tilde{Z}_r \\ \tilde{Z}_{n-r} \end{pmatrix}, \ \overline{\delta} = \begin{pmatrix} \overline{\delta}_r \\ \overline{\delta}_{n-r} \end{pmatrix}, \ \Phi = \begin{pmatrix} \Phi_r \\ \Phi_{n-r} \end{pmatrix}, \ T = \begin{pmatrix} T_r \\ T_{n-r} \end{pmatrix},$$

тогда соотношение (3) можно представить следующим образом:

$$\tilde{Z}_r = \Phi_r \overline{\theta} + \overline{\delta}_r, \qquad \tilde{Z}_{n-r} = \Phi_{n-r} \overline{\theta} + \overline{\delta}_{n-r}. \tag{5}$$

Согласно (4) $D\overline{\delta}_r = \sigma^2 \Lambda_r$, $D\overline{\delta}_{n-r} = 0$, и так как $M\overline{\delta}_{n-r} = 0$, то $\overline{\delta}_{n-r} = 0$; следовательно, второе уравнение в (5) должно выполняться точно. Таким образом, для определения коэффициентов $\overline{\theta}$ получена линейная регрессионная модель с положительно определенной дисперсионной матрицей ошибок

$$\tilde{Z}_r = \Phi_r \overline{\theta} + \overline{\delta}_r, \ M\overline{\delta}_r = 0, \ D\overline{\delta}_r = \sigma^2 \Lambda_r \tag{6}$$

и ограничениями в виде системы линейных алгебраических уравнений

$$\Phi_{n-r} \overline{\theta} = \tilde{Z}_{n-r}. \tag{7}$$

С учетом невырожденности матрицы Λ_r проведем преобразования аналогично обобщенному методу наименьших квадратов [1]. Представим матрицу Λ_r^{-1} в виде произведения

$$\Lambda_r^{-1} = \Delta_r^{-1} \cdot \Delta_r^{-1}, \text{ где } \Delta_r^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_r^{-1/2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_r^{-1/2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_r^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

Тогда можно выполнить преобразование $\Delta_r^{-1}\widetilde{Z}_r = \Delta_r^{-1}\Phi_r\overline{\theta} + \Delta_r^{-1}\overline{\delta}$. Введя новые обозначения $\Delta_r^{-1}\widetilde{Z}_r = \widetilde{U}_r$, $\Delta_r^{-1}\Phi_r = \Psi_r$, $\Delta_r^{-1}\overline{\delta} = \overline{\gamma}$, где $D\overline{\gamma} = D\Delta_r^{-1}\overline{\delta} = \Delta_r^{-1}D\overline{\delta}\Delta_r^{-1} = \sigma^2 I_r$, окончательно получаем $\widetilde{U}_r = \Psi_r\overline{\theta} + \overline{\gamma}_r$, $\widetilde{Z}_{n-r} = \Phi_{n-r}\overline{\theta}$, где $M\overline{\gamma}_r = 0$, $D\overline{\gamma}_r = \sigma^2 I_r$.

Для данной линейной модели с дополнительными ограничениями была получена несмещенная оценка $\overline{\theta}_\beta$ коэффициентов $\overline{\theta}$ в работе [3]. При условии невырожденности матрицы $B = \Psi_r^T\Psi_r + \Phi_{n-r}^T\Phi_{n-r}$ эта оценка имеет следующий вид:

$$\overline{\theta}_\beta = B^{-1}C\Psi_r^T\widetilde{U}_r + B^{-1}\Phi_{n-r}^T(\Phi_{n-r}B^{-1}\Phi_{n-r}^T)^{-1}\widetilde{Z}_{n-r},$$

где $C = I_m - \Phi_{n-r}^T(\Phi_{n-r}B^{-1}\Phi_{n-r}^T)^{-1}\Phi_{n-r}B^{-1}$.

Перейдя в этом выражении к исходным переменным, получим:

$$\overline{\theta}_\beta = B^{-1}CF^T[(W + T_{n-r}T_{n-r}^T)^{-1} - T_{n-r}T_{n-r}^T]\widetilde{Y} +$$
$$+ B^{-1}F^T T_{n-r}(T_{n-r}^T FB^{-1}F^T T_{n-r})^{-1}T_{n-r}^T\widetilde{Y}, \qquad (8)$$

где $B = F^T(W + T_{n-r}T_{n-r}^T)F$, $C = I_m - F^T T_{n-r}(T_{n-r}^T FB^{-1}F^T T_{n-r})^{-1}T_{n-r}^T FB^{-1}$.

Эта оценка является наилучшей в классе линейных несмещенных оценок коэффициентов $\overline{\theta}$ [3].

Покажем, что матрица B является невырожденной. Имеем

$$B = \Phi_r^T(\Delta_r^{-1})^T\Delta_r^{-1}\Phi_r + \Phi_{n-r}^T\Phi_{n-r} = \Phi_r^T\Lambda_r^{-1}\Phi_r + \Phi_{n-r}^T\Phi_{n-r}.$$

Образуем матрицу L

$$L = \begin{pmatrix} \Lambda_r^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix},$$

где I_{n-r} - единичная матрица порядка $n-r$. Тогда можно записать $B = \Phi^T L\Phi$. Ранг матрицы Φ равен m, L - невырожденная матрица, поэтому ранг матрицы B также будет равен m и, следовательно, существует обратная матрица B^{-1}.

Полученные результаты можно сформулировать в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА. Если $M\overline{\varepsilon} = 0, D\overline{\varepsilon} = \sigma^2 W$, матрица W имеет собственные числа $\lambda_0 = 0$ кратности $n-r < m$ и ранг матрицы F равен m, то наилучшей линейной несмещенной оценкой коэффициентов $\overline{\theta}$ модели (1) является оценка (8).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Демиденко Е. З.* Линейная и нелинейная регрессии. М.:Финансы и статистика, 1981.

2. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.:Наука, 1969.

3. *Михайлов В. Н., Харламов А. В.* Оценка коэффициентов линейной регрессии с дополнительными ограничениями // Заводская лаборатория. 2000. № 11. С. 57.

УДК 517.51:518

И. Д. Молоденкова

ОБ ОСРЕДНЯЮЩИХ ОПЕРАТОРАХ, СОХРАНЯЮЩИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ*

Данная статья обобщает результаты [1 - 3] на случай функций из пространства Соболева $W_2^r[-\pi,\pi]$ с нормой

$$\| f \|_{W_2^r} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} [f^2(x) + (f^{(r)}(x))^2] dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть $f(x) \in W_2^r[-\pi,\pi]$: $f(-\pi) = f(\pi)$ задана своим δ-приближением в пространстве $L_2[-\pi,\pi]: \| f_\delta - f \|_{L_2} \le \delta$.

Рассмотрим класс функций

$$\widetilde{M}_2^r = \{ f(x) \in W_2^r[-\pi,\pi]: f^{(k)}(-\pi) = f^{(k)}(\pi),$$
$$k = \overline{0, r-1}, \| f \|_{W_2^r} \le 1, r \ge 1, \text{целое} \},$$

и интегральные операторы $A_H(x,f)$, сохраняющие тригонометрические многочлены [1] и тригонометрические сплайны [3].

Определим величину

$$\Delta = \Delta(\delta, A_H, \widetilde{M}_2^r) = \sup \{ \| A_H f_\delta - f \|_C : f \in \widetilde{M}_2^r, \| f_\delta - f \|_{L_2} \le \delta \}.$$

Получим для Δ двусторонние оценки, пользуясь методом, разработанным Г. В. Хромовой [4], для ранее определенных операторов $A_H(x,f)$.

---

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 00-01-00237.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\{A_H(x,f)\}, H=\frac{2\pi}{n}, n=2m+1, m=1,2,...,$ – последовательность операторов с ядрами $K_H(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)\varphi_i(t)$, сохраняющими тригонометрические многочлены.

При достаточно малых δ справедлива двусторонняя оценка

$$2^{-\frac{1}{3}}B^{\frac{2}{3}}(\frac{P\delta}{r})^{\frac{1}{3}} \le \Delta(\delta, A_{H(\delta)}, \widetilde{M}_2^r) \le (2B)^{\frac{2}{3}}(\frac{P\delta}{r})^{\frac{1}{3}},$$

где $B=(|\sum_{l=1}^{2r}C_l\lambda_l|)^{\frac{1}{2}}, P=\max_{-\pi\le x\le\pi}(2\pi\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j(x))^2)^{\frac{1}{2}}, H(\delta)=(\frac{P\delta}{B})^{\frac{2}{3}}(2r)^{\frac{1}{3}}, \alpha_j(x)$ ищутся из систем линейных алгебраических уравнений (см. [2]), $\varphi_i(t)$ - линейно-независимые функции, получаемые сдвигом (см. [2]), C_l, λ_l выписаны ниже.

Доказательство следует из двусторонней оценки для Δ (см. [4]), из оценки

$$\| A_H \|_{L_2\to C} \le \frac{P}{H} \quad \text{(см. [2])}$$

и из асимптотического равенства

$$\Delta_1(A_H, \widetilde{M}_2^r) = (\frac{1}{2r})^{\frac{1}{2}} B H^{\frac{1}{2}} + O(H).$$

Последнее получается из представления [4]

$$\Delta_1(A_H, \widetilde{M}_2^r) = \sup_{-\pi\le x\le\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} K_H(x,\xi) g(x,\xi,H)d\xi - g(x,x,H)\right)^{\frac{1}{2}},$$

где

$$g(x,\xi,H) = \int_{-\pi}^{\pi} K_H(x,\eta)G(\xi,\eta)d\eta - G(\xi,x).$$

$G(\xi,x)$ приведено Г. В. Х ромовой [4] к виду

$$G(\xi,x) = \begin{cases} -\frac{1}{2r}\sum_{l=1}^{2r} C_l e^{\lambda_l(x-t)}, & t\le x, \\ -\frac{1}{2r}\sum_{l=1}^{2r} C_l e^{\lambda_r(2\pi-(t-x))}, & t\ge x, \end{cases}$$

$C_l=(1-e^{2\pi\lambda_l})^{-1}\lambda_l$, λ_l – корни степени $2r$ из 1, если r – нечетное, из (-1), если r – четное.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\{A_H(x,f\}$, $H=\frac{2\pi}{n+1}$, $n=1,2,...$ последовательность операторов с ядрами $K_H(x,t)=\sum_{i=1}^{S}\alpha_i(x)\varphi_i(t)$, сохраняющих тригонометрические сплайны.

При достаточно малых δ справедлива двусторонняя оценка:

$$2^{-\frac{1}{4}}(\frac{1}{r})^{\frac{1}{4}}(BP\delta)^{\frac{1}{2}} \le \Delta(\delta, A_{H(\delta)}, \widetilde{M}_2^r) \le 2^{\frac{3}{4}}(\frac{1}{r})^{\frac{1}{4}}(BP\delta)^{\frac{1}{2}},$$

где $B=(3|\sum_{l=1}^{2r}C_l\lambda_l|)^{\frac{1}{2}}, P=S\max_x(\sum_{i=1}^{S}(\alpha_i(x))^2)^{\frac{1}{2}}, H(\delta)=\frac{P}{B}(2r)^{\frac{1}{2}}\delta;\ S=3,5,7$ в зависимости от того, куда попадает x (см. [3]), $\alpha_i(x)$ ищутся из систем линейных алгебраических уравнений (см. [2]), $\varphi_i(t)$ линейно-независимые функции, получаемые сдвигом (см.. [3]), C_l,λ_l выписаны выше.

Доказательство следует из той же двусторонней оценки для Δ (см. [4]), из асимптотического равенства

$$\Delta_1(A_H, \widetilde{M}_2^r)=(\frac{1}{2r})^{\frac{1}{2}}BH^{\frac{1}{2}}+O(H)$$

и из оценки

$$\| A_H \|_{L_2\to C} \le \frac{P}{\sqrt{H}}.$$

Асимптотическое равенство получается из того же представления $\Delta_1(A_H, \widetilde{M}_2^r)$ с учетом того, что оператор A_H теперь сохраняет тригонометрические сплайны. Последняя оценка получается из представления

$$\| A_H \|_{L_2\to C} = \max_x(\int_{-\pi}^{\pi}|K_H(x,t)|^2\,dt)^{\frac{1}{2}}$$

и из вида $K_H(x,t)$.

Следует отметить, что полученная двусторонняя оценка для операторов, сохраняющих тригонометрические сплайны, с точностью до константы совпадает по порядку δ с неулучшаемой оценкой метода регуляризации А. Н. Тихонова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Молоденкова И. Д.* Одно из приложений оператора осреднения. Саратов, 1996. 12 с. Деп. в ВИНИТИ 25.04.96. № 1357-В96.

2. *Молоденкова И. Д., Молоденков В. А.* Обзор численных методов для решения задач приближения непрерывных функций с использованием сплайнов и осредняющих операторов. Саратов, 1998. 37 с. Деп. в ВИНИТИ № 986-В98.

3. *Молоденкова И. Д.* Приложение операторов осреднения к задаче восстановления функций // Математика, механика, математическая кибернетика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999. С. 57 - 59.

4. *Хромова Г. В.* О скорости сходимости приближений функций на некоторых компактных классах и задаче восстановления функций // Вестн. МГУ. Сер. 15. 1993. № 1. С. 13 - 18.

УДК 519.4

В. А. Молчанов

О ПОЛУКОЛЬЦАХ НАД ПОЛУРЕШЕТКАМИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ К ТЕОРИИ ФОРМАЛЬНЫХ ЯЗЫКОВ

Как известно из теории формальных языков конечных слов (см., например [1]), распознаваемость языка L конечным автоматом равносильна распознаваемости L синтаксической полугруппой этого автомата, которая является полугруппой бинарных отношений на множестве состояний такого автомата. Этот принципиально важный факт лежит в основе разработанного М. П. Шютценберже алгебраического подхода к теории распознаваемых языков. Однако простые примеры показывают (см., например [2]), что при развитии такого подхода к формальным языкам бесконечных слов аппарат полугрупп бинарных отношений оказывается уже недостаточным и необходимо применять матричные полугруппы над конечными полукольцами. Примеры таких полуколец дает рассматриваемый в настоящей статье функтор категории верхних полурешеток с нейтральными элементами в категорию полуколец.

При изложении материала используются основные понятия и обозначения теории решеток из работы [3] и теории категорий из работы [4].

Пусть $L = (L,\le)$ – упорядоченное множество. Подмножество $A \subset L$ называется *полуидеалом* L, если оно минорантно насыщенно относительно порядка $\le$, т. е. для любого $x \in L$ условия $x \le a$, $a \in A$ влекут $x \in A$. Так, элементы $a \in L$ определяют полуидеалы $a^{\Delta} \doteq \{ x \in L : x \le a \}$, которые называются также *главными идеалами* L. Множество всех *полуидеалов* упорядоченного множества L обозначим символом $F(L)$.

ТЕОРЕМА 1. Для любой верхней полурешетки с нейтральным элементом $L = (L,\vee,0_L)$ справедливы следующие утверждения:

1) множество $F(L)$ с бинарной операцией $A + B = A \cup B$ (здесь $A, B \in F(L)$) является коммутативным моноидом с нейтральным элементом $0 = \varnothing$;

2) множество $F(L)$ с бинарной операцией

$A \times B = \{x \in L : (\exists\, a \in A,\ b \in B)\ x \leq a \vee b\}$ (здесь $A, B \in F(L)$)

является коммутативным моноидом с нейтральным элементом $1 = \{0_L\}$;

3) алгебраическая система $F(L) = (F(L), +, \times, 0, 1)$ является коммутативным полукольцом, удовлетворяющим свойству

$x \neq 0 \Rightarrow xy + y = = xy$.

Такое полукольцо $F(L)$ называется *полукольцом над полурешеткой* L.

Доказательство. Пусть $L = (L, \vee, 0_L)$ - верхняя полурешетка с нейтральным элементом 0_L и каноническим порядком $\leq$. Тогда утверждение 1) очевидно. Для доказательства утверждения 2) отметим, что для любых $A, B, C \in F(L)$ выполняется равенство $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$. В самом деле, условие $x \in (A \times B) \times C$ равносильно тому, что $x \leq a \vee b \vee c$ для некоторых $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$. Так как полурешетка L с нейтральным элементом 0_L удовлетворяет тождеству $x \vee 0_L = x$, то множество $\{0_L\}$ является полуидеалом L и для любого $A \in F(L)$ выполняются равенства:

$$A \times \{0_L\} = \{x \in L : (\exists\, a \in A)\ x \leq a \vee 0_L\} = \{x \in L : (\exists\, a \in A)\ x \leq a\} = A.$$

Для доказательства утверждения 3) покажем, что для любых $A, B, C \in F(L)$ выполняется равенство $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$. В самом деле, условие $x \in (A + B) \times C$ равносильно тому, что $x \leq d \vee c$ для некоторых $d \in A \cup B$, $c \in C$. Очевидно, что это эквивалентно тому, что $x \leq a \vee c$ или $x \leq b \vee c$ для некоторых $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, т. е. $x \in A \times C + B \times C$. Осталось заметить, что для любых непустых полуидеалов A, B решетки L выполняется равенство: $A \times B + B = A \times B$. Действительно, если $A \neq \varnothing$, то $0_L \in A$ и, значит, $A \times B + B = A \times B + \{0_L\} \times B = (A + \{0_L\}) \times B = A \times B$.

Примеры

1. Если L - одноэлементная решетка, то $F(L)$ – двухэлементная решетка **2**.

2. Если L – четырехэлементная решетка $\mathbf{2}^2$, то $F(L)$ - шестиэлементное коммутативное полукольцо.

Пусть f – гомоморфизм упорядоченного множества $L = (L, \leq)$ в упорядоченное множество $L_1 = (L_1, \leq_1)$. Обозначим символом f отображение $F(f)\colon F(L) \to F(L_1)$, которое для элементов $A \in F(L)$ определяется по формуле $f(A) = \{x \in L_1 : (\exists\, a \in A)\ x \leq_1 f(a)\}$.

Пусть $\boldsymbol{L}$ - категория верхних полурешеток с нейтральными элементами, морфизмами которой являются гомоморфизмы таких полурешеток, и $\boldsymbol{S}$ - категория полуколец, морфизмами которой являются гомоморфизмы полуколец.

ТЕОРЕМА 2. Пара отображений

$$L \mid\rightarrow F(\mathrm{L}) \quad (L \in \mathrm{Ob}\, \boldsymbol{L}) \quad \text{и} \quad f \mid\rightarrow F(f) \quad (f \in \mathrm{Hom}\, \boldsymbol{L})$$

определяет ковариантный функтор F категории $\boldsymbol{L}$ в категорию $\boldsymbol{S}$.

Доказательство. Пусть L, L_1 – верхние полурешетки с нейтральными элементами $0,0_1$ и каноническими порядками $\leq,\leq_1$, соответственно. Покажем, что для любого гомоморфизма $f: L \rightarrow L_1$ отображение f является гомоморфизмом полукольца $F(L)$ в полукольцо $F(L_1)$. Очевидно, что $f(\varnothing) = \varnothing$ и $f(\{0\}) = \{0_1\}$. Далее, для любых $A, B \in F(L)$ выполняются равенства: $f(A+B) = f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) = f(A)+f(B)$. Кроме того, выполняется равенство $f(A \times B) = f(\mathrm{A}) \times f(B)$, так как если $x \in f(A \times B)$, то найдутся такие $a \in A, b \in B$, что $x \leq_1 f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$, т. е. $x \in f(A) \times f(B)$. Обратно, если $x \in f(A) \times f(B)$, то $x \leq_1 y \vee z$ для некоторых $y \in f(A)$, $z \in f(B)$. Тогда найдутся такие $a \in A$, $b \in B$, что $y \leq_1 f(a)$, $z \leq_1 f(b)$, и, следовательно, $x \leq_1 y \vee z \leq_1 f(a) \vee f(b) = f(a \vee b)$, т. е. $x \in f(A \times B)$. Осталось заметить, что для любых $L, L_1, L_2 \in \mathrm{Ob}\, \boldsymbol{L}$, $f \in \mathrm{Hom}\, (L_1, L_2)$, $h \in \mathrm{Hom}\, (L_2, L_3)$ выполняются равенства $F(1_{\mathrm{L}}) = 1_{F(L)}$ и $F(f h) = F(f)F(h)$.

Пусть $\boldsymbol{L}_{\mathbf{fin}}$ - категория конечных решеток с гомоморфизмами и $\boldsymbol{SL}_{\mathbf{fin}}$ - категория полуколец над решетками из $\boldsymbol{L}_{\mathbf{fin}}$, морфизмами которой являются гомоморфизмы полуколец.

ТЕОРЕМА 3. Категории $\mathrm{L}_{\mathbf{fin}}$ и $\boldsymbol{SL}_{\mathbf{fin}}$ эквивалентны.

Доказательство. Пусть L, L_1 – конечные решетки и φ - изоморфизм полукольца $F(L)$ на полукольцо $F(L)$. Нетрудно видеть, что в полукольце $F(L)$ полуидеалов конечной решетки L главные идеалы этой решетки, и только они, являются ненулевыми идемпотентами относительно операции умножения. Поскольку изоморфизм φ сохраняет такие идемпотенты, то существует биекция f множества L на множество L_1, которая для элементов $a \in A$ определяется по правилу: $f(a) = b$, если $\varphi(a^{\Delta}) = b^{\Delta}$ для некоторого $b \in B$. Тогда для любых $a, b \in L$ справедлива эквивалентность: $a^{\Delta} + b^{\Delta} = b^{\Delta} \Leftrightarrow a \leq b$. Отсюда следует равносильность следующих условий:

$a \leq b$, $a^{\Delta} + b^{\Delta} = b^{\Delta}$, $\varphi(a^{\Delta}) + \varphi(b^{\Delta}) = \varphi(b^{\Delta})$, $f(a)^{\Delta} + f(b)^{\Delta} = f(b)^{\Delta}$, $f(a) \leq_1 f(b)$.

Следовательно, f является изоморфизмом решетки L на решетку L_1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лаллеман Ж.* Полугруппы и комбинаторные приложения. М.: Мир, 1985.

2. *Perrin D., Pin J. E.* Semigroups and automata on infinite words // Semigroups, Formal Languages and Groups, NATO ASI Series C: Mathematical and Physical Sciences. 1993. Vol. 466. P. 1 - 32.

3. *Биркгоф Г.* Теория решеток. М.: Наука, 1984.

4. *Кон П.* Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968.

УДК 519.4

С. И. Небалуев

СРАВНЕНИЕ ТОЛЕРАНТНЫХ И КОМБИНАТОРНЫХ КОГОМОЛОГИЙ

Толерантное пространство представляет собой пару (X,τ), где X – некоторое множество, а $\tau \subset X \times X$ – рефлексивное и симметричное бинарное отношение.

Максимальные подмножества $L \subset X$ с попарно толерантными элементами называются классами толерантности. Они образуют покрытие множества X.

Сопутствующее отношению τ ядерное отношение ε_τ разбивает множество X на ядра толерантности.

Отображения толерантных пространств, сохраняющие классы и ядра, называются толерантными отображениями.

Для толерантных отображений имеется полностью развитая теория толерантной гомотопии [1], из которой, в частности, следует толерантная стягиваемость любого подмножества в класс толерантности.

Каждому толерантному пространству (X,τ) сопоставим симплициальный комплекс $S(X)$, вершинами которого являются ядра толерантности, а симплексами – конечные наборы ядер с попарно толерантными представителями. Группы когомологий этого симплициального комплекса обозначим $H^*(X) = \bigoplus_{q\geq 0} H^q(X)$ и назовём толерантными когомологиями толерантного пространства (X,τ). Эти когомологии являются толерантными гомотопическими инвариантами [1].

Пусть имеется покрытие $X = \bigcup_{\alpha\in I} L_\alpha$. Особый интерес представляют покрытия $L = \{L_\alpha\}_{\alpha\in I}$, состоящие из классов толерантности. Тогда можно рассматривать симплициальный комплекс $S(L)$, представляющий собой нерв покрытия [2]. Когомологии $H^*(L) = \bigoplus_{q\geq 0} H^q(L)$ этого симплициального комплекса называются комбинаторными когомологиями Александрова-Чеха покрытия L.

Определение. Пусть (X,τ) толерантное пространство. Покрытие $L = \{L_\alpha\}_{\alpha\in I}$ множества X назовём хорошим покрытием, если выполнены следующие условия:

1) все покрывающие множества L_α – классы толерантности;
2) множество I – не более чем счетно;

3) всякий класс толерантности K пространства (X,τ) покрывается конечным числом классов L_α из L:

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n(K)} L_{\alpha_i},$$

причём в $\bigcap_{i=1}^{n(K)} L_{\alpha_i}$ имеется достаточно много точек, чтобы произвести барицентрическое подразделение любого симплекса из K.

ТЕОРЕМА 1. Пусть (X,τ) – толерантное пространство с хорошим покрытием $L = \{L_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Тогда толерантные когомологии пространства (X,τ) и комбинаторные когомологии Александрова-Чеха покрытия L изоморфны

$$H^*(X) \cong H^*(L).$$

Доказательство основано на методе А. Вейля для сравнения когомологий [3].

С помощью теоремы 1 доказывается следующая удивительная с топологической точки зрения теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть (X,τ) – толерантное пространство с конечным хорошим покрытием $L = \{L_1, \dots, L_n\}$, пусть $\tilde{X} \subset X$ – конечное подмножество, состоящее из точек, выбранных ровно по одной из каждого непустого пересечения $L_{\alpha_1} \cap \dots \cap L_{\alpha_i}$ $(i = \overline{1, n})$. Тогда подпространство $\left(\tilde{X}, \tilde{\tau}\right)$ с индуцированной толерантностью имеет те же когомологии, что и само пространство (X,τ): $H^*(\tilde{X}) \cong H^*(L)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Небалуев С. И.* Алгебро-топологические характеристики толерантных пространств // Математика и её приложения. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1991.

2. *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. М.: Мир, 1997.

3. *Ботт Р., Ту Л. В.* Дифференциальные формы в алгебраической топологии. М.: Наука, 1989.

УДК 517.977/.977.58

Е. А. Огнева

ОДИН КЛАСС СИНТЕЗИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С КВАДРАТИЧНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \quad t \in [0;1], \tag{1}$$

где $x(t) = (x_1(t),\ldots,x_n(t))^T \in W_2^1[0;1]$, $u(t) \in L_2[0;1]$, $b = (0,0,\ldots,1)^T \in R^n$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -g_n & -g_{n-1} & \ldots & -g_2 & -g_1 \end{pmatrix}$$ - матрица $n \times n$, где $g_i \in R, i = 1,\ldots,n$.

Функционал качества берем квадратичным:

$$J = \int_0^1 \big((x(t), \mathrm{M}x(t)) + u^2(t)\big)dt \to \min, \tag{2}$$

где M – положительно определенная матрица $n \times n$.

Рассматриваем всевозможные задачи оптимального управления без ограничения на управление (1), (2), задавая различные граничные условия. Тогда система дифференциальных уравнений принципа максимума Понтрягина запишется в виде

$$\dot{x} = Ax - \frac{1}{2}bb^T\psi, \quad \dot{\psi} = -A^T\psi - 2Mx. \tag{3}$$

Компонента $x(t)$ решения системы (3) является оптимальной траекторией одной из рассматриваемых нами задач оптимального управления.

Пусть $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица решений системы (3). Тогда множество оптимальных траекторий запишется в виде $\{\, x(t) \mid \exists C \in R^{2n} : x(t) = \Phi_1(t)C \,\}$, где $\Phi_1(t)$ – первые n строк матрицы $\Phi(t)$.

Условие $C = Dp + d$, где D – постоянная матрица $2n \times k$ ранга k, d – постоянный $2n$-вектор, p есть вектор-параметр размерности k, $k = 1,\ldots,2n$, выделяет некоторое подмножество оптимальных траекторий, которое обозначим через $M_{k,D,d}$.

А. П. Хромовым в работе [1] были построены функции $u(t,x)$, синтезирующие семейства оптимальных траекторий $M_{k,D,d}$ при $k = n$.

В настоящей статье с использованием методов работы [1] построены функции $u(t, y, x_1^{(k)})$, где $y=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n,x_1^{(n)},\ldots,x_1^{(k-1)}\right)^T$, синтезирующие семейства оптимальных траекторий $M_{k,D,d}$ при $n<k\le 2n$.

Семейство $M_{k,D,d}$ можно записать в следующем виде:

$$M_{k,D,d}=\{\, x(t) \,|\, \exists p\in R^k:\ x_1(t)=r\Phi_1(t)\left(\dot{D}p+d\right), x_i(t)=x_1^{(i-1)}(t), i=2,\ldots,n\},$$

где $r=(1,0,\ldots,0)\in R^n$.

Пусть $x(t)$ - некоторая функция семейства $M_{k,D,d}$. Найдем дифференциальное уравнение, общим решением которого являются функции $x_1(t)=r\Phi_1(t)(Dp+d)$. Для этого запишем следующую систему:

$$\begin{cases} y(t)=\begin{pmatrix}\Phi_1(t)\\ Q^{k-n}\,\Phi_1^{(n)}(t)\end{pmatrix}(Dp+d), \\ x_1^{(k)}(t)=r\,\Phi_1^{(k)}(t)(Dp+d), \end{cases} \tag{4}$$

где

$$y(t)=\left(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t),x_1^{(n)}(t),\ldots,x_1^{(k-1)}(t)\right)^T=\left(x_1(t),\dot{x}_1(t),\ldots,x_1^{(k-1)}(t)\right)^T,$$

Q^{k-n} – матрица размера $(k-n)\times n$, первые $(k-n)$ столбцов которой составляют единичную матрицу, а остальные столбцы нулевые.

ТЕОРЕМА 1. Определитель $\Delta_k(t)=\det\left(\begin{pmatrix}\Phi_1(t)\\ Q^{k-n}\,\Phi_1^{(n)}(t)\end{pmatrix}D\right)$ тождественно отличен от нуля на отрезке $[0;1]$.

Доказательство теоремы 1 практически полностью повторяет доказательство аналогичной теоремы работы [1].

Следствие. Множество N_k нулей $\Delta_k(t)$ на отрезке $[0;1]$ конечно.

При $t\in[0;1]\setminus N_k$ из системы (4) получим $x_1^{(k)}(t)=r\Phi_1^{(k)}(t)F(t,y(t))$,

где $F(t,y)=D\left(\begin{pmatrix}\Phi_1(t)\\ Q^{k-n}\,\Phi_1^{(n)}(t)\end{pmatrix}D\right)^{-1}\left(y-\begin{pmatrix}\Phi_1(t)\\ Q^{k-n}\,\Phi_1^{(n)}(t)\end{pmatrix}d\right)+d,\ y\in R^k$.

Следовательно, справедлива

ТЕОРЕМА 2. Общим решением уравнения

$$x_1^{(k)}(t)-r\Phi_1^{(k)}(t)F(t,y(t))=0 \tag{5}$$

является семейство функций $\{\, x_1(t) \,|\, \exists p\in R^k:\ x_1(t)=r\,\Phi_1(t)(Dp+d)\}$.

Таким образом, семейство $M_{k,D,d}$ можно записать в следующем виде:

$$M_{k,D,d}=\{\, x(t) \,|\, x_1^{(k)}(t)-r\Phi_1^{(k)}(t)F(t,y(t))=0,\ x_i(t)=x_1^{(i-1)}(t), i=2,\ldots,n\}. \tag{6}$$

Под функцией, синтезирующей семейство $M_{k,D,d}$, будем понимать функцию $u(t,y,x_1^{(k)})$, где $y=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n,x_1^{(n)},\ldots,x_1^{(k-1)}\right)^T$, такую, что каждая траектория семейства $M_{k,D,d}$ удовлетворяет системе

$$\dot{x}=Ax+bu(t,y,x_1^{(k)}), \tag{7}$$

и, кроме того, любое решение системы (7) принадлежит семейству $M_{k,D,d}$.

Пусть теперь $u(t,y,x_1^{(k)})$ - некоторая функция, синтезирующая семейство $M_{k,D,d}$. Множество решений системы (7) совпадает с семейством:

$$\left\{x(t)\left|\; x_1^{(n)}(t)=-\sum_{i=0}^{n-1}g_{n-i}x_1^{(i)}(t)+u\left(t,y(t),x_1^{(k)}(t)\right), x_i(t)=x_1^{(i-1)}(t), i=2,\ldots,n\right.\right\}. \tag{8}$$

Используя (6) и (8), можем записать

$$u\left(t,y(t),x_1^{(k)}(t)\right)=GQ\,y(t)+x_1^{(k)}(t)-r\Phi_1^k(t)F\left(t,y(t)\right),$$

где $G=\left(g_n,g_{n-1},\ldots,g_1,1\right)$, Q – матрица $(n+1)\times k$, первые $(n+1)$ столбцов которой составляют единичную матрицу, а остальные столбцы нулевые.

ТЕОРЕМА 3. Если $x(t)$ - решение системы (7), где

$$u\left(t,y,x_1^{(k)}\right)=GQ\,y+x_1^{(k)}-r\Phi_1^k(t)F\left(t,y\right), \tag{9}$$

$x(t)$, $x^{(n)}(t)$ непрерывны на N_k, то $x(t)\in M_{k,D,d}$. Обратно, если $x(t)\in M_{k,D,d}$, то $x(t)$ - решение системы (7), где $u(t,y,x_1^{(k)})$ определена по (9).

Доказательство. Пусть $x(t)$ - решение системы (7), где $u(t,y,x_1^{(k)})$ определена по (9), $x(t)$ и $x^{(n)}(t)$ непрерывны на N_k.

Возьмем три последовательно идущие точки $t_0,t_1,t_2\in\mathrm{N}_k$. Имеем $x(t)=\Phi_1(t)\left(Dp^0+d\right)$ при $t\in[t_0,t_1]$ и $x(t)=\Phi_1(t)\left(Dp^1+d\right)$ при $t\in[t_1,t_2]$. Покажем, что

$$x(t)=\Phi_1(t)\left(Dp^0+d\right) \tag{10}$$

при $t\in[t_0,t_2]$. В точке t_1 имеем

$$\Phi_1(t_1)(Dp^0+d)=x(t_1)=\Phi_1(t_1)(Dp^1+d),$$

$$\Phi_1^{(n)}(t_1)(Dp^0+d)=x^{(n)}(t_1)=\Phi_1^{(n)}(t_1)(Dp^1+d),$$

то есть

$$\begin{cases}\Phi_1(t_1)D\left(p^0-p^1\right)=0,\\ \Phi_1^{(n)}(t_1)D\left(p^0-p^1\right)=0.\end{cases} \tag{11}$$

Определитель системы (11) относительно $D(p^0-p^1)$ отличен от нуля. Поэтому из (11) получаем $D\left(p^0-p^1\right)=0$; и в силу того, что ранг матрицы D равен k, получаем $p^0 = p^1$. Таким образом, установили справедливость (10) при $t \in [t_0, t_2]$. Продолжая этот процесс, получим, что (10) имеет место на всем отрезке $[0,1]$. Отсюда следует, что $x(t) \in M_{k,D,d}$.

Обратное утверждение теоремы очевидно.

Тем самым теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хромов А. П.* О синтезирующих функциях линейных дифференциальных систем с квадратичным критерием качества // Теория функций и приближений: Тр. 4-й Сарат. зимней шк. Саратов, 1990. Ч. 1.

УДК 517.11

Т. М. Отрыванкина

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ОБЪЕКТЫ В КАТЕГОРИЯХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ АВТОМАТОВ

Топологические ***K***-структурные автоматы являются одним из важных примеров многоосновных топологических алгебраических систем, изучению которых посвящены работы [1], [2, глава 2, §2.6]. В настоящей статье такие автоматы исследуются на предмет существования в их классах универсальных объектов. При этом используются терминология универсальной алгебры и теории автоматов [3, 4], основные принципы нестандартного анализа из [5].

Напомним, что при нестандартном подходе [5, с. 111] топология τ на множестве A может быть задана с помощью бинарного отношения $\alpha \subset A \times {}^*A$, которое определяется формулой $\alpha(a) = \bigcap \{ {}^*X \colon X \in \tau \wedge a \in X \}$ $(a \in A)$.

Пусть Ω - произвольная алгебраическая сигнатура, представленная множеством функциональных символов. Система $A=(A, \Omega, \alpha)$ называется *топологической Ω-алгеброй*, если на множестве A задана алгебраическая структура сигнатуры Ω и нестандартная топология α, относительно которой непрерывны все сигнатурные операции.

В настоящей статье мы ограничиваемся рассмотрением полугрупповых топологических алгебраических автоматов *без выхода* (сокращенно т.а.а.) и исследуем вопрос о существовании универсального функтора для представлений категорий в категориях таких автоматов. При этом используется терминология из [3] и результаты из [6].

Под топологическим алгебраическим автоматом мы понимаем систему вида $\mathcal{A} = (\Gamma, S, \circ)$, где $\Gamma = (\Gamma, \rho)$ - некоторая фиксированная топологическая полугруппа входных сигналов, $S=(S, \Omega, \alpha)$ – произвольная топологическая Ω-алгебра состояний и функция переходов $\circ: S\times\Gamma \to S$ удовлетворяет условиям:

1) $f_S(s_1,\dots,s_n)\circ\gamma = f_S(s_1\circ\gamma,\dots,s_n\circ\gamma)$;

2) $(s,s')\in\alpha \wedge (\gamma,\gamma')\in\rho \Rightarrow (s\circ\gamma,\ s'\circ\gamma')\in\alpha$;

3) $s\circ\gamma_1\gamma_2 = (s\circ\gamma_1)\circ\gamma_2$, где $f\in\Omega$ и $s_1,\dots,s_n,s,\in S$; $\gamma,\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma$; $s'\in{}^*S$, $\gamma'\in{}^*\Gamma$.

Непрерывным Γ*-гомоморфизмом* т.а.а. $\mathcal{A}$ в т.а.а. $\mathcal{B} = (\Gamma, S', \circ)$ называется непрерывный гомоморфизм φ: $S\to S'$, удовлетворяющий условию $\varphi(s\circ\gamma)=\varphi(s)\circ\gamma$ при любых $s\in S$, $\gamma\in\Gamma$. Такие гомоморфизмы являются морфизмами изучаемых ниже категорий автоматов.

Замечание. Топологический алгебраический автомат без выхода $\mathcal{A}$ можно рассматривать как алгебру $\mathcal{A}'$ сигнатуры $\Omega'=\Omega\cup\Gamma$ с основным множеством S, в которой действие унарной операции $\gamma\in\Gamma$ определяется равенством $\gamma(s)=s\circ\gamma$.

ТЕОРЕМА. Пусть $\boldsymbol{M}$ - категория топологических пространств с непрерывными отображениями и $\boldsymbol{K}$ - регулярная категория полугрупповых топологических алгебраических автоматов с непрерывными Γ-гомоморфизмами, замкнутая относительно топологических изоморфизмов, прямых произведений и замкнутых подсистем и содержащая автомат $\mathcal{E}$ с одноэлементной Ω-алгеброй в качестве множества состояний. Тогда любое резидуальное представление G категории в категории $\boldsymbol{K}$ обладает универсальным функтором.

Доказательство. В силу сформулированного выше замечания можно перейти от категории $\boldsymbol{K}$ к рассмотрению соответствующей ей категории Ω'-алгебр $\boldsymbol{K}'$. При этом $\boldsymbol{K}'$ содержит одноэлементную Ω'-алгебру $\mathcal{E}'$ и замкнута относительно прямых произведений и замкнутых подсистем. Итак, пусть множество Z является $\boldsymbol{M}$-объектом. Для сигнатуры $\Omega'=\Omega\cup\Gamma$ рассмотрим соответствующую этому множеству Ω'-алгебру $W=W(Z)$ Ω'-слов над Z и выделим в категории $\boldsymbol{K}$ из совокупности всех топологически неизоморфных $\boldsymbol{K}$-объектов все те т.а.а. $\mathcal{A}_j=(\Gamma, S_j, \circ)$ $(j\in J)$, мощность множеств состояний которых не больше $2^{2^{|W|}}$ и для которых имеются допустимые отображения φ_j: $Z\to S_j$. Множество $J\neq\varnothing$, поскольку в $\boldsymbol{K}$ присутствует объект с одноэлементным множеством состояний $\mathcal{E}$. Семейство всех таких отображений φ_j $(j\in J)$ канонически определяет допустимое (в силу резидуальности представления G) отображение φ множества Z в прямое произведение $S=\prod_{j\in J} S_j$. В силу замкнутости категории $\boldsymbol{K}'$ относительно прямых произведений множество S является Ω'-алгеброй. Канонически продолжим φ до гомоморфизма φ: $W\to S$. Построенная Ω'-алгебра W имеет наименьшую допустимую топологию η_W. (Допустимость в данном случае означает, что эта топология согласуется с алгебраической структурой W и топологией на Г.) В результате получаем топологическую Ω'-алгебру $W=(W(Z),\Omega',\eta_W)$. По построению φ является непрерывным гомоморфизмом W в топологическую Ω'-алгебру $S=(S,\Omega',\alpha)$. Для отображения $\tilde{\varphi}=\overset{-1}{\alpha}\circ{}^*\varphi$ в силу [6, теорема 1.6] фактор-система $U(Z)=\mathrm{dom}\,\tilde{\varphi}/\ker\tilde{\varphi}$ топологически изоморфна замкнутой подалгебре S. В силу замкнутости категории $\boldsymbol{K}'$ относительно замкнутых подсистем $U(Z)$ является Ω'-алгеброй. С учетом сформулированного выше замечания $U(Z)$ определяет т.а.а. $\mathcal{U}(Z)=(\Gamma,U(Z),\circ)$, множеством состояний которого является редуцированная Ω-алгебра $U(Z)$ и действие элементов полугруппы $\gamma\in\Gamma$ на состояния $s\in U(Z)$ определяется по формуле $\gamma(s)=s\circ\gamma$. Таким образом, $\mathcal{U}(Z)$ является $\boldsymbol{K}$-объектом и каноническое отображение $u(Z)\colon Z\to U(Z)$ - допустимым отображением представления G. Убедимся, что $(\mathcal{U}, u)$ - универсальный функтор представления G. Пусть для некоторого $\boldsymbol{K}$-объекта $\mathcal{B}=(\Gamma,S',\circ)$ имеется допустимое отображение $\psi\colon Z\to S'$. Не нарушая общности, считаем, что S' топологически порождается множеством $\psi(Z)$. Так как очевидно, что $|\psi(Z)|\leq|W(Z)|$, то по [6, лемма 1.2] мощность S' не превосходит $2^{2^{|W|}}$, и среди выделенных нами т.а.а. $\mathcal{A}_j$ ($j\in J$) найдется автомат $\mathcal{A}_j$ с множеством состояний S_j, топологически изоморфным S'. Не нарушая общности, предположим, что $S'=S_j$ и $\psi=\varphi_j$. Тогда для продолжения $\tilde{\varphi}_j$ непрерывного гомоморфизма $\varphi_j\colon W\to S_j$ выполняются условия $\mathrm{dom}\,\tilde{\varphi}\subset\mathrm{dom}\,\tilde{\varphi}_j$, $\ker\tilde{\varphi}\subset\ker\tilde{\varphi}_j$ и фактор-система $U(Z)$ канонически (непрерывно) отображается на фактор-систему $\mathrm{dom}\,\tilde{\varphi}_j/\ker\tilde{\varphi}_j$, которая по [6, теорема 1.6] топологически изоморфна замкнутой подалгебре S_j . В результате получаем такой непрерывный гомоморфизм Ψ топологической Ω-алгебры $U(Z)$ в топологическую Ω-алгебру S', что $\psi=\Psi\circ u(Z)$. Таким образом, Ψ является Г-гомоморфизмом $\mathcal{U}(Z)$ на $\mathcal{B}$ и функтор $(\mathcal{U}, u)$ универсален.

Доказанная теорема обобщает известный результат [3, теорема 4.2] об универсальных функторах для представлений, подчиненных категории множеств категорий в категориях алгебр и показывает, что при определенных выше условиях каждому объекту Z категории $\boldsymbol{M}$ можно поставить в соответствие $\boldsymbol{K}$-объект $\mathcal{U}(Z)$, который вместе с отображением $u(Z)$ обладают универсальным свойством и поэтому называется универсальным (см. опр. [3, с. 123]). Полученный результат позволяет, в частности, обосновать существование топологических алгебраических автоматов, которые определяются топологическим пространством и классом нестандартных соотношений в классе т.а.а. ***K*,** содержащем автомат с одноэлементной алгеброй состояний и замкнутом относительно топологических изоморфизмов, прямых произведений и замкнутых подсистем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Birkhoff G., Lipson J. D.* Universal algebra and automata // Proc. Tarski Symp. (Proc. Symp. Pure Math., Vol. 25). Providence, R.I. 1974. Vol. 2. P. 41 - 51.
2. *Богомолов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука. Физматлит, 1997.
3. *Кон П.* Универсальная алгебра . М.: Мир, 1968.
4. *Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А.* Элементы алгебраической теории автоматов. М.: Высшая школа, 1994.
5. *Девис М.* Прикладной нестандартный анализ. М.: Мир, 1980.
6. *Молчанов В. А.* Нестандартные многообразия псевдотопологических алгебраических систем // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32, № 3. С. 104 - 112.

УДК 517.984

М. В. Парфенов

О ВОССТАНОВЛЕНИИ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ 4-ГО ПОРЯДКА НА ПОЛУОСИ

Рассмотрим дифференциальное уравнение (ДУ) вида

$$\ell y = y^{(4)} + p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = \lambda y, \quad x > 0. \tag{1}$$

Здесь $p_\nu(x) \in W_\nu$, $p_\nu(x)$- комплекснозначные функции, λ- спектральный параметр. Пусть функции $\Phi_k(x,\lambda), k=\overline{1,4}$ являются решениями ДУ (1) при условиях $\Phi_k{}^{(4-j)}(0,\lambda) = \delta_{kj}$, $j = \overline{1,k}$, $\Phi_k(x,\lambda) = O(\exp(\rho R_k x))$, $x \to \infty$, где $\lambda = \rho^4$, $R_k^4 = 1$ и $\mathrm{Re}(\rho R_k x) < \mathrm{Re}(\rho R_j x)$, при $k < j$, δ_{kj} - символ Кронекера. Матрица $M(\lambda) = [M_{kj}(\lambda)]_{k,j=\overline{1,4}} = [\Phi_k^{(4-j)}]_{k,j=\overline{1,4}}$ называется матрицей Вейля (МВ).

В [1] приводится решение обратной задачи восстановления несамосопряженного ДУ (1) по данной МВ и необходимые и достаточные условия, при которых матрица $M(\lambda)$ будет матрицей Вейля некоторого ДУ вида (1). Одним из этих условий является требование однозначной разрешимости так называемого основного уравнения обратной задачи (ОУ). В данной работе, при некоторых дополнительных ограничениях на спектр, опираясь на метод, изложенный в [2], доказывается, что разрешимость ОУ будет иметь место в случае самосопряженного ДУ (1). Отметим , что этот результат был получен в [2] для ДУ произвольного порядка, но при дополнительном условии отсутствия дискретного спектра.

1. Положим $p_4(x) \equiv 1, p_3(x) \equiv 0$, $\Gamma_{\pm 1} = \{\lambda : \pm\lambda > 0\}$, $\Pi_{\pm 1}$, λ- плоскость с разрезом $\Gamma_{\pm 1}$,

$$\langle y(x), z(x)\rangle_l = \sum_{k+j\le 3} \sum_{s=j}^{3-k} (-1)^s C_s^j p_{s+k+1}^{(s-j)}(x) y^{(k)}(x) z^{(j)}(x).$$

В [1] доказывается, что функции $M_{kj}(\lambda)$ регулярны в $\Pi_{(-1)^k}$ за исключением не более чем счетного, ограниченного множества полюсов Λ_{kj}^0, и непрерывны в $\overline{\Pi}_{(-1)^k}/\{0\}$, за исключением ограниченных множеств Λ_{kj}. Для простоты рассуждений мы ограничимся случаем, когда

$$\Lambda_{kj} \cap \Gamma_{\pm 1} = \varnothing, \quad \Lambda_{2j} = \{0\}, \tag{2}$$

и когда при $\lambda \to \lambda_0 \in \Lambda'_{kj} = \Lambda_{kj}/\{0\}$,

$$M_{kj}(\lambda) = M_{kj<-1>}(\lambda_0)(\lambda-\lambda_0)^{-1} + M_{kj<0>}(\lambda_0) + M_{kj<1>}(\lambda_0)(\lambda-\lambda_0) + \\ + o(\lambda-\lambda_0), \tag{3}$$

$$M_{kj}(\lambda) = O(\rho^{k-j}), \quad \lambda \to 0. \tag{4}$$

Обозначим

$$Q_k(\lambda) = \lim_{\varepsilon\to 0}(2\pi i)^{-1}(M_{k,k+1}(\lambda - i\varepsilon) - M_{k,k+1}(\lambda + i\varepsilon)), \quad \lambda \in \Gamma_{(-1)^k}, \operatorname{Re}\varepsilon > 0,$$

$$M_{<p>}(\lambda_0) = [M_{kj<p>}(\lambda_0)]_{k,j=\overline{1,4}}, \; p = 0,-1, \; N(\lambda_0) = M_{<-1>}(\lambda_0)(M_{<0>}(\lambda_0))^{-1},$$

$$\ell^* z = \sum_{\nu=0}^{4} (-1)^\nu (\overline{p_\nu(x)} z)^{(\nu)}.$$

Если ℓ такое, что $\ell = \ell^*$ и выполняются равенства (2) - (4), то говорим, что $\ell \in V$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\ell \in V$, тогда матрица $M(\lambda)$ обладает следующими свойствами:

1. $M_{kj}(\lambda)$ - регулярны в $\Pi_{(-1)^k}$ и непрерывны в $\overline{\Pi}_{(-1)^k}/\{0\}$ за исключением конечного числа простых полюсов $\Lambda'_{kj} \subset \Pi_{(-1)^k}$; $M_{2j}(\lambda)$ регулярны в Π_{+1};

2. $M_{k,k+1}(\lambda) = \overline{M_{4-k,5-k}(\overline{\lambda})}$, $k = 1,2,3$;

3. $Q_2(\lambda) > 0$, при $\lambda > 0$;

4. $M_{kj}(\lambda) - M_{k,k+1}(\lambda) M_{k+1,j}(\lambda)$ регулярны при $\lambda \in \Gamma_{(-1)^k}$; при $k=1, j=3,4$ регулярны в Π_{+1};

5. $N_{kj}(\lambda_0) = 0, j \ne k+1$, $N_{23}(\lambda_0) = 0$, при этом если $\lambda \notin \Lambda_{k,k+1}$, то $N_{k,k+1}(\lambda_0) = 0$;

6. $M_{kj}(\lambda)=\mu_{kj}^0\rho^{k-j}(1+O(\rho^{-1})),\quad |\lambda|\to\infty$,

где $\mu_{kj}^0=\det[R_s^{4-r}]_{r=\overline{1,k-1,j},s=\overline{1,k}}\left(\det[R_s^{4-r}]_{r=\overline{1,k},s=\overline{1,k}}\right)^{-1}$.

ТЕОРЕМА 2. Выполняются равенства

$$M_{kj}(\lambda)=\int\limits_{\Gamma_{(-1)^k}}\frac{Q_k(\mu)M_{k+1,j}(\mu)}{\lambda-\mu}d\mu+\sum_{\mu_0\in\Lambda'_{kj}}\frac{M_{kj<-1>}(\mu_0)}{\lambda-\mu_0},\quad \lambda\in\Pi_{(-1)^k}/\Lambda'_{kj}.$$

2. Наряду с $\ell\in V$ будем рассматривать $\tilde{\ell}\in V$ с заведомо известными коэффициентами $\tilde{p}_\nu(x)$.

Обозначим $\hat{Q}_k(\lambda)=Q_k(\lambda)-\tilde{Q}_k(\lambda)$, $\hat{N}_k(\lambda)=N_{k,k+1}(\lambda)-\tilde{N}_{k,k+1}(\lambda)$, $\{\lambda_s\}_{s=\overline{1,p}}$, - множество полюсов матрицы $M(\lambda)$, а $\{\lambda_s\}_{s=\overline{p+1,q}}$ - множество полюсов матрицы $\tilde{M}(\lambda)$, $f_k(x,\lambda)=\Phi_k(x,\lambda),\ \lambda\in\Gamma_{(-1)^{k-1}}$, $k=2,3,4$, $\varphi_k(x,\lambda_s)=\Phi_k(x,\lambda_s)$, $k=\overline{2,4}$ (так же понимаются $\tilde{f}_k(x,\lambda),\tilde{\varphi}_k(x,\lambda_s)$).

В рассматриваемом случае ОУ относительно неизвестных $f_k(x,\lambda),\varphi_k(x,\lambda_s)$ принимает вид

$$f_k(x,\lambda)=\tilde{f}_k(x,\lambda)+\sum_{j=2}^{4}\int\limits_{\Gamma_{(-1)^{j-1}}}\frac{\left\langle\tilde{f}_k(x,\lambda),\overline{\tilde{f}_{6-j}(x,\mu)}\right\rangle_{\tilde{\ell}}}{\lambda-\mu}\hat{Q}_{j-1}(\mu)f_j(x,\mu)\,d\mu+$$

$$+\sum_{s=1}^{q}\left\{\frac{\left\langle\tilde{f}_k(x,\lambda),\overline{\tilde{\varphi}_4(x,\overline{\lambda_s})}\right\rangle_{\tilde{\ell}}}{\lambda-\lambda_s}\hat{N}_1(\lambda_s)\varphi_2(x,\lambda_s)+\right.$$

$$\left.+\frac{\left\langle\tilde{f}_k(x,\lambda),\overline{\tilde{\varphi}_2(x,\overline{\lambda_s})}\right\rangle_{\tilde{\ell}}}{\lambda-\lambda_s}\hat{N}_3(\lambda_s)\varphi_4(x,\lambda_s)\right\},\ \lambda\in\Gamma_{(-1)^{k-1}};$$

$$\varphi_k(x,\lambda_r)=\tilde{\varphi}_k(x,\lambda_r)+\sum_{j=2}^{4}\int\limits_{\Gamma_{(-1)^{j-1}}}\left[\frac{\left\langle\tilde{\Phi}_k(x,\lambda),\overline{\tilde{f}_{6-j}(x,\mu)}\right\rangle_{\tilde{\ell}}}{\lambda-\mu}\right]_{|\lambda=\lambda_r,<0>}\times$$

$$\times\hat{Q}_{j-1}(\mu)f_j(x,\mu)\,d\mu+\sum_{s=1}^{q}\left\{\left[\frac{\left\langle\tilde{\Phi}_k(x,\lambda),\overline{\tilde{\varphi}_4(x,\overline{\lambda_s})}\right\rangle_{\tilde{\ell}}}{\lambda-\lambda_s}\right]_{|\lambda=\lambda_r,<0>}\hat{N}_1(\lambda_s)\varphi_2(x,\lambda_s)+\right.$$

$$+\left[\frac{\left\langle \tilde{\Phi}_k(x,\lambda),\overline{\tilde{\varphi}_2(x,\overline{\lambda_s})}\right\rangle_{\tilde{\ell}}}{\lambda-\lambda_s}\right]_{|\lambda=\lambda_r<0>} \hat{N}_3(\lambda_s)\varphi_4(x,\lambda_s)\Bigg\}, r=\overline{1,q}. \qquad (5)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $M(\lambda)$ такая, что $M_{kj}(\lambda)=\delta_{kj}$, $j\le k$, и выполняются свойства 1 - 6 теоремы 1. При каждом фиксированном $x>0$ ОУ (5) имеет единственное решение в классе вектор-функций $z(x,\lambda)$,

$$z(x,\lambda)=[z_2(x,\lambda),z_3(x,\lambda),z_4(x,\lambda),\zeta_2(x,\lambda_1),\zeta_4(x,\lambda_1),\ldots,\zeta_2(x,\lambda_q)\zeta_4(x,\lambda_q)],$$

$z_k(x,\lambda)=0$, $\lambda\in\Gamma_{(-1)^k}$ таких, что

$$\sup_{-\infty<\lambda<+\infty} |\rho^{4-k}\exp(-\rho R_k x)z_k(x,\lambda)|<\infty.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Юрко В. А.* Обратная задача для дифференциальных операторов. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1989.

2. *Yurko V. A.* On determination of self-adjoint differential operators on a semiaxis // Math. Notes. 1995. Vol. 57. Nos. 3 – 4.

УДК 517.54

Д. В. Прохоров

К ГИПОТЕЗЕ О ДВУХ ФУНКЦИОНАЛАХ В ТЕОРИИ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ*

Пусть S - класс голоморфных однолистных в единичном круге D функций

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots.$$

Обозначим через L и N два линейных непрерывных функционала в классе S, $L\neq cN$, $c>0$. Гипотеза о двух функционалах [1] в классе S предполагает, что только функция Кебе

$$k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$$

или ее вращения могут одновременно доставлять максимум $\Re L$ и $\Re N$.

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-00842, программы “Ведущие научные школы”, грант № 00-15-96123, Минобразования РФ, грант № 97-01.6-67 и INTAS, грант № 99-00089.

В общем виде линейный непрерывный функционал L в классе S задается комплексной числовой последовательностью $\{\lambda_k\}_{k=2}^{\infty}$, обеспечивающей сходимость ряда $\sum_{k=2}^{\infty}\overline{\lambda_k}a_k := L(f)$. Если среди параметров λ_k имеется лишь конечное число отличных от нуля, то функционал L называют иногда коэффициентным. Не ограничивая общности, будем рассматривать коэффициентные функционалы

$$L(f) := \sum_{k=2}^{n}\overline{\lambda_k}a_k, \qquad N(f) := \sum_{k=2}^{n}\overline{\nu_k}a_k.$$

Известно немало результатов (см., например, [2]), доказывающих гипотезу о двух функционалах при некоторых соотношениях между наборами параметров $\{\lambda_k\}_{k=2}^{n}$ и $\{\nu_k\}_{k=2}^{n}$.

В настоящей статье покажем, что решение задачи о двух функционалах в классе S сводится к исследованию подобной задачи в классе S_M, $M > 1$, функций $f \in S$, удовлетворяющих в D неравенству $|f(z)| < M$. При этом M может находиться как угодно близко к 1, то есть функции $f \in S_M$ могут находиться в как угодно малой окрестности тождественной функции, а роль функции Кебе будет играть функция Пика $p_M \in S_M$, определяемая уравнением $Mk(p_M(z)/M) = k(z)$.

В теории параметрических представлений однолистных функций (см., например, [1, 3]) известно, что всюду плотное семейство класса S представимо с помощью интегралов

$$w = w(z,t) = e^{-t}(z + a_2(t)z^2 + \dots) \tag{1}$$

обыкновенного дифференциального уравнения Левнера

$$\frac{dw}{dt} = -w\frac{e^{iu} + w}{e^{iu} - w}, \quad t \ge 0, \quad w(z,0) = z, \tag{2}$$

где $u = u(t)$ - произвольная непрерывная на $[0,\infty)$ функция. Множество функций $f(z) = \lim_{t\to\infty} e\ w(z,t)$ образует всюду плотный подкласс класса S. В то же время множество функций $f(z) = Mw(z,\log M)$ образует всюду плотный подкласс класса S_M.

Обозначим $x(t) = (a_2(t),\dots,a_n(t))^T$, $a^0 = (0,\dots,0)^T$. Из (1), (2) естественным образом [4] выводится управляемая система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = G(t,x,u), \qquad x(0) = a^0. \tag{3}$$

Если $x(\infty)$ доставляет граничную точку области значений системы коэффициентов в классе S, в которой достигается $\max_{f\in S}\Re L$, то управление u в каждой точке $t\geq 0$ максимизирует функцию Гамильтона

$$H(t,x,\overline{\Psi},u)=\Re G(t,x,u)\overline{\Psi},$$

где векторная комплекснозначная функция $\Psi(t)=(\Psi_2(t),\ldots,\Psi_n(t))^T$ удовлетворяет сопряженной системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d\overline{\Psi}}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x} \tag{4}$$

с условием трансверсальности $\Psi(\infty)=(\lambda_2,\ldots,\lambda_n)^T:=\lambda$.

Пусть функция $f_0\in S$ является экстремальной в задаче о двух функционалах, то есть $\max_{f\in S}\Re L(f)=\Re L(f_0)$, $\max_{f\in S}\Re N(f)=\Re N(f_0)$. Следовательно, для любого $\alpha\in[0,1]$ функция f_0 максимизирует $\Re(\alpha L+(1-\alpha)N)$. Поскольку f_0 является опорной точкой класса S, то $f_0(D)$ представляет собой комплексную плоскость с аналитическим разрезом. Поэтому f_0 можно представить интегралом уравнения Левнера (2) с аналитическим управлением u^0. Заметим, что если $f_0=k$, то $u^o\equiv\pi$.

На границе множества значений системы коэффициентов функции f_0 соответствует точка $(a_2^0,\ldots,a_n^0)^T$, которая совпадает со значением $x(\infty)$ для некоторой траектории $x(t)$ управляемой системы (3).

Сопряженная система (4) линейна относительно $\overline{\Psi}$. Подставим в нее $u=u^0$ и запишем условия трансверсальности в виде $\Psi(\infty)=\alpha\lambda+(1-\alpha)\nu$, где $\nu=(\nu_2,\ldots,\nu_n)^T$. Это приведет к представлению $\Psi(t)=\alpha\Psi^L(t)+(1-\alpha)\Psi^N(t)$, где Ψ^L и Ψ^N удовлетворяют сопряженной системе (4) с условиями трансверсальности $\Psi^L(\infty)=\lambda$ и $\Psi^N(\infty)=\nu$, которые соответствуют начальным данным

$$\Psi_k^L(0)=\sum_{j=k}^{n}\lambda_j(j+1-k)\overline{a}_{j+1-k}^0,\ \Psi_k^N(0)=\sum_{j=k}^{n}\nu_j(j+1-k)\overline{a}_{j+1-k}^0,\ k=2,\ldots,n.$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Если гипотеза о двух функционалах справедлива для L и N, то для всех $t\geq 0$ управление $u=\pi$ доставляет максимум функции Гамильтона с детерминированным фазовым вектором x и сопряженным вектором Ψ с начальными данными

$$\Psi_k(0)=\sum_{j=k}^{n}(j+1-k)^2(\alpha\lambda_j+(1-\alpha)\nu_j). \tag{5}$$

Справедливо и обратное утверждение, которое достаточно проверить для всех t, близких к 0.

ТЕОРЕМА 2. Если существует $t_0 > 0$ такое, что для всех $t \in [0,t_0]$ управление $u = \pi$ доставляет максимум функции Гамильтона с соответствующим фазовым вектором x и сопряженным вектором Ψ с начальными данными (5), то функция Кебе k является опорной по отношению к функционалам L и N.

Теорема 2 позволяет сформулировать гипотезу о двух функционалах в следующем эквивалентном виде.

ГИПОТЕЗА. Предположим, что существует $t_0 > 0$ такое, что для всех $t \in [0,t_0]$ некоторое аналитическое управление u доставляет максимум функции Гамильтона с фазовым вектором x, удовлетворяющим системе (3), и сопряженным вектором Ψ, удовлетворяющим системе (4) с начальными данными вида $w(0) = \alpha\xi + (1-\alpha)\eta$, где векторы ξ и η фиксированы и различны, а α принимает все значения из отрезка $[0,1]$. Тогда $u = const$.

Этот вариант гипотезы о двух функционалах переносит исследование опорных точек класса S к исследованию опорных точек, одновременно соответствующих двум линейным непрерывным функционалам в классе S_M с M, как угодно близкими к 1. Выгода такого сведения заключается в том, что в окрестности тождественной функции развиты мощные асимптотические методы [5 - 8], позволяющие эффективно описывать геометрические и гладкостные свойства границы области значений системы коэффициентов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Duren P. L.* Univalent Functions. N. Y.: Springer-Verlag, 1983.

2. *Goh S. S.* On the two-functional conjecture for univalent functions // Complex Variables. 1992. Vol. 20. P. 197 - 206.

3. *Александров И. А.* Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976.

4. *Прохоров Д. В.* Множества значений систем функционалов в классах однолистных функций // Матем. сб. 1990. Т. 181. С. 1659 - 1677.

5. *Prokhorov D. V.* Coefficients of functions close to the identity function // Complex Variables. 1997. Vol. 33. P. 255 - 263.

6. *Prokhorov D. V.* Radii of neighborhoods for coefficient estimates of functions close to the identity // Computational Methods and Function Theory/Eds.: N. Papamichael, St. Ruscheweyh and E. B. Saff. London: World Scientific, 1999. P. 449 - 459.

7. *Jakubowski Z. J.*, *Prokhorov D. V.* and *Szynal J.* Proof of a coefficient product conjecture for bounded univalent functions // Complex Variables (принято к печати).

8. *Ganczar A.*, *Prokhorov D. V.* and *Szynal J.* A coefficient product estimate for bounded univalent functions // Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska, Sec. A Mathematica (принято к печати).

УДК 517.54

Е. В. Разумовская

ОБОБЩЕНИЕ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ГРОНУОЛЛА ДЛЯ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть S - класс голоморфных и однолистных функций $f(z)=z+a_2z^2+\dots$; $z\in E=\{z:|z|<1\}$; S_R - класс функций $f(z)\in S$ таких, что $f(\bar{z})=\overline{f(z)}$, $z\in E$.

Одними из основных задач в теории однолистных функций являются вопросы нахождения множеств значений различных функционалов и систем функционалов в классах S и S_R и в других основных классах однолистных функций. Частный случай таких задач представляют две известные задачи Гронуолла об оценке $|f(z)|$ (или $|f'(z)|$) в зависимости от $|a_2|$ в классе S. В настоящей статье рассматривается обобщение первой задачи Гронуолла - описание множества значений системы функционалов

$$J_f=\{\log|f(r)|,\operatorname{Re}a_2\},\qquad 0<r<1,$$

в классе S. В качестве метода решения используется вариационно-параметрический метод совместно с принципом максимума Л. С. Понтрягина.

Пусть D - множество значений системы J_f. Используя вариационные формулы Голузина в классе S [1], получаем что $f(z)\in S$, соответствующая неособой точке границы D, отображает E на плоскость с кусочно-аналитическими разрезами и удовлетворяет в E дифференциальному уравнению

$$\frac{w(w_1x+y)-w_1y}{w^3(w_1-w)}dw^2=p(z)\left[-\left(\frac{dz}{z}\right)^2\right], \tag{1}$$

где $w=f(z)$, $w_1=f(r)$, $A=\dfrac{rf'(r)}{f(r)}$, (x,y) - вектор нормали к границе D,

$$p(z)=-\left[\left(1+A\frac{z}{r-z}-\overline{A}\frac{rz}{1-rz}\right)x-\left(a_2+\frac{1}{z}+z\right)y\right],$$

а также условиям:

$$p(z)\le 0\quad \forall\ z:|z|=1, \tag{2}$$

$$\overline{p\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}=p(z). \tag{3}$$

Функция

$$p(z) = -\frac{c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4}{z(r-z)(1-rz)} \qquad (4)$$

имеет не менее одного и не более двух двойных нулей на границе E и с учетом (3) записывается в виде

$$p(z) = \frac{ry(z-\eta_1)^2(z-\eta_2)\left(z - \frac{1}{\overline{\eta}_2}\right)}{z(r-z)(1-rz)}, \qquad (5)$$

где $\eta_1 = e^{i\varphi}$, $\eta_2 = r_0 e^{-i\varphi+\pi k}$, $r_0 \in (0,1]$, $k = 0,1$.

Из соответствия коэффициентов при z^3 в числителе двух форм записи $p(z)$ ((4) и (5)) можно выразить

$$x = y\,\mathrm{Re}\left(e^{-i\varphi}\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right) + 2e^{i\varphi} + \overline{a}_2 - \frac{1}{r} - r\right), \text{ если } \eta_2 = r_0 e^{-i\varphi}, \qquad (6)$$

или

$$x = y\,\mathrm{Re}\left(-e^{-i\varphi}\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right) + 2e^{i\varphi} + \overline{a}_2 - \frac{1}{r} - r\right), \text{ если } \eta_2 = -r_0 e^{-i\varphi}. \qquad (7)$$

А также, устремив в (1) z к r, получаем

$$Ax = \frac{ry(r-\eta_1)^2(r-\eta_2)\left(r - \frac{1}{\overline{\eta}_2}\right)}{r^2(1-r^2)}. \qquad (8)$$

Формализовав затем задачу о нахождении границы области D как задачу оптимального управления, записав прямую и сопряженную системы дифференциальных уравнений и применив второе заключение принципа максимума Понтрягина для задач со свободным правым концом траектории, автор ранее (см. [2]) получил равенство

$$\mathrm{Re}\left[Ax\left(-\frac{1+e^{i\varphi}r}{1-e^{i\varphi}r}\right) + x - y(a_2 + 2e^{i\varphi})\right] = 0. \qquad (9)$$

Подставляя в него (6) (или (7)) и (8), после преобразований получим:

1. При $\eta_2 = r_0 e^{-i\varphi}$

$$\sin^2\varphi\left(r_0 + \frac{1}{r_0} - 2\right) = 0.$$

Это означает, что в (1) функция $p(z)$ имеет вид или

$$p(z) = \frac{ry(z\pm 1)^2\left(z \pm \frac{1}{r_0}\right)^2(z \pm r_0)}{z(r-z)(1-rz)}, \qquad r_0 \in (0,1), \qquad (10)$$

что соответствует функциям Кёбе $f(z)=\dfrac{z}{(1\pm z)^2}$, доставляющим угловые точки границы области D: $\left(\log\dfrac{r}{(1+r)^2};-2\right)$ и $\left(\log\dfrac{r}{(1-r)^2};2\right)$;

$$p(z)=\frac{ry(z-e^{i\varphi})^2(z-e^{i\varphi})^2}{z(r-z)(1-rz)}, \qquad \varphi\neq 0,\pi, \tag{11}$$

что соответствует функциям, отображающим E на плоскость с разрезами, имеющими 2 конечные концевые точки $f(e^{i\varphi})$ и $f(e^{-i\varphi})$. (Автором было доказано, что экстремальные функции такого типа в рассматриваемой задаче принадлежат классу S_R [2]).

2. При $\eta_2=-r_0e^{-i\varphi}$

$$\sin^2\varphi\left(r_0+\frac{1}{r_0}+2\right)=0.$$

Отсюда следует, что $p(z)$ в (1) имеет вид или (10) или

$$p(z)=\frac{ry(z-1)^2(z+1)^2}{z(r-z)(1-rz)}, \tag{12}$$

что соответствует функциям $f(z)=\dfrac{z}{1-az+z^2}$, $a\in(-2;2)$, отображающим E на плоскость с разрезами, имеющими 2 конечные концевые точки $f(1)$ и $f(-1)$.

Так как $p(z)\le 0 \quad \forall\ z: |z|=1$ в (11), если $y>0$, и в (12), если $y<0$, то, учитывая (2), получаем, что (11) соответствует верхней границе области D, а (12) – нижней.

Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА. Граница множества значений D системы функционалов

$$J_f=\{\log|f(r)|,\operatorname{Re}a_2\}, \quad 0<r<1$$

в классе S доставляется функциями класса S_R.

Каждая точка верхней граничной дуги множества D доставляется единственной функцией $f(z)$, являющейся решением прямой и сопряженной системы дифференциальных уравнений ((13) и (14) при

$$\lambda=1/2\ ,\ \psi_1(0)=\frac{ry(r-e^{i\varphi})^2(r-e^{-i\varphi})^2}{r^2(1-r^2)},\ \varphi\neq 0,\pi,\ \psi_2(0)=0\ [2]).$$

Каждая точка нижней граничной дуги множества D доставляется единственной функцией $f(z)=\dfrac{z}{1-az+z^2}$, $a\in(-2;2)$. Угловые граничные точки $\left(\log\dfrac{r}{(1+r)^2};-2\right)$ и $\left(\log\dfrac{r}{(1-r)^2};2\right)$ доставляются функциями Кёбе $f(z)=\dfrac{z}{(1\pm z)^2}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.

2. *Разумовская Е. В.* Изопериметрическая задача типа Гронуолла для однолистных функций. Саратов, 1999. 11 с. Деп. в ВИНИТИ 18.05.99, № 15-В99.

УДК 519.83

В. В. Розен, Ю. Н. Панкратова

СИТУАЦИИ РАВНОВЕСИЯ И СБАЛАНСИРОВАННЫЕ ПОКРЫТИЯ В ИГРАХ С УПОРЯДОЧЕННЫМИ ИСХОДАМИ*

1. Данная статья касается проблемы существования и описания ситуаций равновесия по Нэшу в смешанном расширении игры с упорядоченными исходами [1]. Здесь мы ограничиваемся случаем конечной игры двух лиц вида

$$G=\langle U,V,A,\omega_1,\omega_2,F\rangle, \tag{1}$$

где U - множество стратегий игрока 1, V - множество стратегий игрока 2, A - множество исходов, ω_1,ω_2 - отношение (частичного) порядка на A, выражающее предпочтения игроков 1 и 2, $F:U\times V\to A$ - функция реализации.

По теореме [2] условие вполне равновесности ситуации в смешанном расширении игры (1) сводится к условию сбалансированности матрицы исходов $\|F(u,v)\|$ $(u\in U, v\in V)$. Здесь мы показываем, что, в свою очередь, условие сбалансированности матрицы исходов игры эквивалентно условию сбалансированности некоторых покрытий множеств стратегий игроков. Отметим, что понятие сбалансированного покрытия введено в [3], од-

* Работа поддержана Минобразования РФ, грант № 46 (конкурс 1997 г.).

нако до сих пор оно использовалось в теории игр только применительно к семействам коалиций игроков в рамках теории кооперативных игр.

2. Матрица над конечным множеством A рассматривается как отображение $F: I \times J \xrightarrow{на} A$, где $I = \{1,2,...,n\}, J = \{1,2,...,m\}$. Через S_n обозначается стандартный симплекс соответствующей размерности: $S_n = \left\{(x_1, x_2,..., x_n): x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\right\}$. Всякий индекс $i = 1,2,..,n$ может быть отождествлен с вектором $\left(0,..,\underset{i}{1},..,0\right) \in S_n$. Для $x \in S_n, y \in S_m$ положим $F_{(x,y)}(a) = \sum_{F(i,j)=a} x_i y_j$. В частности,

$$F_{(x,j)}(a) = \sum_{F(i,j)=a} x_i, \quad F_{(i,y)}(a) = \sum_{F(i,j)=a} y_j .$$

<u>Определение 1</u>. Матрица $\|F(u,v)\|$ называется *сбалансированной*, если существуют такие векторы $x \in S_n$ и $y \in S_m$ с положительными компонентами, что при любом $a \in A$ выполняется

$$F_{(x,j)}(a) = F_{(i,y)}(a), \quad (\mathrm{i} \in \mathrm{I}, \mathrm{j} \in \mathrm{J}). \tag{2}$$

При этом x и y называются *балансовыми векторами* данной матрицы.

<u>Определение 2.</u> Пусть E произвольное множество. Покрытие $(E_1, E_2,..., E_k)$ множества E называется *сбалансированным*, если существует такой вектор $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_k)$ с положительными компонентами, что для любого $e \in E$ имеет место $\sum_{E_s \ni e} \lambda_s = 1$.

Вектор λ называется *репрезентативным вектором* данного покрытия.

<u>Определение 3.</u> Сбалансированные покрытия $\left(E_1^{\,1}, E_2^{\,1},..., E_k^{\,1}\right)$ и $\left(E_1^{\,2}, E_2^{\,2},..., E_k^{\,2}\right)$ называются *коллинеарно сбалансированными*, если для них существуют репрезентативные векторы λ^1 и λ^2, коллинеарные между собой $\left(\lambda^1 \| \lambda^2\right)$.

Далее, для матрицы $F: I \times J \to A$ введем при произвольном $a \in A$ два семейства *характеристических* множеств $\left(S_i^{\,a}\right)_{i \in I}$ и $\left(T_j^{\,a}\right)_{j \in J}$, где $S_i^{\,a} \subseteq J$, $T_j^{\,a} \subseteq I$, полагая

$$j \in S_i^{\,a} \Leftrightarrow F(i,j) = a, \; i \in T_j^{\,a} \Leftrightarrow F(i,j) = a. \tag{3}$$

3. Основной результат работы представляет следующая

ТЕОРЕМА. Для того чтобы матрица $F : I \times J \to A$ была сбалансированной, необходимо и достаточно, чтобы при любых $a_1, a_2 \in A$

семейства $\left(S_i^{a_1}\right)_{i\in I}$, $\left(S_i^{a_2}\right)_{i\in I}$ были коллинеарно сбалансированными покрытиями множества J;

семейства $\left(T_j^{a_1}\right)_{j\in J}$, $\left(T_j^{a_2}\right)_{j\in J}$ были коллинеарно сбалансированными покрытиями множества I.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ - балансовые векторы заданной матрицы. Для $a \in A$ полагаем $\mu(a) := F_{(x,j)}(a) = F_{(i,y)}(a)$. Положим $\lambda_i^{\,a} := \dfrac{x_i}{\mu(a)} > 0$, $\delta_j^{\,a} := \dfrac{y_j}{\mu(a)} > 0$.

Проверим, что вектор $\lambda^a = \left(\lambda_i^{\,a}\right)_{i\in I}$ является репрезентативным вектором для покрытия $\left(S_i^{\,a}\right)_{i\in I}$. При произвольном $j \in J$ имеем:

$$\sum_{S_i^a \ni j} \lambda_i^{\,a} = \sum_{F(i,j)=a} \lambda_i^{\,a} = \sum_{F(i,j)=a} \frac{x_i}{\mu(a)} = \frac{1}{\mu(a)} \sum_{F(i,j)=a} x_i = \frac{1}{\mu(a)} F_{(x,j)}(a) = \frac{\mu(a)}{\mu(a)} = 1.$$

Далее, для $a_1, a_2 \in A$ выполняется $\lambda_i^{a_1} : \lambda_i^{a_2} = \dfrac{x_i}{\mu(a_1)} : \dfrac{x_i}{\mu(a_2)} = \dfrac{\mu(a_2)}{\mu(a_1)} = const$, откуда репрезентативные векторы коллинеарны.

Достаточность. Пусть при произвольном $a \in A$ $\lambda^a = \left(\lambda_i^{\,a}\right)_{i\in I}$ и $\delta^a = (\delta_j^{\,a})_{j\in J}$ - репрезентативные векторы сбалансированных покрытий $\left(S_i^{\,a}\right)_{i\in I}$ и $\left(T_j^{\,a}\right)_{j\in J}$ соответственно, причем при любых $a_1, a_2 \in A$ выполняется $\lambda^{a_1} \| \lambda^{a_2}, \delta^{a_1} \| \delta^{a_2}$. Зафиксируем $a \in A$ и положим

$$x_i := \frac{\lambda_i^{\,a}}{\sum_{i'=1}^{n} \lambda_{i'}^{\,a}} > 0, y_j := \frac{\delta_j^{\,a}}{\sum_{j'=1}^{m} \delta_{j'}^{\,a}} 0.$$

Корректность этих определений (т. е. независимость от выбора $a \in A$) следует из коллинеарности репрезентативных векторов. Учитывая, что λ^a – репрезентативный вектор, получаем:

$$F_{(x,j)}(a) = \sum_{F(i,j)=a} x_i = \sum_{S_i^a \ni j} \frac{\lambda_i^{\,a}}{\sum_{i'=1}^{n} \lambda_{i'}^{\,a}} = \frac{\sum_{S_i^a \ni j} \lambda_i^{\,a}}{\sum_{i'=1}^{n} \lambda_{i'}^{\,a}} = \frac{1}{\sum_{i'=1}^{n} \lambda_{i'}^{\,a}} := p(a).$$

Аналогичным образом

$$F_{(i,y)}(a)=\frac{1}{\sum\limits_{j'=1}^{m}\delta_{j'}{}^{a}}:=q(a).$$

Используя легко проверяемые равенства,

$$F_{(x,y)}(a)=\sum_{i=1}^{n}x_iF_{(i,y)}(a), F_{(x,y)}(a)=\sum_{j=1}^{m}y_jF_{(x,j)}(a),$$

получаем

$$F_{(x,y)}(a)=\sum_{j=1}^{m}y_jF_{(x,j)}(a)=\sum_{j=1}^{m}y_jp(a)=p(a),$$

$$F_{(x,y)}(a)=\sum_{i=1}^{n}x_iF_{(i,y)}(a)=\sum_{i=1}^{n}x_iq(a)=q(a),$$

откуда $p(a)=q(a)$, то есть $F_{(x,j)}(a)=F_{(i,y)}(a)$. Это означает, что матрица $\|F(i,j)\|$ является сбалансированной.

Следствие. Для того чтобы игра вида (1) имела в своем смешанном расширении ситуацию вполне равновесия в смысле Нэша, необходимо и достаточно, чтобы при любых $a_1,a_2\in A$ семейства множеств $\left(S_u{}^{a_1}\right)_{u\in U}$, $\left(S_u{}^{a_2}\right)_{u\in U}$ были коллинеарно сбалансированными покрытиями множества V, а семейства $\left(T_v{}^{a_1}\right)_{v\in V}$, $\left(T_v{}^{a_2}\right)_{v\in V}$ были коллинеарно сбалансированными покрытиями множества U.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Розен В. В.* Описание ситуаций равновесия в играх с упорядоченными исходами // Математика, механика, математическая кибернетика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-на, 1999. С. 128 – 131.

2. *Сердюкова Ю. Н.* Ситуации равновесия по Нэшу с заданными спектрами // Математика, механика, математическая кибернетика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999. С. 137 - 139.

3. *Бондарева О. Н.* Некоторые применения методов линейного программирования к теории кооперативных игр // Проблемы кибернетики. 1963. № 10. С. 119 – 139.

УДК 519.853

Н. В. Рыхлов

О ВНЕШНЕЙ И ВНУТРЕННЕЙ ОЦЕНКЕ КОМПАКТА ЛЕБЕГОВЫМ МНОЖЕСТВОМ КАЛИБРОВОЧНОЙ ФУНКЦИИ, ПОРОЖДЕННОЙ ЗВЕЗДНЫМ КОМПАКТОМ*

1. Пусть D – подлежащий оценке компакт из конечномерного действительного пространства R^p, а

$$k_M(x) = \inf\left\{\alpha : \alpha > 0, \frac{x}{\alpha} \in M\right\}$$

– калибровочная функция, порождаемая заданным компактом $M \subset R^p$, $\operatorname{int} M \neq \varnothing$, $0 \in \operatorname{int} M$.

Если обозначим через

$$R(x) = \max_{y \in D} k_M(x-y),\ \ \rho_\Omega(x) = \underline{\min}_{y \in R^p \setminus D} k_M(x-y),$$

то имеют место следующие включения:

$$D \subset \{y \in R^p : k_M(x-y) \le R(x)\},\ \ \forall x \in R^p,$$

$$\{y \in R^p : k_M(x-y) \le \rho_\Omega(x)\} \subset D,\ \ \forall x \in D.$$

Тогда задачу о внешней оценке, то есть задачу о построении лебегова множества функции $k_M(.)$ наименьшего объема, содержащего компакт D, можно записать в виде

$$R(x) \to \min_{x \in R^p}. \tag{1}$$

А задачу о внутренней оценке, то есть задачу о построении лебегова множества функции $k_M(.)$ наибольшего объема, содержащегося в телесном компакте D, можно записать в виде

$$\rho_\Omega(x) \to \max_{x \in D}. \tag{2}$$

Исследования задач (1), (2) проводились в предположении, что компакт M является звездным относительно нулевого элемента и представляет собой объединение конечного числа выпуклых телесных компактов, содержащих внутри себя нулевой элемент.

Будем использовать следующие обозначения:
clA, $\operatorname{int} A$, coA, A^*, $K(A)$ – соответственно замыкание, внутренность, выпуклая оболочка поляра, коническая оболочка множества A; $K(x,A)$, $\Gamma(x,A)$ – соответственно конус касательных направлений, конус Булигана множества A в точке x; $\Omega = cl(R^p \setminus D)$; K^+ – сопряжение конуса K;

---

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-00048.

$\rho_A(x)=\min\limits_{y\in A} k_M(x-y)$, $\qquad Q^R(x,D)=\{y\in D: k_M(x-z)=R(x)\}$,

$Q^\rho(x,A)=\{z\in A: k_M(x-z)=\rho_A(x)\}$, $\langle x,y\rangle$ – скалярное произведение элементов x и y.

2. Приведем некоторые результаты исследования задачи (1). Считаем далее, включая п.3, что M – звездный относительно нулевого элемента компакт, причем $M=\bigcup\limits_{i=\overline{1,m}} M_i$, где M_i – выпуклые телесные компакты и $0_p\in \operatorname{int} M_i$, $i=\overline{1,m}$.

ТЕОРЕМА 1. Функция $k_M(x)$ дифференцируема по направлениям в любой точке $x\in R^p$ и формула ее производной по направлениям имеет вид

$$k'_M(x,g)=\max_{v\in\underline{\partial} k_M(x)}\langle v,g\rangle+\min_{w\in\overline{\partial} k_M(x)}\langle w,g\rangle,\ \forall g\in R^p, \tag{3}$$

$$\underline{\partial} k_M(x)=\sum_{i\in Q(x)}\underline{\partial} k_{M_i}(x),\ \overline{\partial} k_M(x)=-co\left\{\sum_{i\in Q(x), i\neq l}\underline{\partial} k_{M_i}(x): l\in Q(x)\right\}, \tag{4}$$

$$\underline{\partial} k_{M_i}(x)=\begin{cases} M_i^*, & \text{если} \quad x=0_p,\\ \{v\in R^p: k_{M_i^*}(v)=1, \langle v,x\rangle=k_{M_i}(x)\}, & \text{если} \quad x\neq 0_p,\end{cases} \tag{5}$$

где $Q(x)=\{i\in[1:m]: k_M(x)=k_{M_i}(x)\}$,

Замечание 1. Наличие дифференцируемости по направлениям и справедливость формулы (3) означает квазидифференцируемость $k_M(x)$ в точке x в определении В. Ф. Демьянова - А. М. Рубинова [1]. Пара выпуклых компактов $\underline{\partial} k_M(x)$ и $\overline{\partial} k_M(x)$, называемых субдифференциалом и супердифференциалом функции $k_M(.)$ в точке x, образуют ее квазидифференциал в точке x.

ТЕОРЕМА 2. Если D является выпуклым компактом, то функция $R(x)$ является всюду дифференцируемой по направлениям, причем справедлива следующая формула для ее производной по направлениям:

$$R'(x,y)=\sup_{z\in Q^R(x,D)}\ \sup_{\varsigma\in K(z,D)}\left\{\max_{v\in\underline{\partial} k_M(x-z)}\langle v,g-\varsigma\rangle+\min_{w\in\overline{\partial} k_M(x-z)}\langle w,g-\varsigma\rangle\right\}, \tag{6}$$

где $\underline{\partial} k_M$ и $\overline{\partial} k_M$ определяются формулами (4), (5).

Если компакт D не обязательно является выпуклым, то имеет место

ТЕОРЕМА 3. Если точка $x\in R^p$ такова, что

$$\Gamma(z,D)\bigcap\{\xi\in R^p: k'_M(x-z,\xi)\geq 0\}=\{0_p\},\ \forall z\in Q^R(x,D), \tag{7}$$

то функция $R(x)$ дифференцируема в точке x по любому направлению и справедлива формула (6).

Замечание 2. Если компакт D задается липшицевой и квазидифференцируемой функцией: $D=\{y\in R^p : f(y)\le 0\}$, то соотношение (7) реализуется включением

$$\underline{\partial k_M}(x-z)-\overline{\partial f}(z)\subset \operatorname{int} co\{\underline{\partial k_M}(x-z)+\underline{\partial f},-\overline{\partial k_M}(x-z)-\overline{\partial f}(z)\},$$

где $Df(z)=\{\underline{\partial f}(z),\overline{\partial f}(z)\}$ – квазидифференциал функции $f(.)$ в точке z.

Следствием теоремы 2 является

ТЕОРЕМА 4. Пусть D является выпуклым компактом. Для того чтобы точка x_0 была решением задачи (1), необходимо и достаточно, чтобы

$$R'(x_0,g)\ge 0,\ \forall g\in R^p,$$

где $R'(x_0,g)$ задается формулой (6). Если оказалось, что

$$R'(x_0,g)>0,\ \forall g\ne 0_p,$$

то x_0 – точка строгого локального решения задачи (1).

3. Приведем некоторые результаты исследования задачи (2).

ТЕОРЕМА 5. Если D является выпуклым телесным компактом, то функция $\rho_\Omega(x)$ является вогнутой на множестве D и ее условный супердифференциал выражается формулой

$$\overline{\partial\rho_\Omega}(x)=co\{\underline{\partial k_{coM}}(x-z)\cap K^+(z,D): z\in Q^\rho(x,\Omega)\},\ x\in\operatorname{int} D, \qquad (8)$$

где $\underline{\partial k_{coM}}(x)=\{v\in R^p : k_{(coM)^*}(v)=1,\langle v,x\rangle=k_{coM}(x)\}$, при $x\ne 0_p$.

Кроме того, в граничных точках множества D функция $\rho_\Omega(x)$ дифференцируема по направлениям, причем

$$\rho'_\Omega(x,g)=\max\left\{0,\ \underline{\min}_{w\in\partial\rho_\Omega(x)}\langle x,g\rangle\right\}.$$

Если компакт D не обязательно является выпуклым, то справедлива

ТЕОРЕМА 6. Если точка $x\in\operatorname{int} D$ такова, что

$$\Gamma(z,\Omega)\cap\{\varsigma\in R^p : k'_M(x-z,\varsigma)\le 0\}=\{0_p\},\ \forall z\in Q^\rho(x,\Omega), \qquad (9)$$

то функция $\rho_\Omega(x)$ дифференцируема в точке x по любому направлению и справедлива формула

$$\rho'_\Omega(x,g)=\inf_{z\in Q^\rho(x,\Omega)}\ \inf_{\varsigma\in\Gamma(z,\Omega)}\left\{\max_{v\in\underline{\partial k_M}(x-z)}\langle v,g-\varsigma\rangle+\underline{\min}_{w\in\overline{\partial k_M}(x-z)}\langle w,g-\varsigma\rangle\right\},$$

где $\underline{\partial k_M}(.)$ и $\overline{\partial k_M}(.)$ задаются формулами (4)-(5).

Замечание 3. Если компакт D задается липшицевой квазидифференцируемой функцией: $D=\{y\in R^p : f(y)\le 0\}$, то соотношение (9) реализуется включением:

$$\underline{\partial f}(z)-\overline{\partial k_M}(x-z)\subset \operatorname{int} co\{\underline{\partial k_M}(x-z)+\underline{\partial f}(z),-\overline{\partial k_M}(x-z)-\overline{\partial f(z)}\}.$$

Следствием теоремы 5, в соответствии с известным фактом из выпуклого анализа, является

ТЕОРЕМА 7. Если D является выпуклым компактом, то для того чтобы точка $x_0 \in \operatorname{int} D$ была решением задачи (2), необходимо и достаточно, чтобы $0_p \in \overline{\partial \rho_\Omega}(x_0)$, где $\overline{\partial \rho_\Omega}(.)$ задается формулой (8).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990.

УДК 515.51

С. П. Сидоров

ПОРЯДОК ПРИБЛИЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫМИ ЛИНЕЙНЫХ ФОРМОСОХРАНЯЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ КОНЕЧНОГО РАНГА*

Задача формосохраняющего приближения состоит в аппроксимации функции с сохранением некоторых свойств формы приближаемой функции, таких, например, как монотонность, выпуклость и т. п., то есть связанных со знаком производной того или иного порядка. Аппаратом подобного приближения могут служить линейные формосохраняющие операторы, для которых в работах [1 - 3] получены обобщения классического результата Коровкина [4]. Цель настоящей статьи - получение аналогов результатов [5, 6] для формосохраняющих операторов.

Пусть $X=[0,1]$ и $C^k(X)$, $k \ge 0$, есть пространство действительнозначных и k-раз непрерывно дифференцируемых функций на X. Пусть D^i означает оператор дифференцирования порядка i и $\|\cdot\|$ будет нормой в $C(X)=C^0(X)$. Далее, Π_k будет подпространством $C(X)$, порожденным системой $\{e_0, e_1, \ldots, e_k\}$, где $e_i = x^i$, т. е. $\Pi_k = \langle e_0, \ldots, e_k \rangle$.

Пусть $\sigma = \{\sigma_i\}_{i \ge 0}$ - последовательность с $\sigma_i \in \{-1,0,1\}$, и пусть h,k - два целых числа, $0 \le h \le k$ и $\sigma_h \sigma_k \ne 0$. Обозначим

$$C^{h,k}(\sigma) = \{f \in C(X) \colon \sigma_i f[x_0, \ldots, x_i] \ge 0,\ h \le i \le k\},$$

где $f[x_0, \ldots, x_i]$ есть разделенная разность порядка i функции f.

Напомним, что линейный оператор L_n, отображающий $C(X)$ в линейное пространство конечной размерности $n+1$, называется оператором конечного ранга $n+1$.

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-01120, и программы "Ведущие научные школы", грант № 00-15-96123.

ЛЕММА. Пусть $\Phi : C^k(X) \to \mathrm{R}$ - линейный функционал, обладающий следующим свойством: $\Phi(f) \geq 0$ для всякой $f \in C^k(X)$, такой, что $D^k f \geq 0$. Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle : C^k(X) \times C^k(X) \to \mathrm{R}$ - бифункционал, порожденный функционалом Φ следующим образом: для любых $f, g \in C^k(X)$ мы полагаем $\langle f, g \rangle = \Phi(w)$, где $w \in C^k(X)$ такова, что $D^k w = D^k f \cdot D^k g$ и $D^i w(0) = 0,\ i = 0, \ldots, k-1$. Тогда

$$|\langle f, g \rangle| \leq \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}} \langle g, g \rangle^{\frac{1}{2}},\ f, g \in C^k(X). \tag{1}$$

ТЕОРЕМА. Пусть $L_n : C^k(X) \to C^k(X)$ есть линейный оператор конечного ранга $n+1$, такой, что $D^k L_n e_k = D^k e_k$ и

$$L_n(C^{k,k}(\sigma) \cap C^k(X)) \subset C^{k,k}(\sigma). \tag{2}$$

Тогда

$$\sum_{j=k+1}^{k+2} \frac{1}{j!} \left\| D^k L_n e_j - D^k e_j \right\| \geq \frac{1}{2^3 (n+1)^2}. \tag{3}$$

Доказательство. Так как оператор L_n есть оператор конечного ранга $n+1$, то существует система функций $\{u_j\}_{j=0,\ldots,n}$, порождающая линейное пространство $\{L_n : f \in C(X)\}$. Рассмотрим матрицу $A = \left\| D^k u_j(z_i) \right\|_{j=0,\ldots n;\ i=0,\ldots,n+1}$, где $z_i = \dfrac{i}{n+1}$, $i = 0, \ldots, n+1$. Отметим, что в силу условия $D^k L_n e_k = D^k e_k$ ранг матрицы A не равен нулю. Возьмем ненулевой вектор $\delta = \{\delta_i\}_{i=0,\ldots,n+1}$, ортогональный всем строкам матрицы A: $\sum_{i=0}^{n+1} |\delta_i| = 1$, $\sum_{i=0}^{n+1} \delta_i D^k u_j(z_i) = 0$, $j = 0, \ldots, n$. Определим функцию $v \in C^k(X)$ следующим образом:

1) $D^k v(z_i) = \operatorname{sgn} \delta_i$, $i = 0, \ldots, n+1$;

2) $D^k v$ линейна на каждом из интервалов $[z_0, z_1], \ldots, [z_n, z_{n+1}]$;

3) $D^k v(0) = 0,\ i = 0, \ldots, k-1$.

Так как функция $D^k L_n v$ принадлежит линейному пространству, порожденному $\{D^k u_j\}$, мы получаем $\sum_{i=0}^{n+1} \delta_i D^k L_n v(z_i) = 0$. Тогда

$$1 = \sum_{i=0}^{n+1} |\delta_i| = \sum_{i=0}^{n+1} \delta_i D^k v(z_i) = \sum_{i=0}^{n+1} \delta_i (D^k v(z_i) - D^k L_n v(z_i)) \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n+1} |\delta_i| \cdot \left| D^k v(z_i) - D^k L_n v(z_i) \right| \leq \left\| D^k L_n v - D^k v \right\|. \tag{4}$$

С другой стороны, для $x \in X$ мы имеем

$$\left| D^k L_n v(x) - D^k v(x) \right| = \left| D^k L_n v(x) - D^k v(x) \frac{1}{k!} D^k e_k(x) \right| =$$

$$= \left| D^k L_n \left(v - D^k v(x) \frac{1}{k!} e_k \right)(x) \right|. \tag{5}$$

Пусть $p_x \in C^k(X)$ такова, что $D^k p_x = \left| D^k (v - D^k v(x) \frac{1}{k!} e_k) \right|$, $D^i p_x(0) = 0$, $i = 0, \dots, k-1$. Тогда $D^k (v - D^k h(x) \frac{1}{k!} e_k) \leq D^k p_x$ и $D^k (-(v - D^k h(x) \frac{1}{k!} e_k)) \leq D^k p_x$. Значит,

$$D^k L_n (v - D^k v(x) \frac{1}{k!} e_k)(x) \leq D^k L_n p_x(x) \tag{6}$$

и

$$- D^k L_n (v - D^k h(x) \frac{1}{k!} e_k)(x) \leq D^k L_n p_x(x). \tag{7}$$

Объединяя (6) и (7), мы получаем

$$\left| D^k L_n (v - D^k v(x) \frac{1}{k!} e_k)(x) \right| \leq D^k L_n p_x(x). \tag{8}$$

Пусть $q_x \in C^k(X)$ такова, что $D^k q_x(t) = |t - x|$ и $D^i q_x(0) = 0$, $i = 0, \dots k-1$. Мы имеем

$$D^k p_x(t) = \left| D^k (v - D^k v(x) \frac{1}{k!} e_k) \right| = \left| D^k v(t) - D^k v(x) \right| \leq$$

$$\leq 2(n+1)|t - x| = 2(n+1) D^k q_x(t).$$

Итак, $D^k (2(n+1) q_x - p_x)(x) \geq 0$ и, следовательно, $D^k L_n (2(n+1) q_x - p_x)(x) \geq 0$ и

$$D^k L_n p_x(x) \leq 2(n+1) D^k L_n q_x(x). \tag{9}$$

Из леммы следует, что

$$D^k L_n q_x(x) \leq \left[D^k L_n g_x(x) \right]^{1/2} \left[\frac{1}{k!} D^k L_n e_k(x) \right]^{1/2}, \tag{10}$$

где $g_x \in C^k(X)$ такова, что

$$D^k g_x(t) = (t - x)^2, \; g_x = \frac{2}{(k+2)!} e_{k+2} - \frac{2}{(k+1)!} x e_{k+1} + \frac{1}{k!} x^2 e_k.$$

Используя последовательно (5), (8), (9), (10), мы имеем $\left|D^k L_n v(x) - D^k v(x)\right| \le 2(n+1)[D^k L_n g_x(x)]^{1/2}$. □

Следствие. Пусть $L_n : C^k(X) \to C^k(X)$ - линейный оператор конечного ранга $n+1$ такой, что $D^k L_n e_k = D^k e_k$ и $L_n(\Pi_{k-1}) \subset \Pi_{k-1}$. Предположим, что существует конус $C^{h,k}(\sigma)$ такой, что $L_n(C^{h,k}(\sigma) \cap C^k(X)) \subset C^{h,k}(\sigma)$. Тогда имеет место оценка (3).

Доказательство. Это утверждение есть прямое следствие теоремы, поскольку в работе [2], обобщая результат работы [1], показано, что гипотезы следствия влекут (2). □

Следуя схеме [6], примененной к пространству $C^k(X)$, можно построить пример оператора, для которого оценка (3) является точной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Knoop H. B., Pottinger P.* Ein satz vom Korovkin-typ fur C^k raume // Math. Z. 1976. Vol. 148. S. 23 - 32.

2. *Munoz-Delgado F. J., Cardenas-Morales D.* Korovkin-type results for shape preserving operators // Curves and Surfaces with Applications in CAGD. Nashville, TN: Vanderbilt University Press, 1997. P. 303 - 310.

3. *Munoz-Delgado F. J., Ramirez-Gonzalez V., Cardenas-Morales D.* Qualitative Korovkin-Type Results on Conservative Approximation // J. of Approx. Theory. 1998. Vol. 94. P. 144 - 159.

4. *Коровкин П. П.* Сходимость линейных положительных операторов в пространстве непрерывных функций//Докл. АН СССР. 1953. Т. 90. С. 961 - 964.

5. *Коровкин П. П.* О порядке приближения функций линейными положительными операторами // Докл. АН СССР. 1957. Т. 114, № 6. С. 1158 - 1161.

6. *Виденский В. С.* Об одном точном неравенстве для линейных положительных операторов конечного ранга // Докл. АН Тадж. ССР. 1981. Т. 24, № 12. С. 715 - 717.

УДК 519.6

А. К. Смирнов

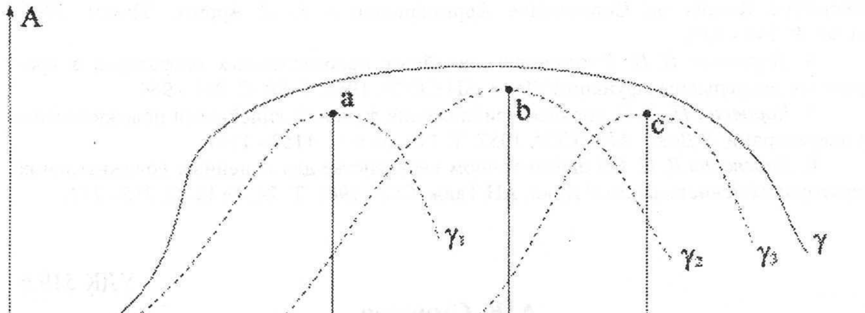
ДИСКРЕТНАЯ ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ЖИЗНЕННЫМ ЦИКЛОМ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

При управлении сложными процессами и системами одной из важнейших задач является формирование требуемого жизненного цикла для выбранного обобщенного показателя. На различных уровнях точности изменения во времени обобщенного показателя могут быть представлены линией жизненного цикла. Такая линия определяет цель управления в широком диапазоне: от представления тенденций изменения обобщенного показателя до задания линии любым множеством точек. Основные понятия такого подхода содержатся в работе [1].

В данной работе рассматриваются дискретная вероятностная модель объекта управления и метод управления формированием жизненного цикла для обобщенного показателя, заданного линией жизненного цикла.

Область значений $A=A^{+}\bigcup A^{-}$ обобщенного показателя, для которого исследуется жизненный цикл, согласуется с множеством S состояний объекта управления с помощью функции f вида $f: S\rightarrow A$. Тогда каждой величине $\alpha\in A$ соответствует подмножество $S_{\alpha}=\{s: s\in S \,\&\, f(s)=\alpha\}$. При детерминированном подходе задача управления формированием жизненного цикла выбранного обобщенного показателя, заданного линией $\gamma(t)$, состоит в том, чтобы полученная в результате управления траектория в пространстве состояний проходила через подмножества $S_{\alpha_1}, S_{\alpha_2}, \ldots, S_{\alpha_m}$, где $\alpha_k=\gamma(t_k)$, $k\in\overline{1,m}$.

Кривая $\gamma(t)$, описывающая жизненный цикл сложной системы, существенно зависит от кривых $\gamma_i(t)$, $i=1..j$, определяющих жизненные циклы отдельных составляющих. Жизненные циклы $\gamma_i(t)$, $i=1..j$ этих компонентов и вид кривой $\gamma(t)$ представлены на рисунке, где показано, как управляющие воздействия в виде выбора составляющих компонент и их жизненные циклы поддерживают на необходимом уровне жизненный цикл кривой $\gamma(t)$.



Взаиморасположение кривой жизненного цикла γ и кривых жизненных циклов отдельных компонент ($\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$) с указанием временных точек возникновения (t_1, t_2, t_3) и их максимального влияния (a, b, c).

Аппарат теории вероятностей наилучшим образом согласуется с неопределенностью свойств и основных характеристик сложных систем. В основе вероятностного подхода лежит определение состояния объекта управления заданием для каждого момента времени t

$æ_t = (\mu_t(s_1), \mu_t(s_2), \ldots, \mu_t(s_n))$ распределения вероятностей на множестве состояний $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$, где $\mu_t(s_i)$ есть вероятность того, что объект управления в момент времени t находится в состоянии s_i.

Предположив наличие базовой линии γ_0 жизненного цикла объекта управления для каждого момента времени t, определим положительное число d_t, определяющее допустимые отклонения линий жизненного цикла относительно базовой линии γ_0. Целью управления является формирование линии жизненного цикла γ, лежащей в d_t окрестности линии γ_0 с требуемой доверительной вероятностью α, $(\alpha_0 \le \alpha < 1)$.

Определим подмножество S_t множества состояний S по правилу:

$$S_t = \{s: s \in S \;\&\; f(s) \in [f(\gamma_0^{-1}(\tau_t)) - d_t, f(\gamma_0^{-1}(\tau_t)) + d_t]\}. \qquad (1)$$

Тогда начальное распределение $æ_0$ на множестве состояний S, базовая линия γ_0, последовательность подмножеств (1) составляют исходные данные для построения процесса управления, представимого последовательностью распределений вероятностей $æ_0, æ_1, æ_2, \ldots, æ_m$.

Построенная последовательность распределений $æ_1, æ_2, \ldots, æ_m$ должна обладать следующим свойством: для любого $t = 1, \ldots, m$, $æ_t(S_t) = \sum\limits_{s_i \in S_t} \mu_t(s_i) \ge \alpha$.

Вычисление распределения $æ_t$ осуществляется выбором с учетом информации обратной связи $y_{j_t} \in Y$ и приложением в момент τ_t управляющего воздействия $x_{i_t} \in X$. При вычислении $æ_k$ предполагаются известными $æ_0, æ_1, \ldots, æ_{k-1}$ и семейства условных вероятностных распределений $\mu_k(s, y_{j_1}, \ldots, y_{j_k} / æ_0, \ldots, æ_{k-1}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$.

Для конкретизации изложенного вероятностного метода управления формированием линии жизненного цикла рассмотрим математическую модель объекта управления в виде конечного вероятностного автомата.

Следуя терминологии и обозначениям Р. Г. Бухараева [2], введем понятие вероятностного автомата как системы четырех объектов $D = (S, X, Y, \mu(s', y / s, x))$, где S, X и Y – конечные (или в общем случае счетные) множества состояний, входных и выходных сигналов, а $\mu(s', y / s, x)$ – условная вероятностная мера, то есть вероятность того, что автомат под воздействием входного сигнала x переходит из состояния s в состояние s', выдавая при этом выходной сигнал y.

Предполагается, что выполняются следующие равенства:

$$\sum_{s' \in S, y \in Y} \mu(s', y / s, x) = 1, \; s \in S, x \in X.$$

Квадратные матрицы $M(y / x) = (\mu_{s', s}(y / x))$, $x \in X$, $y \in Y$, если $\mu_{s', s}(y / x) = \mu(s', y / s, x)$, определяют вероятности изменения состояний в зависимости от прикладываемого входного сигнала и наблюдаемого выходного сигнала. Зависимость от выходных сигналов исключается в матрицах $M(x) = \sum\limits_{y \in Y} M(y / x)$, $x \in X$.

Матрицы вида $M(y / x)$ и $M(x)$, где $x \in X$ и $y \in Y$, являются основным средством для построения распределения вероятностей $æ_{t+1}$ по известному распределению вероятностей $æ_t$. Начальное распределение вероятностей $æ_0$ в вычислениях используется как вектор-строка.

Вычисления вероятностных распределений $æ_t$ осуществляется с использованием следующих теорем.

ТЕОРЕМА 1. Для любых вероятностных автоматов

$$D = (S, X, Y, M(y / x)),$$

входного слова $p = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$ и выходного слова $q = y_{j_1} y_{j_2} \dots y_{j_k}$ матрица $M(q / p)$, в которой (i, j)-м элементом является вероятность того, что под воздействием входной последовательности р автомат переходит из состояния s_i в состояние s_j и выдает выходную последовательность q, определяется равенством

$$M(q / p) = M(y_{j_1} / x_{i_1}) \cdot M(y_{j_2} / x_{i_2}) \cdot \dots \cdot M(y_{j_k} / x_{i_k}).$$

ТЕОРЕМА 2. Для любых вероятностных автоматов

$$D = (S, X, Y, M(y / x), x \in X, y \in Y)$$

и входного слова $p = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$ матрица $M(p)$, в которой (i, j)-м элементом является вероятность того, что под воздействием входной последовательности p автомат переходит из состояния s_i в состояние s_j, определяется равенством

$$M(p) = M(x_{i_1}) \cdot M(x_{i_2}) \cdot \dots \cdot M(x_{i_k}).$$

(Доказательство теорем 1 и 2 см. в работе [2]).

Построенная последовательность $æ_0, æ_1, æ_2, \dots, æ_m$, дополненная выбранными и приложенными управляющими воздействиями $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}$ и данными обратной связи $y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_m}$, образует определяющую конкретный вариант управления последовательность $æ_0, (æ_1, x_{i_1}, y_{j_1}), (æ_2, x_{i_2}, y_{j_2}), \dots, (æ_k, x_{i_k}, y_{j_m})$.

Существование решения задачи определяется свойствами линии жизненного цикла γ_0, функции f, начального распределения вероятностей $æ_0$, требуемой точностью d_t и характеристиками вероятностного автомата D.

Приведенная математическая модель процесса управления жизненными циклами объекта управления – это управляемые случайные процессы с целью управления и с неполным наблюдением. Введение функционалов стоимости управления или цены выигрыша при переходе из одного состояния в другое позволяют формулировать задачи оптимального или ε-оптимального управления [3].

Систематизация действий по поиску стратегии управления может быть проведена на основе построения и анализа специального дерева вариантов функционирования вероятностного автомата. Корнем дерева является начальное распределение вероятностей $æ_0$ на множестве состояний S. Вершинами дерева полагаются распределения вероятностей, вычисляемые для каждой имеющейся вершины (распределения вероятностей) и каждой пары (x, y), где $x \in X^*$, $y \in Y^*$.

Для решения задач управления с конкретными исходными данными и конкретной математической моделью объекта управления (в форме вероятностного автомата) рассмотренное дерево вариантов функционирования может быть заменено его начальным фрагментом. Для этого вводится правило объявления вершин дерева висячими вершинами (оконечными вершинами). Такие правила устанавливаются анализом матриц, задающих функционирование вероятностного автомата, и условием объявления повторяющихся вершин оконечными. Построение и анализ начального фрагмента дерева вариантов функционирования позволяет в случае существования решения задачи управления определить поддерево, в котором полностью представлена стратегия управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Смирнов А. К., Твердохлебов В. А.* Управление жизненными циклами сложных систем. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000.
2. *Бухараев Р. Г.* Теория вероятностных автоматов // Кибернетика. 1968. № 2.
3. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Управляемые случайные процессы. Киев, 1977.

УДК 517.98

П. А. Терехин

О МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ СТРУКТУРЕ ЦЕНТРАЛИЗАТОРА МУЛЬТИСДВИГА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ*

В теории функций и теории операторов хорошо известен оператор сдвига V в пространстве Харди H^2; напомним, что $Vf(z) = zf(z)$ и $f \in H^2 \leftrightarrow f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$. Берлингом [1] установлена связь между мультипликативной структурой пространства Харди и геометрией оператора сдвига. Основным результатом о мультипликативной структуре

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 98-01-00842, программы "Ведущие научные школы", проект № 00-15-96123 и INTAS, грант № 99-00089.

H^2 является факторизационная теорема Рисса-Неванлинны (установленная для H^p-функций Риссом [2] и Герглотцем [3] и распространенная на функции ограниченной характеристики в книге Неванлинны [4]): всякая функция $f \in H^2, f \neq 0$, допускает каноническое представление в виде произведения (каноническую факторизацию) $f = \varphi F$, где φ - внутренняя, а F – внешняя функции, определяемые однозначно с точностью до постоянного множителя, равного по модулю единице. Понятия внутренней и внешней функции введены Берлингом в упомянутой работе [1]. Подробнее о теореме факторизации аналитических функций см. монографию Гофмана [5, с. 100].

Как известно (см., например, Халмош [6, с. 81]), если V – изометрия в гильбертовом пространстве H и существует такой элемент $e \in H$, что система векторов $\{V^n e : n \geq 0\}$ образует ортонормированный базис в H, то оператор V унитарно эквивалентен сдвигу. Эту характеризацию сдвига можно принять за его определение. Дадим теперь определение мультисдвига в гильбертовом пространстве, являющегося одним из возможных обобщений оператора сдвига на случай многих операторов.

Определение 1 [7]. Пусть V_0 и V_1 - изометрии в гильбертовом пространстве H. Скажем, что пара $\{V_0, V_1\}$ определяет структуру мультисдвига, если существует элемент $e \in H$ такой, что семейство векторов $\{V_{\alpha_1} \dots V_{\alpha_k} e :\ k \geq 0,\ \alpha_\nu \in \{0, 1\},\ 1 \leq \nu \leq k\}$ образует ортонормированный базис в H.

Конкретная реализация структуры мультисдвига, тесно связанная с семействами функций-всплесков на отрезке, приведена в работе автора [8]. Там же анонсирована теорема факторизации операторов, перестановочных с мультисдвигом, являющаяся аналогом канонической факторизации аналитических функций из пространства Харди на внутренний и внешний множители. Для того, чтобы сформулировать эту теорему, нам потребуются следующие обозначения и определения:

$A = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \{0, 1\}^k$ - семейство всех конечных последовательностей $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, состоящих из нулей и единиц (включая при $k = 0$ пустую последовательность);

$V^\alpha = V_{\alpha_1} \dots V_{\alpha_k}$ - произведение операторов, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in A$, первым действует оператор V_{α_k}, последним - V_{α_1}, пустое произведение считаем равным тождественному оператору I;

$h_\alpha = V^\alpha h$ для $h \in H$, в частности $e_\alpha = V^\alpha e,\ \alpha \in A$;

$H_0 = \operatorname{span}\{e_\alpha : \alpha \in A\}$ - линейная оболочка векторов.

Всюду далее под словом оператор будем понимать линейный оператор Q в H, не обязательно ограниченный, с областью определения $D(Q)=H_0$. Централизатором мультисдвига назовем множество $\Gamma=\{Q:QV_0=V_0Q$ и $QV_1=V_1Q\}$ операторов, перестановочных с мультисдвигом. Для каждого вектора $f\in H$ определим оператор $Q(f)$ равенством $Q(f)e_\alpha=f_\alpha$. Можно показать, что $\Gamma=\{Q(f): f\in H\}$.

Определение 2. Функцию (т.е. вектор) $\varphi\in H$ назовем внутренней, если семейство $\{\varphi_\alpha:\alpha\in A\}$ ортонормированное.

Определение 3. Функцию (т.е. вектор) $F\in H$ назовем внешней, если семейство $\{F_\alpha:\alpha\in A\}$ полное в H.

ТЕОРЕМА ФАКТОРИЗАЦИИ. Для любого ненулевого вектора $f\in H$ справедливо представление $Q(f)=Q(\varphi)Q(F)$, где φ - внутренняя, а F – внешняя функции, определяемые однозначно с точностью до постоянного множителя, равного по модулю единице.

Доказательство состоит в рассмотрении разности

$$N=M(f)-\left(V_0M(f)\oplus V_1M(f)\right),$$

где $M(f)=\overline{\operatorname{span}}\{f_\alpha:\alpha\in A\}$ - инвариантное относительно мультисдвига подпространство, порожденное вектором f. Устанавливается аналог разложения Вольда

$$M(f)=\bigoplus_{\alpha\in A}V^\alpha N$$

для пары изометрий $V_0\big|_{M(f)}$ и $V_1\big|_{M(f)}$. Наиболее принципиальным моментом является доказательство одномерности $\dim N=1$. (Здесь следует отметить, что произвольное блуждающее относительно мультисдвига подпространство может иметь любую конечную и даже бесконечную размерность.) Теперь, выбрав нормированный вектор $\varphi\in N$, нетрудно видеть, что семейство $\{\varphi_\alpha:\alpha\in A\}$ ортонормированное, т. е. φ - внутренняя функция. Далее, если $f=\sum c_\alpha\varphi_\alpha$, где $c_\alpha=(f,\varphi_\alpha)$, то, полагая $F=\sum c_\alpha e_\alpha$, убеждаемся, что функция F является внешней и выполняется искомое представление. Единственность факторизации основывается на утверждении о делимости внутренних функций, которое по форме совершенно аналогично одному известному результату об операторе сдвига (см. Халмош [6, с. 86, следствие 1]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Beurling A.* On two problems concerning linear transformations on Hilbert spaces // Acta Math. 1949. Vol. 81. P. 239 – 255.

2. *Riesz F.* Über die Randwerte einer analytischen Function // Mat. Zeit. 1922. Vol. 18. P. 274 – 278.

3. *Herglotz G.* Über Rotenzreihen mit positivem reelem Teil im Einheitskreis // Ber. Sachs. Ges. Wiss. Leipzig. 1911. Vol. 63. P. 501 – 511.

4. *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции. М.: Гостехиздат, 1941.

5. *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.

6. *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах. М.: Мир, 1970.

7. *Терехин П. А.* О представляющих свойствах системы сжатий и сдвигов функций на отрезке // Изв. Тул. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. Тула: ТулГУ, 1988. Т. 4. Вып. 1. С. 136 – 138.

8. *Терехин П. А.* Оператор мультисдвига в гильбертовом пространстве и его приложения к теории всплесков // Теория приближений функций и операторов: Тез. докл. Екатеринбург, 2000. С. 149 – 150.

УДК 517.51

В. Г. Тимофеев

КОЛМОГОРОВСКИЕ ОЦЕНКИ В РАВНОМЕРНОЙ МЕТРИКЕ НА ПОЛУОСИ ЧЕРЕЗ ФУНКЦИЮ И ЕЕ ПЯТУЮ ПРОИЗВОДНУЮ*

Пусть $C_5[0,\infty)$ есть множество функций $u(t)$, непрерывных на $[0,\infty)$ вместе с производной 4-го порядка включительно таких, что $\sup\{|u(t)|: 0\le t<\infty\}<\infty$, а $u^{(4)}$ удовлетворяет на $[0,\infty)$ условию Липшица первого порядка.

Положим $\|u\|=\sup\{|u(t)|: 0\le t<\infty\}$. Это обозначение используем и в том случае, когда $u(t)$ определена лишь почти всюду на $[0,\infty)$. У всякой функции $u\in C_5[0,\infty)$ существует на $[0,\infty)$ почти всюду производная 5-го порядка и при этом $\sup\{|u^{(5)}(t)|: 0\le t<\infty\}<\infty$.

Обозначим через U множество функций из $C_5[0,\infty)$, обладающих свойством $\|u\|\le 1$, $\left\|u^{(5)}\right\|\le 120$. Можно показать, что для $1\le k\le 4$

$$\mu_{5k}=\sup\left\{\left\|u^{(k)}\right\|: u\in U\right\}<\infty .$$

Отсюда следует, что при $1\le k\le 4$ для всякой функции $u\in U$ справедливы точные неравенства

$$\left\|u^{(k)}\right\|\le\frac{\mu_{5k}}{120^{k/5}}\|u\|^{\frac{5-k}{5}}\left\|u^{(5)}\right\|^{\frac{k}{5}} . \tag{1}$$

В статье исследована конструкция сплайнов, экстремальных для неравенств (1), указан способ вычисления величин μ_{5k}. Выяснено, что экс-

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 99-01-01120.

тремальной функцией в указанных неравенствах является одна и та же функция – полиномиальный алгебраический сплайн 5-го порядка. Обсуждение подобных задач можно найти, например в [1].

Предпошлем доказательству основной теоремы несколько вспомогательных лемм.

ЛЕММА 1. Существует последовательность чисел

$$0 < a < b < x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2 < \cdots \qquad (x_k \to \infty \quad \text{при} \quad k \to \infty)$$

и функция $\varphi(t)$ такая, что:

1) $\varphi(t) \in U$;

2) $\varphi^{(5)}(t) = \begin{cases} (-1)^{n+1}120, & \text{если} \quad t \in (x_n, x_{n+1}) \text{ при } n = \overline{1,\infty}, \\ -120 & \text{если} \quad t \in (0, x_1); \end{cases}$

3) $\varphi(0) = \varphi(b) = \varphi(\xi_{2k}) = +1$, если $k = \overline{1,\infty}$, $\varphi(a) = \varphi(\xi_{2k-1}) = -1$, если $k = \overline{1,\infty}$;

4) если обозначить $\xi_k - x_k = \kappa'_k$, а $x_k - \xi_{k-1} = \sqrt[5]{2} + \kappa''_k$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\kappa'_k| < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\kappa''_k| < \infty.$$

Доказательство нетрудно провести методами конструктивной теории одномерных сплайнов с использованием схемы построений, изложенной в [3]. Отметим лишь, что

$$\varphi(t) = \begin{cases} p_0(t-b) & \text{для} \quad 0 \le t < x_1, \\ p_n(t-\xi_n) & \text{для} \quad x_n \le t < x_{n+1}, \quad n = \overline{1,\infty}, \end{cases}$$

где $p_n(t) = (-1)^{n+1}(t^5 - A_n t^4 - B_n t^3 - C_n t^2 - 1)$. Свойства 1) - 4) леммы проверяются непосредственно.

ЛЕММА 2. Существуют функции $\Phi_j(t)$, $j = \overline{1,4}$ непрерывные на $[0,\infty)$ вместе с производными до 3-го порядка включительно, такие, что:

1) $\Phi_j(t)$ - алгебраические многочлены четвертой степени на каждом из отрезков $[0,a]$, $[a,b], [b,\xi_1], [\xi_1,\xi_2] \ldots$. Знаки $\Phi_j^{(4)}(t)$ на этих отрезках чередуются и $\Phi_j^{(4)}(t) > 0$ на $[0,a]$;

2) $\Phi_j(t)$ сохраняют знаки на каждом интервале $(0,x_1)$, (x_1,x_2), $(x_2,x_3) \ldots$. Знаки $\Phi_j(t)$ на них чередуются и $\Phi_j(t) < 0$ на $(0,x_1)$;

3) $\left|\Phi_j^{(k)}(t)\right| = \underline{\underline{O}}(e^{-st})$, где $s = const > 0$ при $t \to \infty$ для $j = \overline{1,4}$, $k = \overline{0,4}$;

4) $\Phi_j^{(4-j)}(0) = +1$, $\Phi_j^{(k)}(0) = 0$, если $k \ne 4 - j$, $j = \overline{1,4}$.

Доказательство достигается дословным повторением рассуждений, приведенных в [2].

ТЕОРЕМА. Имеют место равенства

$$\mu_{51}=\frac{5\alpha_0^3b^4-10\alpha_0^4b^3+6\alpha_0^5b^2+12b^2-\alpha_0^6-12\alpha_0 b}{\alpha_0^3};$$

$$\mu_{52}=\frac{40\alpha_0^3b^3-60\alpha_0^4b^2+24\alpha_0^5b+48b-2\alpha_0^6-24\alpha_0}{2\alpha_0^3};$$

$$\mu_{53}=\frac{60\alpha_0^3b^2-60\alpha_0^4b+12\alpha_0^5+24}{\alpha_0^3}; \quad \mu_{54}=120b-60\alpha_0,$$

где b является решением уравнения $2\alpha_0^3b^3-5\alpha_0^4b^2+(4\alpha_0^5+8)b-$ $-(\alpha_0^6+12\alpha_0)=0$, а α_0 - известный параметр [3], соответствующий коэффициентам A_0, B_0, C_0 функции $p_0(t)$, указанной в лемме 1.

Экстремальной функцией в неравенствах (1) является функция $\varphi(t)$ (лемма 1).

Доказательство. Пусть $F(t)$ - произвольная функция из U, а $\Phi_j(t)$ - одна из функций, построенных в лемме 2.

Рассмотрим интегральное представление

$$\begin{aligned} F'(0)\Phi_j^{(3)}(0)-F''(0)\Phi''_j(0)+F^{(3)}(0)\Phi'_j(0)-F^{(4)}(0)\Phi_j(0)= \\ =F(0)\Phi_j^{(4)}(0)+F(a)\left[\Phi_j^{(4)}(a+0)-\Phi_j^{(4)}(a-0)\right]+ \\ +\sum_{\nu=0}^{\infty}F(\xi_\nu)\left[\Phi_j^{(4)}(\xi_\nu+0)-\Phi_j^{(4)}(\xi_\nu-0)\right]+\int_0^\infty F^{(5)}(t)\Phi_j(t)dt. \end{aligned} \tag{2}$$

Для произвольной функции $f(t)\in U$ при $j=\overline{1,4}$ справедливо неравенство, которое является следствием неравенства (2)

$$\begin{aligned} \left\|f^{(j)}\right\| \le \left|\Phi_j^{(4)}(0)\right|+\left|\Phi_j^{(4)}(a+0)-\Phi_j^{(4)}(a-0)\right|+ \\ +\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\Phi_j^{(4)}(\xi_\nu+0)-\Phi_j^{(4)}(\xi_\nu-0)\right|+120\int_0^\infty\left|\Phi_j\right|dt. \end{aligned}$$

Положив в (2) $F(t)=\varphi(t)$, получаем $\left\|f^{(j)}\right\|\le(-1)^{j+1}\varphi^{(j)}(0)$.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schoenberg I. J., Cavaretta A.* Solution of Landau problem concerining higher derivatives on the halfline // Конструкт. теор. функций: Тр. междунар. конф. Золотые пески (Варна). 1970. София, 1972. С. 297 - 308.

2. *Тимофеев В. Г.* Пример построения функций с наперед заданными свойствами. Саратов, 1999. 12 с. Деп. в ВИНИТИ 18.05.99, № 1561-В99.

3. *Тимофеев В. Г.* О неподвижной точке одного специального отображения. Саратов, 1999. 10 с. Деп. в ВИНИТИ 18.05.99, № 1560-В99.

УДК 517.928

В. А. Халова

ЗАДАЧА ОБРАЩЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ*

Задача точного обращения интегрального оператора вида

$$Af = \int_0^1 A(x,t) f(t) dt, \qquad x \in [0,1]$$

представляет значительный интерес, в частности, при изучении сходимости спектральных разложений (см., например, [1]).

В настоящей статье полностью решается эта задача для интегрального оператора

$$Af = \alpha_1 \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt + \alpha_2 \int_0^{1-x} \frac{(1-x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt + \sum_{k=1}^m g_k(x)(f, v_k), \tag{1}$$

$$x \in [0,1],$$

где $(f, v_k) = \int_0^1 f(t) v_k(t) dt$, $g_k(x) \in C^n[0,1]$, $v_k(x) \in C^n[0,1]$, последовательности $\{g_k^{(n)}(x)\}_1^m$, $\{v_k(t)\}_1^m$ линейно независимы, $\beta = \alpha_1^2 - \alpha_2^2 \neq 0$.

Полученные результаты являются обобщением результатов А. П. Хромова [2], относящихся к оператору вида (1), когда $n = 1$ и $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$.

Обозначим $Sf(x) = f(1-x)$, $T = \alpha_1 - \alpha_2 S$, $D = \dfrac{d}{dx}$.

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Оператор A^{-1} существует тогда и только тогда, когда

$$rang\ \Gamma = m, \tag{2}$$

где Γ - матрица размера $(n+m) \times m$ с элементами

* Работа выполнена при поддержке программы "Ведущие научные школы", проект № 00-15-96123.

$$\gamma_{jk}=\begin{cases} D^{j-1}Tg_k(0), & j=1,\dots,n \\ \beta\delta_{k,j-n}+(D^nTg_k,v_{j-n}), & j=n+1,\dots,n+m \end{cases},\ k=1,\dots,m,$$

$\delta_{i,j}$ - символ Кронекера.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1 в [2].

Пусть выполняется (2). Для определенности, пусть отличен от нуля минор Δ, состоящий из следующих строк матрицы Γ:

$$D^{i_\mu}Tg_k(0), \qquad \mu=1,\dots,s,\ k=1,\dots,m,\ 0\le i_1<i_2<\dots<i_s\le n-1,$$

$$\beta\delta_{k,j_\mu}+(D^nTg_k,v_{j_\mu}), \qquad \mu=s+1,\dots,m, \quad 1\le j_{s+1}<j_{s+2}<\dots<i_m\le m,$$
$$k=1,\dots,m,$$

где s - фиксированное число $1\le s\le m$.

Тогда справедлива

ТЕОРЕМА 2. Если $\Delta\ne 0$, то справедлива формула

$$A^{-1}y=\frac{1}{\beta}\left(D^nTy(x)-\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{m}D^nTg_k(x)\left[\sum_{\mu=1}^{s}\Delta_{\mu k}D^{i_\mu}Ty(0)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sum_{\mu=s+1}^{m}\Delta_{\mu k}(D^nTy,v_{j_\mu})\right]\right), \tag{3}$$

причем $y(x)$ удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$\sum_{\tau=0}^{n-1}[\tilde\alpha_{\tau p}D^\tau Ty(0)+\tilde\beta_{\tau p}D^\tau Ty(1)]=(y,\varphi_p), \qquad p=1,\dots,n, \tag{4}$$

где

$$\tilde\alpha_{\tau p}=\begin{cases} b_{\tau p}(0)+\sum\limits_{\mu=1}^{s}\delta_{\tau,i_\mu}a_{\mu p}, & p=1,\dots,s, \\ \delta_{\tau i_p}+b_{\tau p}(0)+\sum\limits_{\mu=1}^{s}\delta_{\tau,i_\mu}a_{\mu p} & p=s+1,\dots,n, \end{cases}$$

$$\tilde\beta_{\tau p}=-b_{\tau p}(1), \qquad \varphi_p(t)=Tb_{-1p}(t),$$

$$a_{\mu p}=\begin{cases} -\dfrac{1}{\Delta}\sum\limits_{k=1}^{m}[\beta\delta_{kj_p}+(D^nTg_k,v_{j_p})]\Delta_{\mu k}, & p=1,\dots,s, \\ -\dfrac{1}{\Delta}\sum\limits_{k=1}^{m}D^{i_p}Tg_k(0)\Delta_{\mu k}, & p=s,\dots,n, \end{cases}$$

$$b_{\tau p}(x)=\begin{cases} (-1)^{n-\tau}\left[v_{j_p}^{(n-1-\tau)}(x)+\sum\limits_{\mu=s+1}^{m}a_{\mu p}v_{j_\mu}^{(n-1-\tau)}(x)\right], & p=1,\dots,s, \\ (-1)^{n-\tau}\sum\limits_{\mu=s+1}^{m}a_{\mu p}v_{j_\mu}^{(n-1-\tau)}(x), & p=s,\dots,n, \end{cases}$$

$\Delta_{\mu k}$ - алгебраические дополнения элементов определителя Δ, $\delta_{i,j}$ - символ Кронекера.

Доказательство. Пусть $y = Af$. Тогда

$$D^n Ty(x) = \beta f(x) + \sum_{k=1}^{m} (f, v_k) D^n Tg_k(x), \tag{5}$$

$$D^i Ty(0) = \sum_{k=1}^{m} (f, v_k) D^i Tg_k(0), \quad i = 0,\ldots,n-1. \tag{6}$$

Найдем (f, v_k), $k = 1,\ldots,m$. Умножая (5) скалярно на v_j, $j = 1,\ldots,m$, получим

$$(D^n Ty, v_j) = \beta(f, v_j) + \sum_{k=1}^{m} (f, v_k)(D^n Tg_k, v_j), \quad j = 1,\ldots,m. \tag{7}$$

Возьмем i_μ, $\mu = 1,\ldots,s$ соотношения из (6) и добавим к ним j_μ, $\mu = s+1,\ldots,m$ соотношения из (7). Определитель этой системы есть $\Delta \neq 0$. Поэтому по формулам Крамера

$$(f, v_k) = \frac{1}{\Delta}\left[\sum_{\mu=1}^{s} \Delta_{\mu k} D^{i_\mu} Ty(0) + \sum_{\mu=s+1}^{m} \Delta_{\mu k} (D^n Ty, v_{j_\mu})\right], \quad k = 1,\ldots,m. \tag{8}$$

Подставляя (8) в (5), придем к (3).

Подставляя (8) в оставшиеся j_μ, $\mu = 1,\ldots,s$ соотношения из (7) и i_μ, $\mu = s+1,\ldots,m$ соотношения из (6) и интегрируя по частям, получим (4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хромов А. П.* Теоремы равносходимости для интегродифференциальных и интегральных операторов // Матем. сборник. 1981. Т. 114(156), № 3. С. 378 - 405.

2. *Хромов А. П.* О равносходимости разложений по собственным функциям конечномерных возмущений оператора интегрирования // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика. 2000. № 2. С. 21 - 26.

УДК 518:517.948

Г. В. Хромова

ОБ УРАВНЕНИИ АБЕЛЯ*

В данной статье на уравнении Абеля демонстрируется новый способ регуляризации уравнений первого рода, базирующийся на привлечении операторов из теории приближения функций.

---

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты №№ 00-01-00237, 00-15-96123.

Пусть мы имеем уравнение Абеля

$$Au \equiv \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(1-\alpha)} u(t) = f(x), \qquad 0<\alpha<1, \tag{1}$$

правая часть которого задана δ-приближением $f_\delta(x)$ в пространстве $L_2[0,1]$, а $u(t) \in C[0,1]$.

Возьмем расширенный оператор Стеклова $\widetilde{S}_h$, с помощью которого можно получить равномерное приближение к любой непрерывной функции на отрезке $[0,1]$ [1]:

$$\widetilde{S}_h\varphi = \begin{cases} \frac{1}{h}\int\limits_0^{h-x} \varphi(t)dt + \frac{1}{2h}\int\limits_{h-x}^{h+x}\varphi(t)dt, & x\in[0,h], \\ \frac{1}{2h}\int\limits_{x-h}^{x+h}\varphi(t)dt, & x\in[h,1-h], \\ \frac{1}{2h}\int\limits_{x-h}^{2-x-h}\varphi(t)dt + \frac{1}{h}\int\limits_{2-x-h}^{1}\varphi(t)dt, & x\in[1-h,1]. \end{cases} \tag{2}$$

Рассмотрим оператор $R_h = S_h A^{-1}$.

ТЕОРЕМА 1. Оператор R_h является линейным ограниченным, действующим из $L_2[0,1]$ в $C[0,1]$ интегральным оператором с ядром $K_h(x,\tau)$, имеющим вид

$$K_h(x,\tau) = [2h\Gamma(1-\alpha)]^{-1}\widetilde{K}_h(x,\tau),$$

$$\widetilde{K}_h(x,\tau) = \begin{cases} (x+h-\tau)^{-\alpha} - (x-h-\tau)^{-\alpha}, & 0\le\tau<x-h, \\ (x+h-\tau)^{-\alpha}, & x-h\le\tau<x+h, \\ 0, & x+h\le\tau\le1 \end{cases} \tag{3}$$

при $x\in[h,1-h]$; при $x\in[0,h]$ $\widetilde{K}_h(x,\tau)$ имеет вид (3) с заменой $x-h$ на $h-x$; при $x\in[1-h,1]$

$$\widetilde{K}_h(x,\tau) = \begin{cases} 2(1-\tau)^{-\alpha} - (x-h-\tau)^{-\alpha} - (2-x-h-\tau)^{-\alpha}, & 0\le\tau<x-h, \\ 2(1-\tau)^{-\alpha} - (2-x-h-\tau)^{-\alpha}, & x-h\le\tau<2-x-h, \\ 2(1-\tau)^{-\alpha}, & 2-x-h\le\tau<1. \end{cases}$$

Доказательство. Известно [2], что в данном случае оператор A^{-1} имеет вид

$$A^{-1}f = \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{(t-\tau)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(\tau)d\tau.$$

Проведя соответствующие выкладки, получим вид функции $\widetilde{K}_h(x,\tau)$, приведенный в теореме. Далее, пусть $v(\tau)\in L_2[0,1]$. Обозначим $z(x) = R_h v$. Непрерывность $z(x)$ следует из непрерывности функции

$z_1(x)=\int\limits_0^1 (1-\tau_1)^{-\alpha} v(\tau_1 x)d\tau_1$ в точке $x=0$ и из ее равномерной непрерывности на любом внутреннем отрезке $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$, поскольку в этом случае для любых x_1, x_2, таких, что $|x_1-x_2|\le\delta_1$, выполняется оценка:

$$|z_1(x_1)-z_1(x_2)|^2\le(1-2\alpha)^{-1}\varepsilon^{-1}\omega_{L_2}^2(v,\delta_1),$$

где $\omega_{L_2}(v,\delta_1)$ - модуль непрерывности функции $v(x)$ в пространстве $L_2[0,1]$.

Ограниченность оператора R_h следует из неравенства Буняковского.

ТЕОРЕМА 2. Если $h=h(\delta)$, так что $\frac{\delta}{h(\delta)}\to 0$ при $\delta\to 0$, то $\|R_{h(\delta)}f_\delta-u\|_{C[0,1]}\to 0$ при $\delta\to 0$.

Доказательство вытекает из оценки

$$\|R_h f_\delta-u\|_{C[0,1]}\le\|R_h\|_{L_2\to C}\,\delta+\|R_h f-u\|_{C[0,1]}$$

и оценок $\|R_h\|_{L_2\to C}\le Kh^{-1}$, где K не зависит от h, $\|R_h f-u\|_{C[0,1]}\le\omega(h)$, где $\omega(h)$ - модуль непрерывности функции $u(x)$ в пространстве $C[0,1]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хромова Г. В.* О задаче восстановления функций, заданных с погрешностью // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 1977. Т. 17. № 5. С. 1161 - 1171.
2. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. С. 38.

УДК 517.51:518

Г. В. Хромова, И. Д. Молоденкова

ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРИ ПРИБЛИЖЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОСРЕДНЯЮЩИМИ ОПЕРАТОРАМИ*

Данная статья представляет собой обобщение результатов, полученных в [1, 2, 3], на случай одномерных пространств Соболева с весами.

1. Рассмотрим функцию $u(x)\in W_2^r[-\pi,\pi]$, $u^{(k)}(-\pi)=u^{(k)}(\pi)$, $k=\overline{0,r-1}$,

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты №№ 00-01-00237, 00-15-96123.

$$\| u \|^2_{W_2^r} = \int_{-\pi}^{\pi} [qu^2(t) + k(u^{(r)}(t))^2] dt,$$

где q, k - положительные постоянные, и семейство интегральных операторов A_H ядрами $K_H(x,t)$ таких, что $\| A_H u - u \|_{C[-\pi,\pi]} \to 0$ при $H \to 0$ равномерно по u на классе

$$\widetilde{M}_2^r[-\pi,\pi] = \{u \in W_2^r[-\pi,\pi],\ \ u^{(k)}(-\pi) = u^{(k)}(\pi),\ \ k = \overline{0, r-1},\ \ \| u \|_{W_2^r} \le 1,$$

$$r \ge 1,\ \text{ целое }\}.$$

Рассмотрим также величину:

$$\Delta_1(A_H, \widetilde{M}_2^r) = \sup\{\| A_H u - u \|_{C[-\pi,\pi]} : u \in \widetilde{M}_2^r\}.$$

ТЕОРЕМА 1. Справедливо представление

$$\Delta_1(A_H, \widetilde{M}_2^r) = \sup_{\pi \le x \le \pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} K_H(x,\xi) g(x,\xi,H) d\xi - g(x,x,H) \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $g(x,\xi,H) = \int_{-\pi}^{\pi} K_H(x,\eta) G(\xi,\eta) d\eta - G(\xi,x)$,

$$G(\xi,x) = -\frac{1}{2rk} \widetilde{G}(\xi,x),$$

$$\widetilde{G}(\xi,x) = \begin{cases} \sum_{l=1}^{2r} C_l e^{d\lambda_l(\xi - x)}, & x \le \xi, \\ \sum_{l=1}^{2r} C_l e^{d\lambda_l(2\pi - (x-\xi))}, & x \ge \xi, \end{cases}$$

$$C_l = d^{-(2r-1)}(1 - e^{2\pi d\lambda_l})^{-1} \lambda_l;\ \ \lambda_l = \sqrt[2r]{(-1)^{r+1}},\ \ d = \left(\frac{q}{k}\right)^{\frac{1}{2r}}.$$

Доказательство получается по аналогии с [1]. После следующего преобразования:

$$\frac{P_l}{\lambda_l} = (-1)^l [\lambda_l \prod_{\substack{k=1 \\ k<l}}^{2r} (\lambda_l - \lambda_k) \prod_{\substack{k=1 \\ k>l}}^{2r} (\lambda_k - \lambda_l)]^{-1} \ \ \text{(см. [1])}:$$

$$\frac{P_l}{\lambda_l} = [\lambda_l \prod_{\substack{k=1 \\ k \ne l}}^{2r} (\lambda_l - \lambda_k)]^{-1} = \lim_{x \to \lambda_l} \frac{x - \lambda_l}{x[x^{2r} + (-1)^r]} =$$

$$= \frac{1}{(2r+1)\lambda_l^{2r} + (-1)^r} = \frac{1}{(2r+1)(-1)^{r+1} + (-1)^r} = (-1)^{r+1}(2r)^{-1},$$

учитывая, что $(-1)^r(-1)^{r+1}(2r)^{-1} = -(2r)^{-1}$, придем к утверждению теоремы.

2. Пусть функция $u(x)$ задана ее δ- приближением в пространстве $L_2[-\pi,\pi]$:

$$\| u_\delta - u \|_{L_2} \le \delta .$$

Рассмотрим величину

$$\Delta(\delta, A_H, \widetilde{M}_2^r) = \sup\{\| A_H u_\delta - u \|_C : u \in \widetilde{M}_2^r, \| u_\delta - u \|_{L_2} \le \delta\} .$$

Получим для нее двустороннюю оценку в случае, когда A_H - интегральные операторы, сохраняющие тригонометрические сплайны [2].

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\{A_H(x,f)\}, H = \dfrac{2\pi}{n+1}$, $n = 1,2,...$ - последовательность операторов с ядрами $K_H(x,t) = \sum\limits_{i=1}^{S} \alpha_i(x)\varphi_i(t)$, сохраняющими тригонометрические сплайны.

При достаточно малых δ справедлива двусторонняя оценка

$$2^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{d}{kr}\right)^{\frac{1}{4}}(BP\delta)^{\frac{1}{2}} \le \Delta(\delta, A_{H(\delta)}, \widetilde{M}_2^r) \le 2^{\frac{3}{4}}\left(\frac{d}{kr}\right)^{\frac{1}{4}}(BP\delta)^{\frac{1}{2}},$$

где $H(\delta) = \dfrac{P}{B}\left(\dfrac{2kr}{d}\right)^{\frac{1}{2}}\delta$; $B = (3|\sum\limits_{l=1}^{2r} C_l\lambda_l|)^{\frac{1}{2}}$, $P = S\max\limits_x\left(\sum\limits_{i=1}^{S}(\alpha_i(x))^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $S = 3$, 5 или 7 в зависимости от того, куда попадает x (см. [2]), $\alpha_j(x)$ ищутся из систем линейных алгебраических уравнений (см. [4]), $\varphi_l(t)$ - линейно независимые функции, получаемые сдвигом (см. [2]).

Доказательство следует из известной двусторонней оценки (см. [1]), из оценки

$$\| A_H \|_{L_2 \to C} \le \frac{P}{\sqrt{H}} \quad \text{(см. [3])}$$

и из асимптотического равенства

$$\Delta_1(A_H, \widetilde{M}_2^r) = \left(\frac{d}{2kr}\right)^{\frac{1}{2}} BH^{\frac{1}{2}} + O(H).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хромова Г. В.* О скорости сходимости приближений функций на некоторых компактных классах и задаче восстановления функций // Вестн. МГУ. Сер. 15. 1993. № 1. С. 13 - 18.

2. *Молоденкова И. Д.* Приложение оператора осреднения к задаче восстановления функций // Математика, механика, математическая кибернетика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999. С. 57 - 59.

3. *Молоденкова И. Д.* Об осредняющих операторах, сохраняющих тригонометрические многочлены и тригонометрические сплайны // Математика, механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. С. 81 – 84.

4. *Молоденкова И. Д., Молоденков В. А.* Обзор численных методов для решения задач приближения непрерывных функций с использованием сплайнов и осредняющих операторов. Саратов, 1998. 37 с. Деп. в ВИНИТИ. № 986-В98.

УДК 519.853.5

В. Б. Чеглов

О ВНЕШНЕЙ ОЦЕНКЕ КОМПАКТА ОРИЕНТИРОВАННЫМ ЭЛЛИПСОИДОМ

1. Математическая формализация задачи. Пусть множество $D \subset R^p$ - компакт, подлежащий оценке. Рассмотрим задачу о построении ориентированного эллипсоида наименьшего объема, содержащего в себе D. Для определенности будем считать, что эллипсоид ориентирован по осям координат.

Введем следующие обозначения:

$$n(x,\tau)=\sqrt{\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{x^{(i)}}{\tau^{(i)}}\right)^2},\ r(x,\tau)=\max_{y\in D} n(x-y,\tau). \tag{1}$$

Заметим, что при фиксированном векторе $\tau=\left(\tau^{(1)},\tau^{(2)},...,\tau^{(p)}\right)$, $\tau^{(i)}>0,\ i=\overline{1,p}$ функция $n(x,\tau)$ удовлетворяет аксиомам нормы.

Множество, заданное соотношением

$$E(x,r(x,\tau)\tau)\equiv\left\{y\in R^p \,/ \sum_{i=1}^{p}\frac{\left(x^{(i)}-y^{(i)}\right)^2}{\left(\tau^{(i)}\right)^2}\le r^2(x,\tau)\right\}, \tag{2}$$

является ориентированным эллипсоидом с центром в точке x, размеры полуосей которого заданы вектором $r(x,\tau)\tau$, причем (это следует из (1) и (2)) хотя бы одна точка компакта D лежит на границе эллипсоида.

Известно, что объем эллипсоида пропорционален произведению длин его полуосей (см., например, [1]). Тогда задачу о внешней оценке компакта D ориентированным эллипсоидом можно записать в виде

$$V(x,\tau)\equiv r^p(x,\tau)\prod_{i=1}^{p}\tau^{(i)}\to \min_{x\in R^p,\tau>0}. \tag{3}$$

2. Дифференциальные свойства целевой функции. Напомним основные понятия квазидифференциального исчисления (см. [2]).

<u>Определение 1.</u> Пусть в открытом множестве $S\subset R^p$ задана конечная функция $f(x)$. Будем считать, что $f(x)$ - квазидифференцируемая

функция в точке $x_0 \in S$, если она дифференцируема в точке x_0 по любому направлению $g \in R^p$ и существуют выпуклые компакты $\underline{\partial} f(x_0) \subset R^p$ и $\overline{\partial} f(x_0) \subset R^p$ такие, что производная функции $f(x)$ в точке x_0 по направлению g имеет вид

$$f'(x_0, g) \equiv \lim_{\alpha \downarrow 0} \alpha^{-1}[f(x_0 + \alpha g) - f(x_0)] = \max_{v \in \underline{\partial} f(x_0)} < v, g > + \min_{w \in \overline{\partial} f(x_0)} < w, g > .$$

Множества $\underline{\partial} f(x)$ и $\overline{\partial} f(x)$ называются соответственно суб- и супердифференциалами функции $f(x)$ в точке x_0, а $\partial f(x) = \left[\underline{\partial} f(x), \overline{\partial} f(x)\right]$ - квазидифференциалом.

<u>Определение 2.</u> Если среди квазидифференциалов функции $f(x)$ в точке x_0 есть элемент вида $\partial f(x_0) = [\underline{\partial} f(x_0), \{0_p\}]$, то $f(x)$ - субдифференцируема.

Теперь докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Функция $V(z)$ субдифференцируема в любой точке $z = (x, \tau)$ для $x, \tau \in R^p, \tau^{(i)} > 0, i = \overline{1, p}$, причем

$$\underline{\partial} \mathrm{V}(\mathrm{z}) = co\{ pr^{p-1}(z) f(z) n'(x - y, \tau) / \, y \in Q^r(z)\} + r^P(z) f'(z), \tag{4}$$

где $Q^r(z) = \{ y \in D / \, r(z) = n(x - y, \tau)\}$, $f(z) = \prod_{i=1}^{p} \tau^{(i)}$, а $f'(z)$ - градиент функции $f(z)$ в точке z, coA - выпуклая оболочка множества A.

Доказательство. Поскольку $n(x, \tau)$ - гладкая по совокупности переменных (x, τ), то $r(x, \tau)$ - дифференцируема по любому направлению (см. [2]), причем в любой точке $z = (x, \tau)$ для направления $g \in R^{2p}$ имеет место формула

$$r'(z, g) = \max_{y \in Q^r(z)} < n'(x - y, \tau), g > , \tag{5}$$

где $Q^r(z) = \{ y \in D / \, r(z) = n(x - y, \tau)\}$.

Теперь из (5) получаем

$$r'(z, g) = \max_{v \in \{n'(x-y,\tau)/ \, y \in Q^r(z)\}} < v, g > = \max_{v \in co\{n'(x-y,\tau)/ \, y \in Q^r(z)\}} < v, g > . \tag{6}$$

Тогда и функция $r^p(z)$ дифференцируема по направлениям, причем

$$\left(r^p(\cdot)\right)'(z, g) = pr^{p-1}(z) r'(z, g). \tag{7}$$

Подставляя (6) в (7), получаем

$$\left(r^p(\cdot)\right)'(z, g) = pr^{p-1}(z) r'(z, g) = pr^{p-1}(z) \cdot \max_{v \in co\{n'(x-y,\tau)/ \, y \in Q^r(z)\}} < v, g > =$$

$$= \max_{v \in co\{n'(x-y,\tau)/\, y \in Q^r(z)\}} < pr^{p-1}(z)v, g > \; = \max_{v \in co\{pr^{p-1}(z)n'(x-y,\tau)/\, y \in Q^r(z)\}} < v, g > . \quad (8)$$

Обозначим $f(z) = \prod_{i=1}^{p} \tau^{(i)}$. Эта функция дифференцируема по z, причем

$$f'(z) = \left(0,...,0, \frac{f(z)}{\tau^{(1)}},..., \frac{f(z)}{\tau^{(p)}}\right). \quad (9)$$

Теперь, используя (3), (8) и (9), имеем

$$V'(z,g) = r^p(z)f'(z,g) + \left(r^p(\cdot)\right)'(z,g)f(z) =$$

$$= r^p(z)f'(z,g) + f(z) \max_{v \in co\{pr^{p-1}(z)n'(x-y,\tau)/\, y \in Q^r(z)\}} < v, g > =$$

$$= r^p(z)f'(z,g) + \max_{v \in co\{pr^{p-1}(z)f(z)n'(x-y,\tau)/\, y \in Q^r(z)\}} < v, g > =$$

$$= \max_{v \in co\{pr^{p-1}(z)f(z)n'(x-y,\tau)/\, y \in Q^r(z)\} + r^p(z)f'(z)} < v, g > , \forall g \in R^p.$$

Что, в соответствии с определением 2, и требовалось доказать.

Теперь, используя известный факт из негладкого анализа [2], получаем

Следствие. Для того чтобы точка $z_0 = (x_0, \tau_0)$ была решением задачи (3) необходимо, чтобы $0_{2p} \in \underline{\partial V}(z_0)$, где множество $\underline{\partial V}(z)$ определено формулой (4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Черноусько Ф. Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1998.

2. *Демьянов В. Ф., Васильев Л. В.* Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981.

УДК 631.86

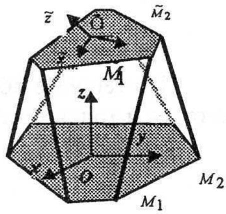
В. Т. Челышев

ЖЕСТКОСТЬ ГЕКСАПОДА

Для одной шарнирно-стержневой конструкции найдено инвариантно-геометрическое условие приобретения степени свободы в исключительном случае.

The invariant-geometric condition of a freedom degree acquisition in an exclusive case is found for one joint-rod construction

Гексаподом или *платформой Стюарта* [1] называется механическое устройство, популярное в робототехнике. Его различные технические реализации имеют следующую общую математическую модель. В две платформы, говоря языком механики, «вморожены» системы декартовых координат: «неподвижная» $Oxyz$ и подвижная $\widetilde{O}\widetilde{x}\widetilde{y}\widetilde{z}$, изменяющая своё положение относительно $Oxyz$ вслед за подвижной платформой. Заданы 6 точек $\left(M_i\right)_{i=1}^{6}$ с неизменными координатами относительно $Oxyz$ и 6 точек $\left(\widetilde{M}_i\right)_{i=1}^{6}$ с неизменными координатами относительно $\widetilde{O}\widetilde{x}\widetilde{y}\widetilde{z}$ (это центры шарнирных соединений платформ со стержнями, см. рисунок). Для краткости буквы $M_i, \widetilde{M}_i \ldots$ будут означать одновременно и радиусы-векторы $\overrightarrow{OM_i}, \overrightarrow{\widetilde{O}\widetilde{M}_i}$ и столбцы их координат относительно соответствующих осей.



Пусть $\breve{M}_i$ – это та же точка $\widetilde{M}_i$, но её координаты вычислены относительно $Oxyz$ по формуле $\breve{M} = \mathrm{A}\widetilde{M} + \widetilde{O}$, где $\mathrm{A} \in SO(3,\mathrm{R})$ – матрица, столбцы которой есть направляющие косинусы осей $\widetilde{O}\widetilde{x}\widetilde{y}\widetilde{z}$ относительно $Oxyz$. Векторы $\mathrm{r}_i = \overrightarrow{M_i\breve{M}_i}$ имеют длины

$$r_i = \sqrt{\left(\mathrm{A}\widetilde{M}_i + \widetilde{O} - M_i\right)^2} \tag{1}$$

– это длины стержней, соединяющих подвижную платформу с неподвижной. Специальное механическое устройство позволяет придавать этим стержням желаемые фиксированные длины.

Пусть желательно привести подвижную платформу в то или иное положение, т. е., с точки зрения геометра, привести оси $\widetilde{O}\widetilde{x}\widetilde{y}\widetilde{z}$ в нужное положение, задаваемое при помощи **A** и $\widetilde{O}$. Формулы (1) указывают, какие длины стержней для этого необходимо установить. Часто важно наоборот «решить задачу позиционирования», т.е. по длинам (r_i) восстановить **A** и $\widetilde{O}$.

Как известо, группа $SO(3,\mathrm{R})$ трёхмерна и частично параметризуется углами *типа* Эйлера, отличающимися от обычных тем, что вращения производятся последовательно на углы:

φ – вокруг оси Ox;

θ– вокруг оси, в которую перешла ось Oy после первого поворота;

ψ– вокруг оси, в которую перешла ось Oz после второго поворота.

$$\text{Итак, } \mathrm{A} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Таким образом, шесть уравнений (1) *при заданных* (r_i) можно попытаться разрешить относительно шести же неизвестных $(\tilde{O}_x,\tilde{O}_y,\tilde{O}_z,\varphi,\theta,\psi)$. Удобнее заменить (1) на

$$\frac{r_i^2}{2}=\frac{\left(\mathrm{A}\tilde{M}_i+\tilde{O}-M_i\right)^2}{2}. \tag{1'}$$

По теореме об обратном отображении решение *локально единственно* тогда и только тогда, когда *якобиан*

$$\left|\frac{\partial\left(r_i^2/2\right)}{\partial\left(\tilde{O}_x,\tilde{O}_y,\tilde{O}_z,\varphi,\theta,\psi\right)}\right|\neq 0. \tag{2}$$

С точки зрения механики, это означает ***жёсткость,*** отсутствие степеней свободы у данной конструкции. Цель этой статьи – выяснить, когда жёсткость теряется.

Для геометра безразлично, как именно были «вморожены» оси $\widetilde{Oxyz}$ и для любого *текущего* положения удобно считать оси «перевмороженными» так, чтобы $\varphi=\theta=\psi=0$. Тривиальные вычисления показывают, что якобиева матрица в (2) состоит из строк вида

$$\left(r_{ix},r_{iy},r_{iz},\overset{0}{r}_{ix},\overset{0}{r}_{iy},\overset{0}{r}_{iz}\right)=\left(\boldsymbol{r_i},\overset{0}{\boldsymbol{r_i}}\right), \tag{3}$$

где $\overset{0}{\boldsymbol{r}_i}=\left[\overline{O\tilde{M}_i}\boldsymbol{r}_i\right]$ – момент вектора $\boldsymbol{r_i}$ относительно точки O, а $[\cdot\cdot]$ – векторное произведение.

Пара векторов $\left(\boldsymbol{r_i},\overset{0}{\boldsymbol{r_i}}\right)$ есть так называемый *мóтор* (см. [2]) или *динамо* (см. [3]) *скользящего вектора* $\boldsymbol{r_i}$, *приведённого к точке O.*

В случае, когда якобиан обращается в 0 (и значит, гексапод приобретает нежелательную степень свободы), столбцы якобиана линейно зависимы, т.е. найдутся такие $\left(\mu_x,\mu_y,\mu_z,\mu_x^0,\mu_y^0,\mu_z^0\right)\neq(0,0,0,0,0,0)$, что

$$\overset{6}{\underset{i=1}{\forall}}\ \mu_x r_{ix}+\mu_y r_{iy}+\mu_z r_{iz}+\mu_x^0\overset{0}{r}_{ix}+\mu_y^0\overset{0}{r}_{iy}+\mu_z^0\overset{0}{r}_{iz}=0 \tag{4}$$

или $\boldsymbol{\mu r_i}+\overset{o}{\boldsymbol{\mu}}\overset{o}{\boldsymbol{r}}_i=0$.

Чтобы вскрыть геометрический смысл условия (4), переобозначим $\mu^0=\lambda$, $\lambda^0=\mu$, тогда

$$\boldsymbol{r}_i \overset{o}{\lambda} + \overset{o}{\boldsymbol{r}}_i \lambda = 0 \qquad (4')$$

Из *теории винтов* (см., например, [2]) известно, что пару векторов $\left(\lambda, \overset{o}{\lambda}\right)$ можно рассматривать как мо́тор некоторого *винта с параметром* $p = \dfrac{\lambda \overset{o}{\lambda}}{\lambda^2}$, а условие (4) – есть условие того, что *все скользящие векторы* $\left(\boldsymbol{r}_i, \overset{o}{\boldsymbol{r}}_i\right)$ *определяют прямые (по которым они скользят), попадающие в один и тот же комплекс, определяемый данным винтом.*

Последнее означает, что *ось винта* и прямая скрещиваются под углом α и имеют общий перпендикуляр такой длины h, что $h \cdot \operatorname{tg}\alpha = p$ (Особый случай: $\lambda = 0 \Rightarrow p = \infty \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2}$, вместо оси комплекса имеется только направление вектора $\overset{o}{\lambda}$, которому перпендикулярны прямые комплекса).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stewart, D.* A Platform with Six Degree of Freedom // Proc. ImechE (London). 1965-1966. Vol. 180, № 15. P. 1.

2. *Диментберг Ф. М.* Теория винтов и её приложения. М.: Наука,1978.

3. *Клейн Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. 2. М.: Наука, 1987.

УДК 513.88

Д. Г. Шалтыко

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ*

Рассмотрим интегральный оператор A вида

$$Af(x) = Mf(x) + \sum_{k=1}^{m} g_k(x) \int_0^1 f(t) v_k(t) dt, \; x \in [0,1], \qquad (1)$$

где M - вольтерров оператор, действующий в пространстве $L[0,1]$, а $\{g_k(x)\}_{k=1,\ldots,m}$, $\{v_k(x)\}_{k=1,\ldots,m}$ - некоторые системы функций этого пространства. Спектральному анализу таких операторов посвящен целый ряд работ.

---

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 00-01-00075, и программы "Ведущие научные школы", проект № 00-15-96123.

Например, в работах [1, 2] проводился спектральный анализ оператора (1) в случае, когда M представлял собой оператор

$$Mf(x)=\int_0^x M(x,t)f(t)dt.$$

В пространстве вектор-функций подобные исследования проводились в [3]. В настоящей статье предполагается, что

$$Mf(x)=\int_{1/2}^{x} M_1(x,t)f(t)dt+\int_{1/2}^{1-x} M_2(1-x,t)f(t)dt, \qquad (2)$$

где $M_i(x,t)$ непрерывны по x, t и имеют вид

$$M_i(x,t)=\alpha_i\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}+o((x-t)^n),\ \alpha_1^2\neq\alpha_2^2, \alpha_1\alpha_2\neq 0, n=2k+1, (k\geq 1).$$

Операторы вида (2) - сравнительно новый класс вольтерровых операторов, впервые подобные операторы были рассмотрены в [4].

Предположим, что функции $g_k(x)$ непрерывны на [0,1],

$$g_k(x)=\begin{cases}\alpha_k^2\dfrac{(1/2-x)^{s_k}}{s_k!}+o((1/2-x)^{s_k}), x\to 1/2-0,\\ \alpha_k^1\dfrac{(x-1/2)^{s_k}}{s_k!}+o((x-1/2)^{s_k}), x\to 1/2+0,\end{cases}$$

а $v_k(x)$ непрерывны на [0,1/2)U(1/2,1], имеют разрыв 1-го рода в точке x=1/2 и таковы, что

$$v_k(x)=\begin{cases}\beta_k^2\dfrac{x^{p_k}}{p_k!}+o(x^{p_k}), x\to 0+0,\\ \beta_k^1\dfrac{(1-x)^{p_k}}{p_k!}+o((1-x)^{p_k}), x\to 1-0,\end{cases}$$

где $\alpha_i^k, \beta_i^k\in C, s_k, p_k$ - положительные целые числа.

Пусть $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & -\alpha_2\\ \alpha_2 & -\alpha_1\end{pmatrix}$, b_1, b_2 - собственные значения этой матрицы и $\Gamma=\left(\gamma_{i,j}\right)_1^2, \Gamma^{-1}=\left(\gamma_{i,j}^*\right)_1^2$ - матрицы, диагонализирующие матрицу A. Введем сектор $S=\left\{\mu\in C: -\dfrac{\pi}{n}\leq\arg\mu\leq\dfrac{\pi}{n}\right\}$, $\Theta_{i,j}$ - корни n-й степени из $-b_i$ $(i=1,2; j=1,\ldots,n)$, расположенные в порядке убывания $\operatorname{Re}\mu\Theta_{i,j}$ при $\mu\in S_\nu (\nu=1,\ldots,N)$, $\bigcup\limits_\nu S_\nu=S$. Каждому подсектору S_ν сопоставим два неотрицательных целых числа m_1^ν и m_2^ν, сумма которых равна m и при $\mu \in S_\nu$ выполняется соотношение

$$\min_{i=1,2,\, j\le m_i^\nu} \operatorname{Re}(\mu\Theta_{i,j}) \ge \max_{i=1,2,\, j\ge m_i^\nu} \operatorname{Re}(\mu\Theta_{i,j}).$$

Положим далее $G^\nu_{\tau_1,\ldots,\eta_m} = \beta_1^{\tau_1}\ldots\beta_m^{\tau_m}\alpha_1^{\eta_1}\ldots\alpha_m^{\eta_m}\cdot\det(a_{i,j})\cdot\det(b_{i,j})$, где

$$a_{i,j} = \Theta_{1,j}^{-p_i}\gamma_{\tau_i,1}(j=1,\ldots,m_1^\nu), a_{i,j} = \Theta_{2,j-m_1^\nu}^{-p_i}\gamma_{\tau_i,2}(j=m_1^\nu+1,\ldots,m, i=1,\ldots,m),$$

$$b_{i,j} = \Theta_{1,j}^{-s_i}\overset{*}{\gamma}_{1,\eta_i}(j=1,\ldots,m_1^\nu), b_{i,j} = \Theta_{2,j-m_1^\nu}^{-s_i}\overset{*}{\gamma}_{2,\eta_i}(j=m_1^\nu+1,\ldots,m, i=1,\ldots,m).$$

Сформулируем основной результат данной статьи.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $m \le 2k$ и $\sum\limits_{\tau_1,\ldots,\tau_m=1}^{2}\ \sum\limits_{\eta_1,\ldots,\eta_m=1}^{2} G^\nu_{\tau_1,\ldots,\eta_m} \ne 0$ для $\nu=1,\ldots,N$. Если $f(x)\in L[0,1]$ и на интервале $(1/2-\delta, 1/2+\delta)$, $0<\delta\le 1/2$ справедливо

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{\infty} d_{j,k}M^k g_j(x), \text{ а } d_{j,k} = O\left(\left(\frac{(\delta-\varepsilon)2e}{\alpha n k}\right)^{-nk}\right), \alpha = |b_1|^{1/n},$$

тогда выполняется соотношение

$$\lim_{q\to\infty}\left\| f - S_{n_q}(f)\right\|_{C[1/2-\sigma,1/2+\sigma]} = 0, \tag{3}$$

где $0<\sigma<\delta$, а $S_{n_q}(f)$ - частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$ по собственным и присоединенным функциям оператора A.

Для доказательства теоремы 1 оператор A приводится к векторному виду. Для него формулируется соответствующая теорема о разложении. Доказательство этой теоремы проводится по методике, предложенной С. А. Тихомировым [3], но вместо отрезка [0,1] приходится рассматривать отрезок [1/2,1], что создает дополнительные трудности.

ЛЕММА. Если $y(x) = Af(x)$, то

$$\tilde{y}(x) = \tilde{A}\tilde{f}(x) = \tilde{M}\tilde{f}(x) + \sum_{k=1}^{m}\tilde{g}_k(x)\int_{1/2}^{1}\sum_{i=1}^{2} f_i(t)v_i(t)dt, \mathrm{x}\in[1/2,1],$$

где $\tilde{y}(x) = \{y_1(x), y_2(x)\}^T, y_1(x) = y(x), y_2(x) = y(1-x)$, тот же смысл имеют $\tilde{f}(x), \tilde{g}(x), \tilde{v}(x)$ и

$$\tilde{M}\tilde{f}(x) = \int_{1/2}^{x}\tilde{M}(x,t)\tilde{f}(t)dt,\ \tilde{M}(x,t) = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2\end{pmatrix}\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} + o((x-t)^n).$$

Справедливо и обратное утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $m \le 2k$ и $\sum_{\tau_1,\dots,\tau_m=1}^{2} \sum_{\eta_1,\dots,\eta_m=1}^{2} G^{\nu}_{\tau_1,\dots,\eta_m} \ne 0$ для $\nu = 1,\dots,N$.

Если $\tilde{f}(x) \in L[0,1]$ и на интервале $(1/2, 1/2+\delta)$, $0 < \delta \le 1/2$ справедливо

$$\tilde{f}(x) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{d}_{j,k} \tilde{M}^{k} g_j(x), \text{ а } \tilde{d}_{j,k} = O\left(\left(\frac{(\delta-\varepsilon)2e}{\alpha n k}\right)^{-nk}\right), \alpha = |b_1|^{1/n},$$

тогда выполняется (3) для оператора $\tilde{A}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хромов А. П.* Конечномерные возмущения вольтерровых операторов // Матем. заметки. 1974. Т.16. № 4. С. 669 - 681.

2. *Мацнев Л. Б., Хромов А. П.* О порождающих функциях интегральных вольтерровых операторов // Матем. заметки. 1983. № 3. С. 423 - 434.

3. *Тихомиров А. С.* О конечномерных возмущениях интегральных вольтерровых операторов, действующих в пространстве вектор-функций // Дифференциальные уравнения и теория функций. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1984. С. 35 - 41.

4. *Хромов А. П.* Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях // Матем. заметки. 1998. Т. 64. № 6. С. 932 - 949.

УДК 517.5

В. И. Шевцов

О НЕПОЛНОЙ СИСТЕМЕ ЭКСПОНЕНТ

Ряды экспонент и их обобщения изучались многими математиками. Фундаментальные исследования по теории представления функций рядами экспонент проведены А. Ф. Леонтьевым [1 - 3].

Пусть $L(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k$ - целая функция конечного порядка ρ, $0 < \rho < 1$. Будем предполагать, что все нули функции $L(\lambda)$ - простые. Обозначим нули функции $L(\lambda)$ через $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, расположив их в порядке неубывания их модулей. Рассмотрим на отрезке $[-1; 1]$ следующую систему экспонент:

$$\left\{e^{\lambda_k x}\right\}_{k=1}^{\infty}. \tag{1}$$

Так как $\{\lambda_k\}$ - нули целой функции порядка ρ, $0 < \rho < 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k|}$ сходится и поэтому система (1) неполна в метрике C ни на каком отрезке вещественной оси [2, с. 61].

Обозначим через C_ρ класс бесконечно дифференцируемых на $[-1;\,1]$ функций таких, что

$$\forall f \in C_\rho \quad \forall n \geq o \quad \left|f^{(n)}(x)\right| \leq A_f^{n+1} m_n, \quad x \in [-1;1], \tag{2}$$

где A_f - не зависит от n и x, $\{m_n\}$ - последовательность неотрицательных чисел такая, что выполнено условие

$$\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln m_n}{n \ln n} < \frac{1}{\rho}.$$

Отметим, что при $\alpha > 1$ такой класс функций не является квазианалитическим. Обозначим далее через C_ρ^* подкласс функций из C_ρ такой, что любая функция $f \in C_\rho^*$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению бесконечного порядка:

$$M_L(F) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k f^{(k)}(x) = 0, \quad x \in [-1;1]. \tag{3}$$

Элементарными решениями уравнения (3) являются функции системы (1).

В работе автора [4] доказано, что класс C_ρ^* является квазианалитическим классом функций на отрезке $x \in [-1;1]$. В исследованиях структуры решений уравнения (2) важное значение имеет интерполирующая функция, которая определяется следующим образом. Обозначим через $C_n(\mu)$ $(n = 0,1,2,...)$ - тейлоровские коэффициенты функции

$$\frac{L(\mu) - L(t)}{\mu - t} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\mu) t^n, \quad \mu \in C.$$

Функция

$$\omega_L(\mu, f) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\mu) f^{(n)}(0) \tag{4}$$

называется интерполирующей функцией. Если $f \in C_\rho^*$, то интерполирующая функция является целой функцией комплексного переменного μ. Свойства этой функции подробно изучены в [4, 5].

В настоящей статье рассматривается задача, связанная с аналитическим продолжением функции $f \in C_\rho^*$. Эта задача рассматривается в случае, когда характеристическая функция $L(\lambda)$ уравнения (3) удовлетворяет следующим дополнительным условиям:

1) нули $\{\lambda_k$ расположены на двух лучах

$$L(\lambda)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda^2}{\mu_k^2}\right),\ \mu_k>0\,; \tag{5}$$

2) $$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{1}{|\mu_k|^h}\ln\frac{1}{|L'(\mu_k)|}<\infty,\ 0<h<1. \tag{6}$$

Справедлива

ТЕОРЕМА. Пусть $f\in C_\rho^*$ и выполнены условия (5) и (6), тогда $f(x)$ допускает аналитическое продолжение в полосу $-1<\operatorname{Re}z<1$ и в этой полосе

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k e^{\mu_k z}+B_k e^{-\mu_k z}\right),\ \text{где}\ A_k=\frac{\omega_L(\mu_k,f)}{L'(\mu_k)},\ B_k=\frac{\omega_L(-\mu_k,f)}{L'(-\mu_k)}.$$

Доказательство данной теоремы использует оценки коэффициентов при условии (5), (6), а также доказанную в работах [4, 5] теорему об аппроксимации решений уравнения элементарными решениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.

2. *Леонтьев А. Ф.* Последовательность полиномов из экспонент. М.: Наука, 1980.

3. *Леонтьев А. Ф.* Обобщение рядов экспонент. М.: Наука, 1983.

4. *Шевцов В. И.* Об одном квазианалитическом классе функций. Саратов, 2000. 15 с. Деп. в ВИНИТИ № 1103-В00.

5. *Шевцов В. И.* Уравнение бесконечного порядка в одном квазианалитическом классе функций // Математика, Механика, Математическая кибернетика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999. С. 72 - 75.

УДК 517.927

В. А. Юрко

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ОСОБЕННОСТЯМИ ПО НЕПОЛНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ*

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_1}{dx}=i\rho R(x)y_2,\quad \frac{dy_2}{dx}=i\rho\frac{1}{R(x)}y_1,\quad x\in[0,T] \tag{1}$$

с начальными условиями $y_1(0,\rho)=1$, $y_2(0,\rho)=-1$. Здесь $\rho=\sigma+i\tau$ - спектральный параметр, а $R(x)$ - вещественная функция, которая называ-

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00741.

ется волновым сопротивлением. Система (1) описывает распространение волн в слоистой среде и часто встречается в оптике, спектроскопии, электродинамике и акустике. Радиотехнические задачи проектирования направленных ответвителей СВЧ и задачи синтеза неоднородных линий передач также могут быть сведены к исследованию системы (1) (см. [1, 2] и литературу в них).

Широкий класс задач синтеза относится к обратным задачам спектрального анализа с неполной спектральной информацией. Некоторые аспекты задач синтеза для системы (1) исследовались в [2 - 4] с помощью метода оператора преобразования. В этой статье для решения обратной задачи для системы (1) *с особенностями и точками поворота* используется метод контурного интеграла. Это дает возможность получить эффективные алгоритмы решения данного класса обратных задач.

Мы рассмотрим три класса коэффициентов $R(x)$. Будем говорить, что $R(x)\in B_0$, если $R(x)\in W_2^2(0,T)$, $R(x)>0$, $R(0)=1$ и $R'(0)=0$. Мы также рассмотрим более общий случай, когда $R(x)$ имеет полюса и нули внутри интервала $(0,T)$. Будем говорить, что $R(x)\in B_0^-$, если $R(x)$ имеет вид

$$R(x)=\sum_{j=1}^{p}\frac{R_j}{(x-x_j)^2}+R_0(x),\quad 0<x_1<\ldots<x_p<T,\quad R_j>0,$$

и $R_0(x)\in W_2^2(0,T)$, $R(x)>0\ (x\neq x_j)$, $R(0)=1$, $R'(0)=0$. В частности, если $p=0$, то $R(x)\in B_0$. Будем говорить, что $R(x)\in B_0^+$, если $\left(R(x)\right)^{-1}\in B_0^-$.

Введем функции

$$f_1(\rho)=\frac{y_1(T,\rho)-R^0 y_2(T,\rho)}{2\sqrt{R^0}},\ f_2(\rho)=\frac{y_1(T,\rho)+R^0 y_2(t,\rho)}{2\sqrt{R^0}},\ R^0:=R(T),$$

которые называются коэффициентами передачи. Обозначим $\alpha_j(\sigma)=|f_j(\sigma)|, \sigma=\mathrm{Re}\rho$. Тогда $\alpha_1^2(\sigma)-\alpha_2^2(\sigma)\equiv 1$.

Для широкого класса задач синтеза амплитуда доступна для измерения, в то время как фазу измерить трудно или невозможно. Такие случаи приводят к обратным задачам с неполной информацией. В этой статье исследуется следующая неполная обратная задача.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА 1. Дана $\alpha_1(\sigma)$, построить $R(x)$.

Для решения этой обратной задачи мы сначала восстанавливаем коэффициенты передачи по их модулям $\alpha_j(\sigma)$. Недостаток информации здесь приводит к неединственности решения. Для построения коэффициентов передачи мы используем дополнительную информацию об их нулях. Далее мы вычисляем так называемую характеристическую функцию

$\Delta(\rho)=f_1(\rho)+f_2(\rho)$ и строим решение обратной задачи восстановления $R(x)$ по заданной функции $\Delta(\rho)$.

Для определенности мы рассматриваем случай $R(x)\in B_0^-$. Исследование класса B_0^+ совершенно аналогично, так как замена $R\to 1/R$ равносильна замене $(y_1,y_2)\to(-y_2,-y_1)$.

2. Обозначим $\overline{\prod}_+:=\{\rho:\mathrm{Im}>0\}$,

$$h(x)=\frac{R'(x)}{2R(x)},\quad q(x)=h^2(x)-h'(x),\quad \Delta(\rho)=\frac{y_1(T,\rho)}{2\sqrt{R^0}}.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $R(x)\in B_0^-$. Тогда (i) функция $\Delta(\rho)$ является целой по ρ экспоненциального типа $T,\overline{\Delta(\rho)}=\Delta(-\overline{\rho})$ и $\Delta(\rho)=\exp(-ipT)(1-\dfrac{\alpha}{\rho}+\dfrac{\omega(\rho)}{\rho}),\rho\in\overline{\prod}_+$, где $\omega(\rho)=o(1)$ при $|\rho|\to\infty,\rho\in\overline{\prod}_+$, и $\omega(\rho)\in L_2(-\infty,\infty)$ при вещественных $\rho\,(ii)$. В $\overline{\prod}_+$ функция $\Delta(\rho)$ имеет не более конечного числа нулей $\{\rho_k\}_{k=\overline{1,m}}$, $m\ge 0$. Все нули $\Delta(\rho)$ в $\overline{\prod}_+$ простые и чисто мнимые, т. е. $\rho_k=i\tau_k$, $\tau_k>0$. Обозначим $\beta_k:=-\dfrac{4ip_k^2}{\Delta(-\rho_k)\Delta_0(\rho_k)}$, $\Delta_0(\rho_k):=\dfrac{d}{dp}\Delta(\rho)$. Тогда $\beta_k>0$.

Пусть $S(x,\lambda)$ - решение задачи Коши

$$-y''+p(x)y=\lambda y,\quad \lambda=\rho^2,x>0,\quad y(0)=0,\,y'(0)=1,$$

где $p(x)=q(T-x)$ при $0\le x\le T$ и $p(x)=0$ при $x>T$. Рассмотрим два волновых сопротивления $R(x)$ и $\widetilde{R}(x)$ из B_0^-. Условимся, что если некоторый символ α обозначает объект, относящийся к $R(x)$, то $\widetilde{\alpha}$ обозначает аналогичный объект для $\widetilde{R}(x)$, а $\hat{\alpha}:=\alpha-\widetilde{\alpha}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $R(x)\in B_0^-$. Выберем $\widetilde{R}(x)\in B_0^-$. Тогда

$$\widetilde{S}(x,\lambda)=S(x,\lambda)+\int_0^\infty\widetilde{D}(x,\lambda,\mu)(\mu)\hat{V}S(x,\mu)d\mu+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\widetilde{D}(x,\lambda,\lambda_k)\beta_kS(x,\lambda_k)-\sum_{k=1}^{\widetilde{m}}\widetilde{D}(x,\lambda,\widetilde{\lambda}_k)\widetilde{\beta}_kS(x,\widetilde{\lambda}_k),\lambda\in\Lambda,\tag{2}$$

$$p(x)=\widetilde{p}(x)-2\varepsilon'(x),\tag{3}$$

где $\lambda_k=\rho_k^2$, $\Lambda:=\{\lambda:\lambda>0\}\bigcup\{\lambda_k\}_{k=\overline{1,m}},\bigcup\{\widetilde{\lambda}_k\}_{k=\overline{1,\widetilde{m}}}$,

$$\widetilde{D}(x,\lambda,\mu):=\int_0^x\widetilde{S}(t,\lambda)\widetilde{S}(t,\mu)dt,\quad V(\lambda):=\frac{\rho}{\pi|\Delta(\rho)|^2},$$

$$\varepsilon(x)=\int_0^\infty S(x,\lambda)\widetilde{S}(x,\lambda)\hat{V}(\lambda)d\lambda+\sum_{k=1}^{m}S(x,\lambda_k)\widetilde{S}(x,\lambda_k)\beta_k-\sum_{k=1}^{\widetilde{m}}S(x,\widetilde{\lambda}_k)\widetilde{S}(x,\widetilde{\lambda}_k)\widetilde{\beta}_k.$$

При каждом x, (2) - линейное уравнение относительно $S(x,\lambda), \lambda\in\Lambda$, которое называется *основным уравнением* обратной задачи.

Пусть Ω_0 множество функций $\Delta(\rho)$, удовлетворяющих (i) - (ii) из теоремы 1.

ТЕОРЕМА 3. Для того чтобы $\Delta(\rho)$ была характеристической функцией для $R(x)\in B_0^-$, необходимо и достаточно, чтобы $\Delta(\rho)\in\Omega_0$.

Задание функции $\Delta(\rho)$ однозначно определяет $R(x)$.

Функция $R(x)$ может быть построена по следующему алгоритму.

Алгоритм 1. Дана $\Delta(\rho)$.

- Вычисляем $\rho_k, \beta_k, V(\lambda)$.
- Выбираем $\widetilde{R}(x)\in B_0^-$ и строим $\widetilde{p}(x), \widetilde{S}(x,\lambda), \widetilde{D}(x,\lambda,\mu), \widetilde{V}(\lambda), \widetilde{\rho}_k, \widetilde{\beta}_k$.
- Находим $S(x,\lambda), \lambda\in\Lambda$ из уравнения (2), которое однозначно разрешимо при каждом $x\in[0,T]$.
- Вычисляем $p(x)$ по (3) и строим $R(x)=(y(T-x))^{-2}$, где $y(x)$ - решение задачи Коши} $y''=p(x)y,\ y(T)=1,\ y'(T)=0$.

3. Так как $\Delta(\rho)=f_1(\rho)+f_2(\rho)$, то для того чтобы решить обратную задачу 1, нужно восстановить коэффициенты передачи по их модулям и свести обратную задачу 1 к изученной выше обратной задаче восстановления $R(x)$ по характеристической функции. Для определенности мы ограничимся случаем $h:=h(T)\neq 0$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $f_1(\sigma)=\alpha_1(\sigma)e^{-i\delta_1(\sigma)}$ и пусть $\rho_k^*=i\tau_k^*, \tau_k^*>0$, $k=\overline{1,m^*}$ - нули $f_1(\rho)$ в Π_+. Тогда

$$\delta_1(\sigma)=\sigma T+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln\alpha_1(\xi)}{\xi-\sigma}d\xi+2\sum_{k=1}^{m^*}arctg\frac{\tau_k^*}{\sigma}.$$

В частности, если $R(x)\in B_0$, то

$$\delta_1(\sigma)=\sigma T+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln\alpha_1(\xi)}{\xi-\sigma}d\xi. \tag{4}$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть $f_2(\sigma)=\alpha_2(\sigma)e^{-i\delta_2(\sigma)}$ и пусть $f_2(\rho)$ не имеет нулей в Π_+. Тогда

$$\delta_2(\sigma)=\frac{\pi}{2}sign\left(\frac{\sigma}{h}\right)+\sigma T+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln\left|2\xi h^{-1}\alpha_2(\xi)\right|}{\xi-\sigma}d\xi. \tag{5}$$

Таким образом, задание $\alpha_j(\sigma)$ однозначно определяет коэффициенты передачи, только когда они не имеют нулей в Π_+.

Используя полученные результаты, можно конструировать различные алгоритмы синтеза $R(x)$ по спектральным данным. Приведем для примера один из возможных алгоритмов. Для определенности ограничимся случаем

$$h \neq 0, R(x) \equiv 1, R(x) \in B_0.$$

Алгоритм 2. Дана $\alpha_1(\sigma)$ такая, что

$$\alpha_1(\sigma) \geq 1,\ \ \alpha_1(-\sigma) = \alpha_1(\sigma),\ \ \alpha_1^2(\sigma) = 1 + \frac{h^2}{4\sigma^2} + o(\frac{1}{\sigma^2}), \sigma \to \pm\infty.$$

• Вычисляем $\delta_1(\sigma)$ по формуле (4).

• Строим $\delta_2(\sigma)$ по (5), где $\alpha_2^2(\sigma) = \alpha_1^2(\sigma) - 1$.

• Находим $\alpha(\sigma) = |\Delta(\sigma)|$ по формуле

$$\alpha^2(\sigma) = \alpha_1^2(\sigma) + \alpha_2^2(\sigma) + 2\alpha_1(\sigma)\alpha_2(\sigma)\cos(\delta_1(\sigma) - \delta_2(\sigma)).$$

• Вычисляем $V(\lambda) = \dfrac{\sigma}{\pi\alpha^2(\sigma)}$, $\lambda = \sigma^2 > 0$.

• Строим $\widetilde{S}(x,\lambda)$, $\widetilde{D}(x,\lambda,\mu)$, $\widetilde{V}(\lambda)$, $\widetilde{\rho}_k, \widetilde{\beta}_k$ для $\widetilde{R}(x) = 1$.

• Находим $S(x,\lambda)$, $\lambda > 0$ из уравнения (2) с $m = \widetilde{m} = 0$.

• Вычисляем $p(x)$ по формуле (3).

• Строим $R(x) := (y(T-x))^{-2}$, где $y(x)$ - решение задачи Коши $y'' = p(x)y, y(T) = 1, y'(T) = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мещанов В. П.*, *Фельдштейн А. Л.* Автоматизированное проектирование направленных ответвителей СВЧ. М.: Связь, 1980.

2. *Литвиненко О. Н.*, *Сошников В. И.* Теория неоднородных линий и их применение в радиотехнике. М.: Радио, 1964.

3. *Тихонравов А. В.*, О принципиально достижимой точности решения задачи синтеза // ЖВМ и МФ. 1982. Т. 22. № 6. С. 1421 - 1433.

4. *Freiling G.* und *Yurko V. A.* On constructing differential equations with singularities from incomplete spectral information // Inverse Problems. 1998. Vol. 14. P. 1131 - 1150.

УДК 518:517.944

Н. Ю. Агафонова

НЕЛИНЕЙНЫЕ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ В ТЕЛАХ ВРАЩЕНИЯ

Нелинейные задачи для стационарного уравнения теплопроводности были исследованы для неоднородных двумерных сред с переменными коэффициентами теплопроводности [1]. В настоящей статье рассматривается метод расчета стационарных тепловых полей тел вращения, состоящих из материалов, коэффициенты теплопроводности которых зависят от температуры.

Рассмотрим тело вращения Q, заданное в цилиндрической системе координат (r,φ,z) и образованное вращением некоторой плоской области D вокруг оси z. Обозначим поверхность тела Q через E, а границу области D через Γ. Пусть Γ можно разбить на гладкие участки $L_1,...,L_N$ таким образом, что $\Gamma=\bigcup\limits_{i=1}^{N} L_i$.

Исследование стационарной теплопроводности для такого тела с учетом зависимости коэффициентов теплопроводности от температуры связано с нахождением в области Q решения нелинейного уравнения

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}r(\lambda(T))\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial z}\right)=-q(r,\varphi,z), \quad (1)$$

где $T=T(r,\varphi,z)$ - искомая функция, а $\lambda^{\cdot}=\lambda(T)$ - известная функция температуры, описывающая теплопроводность, $q(r,\varphi,z)$ - функция тепловыделения.

Уравнение (1) должно интегрироваться при определенных граничных условиях, выражающих характер взаимодействия между окружающей средой и поверхностью тела.

В работе рассматриваются краевые задачи с граничными условиями двух типов, описываемых соотношениями вида

$$T = g(r,\varphi,z), \qquad (r,\varphi,z) \in E_1 \tag{2}$$

$$\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial n} = f(r,\varphi,z), \qquad (r,\varphi,z) \in E_2, \qquad E_1 + E_2 = E.$$

Возможно также, что на всей поверхности тела задано только одно из условий I или II рода.

Для решения соответствующей этим условиям краевой задачи используем преобразование Кирхгофа $U = \frac{1}{\lambda^*}\int\limits_{T^*}^{T}\lambda(T)dT$, где λ^*, T^* - характерные значения коэффициента теплопроводности и температуры.

Применение этого преобразования к уравнению и краевым условиям позволяет свести решение исходной нелинейной задачи к решению линейной относительно функции $U(r,\varphi,z)$:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{q(r,\varphi,z)}{\lambda^*},$$

$$U(T) = \frac{1}{\lambda^*}\int\limits_{T^*}^{g(r,\varphi,z)}\lambda(T)dT = G(r,\varphi,z), \qquad (r,\varphi,z) \in E_1 \tag{3}$$

$$\lambda^*\frac{\partial U}{\partial n} = f(r,\varphi,z), \qquad (r,\varphi,z) \in E_2, \qquad E_1 + E_2 = E.$$

Решение этой краевой задачи основано на представлении искомой функции $U(r,\varphi,z)$ рядом Фурье:

$$U(r,\varphi,z) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k^c(r,z)\cos k\varphi + U_k^s(r,z)\sin k\varphi, \tag{4}$$

где коэффициенты $U_k^c(r,z)$ и $U_k^s(r,z)$ - неизвестные функции указанных аргументов. Функции $f(r,\varphi,z)$, $G(r,\varphi,z)$ представляются аналогичными рядами с коэффициентами $f_k^c(r,z), f_k^s(r,z)$ и $G_k^c(r,z), G_k^s(r,z)$ соответственно.

Воспользуемся P-формой задания областей [2]. Введем параметр σ, такой, что $d_i \le \sigma \le d_{i+1}$ на участке L_i, $0 \le i \le N-1$. В этом случае граница Γ области D однозначно отобразится на отрезок $[d_0, d_N]$ числовой оси σ. При этом $r = r_i(\sigma)$, $z = z_i(\sigma)$; $d_i \le \sigma \le d_{i+1}$, $i = \overline{0, N-1}$.

В [3] было показано, что с использованием разложений в ряд Фурье функций $U(r,\varphi,z), f(r,\varphi,z), G(r,\varphi,z)$ краевая задача (3) для тел вращения сводится к двум независимым уравнениям для коэффициентов $U_k^c(\sigma), U_k^s(\sigma)$ вида

$$p(\sigma_0)V_k(\sigma_0,) = \int\limits_{d_0}^{d_N}(\omega f_k + (1-\omega)\frac{\partial V_k}{\partial n})\Lambda_k + (\omega V_k + (1-\omega)G_k)\frac{\partial \Lambda_k}{\partial n})\chi(\sigma)d\sigma, \tag{5}$$

где $V_k(\sigma) = \begin{cases} U_k^c(\sigma) \\ U_k^s(\sigma) \end{cases}$; причем, если $V_k(\sigma) = U_k^s(\sigma)$, то $f_k(\sigma) = f_k^s(\sigma), G_k(\sigma) = G_k^s(\sigma)$, если $V_k(\sigma) = U_k^c(\sigma)$, то $f_k(\sigma) = f_k^c(\sigma), G_k(\sigma) = G_k^c(\sigma)$. Здесь введены следующие обозначения: $\Lambda_k(\sigma) = \int\limits_0^{2\pi} \delta \cos k\varphi d\varphi$, $\delta = 1 \Big/ \sqrt{(r-r_0)^2 + (z-z_0)^2 + 4rr_0 \sin^2 \frac{(\varphi - \varphi_0)}{2}}$, $p(\sigma_0)$ - величина, равная 0 для точек вне области D, 2π – для точек внутри области D и разности между левосторонней и правосторонней касательными к кривой Γ в точке (r_0, z_0), $\chi(\sigma) = \sqrt{(r'(\sigma))^2 + (z'(\sigma))^2}$, ω-параметр, определяющий тип граничных условий: $\omega = 1$ на E_1, $\omega = 0$ на E_2.

В уравнениях (5) учтены граничные условия, тем самым решение краевой задачи для пространственной области сведено к решению последовательности одномерных интегральных уравнений. Эти уравнения не связаны между собой, что делает возможным их параллельное решение. На каждом гладком участке L_i границы области функция V_k представляется интерполяционным многочленом Лагранжа через значения искомой функции в узловых точках. В результате получается СЛАУ, которая решается численно. Значения функции $U(r,\varphi,z)$, где (r,φ,z) – координаты точки на поверхности или внутри тела, определяются по формуле (4).

Вычисление температуры $T(r,\varphi,z)$ связано с использованием формулы Кирхгофа, устанавливающей связь между значениями функций U и T. В соответствии с этой формулой при заданном виде зависимости коэффициента теплопроводности от температуры каждому значению $T_m = T^* + m\Delta T, (m = \overline{1,M})$ температуры отвечает значение U_m функции U. Используя соотношения, устанавливающие зависимость дискретных значений этих функций, температуру можно определить как функцию введенной формулой Кирхгофа переменной U. Точность вычислений будет достигаться уменьшением величины ΔT.

В частном случае линейной зависимости $\lambda(T)$ можно не использовать интерполяцию. Пусть $\lambda(T) = \lambda_0 + \lambda_1 T$, где λ_0, λ_1 - известные постоянные. Интегрируя по формуле (3) и разрешая относительно T, получаем выражение для нахождения температуры

$$T(U) = T^* + \left(-\lambda_0 + \sqrt{\lambda_0^2 + 2\lambda_1 \lambda^* U}\right) \Big/ \lambda_1.$$

Таким образом, описан метод построения решений первой и второй задач теплопроводности, основанный на сведении решения краевой задачи для дифференциального уравнения к решению последовательности интегральных уравнений, который является эффективным методом исследования тепловых состояний тел вращения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аккуратов Ю. Н., Михайлов В. Н.* Решение нелинейных стационарных задач теплопроводности с граничными условиями I - IV рода // ЖВММФ. 1984. Т. 24, № 12. С. 1819 - 1826.

2. *Федик И. И., Колесов В. С., Михайлов В. Н.* Температурные поля и термонапряжения в ядерных реакторах. М.: Энергоатомиздат, 1985. С. 284.

3. *Агафонова Н. Ю., Михайлов В. Н.* Решение краевых задач I - IV рода для уравнения Пуассона в составных телах вращения // Совр. проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 10-й Сарат. зимней школы. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. С. 168.

УДК 539.3

Н. С. Анофрикова

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОГРАНСЛОЯ В ОКРЕСТНОСТИ ФРОНТА ВОЛНЫ РАСШИРЕНИЯ В ВЯЗКОУПРУГИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ

Рассмотрим задачу определения погранслоя в тонкой цилиндрической оболочке при ударном продольном воздействии изгибающего типа. Допустим, что исследуемый цилиндр выполнен из вязкоупругого материала, который имеет упругую объемную деформацию, а девиатору соответствует модель вязкоупругого тела Максвелла [1].

Разрешающие уравнения для асимптотически главных компонент напряженно-деформированного состояния имеют вид [2]

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial\zeta^2}-\kappa^2\frac{\partial^2 v_1}{\partial\tau^2}+\eta\frac{(1-2\nu)K}{(1-\nu)}\frac{\partial v_1}{\partial\xi}=0,$$

$$\sigma_{11}=\frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2 h}\frac{\partial v_1}{\partial\xi}, \tag{1}$$

$$\sigma_{33}=\frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)h}\frac{\partial v_1}{\partial\xi},$$

где v_1 - перемещение вдоль образующей срединной поверхности цилиндрической оболочки, σ_{11},σ_{33} - нормальные напряжения, $\xi=\alpha_1/h$ (α_1 - координата вдоль образующей срединной поверхности оболочки, h - полутолщина оболочки), $\zeta=\alpha_3/h$ (α_3 - расстояние по нормали к срединной поверхности), $\tau=c_2t/h$ (c_2 - скорость волны сдвига, t - время), $K=2(1+\nu)/(3\tau_R^*)$, $\tau_R^*=c_1\tau_R/R$ (τ_R - время релаксации, R - радиус цилиндра), $\kappa=c_2/c_1$ (c_1 - скорость волны расширения), $\eta=h/R$, E,ν - механические параметры модели.

Будем полагать, что на лицевой поверхности $\zeta = \pm 1$ уравнения (1) удовлетворяют однородным граничным условиям

$$\sigma_{33} = 0. \tag{2}$$

Проанализируем действие ударной нагрузки, приложенной к краю $\xi = 0$ и зависящей от времени как единичная функция Хевисайда. Рассмотрим случай продольного воздействия изгибающего типа, для которого мы имеем на торце $\xi = 0$ ненулевой изгибающий момент

$$\sigma_{11} = Ih\zeta H(\tau), \tag{3}$$

где I - некоторая постоянная, $H(\tau)$ - единичная функция Хевисайда.

Считаем также, что уравнения (1) удовлетворяют однородным начальным условиям

$$v_1 = \frac{\partial v_1}{\partial \tau} = 0 \text{ при } \tau = 0.$$

Введем новую функцию

$$v_1^* = v_1 \exp\left(\eta \frac{(1-2\nu)K}{2(1-\nu)} \xi\right). \tag{4}$$

Запишем уравнения (1) и граничные условия (2), (3) для функции v_1^*, пренебрегая в первом уравнении (1) членами порядка $O(\eta^2)$, в остальных уравнениях и граничных условиях - $O(\eta)$. Получим

$$\frac{\partial^2 v_1^*}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial \zeta^2} - \kappa^2 \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial \tau^2} = 0,$$

$$\sigma_{11}^* = \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2 h} \frac{\partial v_1^*}{\partial \xi}, \tag{5}$$

$$\sigma_{33}^* = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)h} \frac{\partial v_1^*}{\partial \xi},$$

$$\sigma_{33}^* = 0 \text{ при } \zeta = \pm 1, \tag{6}$$

$$\sigma_{11}^* = Ih\zeta H(\tau) \text{ при } \xi = 0. \tag{7}$$

Здесь и далее функции со звездочкой обозначают исходные функции, умноженные на $\exp\left(\eta \frac{(1-2\nu)K}{2(1-\nu)} \xi\right)$, аналогично (5).

Применим к (5) - (7) интегральные преобразования Лапласа по времени и интегральные синус- и косинус-преобразования Фурье по переменной ξ. Для изображения решения получим следующую краевую задачу:

$$\frac{d^2 v_1^{*LC}}{d\zeta^2} - \alpha^2 v_1^{*LC} = \frac{I_1}{s} \zeta, \tag{8}$$

$$v_1^{*LC} = 0 \text{ при } \zeta = \pm 1, \tag{9}$$

где $\alpha^2 = X^2 + \kappa^2 s^2$, $I_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2(1+\nu)\kappa^2 h^2}{E} I$, s - параметр преобразования Лапласа, X - параметр преобразования Фурье.

Решение (8), (9) имеет вид

$$v_1^{*LC} = -\frac{I_1}{s\alpha^2}\left(\frac{sh(\alpha\zeta)}{sh(\alpha)} - \zeta\right). \tag{10}$$

Свойства погранслоя, при рассматриваемом типе воздействия, будем изучать на примере изгибающего момента G_1, выражающегося формулой

$$G_1 = -\frac{Eh}{2(1+\nu)\kappa^2}\int_{-1}^{1}\frac{\partial v_1}{\partial \xi}\zeta d\zeta. \tag{11}$$

Переходя с помощью формулы (4) к v_1^* из (11) с учетом (10) получим с погрешностью $O(\eta)$ выражение для изображения G_1^*

$$G_1^{*LS} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{Ih^3}{s\alpha^2} 2X\left[\frac{1}{\alpha sh(\alpha)}\left(ch(\alpha) - \frac{sh(\alpha)}{\alpha}\right) - \frac{1}{3}\right].$$

Обратим сначала преобразование Фурье. Используя теорему вычетов, для G_1^{*L} имеем

$$G_1^{*L} = \frac{4Ih^3}{s\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\exp\left(-\kappa s\left[1 + \frac{n^2\pi^2}{\kappa^2 s^2}\right]^{1/2}\xi\right). \tag{12}$$

Для обращения (12) разложим G_1^{*L} в ряд по отрицательным степеням s. Оригинал получим, используя формулу

$$\int e^{-s\tau}\left(\frac{\tau - c\xi}{g\xi}\right)^{n/2} J_n\left(2\sqrt{g\xi(\tau - c\xi)}\right) H(\tau - c\xi)d\tau = \frac{1}{s^{n+1}}\exp\left(-\left(sc + \frac{g}{s}\right)\xi\right),$$

где c, g - постоянные, J_n - функции Бесселя первого рода.

Выпишем окончательное решение для изгибающего момента, оставляя в разложении только функции Бесселя нулевого порядка:

$$G_1 = \frac{4Ih^3}{\pi^2}\exp\left(-\eta\frac{(1-2\nu)K}{2(1-\nu)}\xi\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}J_0\left(\sqrt{\frac{2}{\kappa}}\pi n\sqrt{\xi(\tau - \kappa\xi)}\right)H(\tau - \kappa\xi). \tag{13}$$

В решении (13) вязкоупругий характер модели Максвелла выражается экспоненциально затухающим множителем $\exp\left(-\eta\frac{(1-2\nu)K}{2(1-\nu)}\xi\right)$, который определяет затухание решения на фронте с ростом времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новацкий В.* Динамика сооружений. М.,1963.

2. *Бажанова Н. С., Коссович Л. Ю., Сухоловская М. С.* Нестационарные волны в вязкоупругих оболочках: модель Максвелла // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. 2000. № 1. С. 17 – 24.

УДК 539.3

В. Л. Березин, Ю. П. Гуляев

ПРОДОЛЬНЫЙ УДАР ТОЧЕЧНОЙ МАССЫ ПО СОСТАВНОМУ СТЕРЖНЮ

В отличии от работ [1, 2], посвященных задаче нахождения спектра собственных частот колебаний сосредоточенных масс, в данной статье развит метод расчета скоростей и деформаций в любой точке составного стержня на основе интерференции прямых и обратных волн.

Имеется N-слойный круглый стержень диаметром D, находящийся в состоянии покоя. I-й слой этого стержня ($v = 1,2,3$) выполнен из упругого материала, имеющего плотность ρ_I и модуль Юнга E_I, в котором возмущения распространяются со скоростью $a_I = \sqrt{E_I/\rho_I}$. Толщина I-го слоя равна h_I. Эти слои могут быть выполнены из трех различных материалов: «а» - стекло , «б» - мягкий полимер, «в» - жесткий полимер. В момент времени $t = 0$ левый конец стержня взаимодействует с точечной массой m_0, движущейся со скоростью v_0, направленной вдоль оси стержня.

Решение данной задачи можно представить как суперпозицию решения более простых задач: задачи о прохождении импульса, распространяющегося вправо через границу разрыва материальных свойств стержня, задачи о прохождении импульса, распространяющегося влево через границу разрыва материальных свойств стержня, задачи об отражении импульса, распространяющегося влево от границы контакта с точечной массой.

Для первой задачи, в которой рассматривается прохождение волной, бегущей вправо, границы разрыва материальных свойств стержня, имеем следующие соотношения для напряжения и скорости:

$$\sigma_x = (1 - R)\cdot \tilde{\sigma}_x, v = (1 + R)\cdot \tilde{v}, \tag{1}$$

где $R = \dfrac{1-K}{1+K}$ - коэффициент отражения, $K = \dfrac{E_2}{E_1}\dfrac{a_1}{a_2}$, $\tilde{\sigma}_x$ и $\tilde{v}$ - напряжение и скорость в падающей волне, σ_x и v - напряжение и скорость в прошедшей волне.

Для второй задачи, в которой рассматривается прохождение волной, бегущей влево, границы разрыва материальных свойств стержня, легко получить следующие соотношения для напряжения и скорости:

$$\sigma_x = (1+R)\cdot\tilde{\sigma}_x, v = (1-R)\cdot\tilde{v}\,. \qquad (2)$$

В третьей задаче рассмотрим прохождение волной, бегущей влево, левой границы многослойного стержня, на которой имеется точечная масса m, имеющая скорость v_0.

Пусть бежит обратная волна $\tilde{u}_1 = G(a_1t + x)$. В стержне появляется отраженная волна $\breve{u}_1 = g(a_1t - x)$, а их линейная суперпозиция $u_1 = \breve{u}_1 + \tilde{u}_1$ дает результирующее движение.

Так как на левом конце имеется сосредоточенная масса, то уравнение ее движения можно записать в виде

$$y'(a_1t) + \alpha y(a_1t) = -\left(Y'(a_1t) - \alpha Y(a_1t)\right), \qquad (3)$$

$$y = g',\ Y = G',\ \alpha = \frac{E_1E_p}{m_0a_1},$$

где F_p - площадь поперечного сечения стержня.

При этом предполагается, что скорость сосредоточенной массы есть невозрастающая функция по времени.

Решение дифференциального уравнения (3) вместе с контактными условиями было получено в [3] конечно-разностным методом.

В результате преобразований получим следующие соотношения для напряжения и скорости:

$$\sigma_x = -Z_0 + (1+R_0)\cdot\tilde{\sigma}_x, \quad v = Z_0 + (1-R_0)\cdot\tilde{v}\,, \qquad (4)$$

$$Z_0 = v_0\exp(-\alpha t), \quad R_0 = 1 - \frac{2\alpha\exp(-\alpha t)}{Y(a_1t)}\int_0^t Y(a_1T)\exp(\alpha T)dT\,.$$

На основании полученных формул (1), (2), (4) произведен расчет напряжённо-деформированного состояния в составном стержне, состоящем из материалов типа «а» и «б», для двух вариантов расположения слоев (рис. 1).

а) $h = (8 \quad 0.48 \quad 6 \quad 0.48 \quad 3)$мм б) $h = (3 \quad 0.48 \quad 8 \quad 0.48 \quad 6)$мм

Рис.1

На рис. 2 изображено изменение максимального значения растягивающего напряжения $\overline{\sigma} = \sigma_x / E_1$ в последнем слое для обоих вариантов структуры стержня.

На рис. 3 изображено изменение максимального значения сжимающего напряжения $\overline{\sigma}$ в последнем слое для обоих вариантов структуры стержня.

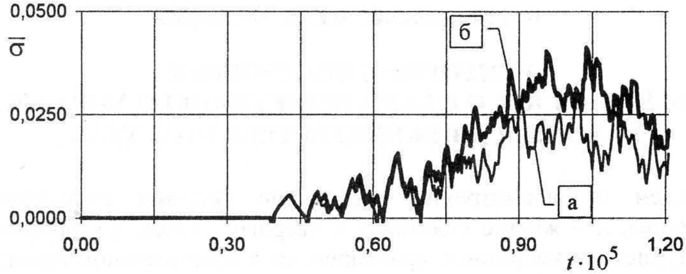


Рис. 2

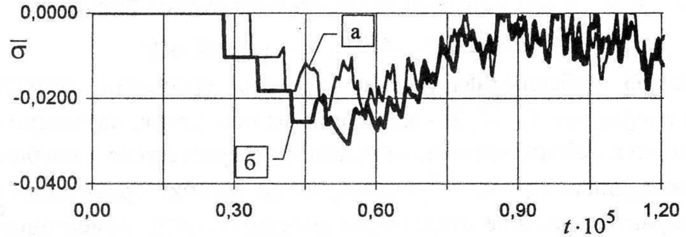


Рис. 3

Из сравнения кривых на рис.2 видно, что уменьшение толщины лобового слоя приводит к увеличению максимального (по времени и среди всех точек слоя, для которых производились вычисления) значения растягивающего напряжения на 33%.

Из сравнения кривых на рис.3 видно, что уменьшение толщины лобового слоя приводит к увеличению максимального (по времени и среди всех точек слоя, для которых производились вычисления) значения сжимающего напряжения на 24%, причем это напряжение в 2.3 раза превышает допустимое напряжение на сжатие.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лазарян В. А., Манашкин Л. А.* Собственные продольные колебания стержней с сосредоточенными массами // Прикладная механика. 1970. Т. 6, вып. 8.

2. Механика систем оболочка-жидкость-нагретый газ / Под ред. Н. А. Кильчевского. Киев: Наукова думка, 1970.

3. *Гуляев Ю. П., Кравчук А. С.* Схема расчета процесса распространения упругих волн в составном стержне // Прикладная механика. 1972. Т. 8, вып. 8.

УДК 531.38

В. Г. Бирюков, Ю. Н. Челноков

ВЕКТОРНОЕ ПОСТРОЕНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКОГО СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ УГЛОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ ТВЕРДОГО ТЕЛА*

Введем в рассмотрение следующие системы координат: ξ - инерциальная, X - жестко связанная с твердым телом, Z - опорная (программная) система координат, вращающаяся в инерциальном пространстве с программной угловой скоростью $\overline{\omega}^0 = \overline{\omega}^0(t)$. Взаимная ориентация введенных систем координат задается нормированными кватернионами поворотов $\overline{\lambda}, \overline{\lambda}^0, \overline{\nu}, \overline{\nu}^*$, в соответствии со следующей схемой поворотов:

$$\xi \xrightarrow{\overline{\lambda}^0,\,\overline{\omega}^0} Z \xrightarrow{\overline{\nu},\,\overline{\nu}^*} X \sim \xi \xrightarrow{\overline{\lambda},\,\overline{\omega}} X\,.$$

Здесь $\overline{\omega}$ - абсолютная угловая скорость вращения твердого тела (системы координат X); $\overline{\lambda}^0, \overline{\lambda}$ - кватернионы поворотов, характеризующие программную и действительную ориентации твердого тела в инерциальной системе координат ξ; $\overline{\nu}$, $\overline{\nu}^*$ - кватернионы ошибки ориентации твердого тела, характеризующие отклонение действительной ориентации твердого тела от его программной ориентации.

Задача заключается в построении вектора требуемой абсолютной угловой скорости, рассматриваемого в качестве управления, при сообщении которого твердому телу оно переходит асимптотически устойчивым образом из любого, заранее не заданного начального углового положения $\overline{\lambda}(t_0)$ на любую выбранную программную траекторию $\overline{\lambda}^0 = \overline{\lambda}^0(t)$ и в дальнейшем совершает асимптотически устойчивое движение по этой траектории. При этом переходный процесс должен иметь желаемые качественные и количественные характеристики.

Построение требуемого вектора абсолютной угловой скорости (вектора управления) выполняется либо в связанной, либо в инерциальной системах координат по следующим формулам:

$$\overline{\omega}_x = \overline{\omega}_z^0(t) + \delta\overline{\omega}_x\,, \qquad \overline{\omega}_\xi = \overline{\omega}_\xi^0(t) + \Delta\overline{\omega}_\xi\,.$$

На основе кватернионных кинематических дифференциальных уравнений углового движения твердого тела и опорной системы координат [1], а также соотношений для кватернионов ошибок ориентации строятся дифференциальные кватернионные кинематические уравнения возмущенного

---

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 99-01-00192, и научной программы “Университеты России – фундаментальные исследования”, проект № 015.04.01.50.

углового движения твердого тела в инерциальной и связанной системах координат:

$$2\dot{\overline{\nu}} = \delta\overline{\omega}_\xi \circ \overline{\nu}, \qquad \delta\overline{\omega} = \overline{\lambda} \circ \overline{\omega}_x \circ \tilde{\overline{\lambda}},$$

$$2\dot{\overline{\nu}}^* = \overline{\nu}^* \circ \Delta\overline{\omega}_x, \qquad \Delta\overline{\omega}_x = \tilde{\overline{\lambda}} \circ \Delta\overline{\omega}_\xi \circ \overline{\lambda},$$

где $\circ$ - кватернионное произведение, точка обозначает дифференцирование по времени, а волна - сопряженный кватернион.

Стабилизирующие управления строятся по принципу обратной связи такими, чтобы нелинейные нестационарные дифференциальные уравнения возмущенного движения твердого тела, замкнутые этими управлениями, принимали вид линейных стационарных интегродифференциальных уравнений:

$$\dot{\overline{\nu}}_\nu + A\overline{\nu}_\nu + B\int_{t_0}^{t}\overline{\nu}_\nu dt = -\overline{d},$$

$$\dot{\overline{\nu}}_\nu^* + A^*\overline{\nu}_\nu^* + B^*\int_{t_0}^{t}\overline{\nu}_\nu^* dt = -\overline{d}^*,$$

где A, B, A^*, B^* - постоянные квадратные матрицы размерами 3×3, определяемые исходя из желаемых качественных и количественных характеристик переходного процесса; $\overline{d}$ и $\overline{d}^*$ - постоянные векторы, определяемые из начальных условий движения.

Законы управления, построенные на основе кватернионных кинематических дифференциальных уравнений возмущенного углового движения, имеют следующий вид:

$$\delta\overline{\omega}_\xi = -\frac{1}{\nu_0}\Big(2a_0\overline{\nu}_\nu + [\overline{a}_\nu \times \overline{\nu}_\nu] + \overline{\nu} \circ [\overline{a}_\nu \times \overline{\nu}_\nu] \circ \tilde{\overline{\nu}} + b_0\int_{t_0}^{t}\overline{\nu}_\nu dt +$$

$$+\left[\overline{b}_\nu \times \int_{t_0}^{t}\overline{\nu}_\nu dt\right] + b_0\overline{\nu} \circ \left[\int_{t_0}^{t}\overline{\nu}_\nu dt\right] \circ \tilde{\overline{\nu}} + \overline{\nu} \circ \left[\overline{b}_\nu \times \int_{t_0}^{t}\overline{\nu}_\nu dt\right] \circ \tilde{\overline{\nu}} + \overline{\nu} \circ \overline{d} \circ \tilde{\overline{\nu}} + \overline{d}\Big),$$

$$\Delta\overline{\omega}_x = -\frac{1}{\nu_0^*}\Big(2a_0^*\overline{\nu}_\nu^* + [\overline{\nu}_\nu^* \times \overline{a}_\nu^*] + \tilde{\overline{\nu}}^* \circ [\overline{\nu}_\nu^* \times \overline{a}_\nu] \circ \overline{\nu}^* + b_0^*\int_{t_0}^{t}\overline{\nu}_\nu^* dt + \left[\int_{t_0}^{t}\overline{\nu}_\nu^* dt \times \overline{b}_\nu^*\right] +$$

$$+\tilde{\overline{\nu}}^* \circ \left[\int_{t_0}^{t}\overline{\nu}_\nu^* dt\right] \circ \overline{\nu}^* + \tilde{\overline{\nu}}^* \circ \left[\int_{t_0}^{t}\overline{\nu}_\nu^* dt \times \overline{b}_\nu^*\right] \circ \overline{\nu}^* + \tilde{\overline{\nu}}^* \circ \overline{d}^* \circ \overline{\nu}^* + \overline{d}^*\Big).$$

Построенные законы управления проще известных законов [1], однако содержат особую точку, когда угол эйлерова поворота равен 180°. В построенных законах управления, в отличие от известных законов [2], аналитически строго определяются коэффициенты усиления нелинейных обратных связей, исходя из требуемых качественных и количественных характеристик переходного процесса.

Для случая законов управления со скалярными коэффициентами усиления нелинейных обратных связей можно построить аналитические общие решения дифференциальных кинематических уравнений возмущенного углового движения твердого тела. А также можно исследовать устойчивость полученных решений и дать рекомендации по выбору коэффициентов усиления нелинейных обратных связей, исходя из требований к типу устойчивости переходного процесса.

Законы управления ориентацией твердого тела, использующие в качестве кинематического параметра вектор конечного поворота, строятся аналогично законам управления, описанным выше, и имеют следующий вид:

$$\delta\overline{\omega}_\xi = -\frac{2}{1+\left|\overline{\theta}_\xi\right|^2}\left\{a_0\overline{\theta}_\xi + \left(1+\overline{\theta}_\xi\right)\times\left(\left[\overline{a}_v\times\overline{\theta}_\xi\right] + b_0\int\limits_{t_0}^{t}\overline{\theta}_\xi dt + \left[\overline{b}_v\times\int\limits_{t_0}^{t}\overline{\theta}_\xi dt\right] + \overline{d}\right)\right\},$$

$$\Delta\overline{\omega}_x = -\frac{2}{1+\left|\overline{\theta}_x\right|^2}\left\{a_0^*\overline{\theta}_x + \left(1-\overline{\theta}_x\right)\times\left(\left[\overline{a}_v^*\times\overline{\theta}_x\right] + b_0^*\int\limits_{t_0}^{t}\overline{\theta}_x dt + \left[\overline{b}_v^*\times\int\limits_{t_0}^{t}\overline{\theta}_x dt\right] + \overline{d}^*\right)\right\}.$$

Исследование таких законов управления проводится аналогично исследованию законов управления, использующих кватернион ошибки ориентации в качестве кинематического параметра.

Исследуемая задача имеет приложения в инерциальных системах управления угловым движением летательных аппаратов (в частности, при построении так называемых интегрированных систем управления), в системах, реализующих принцип управления по абсолютному угловому положению выходного звена робота-манипулятора, в задачах оживления (анимации) пространственных образов на экране ЭВМ и в системах управления ориентацией космических аппаратов, использующих управляющие маховики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Плотников П. К., Сергеев А. Н., Челноков Ю. Н.* Кинематическая задача управления ориентацией твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 5. С. 9 - 18.

2. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973.

УДК 539.3

Л. Ф. Вахлаева, Т. В. Вахлаева, В. О. Назарьянц

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ВТОРОГО И ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКОВ ТОЧНОСТИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

При численном решении начально-краевых задач для нестационарных уравнений возникает проблема выбора того или иного порядка аппроксимации разностной схемы. Чем выше порядок аппроксимации по пространственным координатам, тем меньше порядок системы разностных уравнений, которые необходимо решать на каждом временном слое, что особенно важно при решении многомерных задач. Рассматриваются два подхода: разностный метод (неявные и явные схемы) и метод прямых в сочетании с методом Рунге-Кутта 4-го порядка, при этом используются разностные аппроксимации по пространственным координатам 2-го и 4-го порядков. Исследования проводятся на модельных задачах, имеющих точные решения, для следующих уравнений: одномерного и двумерного волновых уравнений, уравнения колебания пластинки. В результате проведенных вычислительных экспериментов найден оптимальный экономичный алгоритм - метод Рунге-Кутта четвертого порядка с аппроксимацией повышенной точности по пространственным координатам.

1. Начально-краевая задача для одномерного волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x,t),\ 0 < x < 1, 0 < t \le T, \tag{1}$$

$$U(x,0) = U_0(x), \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = U_1(x), 0 < x < 1, \tag{2}$$

$$U(0,t) = \mu_1(t), U(1,t) = \mu_2(t), 0 \le t \le T. \tag{3}$$

Введем сетку $\varpi_{h\tau} = \{x_i = ih, i = \overline{0,N}, h = 1/N; t_j = j\tau, j = \overline{0,M}, \tau = T/M\}$ и сеточную функцию $y_i^j = y(x_i,t_j)$. Задаче (1) - (3) сопоставим разностную схему с весами

$$y_{\bar{t}t} = \Lambda y^{(\sigma)} + \varphi, (x,t)\in\omega_{h\tau}, \tag{4}$$

$$y_i^0 = U_0(x_i), i = \overline{0,N},$$

$$\frac{y_i^1 - y_i^0}{\tau} = U_1(x_i) + \frac{\tau}{2}(U_0''(x_i) + f(x_i,0)) + O(\tau^2), i = \overline{1,N-1}, \tag{5}$$

$$y_0^j = \mu_1(t_j), y_N^j = \mu_2(t_j), \tag{6}$$

где $y^{(\sigma)} = \sigma y^{j+1} + (1-2\sigma)y^j + \sigma y^{j-1}, \sigma = const > 0,$

$$y_{\bar{t}t} = (y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1})/\tau^2,\ \Lambda y_i = y_{\bar{x}x} = (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1})/h^2.$$

Вводя функцию погрешности решения $z = y - U$, получим разностное уравнение относительно погрешности z: $z_{\bar{t}t} = \Lambda z^{(\sigma)} + \psi, (x,t) \in \omega_{h\tau}$, где $\psi = \varphi + \Lambda U^{(\sigma)} - U_{\bar{t}t}$ является погрешностью аппроксимации разностной схемы (4) на решении $U(x,t)$ исходной задачи (1). Если схема аппроксимирует исходную задачу и устойчива, то она сходится, и порядок точности схемы совпадает с порядком аппроксимации [1]. При $\sigma = 0$ схема (4) – явная, она условно устойчива при $\tau < h$, погрешность аппроксимации $\psi = O(\tau^2 + h^2)$, если $\varphi = f(x_i,t_j)$. При $\sigma \geq 1/4$ схема неявная, безусловно устойчива, погрешность аппроксимации $\psi = O(h^2 + \tau^2)$, если $\varphi = f(x_i,t_j)$. При $\sigma = \sigma_* = \dfrac{1}{4(1-\varepsilon)} - \dfrac{h^2}{12\tau^2}$ и $\varphi = f(x_i,t_j) + \dfrac{h^2}{12}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ погрешность аппроксимации $\psi = O(h^4 + \tau^2)$, это схема повышенной точности. Для определения y^{j+1} получаем из (4) - (6) разностную краевую задачу, которая решается методом прогонки [2].

Применим теперь к задаче (1) - (3) метод прямых

$$\begin{aligned} &\frac{dy_i}{dt} = P_i,\ 1 \leq i \leq N-1, \\ &\frac{dP_i}{dt} = y_{\bar{x}x,i} + \varphi(x_i,t),\ x_i \in \omega_h. \end{aligned} \tag{7}$$

Порядок системы дифференциально-разностных уравнений (7) равен $2(N-1)$. Краевые и начальные условия задаются точно.

$$\begin{aligned} &y_i(0) = U_0(x_i), \\ &P_i(0) = U_1(x_i),\ 1 \leq i \leq N-1, \end{aligned} \tag{8}$$

$$y_0^j = \mu_1(t_j),\ y_N^j = \mu_2(t_j). \tag{9}$$

Решая систему дифференциально-разностных уравнений (7) - (9) методом Рунге-Кутта 4-го порядка, получим окончательно погрешность аппроксимации $\psi = O(\tau^4 + h^2)$, если $\varphi = f(x,t)$; $\psi = O(\tau^4 + h^4)$, если $\varphi = f(x_i,t_j) + \dfrac{h^2}{12}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Метод Рунге-Кутта является явным и одношаговым. Устойчивость исследуем на нескольких сгущающихся сетках $(\tau, \tau/2, \tau/4, \ldots)$. Сравнение метода прямых и разностного метода, проведенное на модельных задачах, показало, что наиболее экономичным является метод прямых с погрешностью аппроксимации $\psi = O(\tau^4 + h^4)$, т. е.

метод Рунге-Кутта 4-го порядка с аппроксимацией четвертого порядка по переменной x.

2. Двумерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \Delta U + f(x,t), \overline{D} = \{0 \le x \le 1, 0 < t \le T\} = D + \Gamma. \tag{10}$$

Краевые и начальные условия аналогичны случаю одномерного волнового уравнения. По аналогии с одномерным волновым уравнением поставим в соответствие задаче (10) разностную схему с весами. Исследуем погрешность аппроксимации $\psi = (\Lambda_1 + \Lambda_2)U^{(\sigma)} - U_{\bar{t}t} + \varphi$ схемы, устойчивость и сходимость. Для решения неявных разностных уравнений используем метод одномерных прогонок по переменным x_α $(\alpha = 1, 2)$. Сравнение метода прямых с разностным методом на модельных задачах показало, что наиболее экономичным является метод прямых с аппроксимацией $\psi = O(h^4 + \tau^4)$.

3. Начально-краевая задача для уравнения колебания пластинки

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \nabla^4 U = q(x,t), \qquad \{0 < x = (x_1, x_2) < 1, 0 < t \le T\} = \overline{D} = D + \Gamma, \tag{11}$$

$$U(x,0) = U_0(x), \quad \frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = U_1(x). \tag{12}$$

Рассмотрим два типа краевых условий:

$$U\big|_\Gamma = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial n^2}\right|_\Gamma = 0, \tag{13}$$

$$U\big|_\Gamma = \left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_\Gamma = 0. \tag{14}$$

Для решения задачи (11) - (14) применим явный разностный метод с аппроксимацией $O(h^2 + \tau^2)$ и $O(h^4 + \tau^2)$ и метод прямых с погрешностью $O(h^2 + \tau^4)$ и $O(h^4 + \tau^4)$. Выбор шага τ в явном разностном методе и в методе Рунге-Кутта осуществляем на последовательности сгущающихся сеток. Исследования на модельных задачах показали, что оптимальным экономичным алгоритмом является метод Рунге-Кутта с погрешностью $O(h^4 + \tau^4)$, так как он позволяет брать более крупную сетку по сравнению с $O(h^2)$, что приводит к значительному уменьшению порядка системы на каждом слое t_k.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978.

2. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.

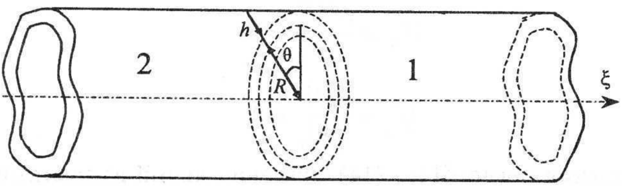
УДК 539.3

М. В. Вильде

СВОБОДНЫЕ ИНТЕРФЕЙСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРОДОЛЬНО-НЕОДНОРОДНОЙ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Данная статья посвящена обобщению результатов работы [1], в которой рассматривались локализованные около торца свободные колебания полубесконечной цилиндрической оболочки, на случай бесконечной продольно-неоднородной оболочки. Собственные формы колебаний такой оболочки характеризуются локализацией около линии раздела свойств материала, что и обусловливает применение термина «интерфейсные колебания».

Рассмотрим собственные колебания продольно-неоднородной бесконечной круговой цилиндрической оболочки, составленной из двух однородных полубесконечных оболочек с различными свойствами материала. Срединную поверхность оболочки отнесем к координатам ξ и θ, таким, что ее первая квадратичная форма имеет вид $R^2\left(d\xi^2 + d\theta^2\right)$, ξ $(-\infty < \xi < \infty)$ – координата по образующей, θ $(0 \le \theta < 2\pi)$ – окружная координата, R – радиус оболочки, параллель $\xi = 0$ соответствует границе раздела свойств материала (см. рисунок).



Будем отмечать индексом «1» величины, относящиеся к правой оболочке $(0 \le \xi < \infty)$, индексом «2» – величины, относящиеся к левой оболочке $(-\infty < \xi \le 0)$. В частности, свойства материала характеризуются модулями Юнга $E^{(k)}$, коэффициентами Пуассона $\nu^{(k)}$, плотностями $\rho^{(k)}$ $(k = 1,2)$. Введем в рассмотрение безразмерные константы $\gamma^{(k)} = E^{(1)}/E^{(k)}$ и $q^{(k)} = E^{(1)}\rho^{(k)}/E^{(k)}\rho^{(1)}$. Для описания колебаний оболочки будем применять теорию Кирхгофа–Лява. Записывая уравнения этой теории в перемещениях и отделяя окружную переменную θ, мы получим однородную краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. При $\xi = 0$ ставятся условия полного контакта, на бесконечности – условия затухания либо условия излучения. Для поставленной задачи можно построить точное частотное уравнение, но из-за громоздкости оно мало пригодно для исследования.

Применим асимптотические методы, связанные с наличием в задаче малого параметра тонкостенности $\eta = h/R$. Представим число волн в окружном направлении n и безразмерный частотный параметр $\lambda = \rho^{(1)}\omega^2 R^2 / E^{(1)}$ как степени малого параметра η:

$$n = \eta^{-q}, \quad \lambda = \eta^{-2a}, \tag{1}$$

где величины q и a называются показателем изменяемости и показателем динамичности соответственно. Используя результаты работы [1], мы выделяем три типа рассматриваемых колебаний:

1) *изгибные колебания* $(a = 2q - 1,\ 1/2 \le q < 1)$,

2) *сверхнизкочастотные колебания* $(a = 2q - 1,\ 0 \le q < 1/2)$,

3) *тангенциальные колебания* $(a = q,\ q \ge 0)$.

Далее для каждого из этих трех типов колебаний строится процесс асимптотического упрощения уравнений теории Кирхгофа–Лява.

Для изгибных колебаний этот процесс приводит к уравнению теории Кирхгофа изгиба пластин, и в первом приближении частота может быть определена из краевой задачи, формально совпадающей с задачей об изгибных свободных интерфейсных колебаниях продольно-неоднородной пластины-полосы с перекрестными граничными условиями на боковых сторонах. Собственная форма последних представляет собой стоячую изгибную волну типа Стоунли [2]. Приближенное частотное уравнение может быть сведено к дисперсионному уравнению для изгибной волны типа Стоунли, условия существования решения которого изучены в работе [2]. В таблице найденные из приближенного частотного уравнения асимптотические оценки Λ_1^{as} сопоставляются с точными собственными значениями Λ_1^{ex}. В последнем столбце приведена относительная погрешность Λ_1^{as} по отношению к Λ_1^{ex}: $\varepsilon = \left|\Lambda_1^{\mathrm{as}} - \Lambda_1^{\mathrm{ex}}\right| \cdot 100\% / \Lambda_1^{\mathrm{ex}}$.

n	Λ_1^{ex}	Λ_1^{as}	ε
26	17.991575	18.073925	0.458
27	20.930051	21.019101	0.425
28	24.214313	24.310350	0.397

Параметры задачи: $h = 0.01$, $R = 1$, $\nu^{(1)} = 0.4$, $\nu^{(2)} = 0.3$, $E^{(1)}/E^{(2)} = 6$, $\rho^{(1)}/\rho^{(2)} = 6.5$.

Для сверхнизкочастотных колебаний, которые существуют, только если $q^{(1)}\nu_2^{(1)} = q^{(2)}\nu_2^{(2)}$ $(\nu_2^{(k)} = 1 - (\nu^{(k)})^2)$, асимптотическая оценка собственной частоты имеет вид

$$\Lambda_1^{as} = \frac{\eta^2}{3\nu_2^{(1)}q^{(1)}}\frac{n^2\left(n^2-1\right)^2}{n^2+1}\left(1-\left(2D^2\right)^{\frac{4}{3}}\left(\frac{\eta^2}{3\nu_2^{(1)}q^{(1)}}n^2\left(n^2-1\right)\right)^{\frac{2}{3}}\right), \qquad (2)$$

где $D = \dfrac{\left(\gamma^{(1)}q^{(2)}\nu^{(2)} - \gamma^{(2)}q^{(1)}\nu^{(1)}\right)\left(\left(q^{(1)}\right)^{\frac{1}{4}}\gamma^{(2)} + \left(q^{(2)}\right)^{\frac{1}{4}}\gamma^{(1)}\right)}{\left(\left(q^{(1)}\right)^{\frac{1}{2}}\gamma^{(2)} + \left(q^{(2)}\right)^{\frac{1}{2}}\gamma^{(1)}\right)^2 + 2\left(q^{(1)}q^{(2)}\right)^{\frac{1}{4}}\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}\left(\left(q^{(1)}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(q^{(2)}\right)^{\frac{1}{2}}\right)}$.

Для тангенциальных колебаний процесс асимптотического упрощения уравнений теории Кирхгофа–Лява приводит к уравнениям планарных колебаний пластинки. Частота в первом приближении может быть определена из краевой задачи, формально совпадающей с задачей о планарных свободных интерфейсных колебаниях продольно-неоднородной пластины-полосы с перекрестными граничными условиями на боковых сторонах, которые связаны с планарной волной типа Стоунли, являющейся обобщением классической волны Стоунли [3] на случай обобщенного плоского напряженного состояния. Собственные частоты тангенциальных интерфейсных колебаний оболочки имеют малую мнимую часть ($\operatorname{Im}\Lambda_2 \sim \eta^{1/2+3q/2}\operatorname{Re}\Lambda_2$), появление которой связано с существованием изгибной распространяющейся волны, вносящей в систему радиационное демпфирование. Оценка этой мнимой поправки может быть получена с помощью процедуры, аналогичной описанной в [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Wildĕ M. V.* Free localized vibrations of a semi-infinite cylindrical shell // J. Acoust. Soc. Am. 2000. Vol. 107. № 3. P. 1383 - 1393.

2. *Зильберглейт А. С., Суслова И. Б.* Контактные волны изгиба в тонких пластинках // Акуст. журн. 1983. Т. 29. С. 186-191.

3. *Stoneley R.* The elastic waves at the interface of separation of two solids // Proc. Roy. Soc. Lond. A. 1924. Vol. 106. № 732. P. 416 - 429.

УДК 539.3+350.34.013

В. В. Гурьянов, В. М. Гурьянов

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ОСНОВЕ УСРЕДНЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Предлагается численный метод, основанный на усреднении волнового уравнения по пространственным переменным и покрытии его открытой связной области определения $\boldsymbol{D}$ областями C_i $(i = 1,2..n)$. Граница $\boldsymbol{S}$ области $\boldsymbol{D}$ - кусочно-гладкая. Для областей C_i формируется система обыкновенных дифференциальных уравнений.

В трехмерном вещественном пространстве (R^3) введем декартову систему координат $\{x,y,z\}$ и регулярную сетку узлов $\{x_i,y_j,z_k\}$ $(i,j,k = 0,\pm1,\pm2,...)$ с постоянным шагом $h > 0$ такую, что $\xi_{i+1} = \xi_i + h$, $(\xi = x,y,z)$.

Отнесем к введенной системе координат область $\boldsymbol{D}$.

В качестве C_i возьмем куб $(C_{x,y,z})$ с центром в точке (x,y,z) и ребром длиной $2H = 2nh$ с n - положительным целым числом. Ребра куба параллельны осям координат. Назовем $C_{x,y,z}$ основным элементом покрытия. Если $C_{x,y,z} \cap \boldsymbol{S} = \varnothing$ и $(x,y,z) \in \boldsymbol{D}$, то такой основной элемент будем называть внутренним и обозначать $D_{x,y,z}$. Если $C_{x,y,z} \cap \boldsymbol{S} \neq \varnothing$ и $(x,y,z) \in \boldsymbol{D}$, то такой основной элемент будем называть граничным и обозначать $S_{x,y,z}$. Таким образом, $S_{x,y,z} = C_{x,y,z} \cap (\boldsymbol{S} \cup \boldsymbol{D})$.

На введенных элементах определим среднее значение $F(x,y,z)$ некоторой функции $f(x,y,z)$ формулой $F(x,y,z) = \dfrac{1}{|G|}\int\limits_G f(x,y,z)d\Omega$, в которой $|G|$ - объем области G $(G = D_{x,y,z}, S_{x,y,z})$.

Все регулярные узлы сетки (x_i,y_j,z_k), расположенные внутри области $\boldsymbol{D}$, будем считать центрами основных элементов C_{x_i,y_j,z_k}. Тогда из внутренних и граничных элементов образуется покрытие замыкания области $\boldsymbol{D}$, которое обозначим $\Pi_{H,n}$. Таким образом, $\Pi_{H,n} = D_{x_i,y_j,z_k} \cup S_{x_i,y_j,z_k}$. Такое покрытие освобождает от ручной работы по введению локальной системы координат в окрестности сложной геометрии границ, стыковок областей усреднения и т. п., как это делается в [1].

От волнового уравнения

$$u_{tt} - c^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0\,, \tag{1}$$

где $c = \text{const}$, перейдем к системе уравнений первого порядка, введя переменные $v = u_t$, $\overline{p} = c\nabla u = p_1\overline{i} + p_2\overline{j}$. Здесь $\overline{i}, \overline{j}$ - орты системы координат $x0y$. Систему уравнений для $v, \overline{p}$ запишем в окрестности узлов (x_i, y_j) покрытия $\Pi_{H,n}$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - c\nabla \cdot \overline{p} = 0\,, \quad \frac{\partial \overline{p}}{\partial t} - c\nabla v = 0\,. \tag{2}$$

Усредним правые и левые части уравнений (2) в соответствии с формулами усреднения покрытия $\Pi_{H,n}$. Используя теорему Остроградского-Гаусса, будем иметь

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{|G|}\int\limits_G v(x,y,t)d\Omega - \frac{c}{|G|}\int\limits_G \nabla \cdot \overline{p} d\Omega = \frac{d}{dt}\frac{1}{|G|}\int\limits_G v d\Omega - \frac{c}{|G|}\int\limits_{\partial G} \overline{n} \cdot \overline{p} dg = 0\,, \\
\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{|G|}\int\limits_G \overline{p}(x,y,t)d\Omega - \frac{c}{|G|}\int\limits_G \nabla v d\Omega = \frac{d}{dt}\frac{1}{|G|}\int\limits_G \overline{p} d\Omega - \frac{c}{|G|}\int\limits_{\partial G} \overline{n} v dg = 0\,.
\end{gathered} \tag{3}$$

Учитывая, что в результате операции усреднения интегралы в (3) превращаются в функции времени (t), будем иметь систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{1}{|G_{i,j}|}\int\limits_{G_{i,j}} v d\Omega = \frac{c}{|G_{i,j}|}\int\limits_{\partial G_{i,j}} \overline{n} \cdot \overline{p} dg \\
\frac{d}{dt}\frac{1}{|G_{i,j}|}\overline{p} d\Omega = \frac{c}{|G_{i,j}|}\int\limits_{\partial G_{i,j}} \overline{n} v dg
\end{aligned}\right\} \forall (x_i, y_j) \in D\,. \tag{4}$$

Рассмотрим решение задачи Коши для уравнения (2) предложенным методом. Будем считать, что данные Коши

$$\overline{p}(x,y,t_0) = \overline{p}_0(x,y)\,, \quad v(x,y,t_0) = v_0(x,y) \tag{5}$$

- финитные непрерывные функции, носителем которых является область $\boldsymbol{D}$. Вне этой области и на ее границе $\overline{p}_0(x,y) = v_0(x,y) \equiv 0 \quad \forall (x,y) \notin \boldsymbol{D}$.

Для расчетов выберем в покрытии $\Pi_{H,n}$ области $\boldsymbol{D}$ прямоугольник Q, стороны которого параллельны координатным осям, проходят через узлы регулярной сетки покрытия $\Pi_{H,n}$ и удалены от соответствующего отрезка границы $\boldsymbol{S}$ на расстояние $d >> cT + H$ (c - скорость распространения волны, T - максимальное расчетное время изучаемого интервала времени распространения волн). Все элементы покрытия Q в рассматриваемом случае внутренние, и уравнения (4) приобретают вид нормированных интегральных законов сохранения

$$\frac{d}{dt}V_{i,j}=\frac{d}{dt}\frac{1}{4H^2}\int\limits_{x_i-H}^{x_i+H}\int\limits_{y_j-H}^{y_j+H} v\,dxdy=\frac{c}{4H^2}\times$$

$$\times\left[\int\limits_{x_i-H}^{x_i+H}(p_2(x,y_j+H)-p_2(x,y_j-H))dx+\int\limits_{y_j-H}^{y_j+H}(p_1(x_i+H,y)-p_1(x_i-H,y))dy\right]$$

$$\forall(x_i,y_j)\in Q \qquad (6)$$

$$\frac{d}{dt}\overline{P}_{i,j}=\frac{d}{dt}\frac{1}{4H^2}\int\limits_{x_i-H}^{x_i+H}\int\limits_{y_j-H}^{y_j+H}\overline{p}dxdy=\frac{c}{4H^2}\times$$

$$\times\left[\overline{j}\cdot\int\limits_{x_i-H}^{x_i+H}(v(x,y_j+H)-v(x,y_j-H))dx+\overline{i}\cdot\int\limits_{y_j-H}^{y_j+H}(v(x_i+H,y)-v(x_i-H,y))dy\right]$$

Равенства (6), как законы сохранения, являются точными. В них отсутствуют производные по переменным x, y. Приближение заключается в том, что в дальнейшем интегралы заменяются численными квадратурами по значениям подынтегральных функций в узлах регулярной сетки покрытия $\Pi_{H,n}$ и не делается различия между средними значениями $V_{i,j}, \overline{P}_{i,j}$ и усредняемым значениями $v_{i,j}, \overline{p}_{i,j}$.

Решение задачи Коши для системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dy}{dt}=Ay,\ y(t_0)=y_0, \qquad (7)$$

где $y=y(t)$ - n-мерный вектор, A - матрица $n\times n$, осуществим по схеме эквивалентной схеме метода итераций Пикара и дающей тот же самый результат. Схема имеет вид

$$y_{л+1}=y_0+\frac{t-t_0}{s-k}Ay_k,.\quad (k=0,1,...s-1). \qquad (8)$$

Решение получается в виде ряда $y\approx y_s=y_0+\sum\limits_{k=1}^{s}\frac{(t-t_0)^k}{k!}A^k y_0$.

Получение решения системы (7) ведется по шагам $l=t_k-t_{k-1}=t-t_0$ $(k=1,2,...)$, как обычно. Необходимо соблюдать условие $c(t-t_0)/H\le 1$ [1]. Параметр s берется обычно равным 4. После получения решения на нескольких шагах продолжать его можно, используя многошаговые методы, например, Адамса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Численное решение многомерных задач газовой динамики / Под ред. С. К. Годунова. М.: Наука, 1976.

УДК 539.3

В. И. Копнина

ИЗГИБ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПЛИТЫ

Методом комплексных потенциалов С. Г. Лехницкого решается задача изгиба кусочно-однородной плиты, состоящей из трех ($\nu = 1,2,3$) вклеенных друг в друга без натяга эллиптических колец, изготовленных из разных анизотропных материалов.

Плита находится под действием изгибающих моментов интенсивности m, равномерно распределенных по ее внешнему краю, а внутренний край - свободен от внешней нагрузки.

Обозначим внешний контур ν-го кольца $L_0^{(\nu)}$, внешний - $L_1^{(\nu)}$, полуоси внешнего контура ν-го кольца $a_0^{(\nu)}, b_0^{(\nu)} = c_0^{(\nu)} a_0^{(\nu)}$, внутреннего контура - $a_1^{(\nu)}, b_1^{(\nu)} = c_1^{(\nu)} a_1^{(\nu)}$.

Задача об изгибе такой плиты приводится к отысканию комплексных потенциалов $w_j^{(\nu)}(z_j^{(\nu)})$ [1] из граничных и контактных условий [2]:

$$2\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2} a_{jn}^{(\nu)} w_j'^{(\nu)}(t_j^{(\nu)}) = f_n^{(\nu)} (\nu = 1,3;\ n = 1,2), \tag{1}$$

где $a_{j1}^{(1)} = p_j^{(1)} / \mu_j^{(1)},\ \ a_{j2}^{(1)} = q_j^{(1)},\ \ f_1^{(1)} = -my,\ \ f_2^{(1)} = -mx$ на $L_0^{(1)}$;

$a_{j1}^{(3)} = 1,\ \ a_{j2}^{(3)} = \mu_j^{(3)},\ \ f_1^{(3)} = 0,\ \ f_2^{(3)} = 0$ на $L_1^{(3)}$.

$$2\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2} \left[\beta_{jn}^{(\nu)} w_j'^{(\nu)}(t_j^{(\nu)}) - \beta_{jn}^{(\nu+1)} w_j'^{(\nu+1)}(t_j^{(\nu+1)})\right] = 0 (\nu = 1,2;\ n = \overline{1,4}), \tag{2}$$

где $\beta_{j1}^{(s)} = 1,\ \beta_{j2}^{(s)} = \mu_j^{(s)},\ \beta_{j3}^{(s)} = q_j^{(s)},\ \beta_{j4}^{(s)} = p_j^{(s)} / \mu_j^{(s)}\ (s = \overline{1,3})$ на $L_1^{(\nu)} \Big| L_0^{(\nu+1)}$.

Здесь применены такие же обозначения, как и в работе [2].

После определения функций $w_j'^{(\nu)}(z_j^{(\nu)})$ прогиб, моменты и перерезывающие силы определяются по известным формулам [1].

Искомые функции представим в виде [2]

$$w_j'^{(\nu)}(z_j^{(\nu)}) = \sum_{k=1,3}^{\infty} A_{jk}^{(\nu)} \left[\zeta_1^{(\nu)}(z_j^{(\nu)})\right]^{-k} + \sum_{k=1,3}^{\infty} C_{jk}^{(\nu)} P_{k0}^{(\nu)}(z_j^{(\nu)}), \tag{3}$$

где $A_{jk}^{(\nu)}, C_{jk}^{(\nu)}$ - искомые постоянные, определяемые из условий (1), (2);

$P_{k0}^{(\nu)}(z_j^{(\nu)})$ - полиномы Фабера в преобразованных плоскостях;

$\zeta_s^{(\nu)}(z_j^{(\nu)})$ - величины, связанные с $z_j^{(\nu)}$ неявными зависимостями вида [2]

$$z_j^{(\nu)} = R_{js}^{(\nu)}\left(\zeta_s^{(\nu)} + m_{js}^{(\nu)}\Big/\zeta_s^{(\nu)}\right) \quad (s = 0,1),$$

здесь $R_{js}^{(\nu)}, m_{js}^{(\nu)}$ - постоянные, характеризующие геометрию соответствующих эллипсов в преобразованных плоскостях [2].

Неизвестные коэффициенты $A_{jk}^{(\nu)}, C_{jk}^{(\nu)}$ определятся из бесконечной системы линейных алгебраических уравнений, которую можно получить методом, изложенным в работе [3].

При приближенном решении задачи эта система урезалась, что можно сделать в силу ее квазирегулярности [3]. Максимальное количество уравнений в системе было равно 72, что соответствует $k \le 9$.

Численные расчеты были проведены для случая, когда в качестве материалов колец выбирались те же материалы, что и в работе [2].

В таблице показаны сочетания материалов, из которых изготовлены кольца.

№	Внешнее кольцо	Среднее кольцо	Внутреннее кольцо
I	СВАМ	$\lambda^{(2)} = Д_i^{(2)}/Д_i^{(1)} = 2$	$\lambda^{(3)} = Д_i^{(3)}/Д_i^{(1)} = 3$
II	СВАМ	$\lambda^{(2)} = 0.5$	$\lambda^{(3)} = 0.25$
III	Фанера	$\lambda^{(2)} = 2$	$\lambda^{(3)} = 3$
IV	Фанера	$\lambda^{(2)} = 0.5$	$\lambda^{(3)} = 0.25$
V	СВАМ	Фанера	СВАМ
VI	Фанера	СВАМ	Фанера

На рис. 1. показано распределение изгибающего момента $M_\theta^{(3)}$ вдоль контура $L_1^{(3)}$ в эллиптической плите ($a_0^{(1)} = 5$, $a_0^{(2)} = 3$, $a_0^{(3)} = 1$, $a_1^{(3)} = 0.5$, $c_0^{(1)} = 0.7$, $c_0^{(2)} = 0.6$, $c_0^{(3)} = 0.7$, $c_1^{(3)} = 0.6$) для случая III и для сравнения - $M_\theta^{(1)}$ вдоль контура спая $L_1^{(1)}$ в такой же плите для случая II. На рис. 2 дано распределение изгибающих моментов $M_\theta^{(\nu)}$, возникающих в каждом из эллиптических колец вдоль контуров $L_1^{(\nu)}$ при $\nu = \overline{1,3}$ для случая VI.

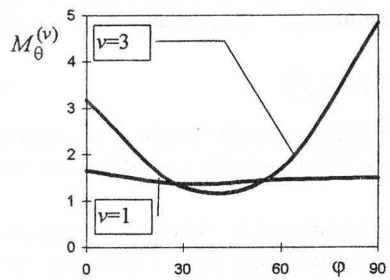


Рис. 1

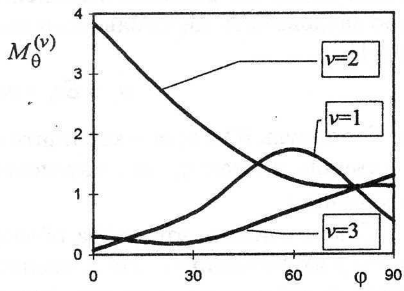


Рис. 2

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы.

Прогиб достигает наибольшего значения в точках внешнего контура $L_0^{(1)}$, а максимальный изгибающий момент может возникнуть как на внутреннем краю, так и на любом контуре спая. Так, для просчитанных нами вариантов, в случаях II и V максимальным оказался изгибающий момент $M_\theta^{(1)}$ на контуре спая $L_1^{(1)}$; в случаях I, III, IV - изгибающий момент $M_\theta^{(3)}$ на внутреннем контуре $L_1^{(3)}$. Величина же его зависит кроме этого и от ширины составляющих колец. Так, например, в круглой плите ($a_0^{(1)} = 5,\ a_0^{(2)} = 3,\ a_0^{(3)} = 1,\ a_1^{(3)} = 0.25$) для случая V - $M_{\max} = 2.56 \cdot m$, если же в этой плите уменьшить $a_0^{(1)}$ до 4, то $M_{\max} = 3.39 \cdot m$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957.
2. *Копнина В. И.* Чистый изгиб составной анизотропной плиты // Механика деформируемых сред. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1985. Вып. 9. С. 45 – 53.
3. *Копнина В. И., Меглинский В. В.* Квазирегулярность бесконечной системы в задаче об изгибе составной анизотропной плиты // Механика деформируемых сред. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1974. Вып. 1. С. 57 – 64.

УДК 539.3:534:532.5

Л. И. Могилевич

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ПРОДОЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

Рассмотрим цилиндрическую оболочку для модели Кирхгофа-Лява, усиленную в двух направлениях взаимно перпендикулярными ребрами, расположенными симметрично по обе стороны срединной поверхности. Считая материал обшивки нелинейно упругим, примем для него кубическую зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций [1]

$$\sigma_i = Ee_i - me_i^3 \quad (i = x, y), \tag{1}$$

где E – модуль Юнга; m – константа материала, определяемая из опытов на растяжение и сжатие; σ_i - интенсивность напряжений; e_i - интенсивность деформаций.

Будем считать, что ребра обладают жесткостью только в отношении изгиба в их плоскостях. Это позволяет в соответствии с методом конструктивной анизотропии записать формулы, связывающие моменты с деформациями, в виде

$$N_x=\frac{1}{1-\mu^2}\left[I_1\left(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y\right)\right];N_y=\frac{1}{1-\mu^2}\left[I_1\left(\varepsilon_y+\mu\varepsilon_x\right)\right];T=\frac{I_1\gamma_{xy}}{2(1+\mu)};$$

$$M_x=\frac{1}{1-\mu^2}\left[I_3\left(\chi_x+\mu\chi_y\right)\right]-\frac{E_1J_1}{d_1}\chi_x;M_y=\frac{1}{1-\mu^2}\left[I_3\left(\chi_y+\mu\chi_x\right)\right]-\frac{E_2J_2}{d_1}\chi_y \quad (2)$$

$$H=\frac{I_3\chi_{xy}}{2(1+\mu)};I_k=\int\limits_{-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}\frac{\sigma_i}{e_i}z^{k-1}dz,(k=1,3)\ .$$

При этом связи между деформациями и перемещениями имеют стандартный вид

$$\varepsilon_x=\frac{\partial U}{\partial x};\varepsilon_y=\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{W}{R};\gamma_{xy}=\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x};$$

$$\chi_x=\frac{\partial^2 W}{\partial x^2},\chi_y=\frac{\frac{\partial V}{\partial y}}{R}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2};\chi_{xy}=\frac{\frac{\partial V}{\partial x}}{2R}+\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}; \quad (3)$$

Здесь U, V, W - перемещения срединной поверхности вдоль осей x, y и по нормали; E_1,E_2 - модули Юнга материалов, из которых изготовлены ребра, параллельные y и x; J_1,J_2 - моменты инерции сечений этих ребер относительно линий, проходящих через их центры тяжести; d_1,d_2 - расстояния между ребрами в направлении y и x; $h-$ толщина обшивки оболочки; μ - коэффициент Пуассона.

Уравнения движения, записанные в усилиях и моментах, имеют следующий вид:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{\gamma}{g}h\frac{\partial^2 U}{\partial t^2};\frac{\partial N_y}{\partial y}+\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{\gamma}{g}h\frac{\partial^2 V}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial N_y}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left[N_x\frac{\partial W}{\partial x}+T\frac{\partial W}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[T\frac{\partial W}{\partial x}+N_y\frac{\partial W}{\partial y}\right]+ \quad (4)$$

$$+2\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y}=\frac{\gamma}{g}h\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\ ,$$

здесь γ - удельный вес обшивки; g - ускорение свободного падения. Подставляя (1) – (3) в (4), получим уравнения движения в перемещениях. Переход к безразмерным переменным (в этих уравнениях)

$$U^*=\frac{U}{A},V^*=\frac{V}{A},W^*=\frac{W}{h},x^*=\frac{x}{l},y^*=\frac{y}{l},t^*=\sqrt{\frac{Eg}{\gamma\left(1-\mu^2\right)}}\frac{t}{l}, \quad (5)$$

где A – амплитудный параметр возмущения, l – характерная длина волны, позволяет выявить четыре малых параметра подобия

$$\varepsilon = \frac{A}{l}, \delta_1 = \frac{\sqrt{hR}}{l}, \delta_2 = \frac{h}{R}, \delta_3 = \frac{A}{R}, \tag{6}$$

характеризующих собственно нелинейность волнового процесса, его дисперсию, тонкостенность оболочки и слабую угловую расходимость квазиплоской волны.

Рассмотрим случай, когда

$$\delta_1 = O(\varepsilon), \delta_2 = O(\varepsilon), \delta_3 = O\left(\sqrt{\varepsilon}\right).$$

Применяя метод возмущений, представим решение в виде

$$\begin{gathered} \xi = x^* - ct^*, \tau = \varepsilon^2 t^*, \eta = \varepsilon^2 y^*, U^* = U_0 + \varepsilon U_1 + \ldots, \\ W^* = W_0 + \varepsilon W_1 + \ldots, V^* = \varepsilon\left(V_0 + \varepsilon V_1 + \ldots\right). \end{gathered} \tag{7}$$

Учтем осевую симметрию задачи и потребуем выполнения условия

$$\frac{E_1 J_1 R}{E d_1 l^4} = O\left(\varepsilon^2\right). \tag{8}$$

В нулевом приближении получим

$$W_0 = \mu \frac{\partial U_0}{\partial \xi}, C = \left(1 - \mu^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{9}$$

В следующем приближении будем иметь для компоненты продольной деформации $\Phi = \dfrac{\partial U_0}{\partial \xi}$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} - \alpha \Phi^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi^3} + \omega \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \xi^5} = 0. \tag{10}$$

$$\alpha = \frac{2m(1-\mu)\left(1-\mu^2\right)^{\frac{1}{2}}}{E}; \quad \beta = \omega = 0.5\,\mu^2\left(1-\mu^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Полученное уравнение (10) ранее в литературе по теории солитонов и в приложениях не упоминалось.

Уравнение (10) имеет точное решение солитонного типа

$$\Phi = \frac{3\beta}{\sqrt{10\alpha\omega}} Ch^{-2}\varsigma, \varsigma = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta}{\omega}}\xi + \frac{2}{25}\sqrt{\frac{\beta^5}{\omega^3}}\,\tau\right),$$

что при переходе к размерным переменным определят скорость волны

$$\tilde{c} = \left(1 - \frac{2}{25}\mu^2\varepsilon^2\right)\sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}, \quad \varepsilon = \frac{A}{l}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Землянухин А. И., Могилевич Л. И.* Нелинейные волны деформаций в цилиндрических оболочках // Изв. вузов. Сер. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т. 3. № 1. С. 52 - 58.

УДК 629

А. В. Молоденков, Я. Г. Сапунков

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИМПУЛЬСНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗВОРОТА КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА*

Рассматривается задача оптимального разворота сферически симметричного космического аппарата (КА) с ограниченной и импульсной тягой при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости в кватернионной постановке. Функционал, определяющий качество переходного процесса, объединяет два критерия: время и интегральную величину импульсов тяги, затраченных на процесс управления.

Постановка задачи имеет вид

$$2\dot{\overline{\Lambda}} = \overline{\Lambda} \circ \overline{\omega}, \tag{1}$$

$$\dot{\overline{\omega}} = \overline{M}, \tag{2}$$

$$|\overline{M}| \le M_{max}, \tag{3}$$

$$\overline{\Lambda}(0) = \overline{\Lambda}_0, \quad \overline{\omega}(0) = \overline{\omega}_0, \tag{4}$$

$$\overline{\Lambda}(T) = \overline{\Lambda}_T, \quad \overline{\omega}(T) = \overline{\omega}_T, \tag{5}$$

где $\overline{\Lambda}(t) = \lambda_0(t) + \sum_{k=1}^{3} \lambda_k(t)\bar{i}_k$ - кватернион, описывающий угловое положение КА, $\overline{\omega}(t) = \sum_{k=1}^{3} \omega_k(t)\bar{i}_k$ - вектор угловой скорости КА - являются переменными состояния; $\overline{M}(t) = [M_1(t), M_2(t), M_3(t)]^T$ - вектор управляющего момента. Функции $\overline{\Lambda}(t)$, $\overline{\omega}(t)$, $\overline{M}(t)$ подчинены требованиям задачи Понтрягинского типа; $\circ$ означает кватернионное произведение. Требуется определить оптимальное управление $\overline{M}^{\text{опт}}$ системой (1), (2) при ограничении на модуль управления (3), доставляющее минимум функционалу

$$I = \int_0^T (\alpha_1 + \alpha_2 |\overline{M}|) dt,$$

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 99-01-00192.

где $\alpha_1, \alpha_2 = \text{const} > 0$, время T не задано. Граничные условия (4), (5) произвольны.

Задача решается в два этапа. На первом этапе на основании принципа максимума Л. С. Понтрягина получаются выражения оптимального управления и сопряженной системы уравнений для исходной непрерывной задачи. На втором этапе, используя предельный переход [1], в котором верхнее значение величины тяги неограниченно возрастает, строится аналитическое решение задачи оптимального разворота с импульсной тягой, реализующее двухимпульсную схему управления.

Получены явные соотношения, определяющие величины и направления импульсов тяги, скачки фазовых переменных и время разворота КА.

Приводится полный аналитический алгоритм решения задачи импульсного оптимального разворота, реализующий двухимпульсную схему управления.

Работа является продолжением [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильин В. А., Кузмак Г. Е.* Оптимальные перелеты космических аппаратов. М.: Наука, 1976.

2. *Молоденков А. В.* Решение задачи оптимального разворота сферически симметричного КА с ограниченной и импульсной тягой при произвольных граничных условиях // Бортовые интегрированные комплексы и современные проблемы управления: Сб. тр. междунар. конф. Ярополец, 1998. С. 58 - 59.

УДК 532.5;532.135

А. И. Сафрончик

НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОПЛАСТИЧНОЙ СРЕДЫ С УЧЁТОМ ПРИСТЕННОГО СКОЛЬЖЕНИЯ И “ЗАПАЗДЫВАНИЯ” ВОССТАНОВЛЕНИЯ СТРУКТУРЫ

В связи с запросами техники широкое развитие получила гидромеханика вязкопластических сред. Изучению движения таких сред посвящено значительное число как теоретических, так и экспериментальных работ [1, 2]. Экспериментальными исследованиями был выявлен ряд интересных особенностей в поведении вязкопластичных материалов или как их ещё называют структурных жидкостей. В частности, было замечено, что при достаточно больших скоростях движения возникает аномалия в поведении сопротивления (сопротивление падает). Снижение сопротивления объясняют обычно тем, что вблизи твёрдых стенок образуется вязкий слой (дисперсионная среда), вязкость жидкости в котором значительно меньше, чем в остальном потоке.

Отмечалось также, что эффект снижения сопротивления возникает в трубах и каналах с пористыми стенками. Этот эффект получил название "пристенного" скольжения и, хотя его природа ещё полностью не выяснена, делаются попытки его практического использования.

Теоретические исследования совместного движения вязкой и вязкопластической жидкостей особенно в нестационарном случае весьма ограничены [3, 4]. Неизвестно, как связана толщина вязкого слоя с остальными параметрами процесса. Поэтому при решении задач приходится принимать её постоянной, что позволяет выяснить достаточно полно качественную картину течения. Количественные характеристики требуют экспериментального уточнения.

В настоящей статье рассматривается другой подход, основанный на известной гипотезе Н. П. Петрова, сформулированной им ещё в начале века. Для рассматриваемого случая вязкопластической среды эту гипотезу можно сформулировать так: условие прилипания на твёрдой стенке нарушается при достижении касательным напряжением некоторой критической величины τ^*, причём само напряжение начинает изменяться пропорционально разности скоростей жидкости и твёрдой стенки:

$$\tau = \lambda\left(v_{\text{тв.}} - v_{\text{ж}}\right) \text{ при } \tau > \tau^*.$$

Другим интересным эффектом является различное поведение материала при нагружении и разгрузке: разрушение структуры происходит при одних предельных напряжениях сдвига, а восстановление при других, значительно меньших.

Другими словами, имеются два предела текучести: статический $\tau_{\text{ст}}$ и динамический $\tau_{\text{д}}$.

Связь между компонентами тензоров напряжения и скоростей деформаций задаётся реологическими уравнениями Слибара-Паслая [5]

Нагружение	Разгрузка
$\tau - \tau_{\text{д}} = \eta \dfrac{\partial v}{\partial n} \quad \tau > \tau_{\text{ст}}$	$\tau - \tau_{\text{д}} = \eta \dfrac{\partial v}{\partial n} \quad \tau > \tau_{\text{д}}$
$0 = \dfrac{\partial v}{\partial n} \quad \tau \le \tau_{\text{ст}}$	$0 = \dfrac{\partial v}{\partial n} \quad \tau \le \tau_{\text{д}}$

Модель, описывающая поведение среды с учётом обоих эффектов, содержит пять параметров:

$\tau_{\text{ст}}$ - статический предел текучести;

$\tau_{\text{д}}$ - динамический предел текучести;

τ^* - критическое напряжение, при котором нарушается условие "прилипания";

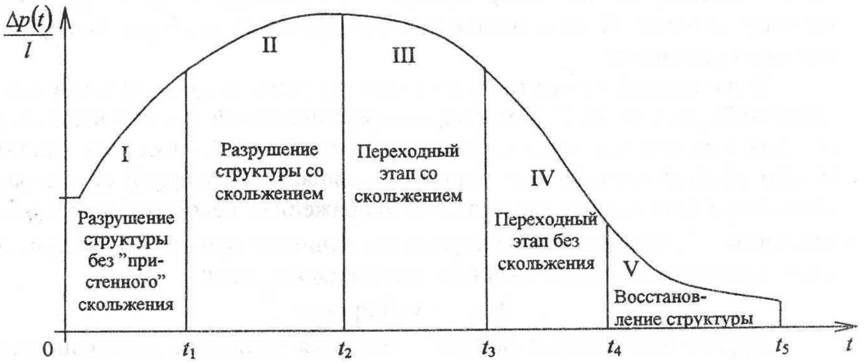
η - структурная вязкость;

λ - коэффициент "внешнего" трения.

Наиболее вероятным соотношением между параметрами, по-видимому, является $\tau_д < \tau_{ст} < \tau^*$.

При воздействии на вязкопластическую среду немонотонной нагрузкой можно выделить несколько характерных временных этапов её поведения.

Примерная схема развития и затухания течения изображена на рисунке.



Характерные временные этапы в развитии и затухании течения вязкопластичной среды

Нами были рассмотрены наиболее типичные нестационарные задачи: течение Куэтта между пластинами и соосными цилиндрами, течение в плоской, круглой и трубе кольцевого сечения, а также вращательные движения между соосными цилиндрами.

Ограниченный объём данной статьи не позволяет подробно изложить постановку задач на всех временных этапах, а тем более выписать решения этих задач. Отметим только, что для всех временных этапов, кроме переходного, решались задачи с "искомой" границей, каковой является граница (или границы) "ядра" течения (область, где отсутствует взаимное скольжение слоёв). Для решения использовался метод Колоднера [6] или разработанная нами его модификация [2]. На переходных этапах решаются задачи с постоянными границами ("ядра" не изменяют своих размеров).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мирзаджанзаде А. Х., Гурбанов Р. С.* Обзор работ по гидродинамике вязкопластических сред в бурении. Баку, 1963.

2. *Сафрончик А. И.* Некоторые задачи неустановившегося течения вязкопластической среды: Дис. … канд. физ.-мат. наук. Ростов н/Д, 1962. 109 с.

3. *Огибалов П. М., Мирзаджанзаде А. Х.* Нестационарные течения вязкопластических сред. М.: Изд-во МГУ, 1970.

4. *Сафрончик А. И.* Неустановившееся движение вязко-пластической среды между параллельными стенками с учётом эффектов пристенного скольжения и “запаздывания” восстановления структуры // Аэродинамика. Вып. 4(7). Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1975. С. 166 – 181.

5. *Slibar A., Paslay P. R.* Petarded Flow of Binghan Materials // J. of Appl. Mech. 1959. March. P. 107 – 112.

6. *Kolodner J. J.* Free boundary problem for the heat eguation wich applications otchange of phase // Comm. on Pure and Appl. Math. 1956. Vol. IX. № 1.

УДК 533.6.011

Г. Д. Севостьянов

НЕЯВНЫЕ И НЕСТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ ОКОЛОЗВУКОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Уравнение Линя-Рейснера-Цяня (ЛРЦ) для низкочастотных безвихревых околозвуковых течений идеального газа ($u = M^2 - 1$; M - число Маха)

$$\left(\frac{u^2}{2}\right)_{xx} = u_{yy} + u_{zz} - 2u_{xt}, \tag{1}$$

запишем для неявных 3D-решений $F(u, x, y, z, t) = 0$ (x, y, z - декартовы координаты, t – линейное время)

$$\left(F_y^2 + F_z^2 - 2F_tF_x - uF_x^2\right)F_{uu} + \left(F_{yy} + F_{zz} - 2F_{tx} - uF_{xx}\right)F_u^2 +$$
$$+ [F_x^2 + u(F_x)_u^2 - \left(F_y^2\right)_u - \left(F_z^2\right)_u + 2F_xF_{ut} + 2F_tF_{ux}]F_u = 0. \tag{2}$$

Если $F = P_n(u) = 0$, P_n - полином n-го порядка с n коэффициентами $a_k(x, y, z, t)$, то для них получим n дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) как нулевые коэффициенты полинома (n-1)-го порядка по u из (2). Эти решения назовём P-неявными решениями (1).

Если $n = 1$, то имеем явные решения (1): $u = u(x, y, z, t)$. При $n = 2$, разрешив $F = P_2(u) = 0$, получим: $u = \pm\alpha + \beta$; тогда α - полуразность двух решений (1), β - их полусумма; они определяются из системы

$$\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}\right)_{xx} = \beta_{yy} + \beta_{zz} - 2\beta_{xt}, \quad u = \pm\alpha + \beta б,$$
$$(\alpha\beta)_{xx} = \alpha_{yy} + \alpha_{zz} - 2\alpha_{xt}. \tag{3}$$

В стационарном случае ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$), считая, что β - решение Л. В. Овсянникова для (1):

$$\beta = B(y, z)x^2,\ 6B^2 = B_{yy} + B_{zz}, \tag{4}$$

получим:

1) обобщённое С. И. Похожаевым [1] решение Томотики-Тамады
$$\alpha = A(y, z),\ 2BA = A_{yy} + A_{zz}; \tag{5}$$

2) обобщение решения И. А. Чернова [2]
$$\alpha = A(y, x)\sqrt{x},\ \frac{15}{4}BA = A_{yy} + A_{zz}. \tag{6}$$

В плоском случае ($\frac{\partial}{\partial z} = 0$) решение (6) описывает складку поверхности $F = 0$ в пространстве $x\,y\,u$ $(n = 2)$. Решение (4) – (5) использовано автором для описания соплового течения с плоским скачком уплотнения [3]. В нестационарном случае в (5) можно ввести t как независимый параметр: $A(y, z, t) = \alpha$. Решение со скачком в нестационарном потоке получено в [4] для частного случая, когда u стационарно, а две другие координаты возмущённой скорости (v, w) нестационарны.

При $n = 3$ $F = P_3(u) = 0$ описывает сборку поверхности $F = 0$ в пространстве $x\,y\,u$ $\left(\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} = 0\right)$. Для трёх коэффициентов P_3 имеем три ДУЧП из (2). Это неявное P-решение можно применить для описания вершины местной сверхзвуковой зоны со скачком уплотнения (возникает катастрофа сборки, когда устраняется трёхзначность $u(x, y)$).

При $n = 4$ в биквадратном случае $F = P_2(u^2) = 0$, откуда $u^2 = \pm\gamma + \delta$.

Приведём для уравнения (1) в плоском случае $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ однопараметрические решения (u, x - функции t, y и параметра p; $x_p \neq 0$) из P-класса [6] с помощью структурной формулы
$$x = a_0(p, t) + a_2(p, t)y^2;\ S = 1;$$
$$u = S\,x_p + x_y^2 + 2x_t = \omega_0 + \omega_2 y^2; \tag{7}$$
$$\omega_2 = a_{2p} + 2a_{2t} + 4a_2^2, \quad \omega_0 = a'_{0p} + 2a_{0t}. \tag{8}$$

Введём переменные:
$$\xi = 2p - t,\ \eta = p, \tag{9}$$

тогда
$$\omega_2 = a_{2\eta} + 4a_2^2,\ \omega_0 = a_{0\eta}, \tag{10}$$
$$z_{\eta\eta} + 2a_2 z_\eta - 2\omega_2 z = 0,\ \left(z = a_{0p}\right). \tag{11}$$

Частные случаи:

1) при $\omega_2 \equiv 0$ [6] имеем

$$a_2 = \frac{1}{4\eta + R(\xi)}, \quad w = z_\eta = T(\xi)\sqrt{a_2},$$

$$a_{0p} = z = \frac{T(\xi)}{2}\sqrt{4\eta + R(\xi)} + K(\xi) = f(p,t), \quad a_0 = \int^p f(p,t)dp + g(t). \quad (12)$$

В стационарном случае ($R = const$) отсюда получаем [6] решение уравнения Трикоми $y = v \cdot (u - u_0)$, $u_0 < 0$, описывающее срыв дозвуковой струи с края щели (v пропорционально углу наклона скорости);

2) при $a_2 = \dfrac{1}{3p}$, $\omega_2 = \dfrac{1}{9p^2}$ из (11) имеем линейное уравнение, решение которого равно

$$z = c_1(\xi)\eta^{2/3} + c_2(\xi)\eta^{-1/3} = f(p,t), \; a_0 = \int^p f(p,t)dp + g(t),$$

$$\omega_0 = \int^p K(p,t)dp + h(t), \; K(p,t) = z_\eta, \quad (13)$$

т. е. решение (1) записано в квадратурах

$$x = a_0(p,t) + \frac{1}{3p}y^2, \; S \equiv 1, \; u = \omega_0(p,t) + \frac{1}{9p^2}y^2. \quad (14)$$

В стационарном случае $\left(\dfrac{\partial}{\partial t} = 0\right)$ решение (14) есть решение Заславского-Клепиковой [7] для трансзвукового срыва сверхзвуковой струи с края щели, укреплённого бортиком (см. также [6]).

Произвольные функции в решениях выбираются, исходя из конкретных течений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Похожаев С. И.* Об одной задаче Л. В. Овсянникова // ПМТФ. 1989. № 2. С. 5 - 10.

2. *Чернов И. А.* Полиномо-параметрические решения трансзвуковых уравнений // Аэродинамика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1997. Вып. 14(17). С. 91 - 102.

3. *Севостьянов Г. Д.* Околозвуковой скачок в переходной части сопла Лаваля // Аэродинамика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1993. Вып. 13(16). С. 27 - 35.

4. *Вельмисов П. А.* К теории околозвуковых неустановившихся течений газа // Аэродинамика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1975. Вып. 4(7). С. 3 - 25.

5. *Севостьянов Г. Д.* Однопараметрические функции, непрерывные через околозвуковой скачок уплотнения // Математика, механика, математическая кибернетика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999. С. 100 - 102.

6. *Севостьянов Г. Д.* Структура элементарных околозвуковых решений // Аэродинамика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1997. Вып. 14(17). С. 109 - 117.

7. *Заславский Б. И., Клепикова Н. А.* Об одном классе точных частных решений уравнений околозвуковых течений газа // ПМТФ. 1965. № 6. С. 65 - 68.

УДК 539.3

Ю. В. Шевцова

ПОГРАНСЛОЙ В ОКРЕСТНОСТИ КВАЗИФРОНТА В СКОШЕННОЙ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

Рассмотрим тонкую круговую цилиндрическую оболочку из изотропного материала со скошенным краем с относительной полутолщиной $\eta = h/R$ ($2h$ - толщина оболочки). Положение точек оболочки в пространстве зададим векторным равенством:

$$\vec{P}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\vec{M}(\alpha_1,\alpha_2)+\alpha_3\vec{n}, \tag{1}$$

где $\vec{P}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ - радиус-вектор точек оболочки в трехмерном пространстве, $\vec{M}(\alpha_1,\alpha_2)$ - радиус-вектор точек срединной поверхности, $\vec{n}$ - единичный вектор нормали к срединной поверхности. Срединную поверхность оболочки отнесем к полугеодезической системе координат, α_1-линии которой являются геодезическими, ортогональными краю, причем параметр α_1 определяет длину геодезической. Такая система координат является ортогональной в окрестности края, однако координатные линии данной системы координат не совпадают с линиями кривизны. В силу этого нарушается необходимое и достаточное условие триортогональности [1] системы координат, введенной равенством (1).

Будем считать, что лицевые поверхности оболочки свободны от внешних нагрузок, т.е.

$$\sigma_{3l}=0,\ (l=1,2,3), \tag{2}$$

где σ_{ij} - напряжения.

Рассмотрим случай только однородных начальных условий

$$u_l=\frac{\partial^k u_l}{\partial t^k}=0,\ (k=1,\overline{3}), \tag{3}$$

где u_l - перемещения.

Граничные условия на торце $\alpha_1=0$ зададим следующим образом:

$$\sigma_{11}=\varphi(\alpha_2,\alpha_3)H(t),\quad u_2=u_3=0, \tag{4}$$

$H(t)$ - функция Хевисайда, $\varphi(\alpha_2,\alpha_3)$ - четная функция от переменной α_3.

Вид уравнения погранслоя в окрестности квазифронта в круговой цилиндрической оболочке известен [2]. Поэтому можно заранее предположить, что это уравнение для скошенной круговой цилиндрической оболочки при малых углах скоса будет иметь аналогичный вид, причем определяющее влияние оказывает слагаемое, содержащее четвертую производную по времени от перемещения u_1:

$$\frac{\nu^2}{3(1-\nu^2)}h^2\frac{\partial^4 u_1}{\partial t^4}. \tag{5}$$

Для построения погранслоя воспользуемся уравнениями общей теории оболочек в произвольной ортогональной системе координат [2]. Произведем в них растяжение масштабов независимых переменных по формулам

$$\alpha_1 = R\eta^q\xi_1,\ \alpha_2 = R\xi_2,\ t = Rc_2^{-1}\eta^a\tau, \tag{6}$$

а также введем следующие асимптотики для компонент напряжённо-деформированного состояния:

$$T_i = 2EhT_i^*,\ S_{ij} = 2EhS_{12}^*, \tag{7}$$

$$u_1 = R\eta^q u_1^*,\ u_2 = R\eta^{2q}u_2^*,\ u_3 = R\eta^{2q}u_3^*,$$

где величины с индексом «*» имеют одинаковый асимптотический порядок, q - показатель изменяемости НДС оболочки, a - показатель динамичности. Остановимся на случае $q = a = 2/3$. В рамках погрешности $O(\eta^{2/3})$ получим уравнение, которое с учетом слагаемого (5) может быть записано в исходных переменных:

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_1^2} + k\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{c_3^2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t_1^2} + \frac{\nu^2}{3(1-\nu^2)}h^2\frac{\partial^4 u_1}{\partial t^4} = 0, \tag{8}$$

где $k = \dfrac{1}{A_2}\dfrac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}$, A_2 - коэффициент первой квадратичной формы [3].

С целью упрощения решения данное уравнение может быть записано в форме, содержащей волновой оператор первого порядка. Анализ этого уравнения после перехода к характеристическим переменным показывает, что в рамках данной погрешности оно может быть записано в следующей форме:

$$-k\frac{\partial u_1}{\partial x} - 2\frac{1}{R}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t_3 \partial x} + \frac{\nu^2}{3(1-\nu^2)}c_3^4\frac{1}{R}\frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} = 0. \tag{9}$$

Таким образом, уравнение погранслоя в первоначальных переменных имеет вид

$$\frac{1}{R}\frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{1}{c_3}\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{k}{2}u_1 - \frac{\nu^2}{3(1-\nu^2)}c_3h^2\frac{\partial^3 u_1}{\partial t^3} = 0. \tag{10}$$

Решение для погранслоя должно удовлетворять граничному условию на торце, которое в двумерной форме записывается следующим образом:

$$T_1 = \int_{-h}^{h} \varphi(\alpha_2, \alpha_3)\, d\alpha_3 H(t) \ . \tag{11}$$

Решение для T_1, полученное с помощью интегрального преобразования Лапласа по времени, имеет вид

$$\begin{gathered} T_1 = \int_{-h}^{h} \varphi(\alpha_2, \alpha_3) d\alpha_3 \exp\left[-\frac{1}{R}\int_0^{\xi} k d\xi' \right] \times \\ \times \left(\frac{k}{k_0}\left(\frac{1}{3} + \int_0^{y} Ai(-y')dy' \right) - \frac{k - k_0}{k_0^2} \frac{1}{(3a\xi)^{1/3}} Ai(y) + \ldots \right), \end{gathered} \tag{12}$$

где $Ai(y)$ - функция Эйри, $y = \dfrac{1}{(a\xi)^{1/3}}(t_3 - \xi)$, $a = \dfrac{\nu^2 c_3^4}{6(1-\nu^2)}\eta^2$, $k_0 = k(0, \alpha_2)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976.
2. *Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Nolde E. V.* Dynamics of thin walled elastic bodies. San Diego: Academic Press, 1998. 226 p.
3. *Шевцова Ю. В.* Динамический простой краевой эффект в скошенной круговой цилиндрической оболочке // Механика деформируемых сред. Саратов, 1997. Вып. 13. С. 83 - 87.

УДК 533.6.011: 532.529

Г. П. Шиндяпин, В. Л. Мыльцин

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ УДАРНО-ВОЛНОВЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В УСЛОВИЯХ ПАРАДОКСА НЕЙМАНА*

Проблема слабого маховского отражения (парадокс Неймана) и более общая проблема взаимодействия относительно слабых (интенсивности $P_{10}=(p_1-p_0)/B_0$, $P_{20}=(p_2-p_0)/B_0$, $B_0=\rho_0 c_0^2$) ударных волн (с углом наклона α к вертикали) в газе и газожидкостной среде, характеризуемой параметром $R_0(\gamma)$, вызывает неизменный интерес исследователей [1 – 3], связанный с попытками построения достаточно простых моделей ударно-волновых взаимодействий, адекватно описывающих процесс.

---

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00816.

Установленные экспериментально [2, 3] режимы отражения и взаимодействия (простого Маховского – SMR, Неймановского – NMR, регулярного – RR) теоретически найдены с помощью асимптотики коротких волн [1], приводящей к исследованию в общем случае для определяющих ударно-волновую структуру параметров в области параметров подобия

$$\alpha^{v}=\frac{\alpha}{P_{10}^{1/2}R_{0}^{1/2}(\gamma)},\quad \eta=\frac{P_{20}}{P_{10}} \tag{1}$$

к решению системы двух уравнений (относительно Z_1, Z_2)

$$\begin{gathered}
2+A_1^2=3Z_1^2,\quad 2\eta+A_2^2=3Z_2^2,\quad A_1+A_2-2\alpha^{v}=A,\quad \eta=\eta;\\
3Z_1^2-3Z_2^2-1+\eta=(Z_1-Z_2)A\\
A\left[6Z_1^2-4-\eta+(Z_1+Z_2-A)(2Z_1-Z_2)\right]=\\
=\sqrt{3Z_1^2-2}+\eta\sqrt{3Z_2^2-2\eta}-2\left(\left(Z_1^2-1\right)^{3/2}+\left(Z_2^2-\eta\right)^{3/2}\right).
\end{gathered} \tag{2}$$

Для наиболее общего случая SMR (с невырожденными отраженными фронтами) система (2) сводится к решению одного уравнения $\Phi(\eta;\, Z_1, Z_2)=0$ вида:

$$\begin{gathered}
2(2Z_1-Z_2)\left(3Z_1^2-3Z_2^2-1+\eta\right)=(Z_1-Z_2)\left(D_1-\sqrt{D_1^2-4(2Z_1-Z_2)D_0}\right)\\
D_1=6Z_1^2-4-\eta+(Z_1+Z_2)(2Z_1-Z_2),\\
D_0=\sqrt{3Z_1^2-2}+\eta\sqrt{3Z_2^2-2\eta}-2\left(\left(Z_1^2-1\right)^{3/2}+\left(Z_2^2-\eta\right)^{3/2}\right),
\end{gathered} \tag{3}$$

которое в частном случае ($\eta=1$) разрешается параметрически в явном виде.

В случае вырождения одной из отраженных волн ($Z_1 = 1$ – модель NMR) система (2) решается в явном виде

$$\begin{gathered}
Z_2=\frac{1}{6}\left(A+\sqrt{A^2-12A+12\eta+24}\right),\\
\alpha^{v}=\frac{1}{2}\left(1-A+\sqrt{3Z_2^2-2\eta}\right),
\end{gathered} \tag{4}$$

позволяющем определять параметры, характеризующие ударно-волновую конфигурацию.

На рис. 1 изображены ударно-волновые конфигурации для различных интенсивностей инициирующих волн (при $\alpha^{v}=1$ и $\eta=1$ (а), $\eta=0.6$ (б), $\eta=0.2$ (в)). Рис. 2 представляет собой зависимость продольной ($U=\mu$) и поперечной ($V=\nu-\mu Y$) составляющих скорости вдоль отраженных фронтов и фронта Маха.

Наблюдаемый разрыв скоростей на рис. 2 объясняет в рамках рассматриваемой аналитической модели возникновение режимов невырожденного и вырожденного маховского взаимодействия.

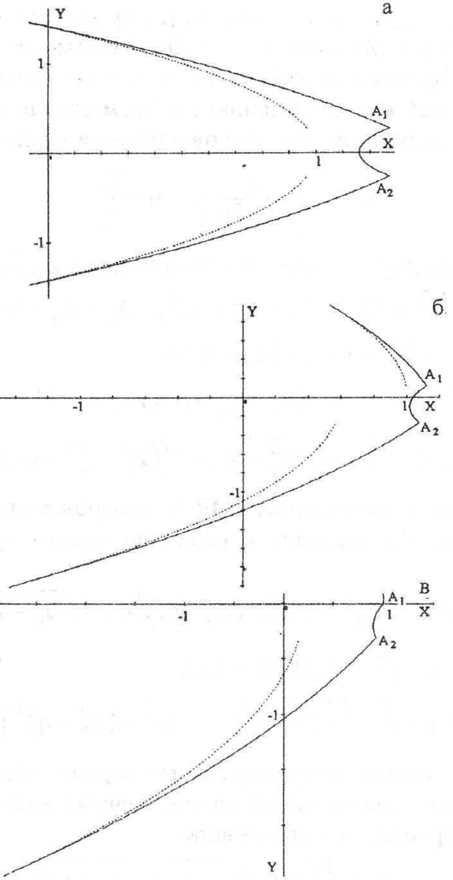


Рис. 1

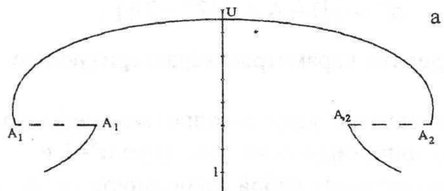
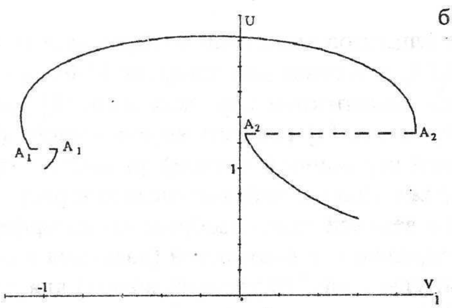


Рис. 2



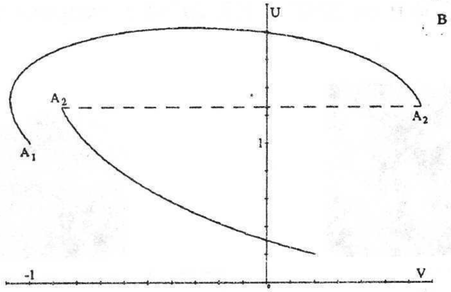


Рис. 2 (окончание)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шиндяпин Г. П.* Маховское отражение и взаимодействие слабых ударных волн в условиях парадокса Неймана // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 2. С. 183 – 190.

2. *Ben-Dor G.* Shock wave reflection phenomena. N.Y.:Springer-Verlag,1992. Vol. 11.

3. *Adachi T., Suzuki T., Kobayashi S.* Mach reflection of a weak shock wave // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. B. 1994. Vol. 60, № 575. P. 2281 – 2296.

УДК 533.6.011:532.529

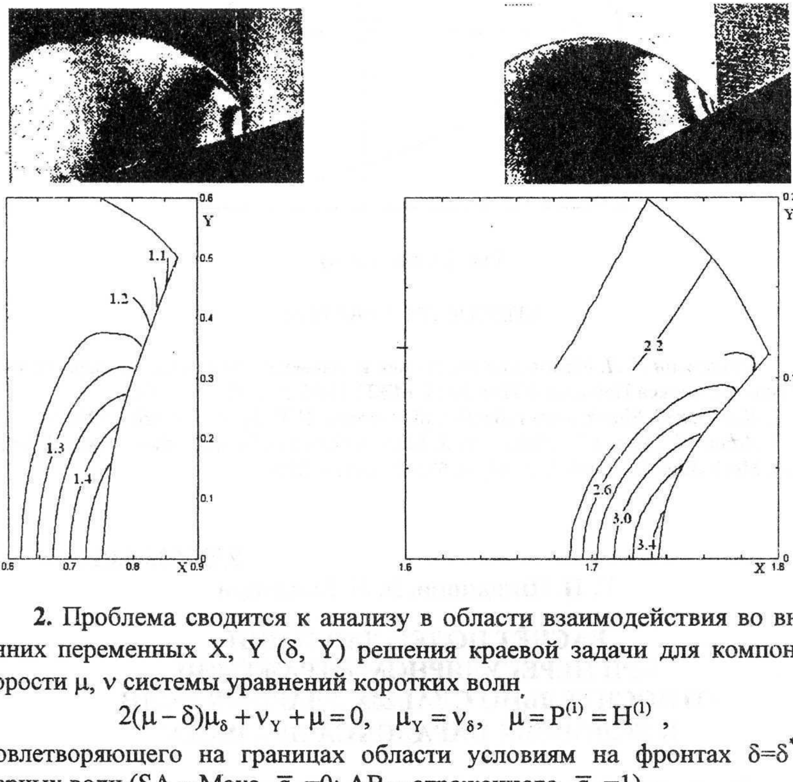
Г. П. Шиндяпин, В. Л. Мыльцин

РАСЧЁТ ПОЛЕЙ ДАВЛЕНИЙ ПРИ НЕРЕГУЛЯРНОМ ОТРАЖЕНИИ ОТНОСИТЕЛЬНО СЛАБЫХ УДАРНЫХ ВОЛН В УСЛОВИЯХ ПАРАДОКСА НЕЙМАНА*

1. Рассматривается проблема аналитического исследования ударно-волновых структур и полей давления за ними при нерегулярном отражении слабых ударных волн ($P_{10}=(p_1-p_0)/\rho_0 c_0^2 \ll 1$) от твёрдой стенки с углом на-

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00816.

клона α (θ_w) в газе или газожидкостной пузырьковой среде, характеризуемой параметром $R_0(\gamma)$, известная как парадокс Неймана. С помощью аналитических моделей асимптотики коротких волн [1] удаётся описать известные экспериментально [2] режимы вырожденного (Неймановского – NMR, с вырожденной отраженной волной), развитого (простого – SMR, с невырожденной отраженной волной) маховского и регулярного (RR) отражений. На рисунке в верхней части изображены интерферограммы [2], характеризующие распределение плотностей (давления и продольной скорости в случае относительно слабой ударной волны) для случая перехода от NMR к SMR (α^v=0.5) и от SMR к RR (α^v=1.5; теоретически переход при α^v=2.0).



2. Проблема сводится к анализу в области взаимодействия во внутренних переменных X, Y (δ, Y) решения краевой задачи для компонент скорости μ, ν системы уравнений коротких волн

$$2(\mu-\delta)\mu_\delta+\nu_Y+\mu=0, \quad \mu_Y=\nu_\delta, \quad \mu=P^{(1)}=H^{(1)}\ , \tag{1}$$

удовлетворяющего на границах области условиям на фронтах $\delta=\delta^*(Y)$ ударных волн (SA – Маха, $\overline{q}_n$=0; AB – отраженного, $\overline{q}_n$=1)

$$\left(\frac{d\delta^*}{dY}\right)^2=2\delta-\mu-\mu_1, \quad (\mu-\mu_1)\frac{d\delta^*}{dY}=\nu_1-\nu, \quad \mu=P^{(1)}=H^{(1)} \tag{2}$$

$$\mu_1=\overline{q}_n, \quad \nu_1=-\overline{q}_n\left(Y+\alpha^v\right); \quad \alpha^v=\alpha/\left(P_{10}^{1/2}R_0^{1/2}(\gamma)\right)$$

и асимптотическим условиям сращивания на границах с областями линейного и квазиодномерного решения. α^v – параметр подобия задачи.
Для описания течения в окрестности т.А взаимодействия используется класс точных решений (1), удовлетворяющих точно условиям на фронте (2) (при $q=q_n=\text{const}$)

$$\begin{aligned}&\mu=\varphi_2(q)Y^2+\varphi_1(q)Y+\varphi_0(q), \quad \delta=qY^2+\chi_1(q)Y+\chi_0(q)\\&\nu=\psi_3(q)Y^3+\psi_2(q)Y^2+\psi_1(q)Y+\psi_0(q)\ .\end{aligned}\tag{3}$$

Подстановка (3) в (1) приводит к системе 9 дифференциальных уравнений [3], которая преобразуется к одному уравнению 2-го порядка для функции φ_2 с общим решением

$$\varphi_2(q)=A\sqrt{|q+B|}-2Bq-4B^2-B, \quad A, B-\text{const}\tag{4}$$

и системе 10 линейных уравнений для определения функций φ_1, φ_0, χ_1, χ_0, ψ_0

$$\begin{aligned}&Z'=K^{-1}(q)Z\left(2\varphi_2'-q+\tfrac{1}{2}\right), \quad W'=K^{-1}(q)\left[Z'-W\left(\varphi_2'+6q-1\right)\right]\\&R'=W, \quad \chi_1'=R, \quad \varphi_1'=\varphi_2'R+Z; \quad K(q)=\varphi_2+2q^2-q\\&U'=K^{-1}(q)\left[Z\chi_1-U\left(2\varphi_2'+3q-\tfrac{1}{2}\right)\right], \quad V'=K^{-1}(q)\left(U+\chi_1R-4qV\right)\\&\chi_0'=V, \quad \varphi_0'=\varphi_2'V+U, \quad \psi_0'=\varphi_1V-\chi_1\varphi_0'\ ,\end{aligned}\tag{5}$$

остальные функции определяются выражениями

$$\begin{aligned}&\psi_3=\frac{2}{3}\left[K(q)\varphi_2'+\left(\frac{1}{2}-2q\right)\varphi_2\right], \quad \psi_1=-2K(q)\varphi_0'-\varphi_0+\varphi_1\chi_1\\&\psi_2=-K(q)\varphi_1'+\chi_1\varphi_2+\varphi_1q-\frac{1}{2}\varphi_1\ .\end{aligned}\tag{6}$$

3. Система начальных условий на фронтах при $q=q_n$ (Маха: $q_n=q_0$; отраженном: $q_n=q_1$) получается при подстановке (3) в (2)

$$\begin{aligned}&\varphi_2(q_n)=2q_n(1-q_n); \quad \varphi_1(q_n)=2(1-2q_n)\chi_1(q_n);\\&\varphi_0(q_n)=2\chi_0(q_n)-\chi_1^2(q_n)-\overline{q}_n; \quad \psi_3(q_n)=-4q_n(1-2q_n);\\&\psi_2(q_n)=-6q_n(1-2q_n)\chi_1(q_n);\\&\psi_1(q_n)=2(3q_n-1)\chi_1^2(q_n)-4q_n\chi_0(q_n)+(4q_n-1)\overline{q}_n;\\&\psi_0(q_n)=-2\chi_0(q_n)\chi_1(q_n)+\chi_1^3(q_n)+\overline{q}_n(2\chi_1(q_n)-\alpha^v);\\&\chi_1(q_n)=-2q_nY_A+\sqrt{2\delta_A-\mu_A-\overline{q}_n}, \quad \chi_0(q_n)=\delta_A-q_nY_A^2-\chi_1(q_n)Y_A.\end{aligned}\tag{7}$$

Для фронта Маха (за счёт симметрии $\varphi_1(q)=\chi_1(q)=\psi_1(q)=\psi_3(q)=0$) в общем случае С (невырожденного отражения – SMR; $0.5\le\alpha^v\le 2.0$) вычисление характерных параметров согласно (7) и др. условиям, отражающим влияние потока в целом на ударную конфигурацию, сводится [1] к анализу достаточно сложного уравнения притока массы. Для задач отражения решение этого уравнения находится в параметрическом виде (Z_1 – параметр)

$$A=\frac{1}{2Z_1}\left[\left(8Z_1^2-5\right)-\sqrt{\left(8Z_1^2-5\right)^2-8Z_1\left(3Z_1^2-2\right)^{1/2}+16Z_1\left(Z_1^2-1\right)^{3/2}}\right];$$

$$A_1=\sqrt{3Z_1^2-2};\quad \alpha^v=A_1-\frac{1}{2}A;\quad 1\le Z_1\le\sqrt{2};\qquad (8)$$

$$\mu_A=2Z_1^2-1;\quad Y_A=\sqrt{3Z_1^2-2}-\alpha^v;\quad \delta_A=\frac{3}{2}Z_1^2-\frac{1}{2};\quad q_0=\frac{Z_1}{2\left(\sqrt{3Z_1^2-2}-\alpha^v\right)}.$$

В случае В (вырожденного отражения – NMR; $0\le\alpha^v\le 0.5$) имеем

$$\mu_A=1;\quad Y_A=1-\alpha^v;\quad \delta_A=1;\quad q_0=\frac{1}{2\left(1-\alpha^v\right)}.\qquad (9)$$

Для отраженного фронта при μ_A, Y_A, δ_A, соответствующих α^v согласно (8), (9) и вырождении фронта в т.В (μ_B=1, δ_B=1), имеем в случае С ($0.5\le\alpha^v\le$ ≤ 2.0)

$$Y_B=\sqrt{3Z_1^2-2}+3\sqrt{Z_1^2-1}-\alpha^v,\quad q_1=1/6\qquad (10)$$

в случае В ($0\le\alpha^v\le 0.5$) $Y_B=Y_A=1-\alpha^v$, отраженный фронт представляет линию слабого разрыва δ=1 и находится как линия $\mu(X, Y)$=1 при построении решения (3) для фронта Маха при условиях (9).

На рисунке в нижней части построены поля давлений (плотностей и продольной скорости в случае относительно слабой ударной волны), а также ударные конфигурации по результатам интегрирования системы (5) при условиях (9) в случае α^v = 0.5, и при условиях (8), (10) в случае α^v = 1.5 во внутренних переменных X, Y. Обращает внимание хорошее качественное соответствие полученных линий равных давлений (плотностей) поведению интерферограммных полос в физическом эксперименте [2] в верхней части рисунка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шиндяпин Г. П.* Маховское отражение и взаимодействие слабых ударных волн в условиях парадокса Неймана // Изв. РАН. МЖГ. 1996. №2. С.183 – 190.

2. *Sason A., Takayama K.* Characterization of disturbance propogation in weak shock-wave reflections // J. Fluid Mech. 1994. Vol. 277. P.331 – 345.

3. *Заславский Б. И.* О нелинейном взаимодействии сферической ударной волны, возникающей в результате взрыва заглубленного заряда, со свободной поверхностью воды // АНСССР. ПМТФ. 1964. № 4. С. 57 – 65.

СОДЕРЖАНИЕ

СЕКЦИЯ МАТЕМАТИКИ

СЕКЦИЯ МЕХАНИКИ

Научное издание

МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА

Сборник научных трудов

ВЫПУСК 2

Ответственный за выпуск В. Б. Поплавский
Технический редактор Л. В. Агальцова
Корректор Е. А. Митенёва

Изд. лиц. ЛР № 020305 от 19.02.1997. Подписано в печать 20.11.2000.
Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.
Усл. печ. л.11,16(12). Уч.-изд. л. 9,8. Тираж 200 экз. Заказ 15.

Издательство Саратовского университета.
410026, Саратов, Астраханская, 83.
Типография Издательства Саратовского университета.
410026, Саратов, Астраханская, 83.