Обзорные лекции по математическому анализу.

1. Различные определения непрерывной функции. Компакт и его непрерывный образ

Определение 1.1. *$f(x)$ определена на $E \subset \mathbb{R}^m$ $(m \geq 1)$, $\quad \bar{x}_0 \in E$, $\bar{x} = (x^{(j)})_{j=1}^m$.*
1) f называется непрерывной в точке $\bar{x}_0$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, \bar{x} \in E \quad ||\bar{x} - \bar{x}_0|| < \delta \Rightarrow |f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)| < \varepsilon.$$

Это определение **Коши.** *Здесь $||\bar{x}||$ есть*

$$||\bar{x}||_1 = \sum_{j=1}^m |x^{(j)}| \text{ или } ||\bar{x}||_2 = \left(\sum_{j=1}^m |x^{(j)}|^2\right)^{1/2} \text{ или } ||\bar{x}||_\infty = \max_{j=\overline{1,m}} |x^{(j)}|.$$

2) f непрерывна в точке $\bar{x}_0$, если

$$\forall\, O_\varepsilon(f(\bar{x}_0)) \;\; \exists\, O_\delta(\bar{x}_0) \;\; \forall\, \bar{x} \in O_\delta(\bar{x}_0) \bigcap E \quad f(\bar{x}) \in O_\varepsilon(f(\bar{x}_0));$$

Это определение на языке окрестностей.
3) f непрерывна в т. $\bar{x}_0$, если

$$\forall\, O(f(\bar{x}_0)) \;\; \exists\, O(\bar{x}_0) \;\; f(O(\bar{x}_0)) \subset O(f(\bar{x}_0)).$$

Это топологическое определение.
4) Если $\bar{x}_0$ – предельная точка множества E, то $f(\bar{x})$ непрерывна в точке $\bar{x}_0$ тогда и только тогда, когда

$$f(\bar{x}_0) = \lim_{\substack{\bar{x} \to \bar{x}_0 \\ \bar{x} \in E}} f(\bar{x}).$$

5) Если $\bar{x}_0$-предельная точка множества E то $f(\bar{x})$ непрерывна в точке $\bar{x}_0$ тогда и только тогда, когда

$$\forall \bar{x}_n \to \bar{x}_0 \;\; (\bar{x}_n \in E) \quad f(\bar{x}_n) \to f(\bar{x}_0).$$

Определение 1.2. *Множество $K \subset \mathbb{R}^m$ называется компактным, если из любого его покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.*

Теорема 1.1. *Множество $K \subset \mathbb{R}^m$ компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто.*

Теорема 1.2. *Если f непрерывна на компакте K, то образ $f(K)$ есть компактное множество.*

Доказательство. 1) Покажем,что $f(K)$ ограничено. От противного. Пусть $f(K)$ не ограничено. Тогда

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \;\; \exists\, \bar{x}_n \in K, \quad |f(\bar{x}_n)| > n.$$

Но $(\bar{x}_n)_{n=1}^\infty$ – ограниченная последовательность, следовательно, из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $(\bar{x}_{n_k})_{k=1}^\infty$. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} \bar{x}_{n_k} = \bar{x}_0$. Но K замкнутое, следовательно, $\bar{x}_0 \in K$ и $f(\bar{x})$ непрерывна в точке $\bar{x}_0$. Отсюда $f(\bar{x}_0) = \lim\limits_{k\to\infty} f(\bar{x}_{n_k})$. Следовательно, последовательность $f(\bar{x}_{n_k})_{k=1}^\infty$ ограничена, что противоречит выбору $\bar{x}_n$.
2) Покажем, что $f(K)$ замкнуто. Выбираем $\bar{y}_0$ - предельную точку $f(K)$, т.е. существует последовательность $\bar{x}_k \in K$, что $\bar{y}_0 = \lim\limits_{k\to\infty} f(\bar{x}_k)$. Но $(\bar{x}_k)_{k=1}^\infty$ ограничена, значит существует подпоследовательность $\bar{x}_{n_k} \to \bar{x}_0 \in K$ и $f(\bar{x}_0) = \lim f(\bar{x}_{n_k})$. Следовательно, $\bar{y}_0 = f(\bar{x}_0)$, т.е. $\bar{y}_0 \in f(K)$. $\square$

2. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

Определение 2.1. *Пусть $f(x)$ определена на $E \subset \mathbb{R}$. f называется равномерно непрерывной на E, если*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta > 0 \ \forall\, x', x'' \in E, \quad |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Предложение 2.1. *Если $f(x)$ равномерно непрерывна на E, то $f(x)$ непрерывна в каждой точке множества E.*

Замечание. Обратное неверно, т.е. из непрерывности не следует равномерная непрерывность, например, функция

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \in (0,1))$$

непрерывна в каждой точке $x \in (0,1)$. Но она не равномерно непрерывна на $(0,1)$, так как, если выбирать $x' = \frac{1}{k}$, $x'' = \frac{1}{k+1}$, то $|x' - x''| = \frac{1}{k(k+1)} \to 0$, но $|f(x') - f(x'')| = |k+1-k| = 1$ не стремится к 0.

Теорема 2.2 (Теорема Кантора). *Если $f(x)$ непрерывна на компактном множестве K, то $f(x)$ равномерно непрерывна на K.*

Доказательство. Доказательство проведем от противного. Пусть $f(x)$ не является равномерно непрерывной. Тогда

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0 \ \forall\, \delta_n = \frac{1}{n} \ \exists\, x_n', x_n'' \in K, \quad |x_n' - x_n''| < \frac{1}{n} \text{ но } |f(x_n') - f(x_n'')| \geq \varepsilon_0.$$

Рассмотрим последовательность (x_n'). Она ограничена, значит, существует сходящаяся подпоследовательность $x'_{n_k} \to x_0 \in K$ (так как K – компактное), следовательно, $x''_{n_k} \to x_0 \in K$, и $f(x_0) = \lim f(x'_{n_k}) = \lim f(x''_{n_k})$ (так как $f(x)$ непрерывна). Тогда $\lim\limits_{k\to\infty}(f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})) = 0$, что противоречит условию $|f(x_n') - f(x_n'')| > \varepsilon_0$. $\square$

3. Производная функции действительной переменной. Геометрический и физический смысл. Теорема Ролля, теорема Лагранжа

Определение 3.1. *Пусть $f(x)$ определена в $O(x_0)$. Число*

$$f'(x_0) \overset{df}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

называется производной в точке x_0.

Геометрический смысл. $f'(x_0)$ есть tg угла наклона касательной. Касательная есть предельное положение секущей или: l касательная в точке M_0, если $\lim\limits_{M \to M_0} \frac{d(M,l)}{d(M,M_0)} = 0$, $M \in l$.

Физический смысл: если $S(t)$ путь за время t, то $(S(t) - S(t_0))$ - путь за время от t до t_0, $\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}$ – средняя скорость. Предел $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}$ называется мгновенной скоростью в момент времени t_0.

Таким образом $S'(t_0)$ – это мгновенная скорость.

Теорема 3.1 (Ролля). *Если 1) $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$,*
2) $f(x)$ дифференцируема в (a,b),
3) $f(a)=f(b)$,
то $\exists\, x_0 \in (a,b)$, в которой $f'(x_0)$=0.

Доказательство. Рассмотрим два случая: 1) $\forall\, x \in (a,b)\ \ f(x)=f(a)\ \Rightarrow\ f'(x)\equiv 0$.
2) $\exists\, x \in (a,b)$ в котором $f(x) \neq f(a)$. Предположим для определенности, что $f(x) > f(a)$. Следовательно, $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) = y_0 > f(a)$. Но f непрерывна, следовательно, $y_0 = f(x_0)$ и $x_0 \neq a$, $x_0 \neq b$, и в точке x_0 достигается max. Отсюда, по теореме Ферма $f'(x_0)=0$. $\square$

Теорема 3.2 (Лагранжа). *Если 1) $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, 2) $f(x)$ дифференцируема в (a,b), то существует $x_0 \in (a,b)$, в которой $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(x)=f(x)-\lambda x$ и подберем λ так, чтобы $g(a) = g(b)$, т.е. $f(a)-\lambda a = f(b)-\lambda b$. Откуда $f(b)-f(a)=\lambda(b-a)\ \Rightarrow\ \lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Осталось применить теорему 3.1 для функции $g(x)$. $\square$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа: На интервале (a,b) существует точка x_0 касательная в которой параллельна хорде, соединяющей точки $(a,f(a))$, $(b,f(b))$.

4. Интеграл Римана от непрерывной функции. Формула Ньютона-Лейбница

Определение 4.1. *Пусть $f(x)$ определена на $[a,b]$, $\chi=\{x_k\}_{k=0}^n$ разбиение отрезка $[a,b]$*

$$a=x_0<x_1<...<x_n=b$$

и пусть $\xi_k \in [x_{k-1},x_k]$-метки. Обозначим $d(\chi)=\max\limits_{1\le k\le n}(x_k-x_{k-1})$, $\mathring{\chi}=([\bar{x}_{k-1},x_k],\xi_k)_{k=1}^n$ – отмеченное разбиение. Суммы

$$S(f,\mathring{\chi})=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

называются интегральными суммами. Функция $f(x)$ называется интегрируемой по Риману или R-интегрируемой на $[a,b]$, если $\exists\, I(f)\in\mathbb{R}$, такое, что

$$\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,\delta>0\ \ \forall\ \ \mathring{\chi}=([\bar{x}_{k-1},x_k],\xi_k),\ \ d(\chi)<\delta,$$

$$|I(f)-\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k|<\varepsilon.$$

Обозначение: $\int_a^b f(x)dx$ или $(R)\int_a^b f(x)dx$.
Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d(\chi)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Лемма 4.1 (Критерий Коши (R) интегрируемости).

$$f\in R[a,b]\ \Leftrightarrow\ \forall\,\varepsilon>0\,\exists\,\delta>0\,\forall\ \mathring{\chi}_1,\mathring{\chi}_2\ll\delta\quad |S(f,\mathring{\chi}_1)-S(f,\mathring{\chi}_2)|<\varepsilon.$$

Теорема 4.2. *Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то она интегрируема по Риману на $[a,b]$.*

Доказательство. Так как $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то значит $f(x)$ равномерно непрерывна. Поэтому,

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, \delta > 0\ \ \forall\, x', x'' \in [a,b], \quad |x' - x''| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Выберем два разбиения $\overset{\circ}{\chi}_1 \ll \delta, \overset{\circ}{\chi}_2 \ll \delta$, и пусть

$$\overset{\circ}{\chi}_1 = ([x'_{i-1}, x'_i], \xi'_i)_{i=1}^{n_1}, \quad \overset{\circ}{\chi}_2 = ([x''_{j-1}, x''_j], \xi''_j)_{j=1}^{n_2}.$$

Образуем новое разбиение $\chi_1 = \chi_1 \cup \chi_2$, т.е. в χ входят точки x'_i и x''_j. Ясно, что χ более мелкое разбиение, чем χ_1 и χ_2. Пусть $\overset{\circ}{\chi} = ([x_{k-1}, x_k], \xi_k)_{k=1}^{n}$. Тогда

$$S(f, \overset{\circ}{\chi}) - S(f, \overset{\circ}{\chi}_1) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - \sum_{i=1}^{n_1} f(\xi'_i)\Delta x'_i = \sum_{i=1}^{n_1}\sum_{k} f(\xi_k)\Delta x_k - \sum_{i=1}^{n_1} f(\xi'_i)\Delta x'_i,$$

причем в сумме $\sum_k f(\xi_k)\Delta x_k$ суммирование происходит по тем k, для которых $[x_{k-1}, x_k] \subset [x'_{i-1}, x'_i]$.
Очевидно, что

$$\Delta x'_i \inf_{[x'_{i-1}, x'_i]} f(x) \le \sum_k f(\xi_k)\Delta x_k \le \Delta x'_i \sup_{[x'_{i-1}, x'_i]} f(x)$$

и так как функция $f(x)\cdot\Delta x'_i$ непрерывна на $[x'_{i-1}, x'_i]$, то существует точка $\eta_i \in [x'_{i-1}, x'_i]$ такая, что

$$\sum_{k=1} f(\xi_k)\Delta x_k = f(\eta_i)\Delta x'_i.$$

Поэтому

$$|S(f, \overset{\circ}{\chi}) - S(f, \overset{\circ}{\chi}_1)| = \left|\sum_{i=1}^{n_1} f(\eta_i)\Delta x'_i - \sum_{i=1}^{n} f(\xi'_i)\Delta x_i\right| \le \sum_{i=1}^{n_1} |f(\eta_i) - f(\xi'_i)|\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Аналогично,

$$|S(f, \overset{\circ}{\chi}) - S(f, \overset{\circ}{\chi}_2)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда окончательно находим

$$|S(f, \overset{\circ}{\chi}_1) - S(f, \overset{\circ}{\chi}_2)| \le |S(f, \overset{\circ}{\chi}_1) - S(f, \overset{\circ}{\chi})| + |S(f, \overset{\circ}{\chi}) - S(f, \overset{\circ}{\chi}_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т.е. выполнен критерий Коши (R)-интегрируемости. □

Теорема 4.3. *Если $F'(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то*

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Запишем и преобразуем разность

$$|S(F',\chi)-(F(b)-F(a))| = \left|\sum_{k=1}^{n} F'(\xi_k)\Delta x_k - \sum_{k=1}^{n}(F(x_k)-F(x_{k-1}))\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n} F'(\xi_k)\Delta x_k - F'(\eta_k)\Delta x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n}|F'(\xi_k)-F'(\eta_k)|\cdot\Delta x_k. \tag{4.1}$$

Так как F' непрерывна, то она равномерно непрерывна и поэтому

$$\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,\delta>0\ \ \forall\,x',x''\quad |x'-x''|<\delta \Rightarrow |F'(x')-F'(x'')|<\varepsilon. \tag{4.2}$$

Если $d(\chi)<\delta$, то из (4.1) и (4.2) получаем

$$|S(F',\chi)-(F(b)-F(a))|<\varepsilon(b-a)\ \ \square$$

Следствие. *Если $f(x)$ непрерывна и имеет первообразную $F(x)$, то*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).$$

Это формула Ньютона-Лейбница.

5. Интегрируемость модуля

Лемма 5.1 (теорема сжатия). $f\in R[a,b]\ \ \Leftrightarrow\ \ \forall\,\varepsilon>0\ \exists$ *ступенчатые функции $h(x)$ и $H(x)$ такие, что*
1) $h(x)\leq f(x)\leq H(x)$
2) $\int_a^b H-\int_a^b h<\varepsilon$.

Теорема 5.2. *Если $f\in R[a,b]$, то $|f|\in R[a,b]$ и справедливо неравенство*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Доказательство. 1)Так как $f\in R[a,b]$, то по лемме 5.1 $\forall\,\varepsilon>0\,\exists\,H(x),h(x)$, для которых выполнены 1)и 2). Можно считать, что $H(x)$ и $h(x)$ построены по одному и тому же разбиению $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$. Обозначим $h_i=h(x),\ H_i=H(x)$ при $x\in(x_{i-1},x_i)$. Построим ступенчатые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ следующим образом. Пусть $x\in(x_{i-1},x_i)$.
Если $h_i\geq 0$, то $\alpha(x)=\alpha_i=h_i,\ \beta(x)=\beta_i=H_i$.
Если $h_i<0$ и $H_i\geq 0$, то $\alpha(x)=\alpha_i=0,\ \beta(x)=\beta_i=H_i-h_i$.
Если $h_i<0$ и $H_i<0$, то $\alpha(x)=-H_i,\ \beta(x)=\beta_i=-h_i$.
Тогда $\alpha(x)\leq|f(x)|\leq\beta(x)$, причем

$$\int\limits_a^b\beta-\int\limits_a^b\alpha=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\Delta x_i-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}(\beta_i-\alpha_i)\Delta x_i\leq\sum_{i=1}^{n}(H_i-h_i)\Delta x_i=\int\limits_a^b H-\int\limits_a^b h<\varepsilon,$$

и по лемме 5.1 $|f|\in R[a,b]$.
2) Так как $-|f(x)|\leq f(x)\leq|f(x)|$, то

$$-\int_a^b|f|\leq\int_a^b f\leq\int_a^b|f|,$$

следовательно,

$$\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f| \quad \square.$$

Замечание. Обратное неверно. Из $|f| \in R(a,b)$ не следует, что $f \in R(a,b)$. Например,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \ - \ \text{рационально} \\ -1 & x \in [0,1] \ - \ \text{иррационально} \end{cases}$$

Тогда $|f| \equiv 1$ и $|f|$ интегрируема на $[a,b]$, но для функции f не выполнен критерий Коши (R)-интегрируемости, следовательно, f неинтегрируема по Риману. $\square$

6. Формула Тейлора. Различные формы записи остаточного члена

Теорема 6.1. *Если* $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ *– многочлен и* $x_0 \in \mathbb{R}$, *то*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^k \tag{6.1}$$

Равенство (6.1)называют формулой Тейлора для многочленов.

Определение 6.1. *Если* $f(x)$ *имеет на* $[a,b]$ n*-ю производную, то многочлен*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \quad (x_0 \in (a,b))$$

называется многочленом Тейлора функции f *в* $O(x_0)$. *Разность* $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ *называется остатком. Равенство*

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x)$$

называется формулой Тейлора функции $f(x)$ *в* $O(x_0)$.

Теорема 6.2. *Если* $f(x)$ *имеет непрерывные производные до* $n+1$*-го порядка в* $O(x_0)$, *то справедливо равенство*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \Theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

где $0 < \Theta < 1$, *т.е. точка* $\xi = x_0 + \Theta(x-x_0) \in (x_0, x)$.
$R_n = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\Theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ *называют остатком в форме Лагранжа.*

Теорема 6.3. *Если* $f^{(n+1)}(x)$ *непрерывна в т.*x_0, *то*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \bar{\bar{o}}(x-x_0)^{n+1} \quad (x \to x_0). \tag{6.2}$$

Доказательство. Запишем $f(x)$ в виде

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}+$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(\xi)-f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\alpha(x)\cdot(x-x_0)^{n+1}$$

и так как $f^{(n+1)}(x)$ непрерывна в точке x_0, то $\alpha(x)\to 0$ при $x\to x_0$, т.е.

$$\alpha(x)\cdot(x-x_0)^{n+1}=\bar{\bar{o}}(x-x_0)^{n+1}.\ \square$$

Равенство (6.2) называется формулой Тейлора с остатком в форме Пеано.

7. Необходимые и достаточные условия экстремума

Определение 7.1. *Пусть $f(x)$ определена в $O(x_0)$. $f(x)$ имеет* min (max) *в точке x_0, если*

$$\exists\, O_\delta(x_0)\subset O(x_0)\ \forall\, x\in O_\delta(x_0)\quad f(x_0)\le f(x),\ \ (f(x_0)\ge f(x))\ .$$

Если $f(x)$ имеет в точке x_0 min *или* max*, то говорят, что она имеет в точке x_0 экстремум.*

Теорема 7.1 (Теорема Ферма). *Если $f(x)$ определена в $O(x_0)$, дифференцируема в точке x_0 и имеет в точке x_0 экстремум, то $f'(x_0)=0$.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ имеет в точке x_0 max. Если $x\in(x_0,x_0+\delta)$, то $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$, значит $f'(x_0)\le 0$.

Если $x\in(x_0-\delta,x_0)$, то $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$, значит $f'(x_0)\ge 0$. Соединяя полученные неравенства, имеем $f'(x_0)=0$. Случай , когда в точке x_0 – min, получается заменой $f(x)$ на $-f(x)$ $\square$

Теорема 7.2 (1-е достаточное условие экстремума). *Пусть $f(x)$ дифференцируема в $O(x_0)$.*
1) Если $f'(x)<0$ при $x<x_0$ и $f'(x)>0$ при $x>x_0$, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет min.
2) Если $f'(x)>0$ при $x<x_0$ и $f'(x)<0$ при $x>x_0$, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет max.

Доказательство. По теореме Лагранжа $f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)$, откуда и следует утверждение теоремы. $\square$

Теорема 7.3 (2-е достаточное условие экстремума). *Пусть $f(x)$ имеет в $O(x_0)$ непрерывную вторую производную и $f'(x_0)=0$.*
1) Если $f''(x_0)>0$, то в точке x_0 – min.
2) Если $f''(x_0)<0$, то в точке x_0 – max.

Доказательство. По формуле Тейлора

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0+\Theta(x-x_0))}{2!}(x-x_0)^2=\frac{f''(x_0+\Theta(x-x_0))}{2}(x-x_0)^2.$$

1) Если $f''(x_0)>0$, то $f''(x_0+\Theta(x-x_0))>0$ в некоторой $O_\delta(x_0)$, значит, $f(x)-f(x_0)\ge 0$, следовательно, достигается min. Случай 2) рассматривается аналогично. $\square$.

8. Числовой ряд. Абсолютная и условная сходимость. Интегральный признак

Определение 8.1. *Числовой ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \tag{8.1}$$

называется сходящимся, если существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ *называются частичными суммами.*

Следствие. *Если ряд (8.1) сходится, то* $\lim a_n = 0$. Очевидно, так как $a_n = S_n - S_{n-1}$ и $\lim a_n = \lim S_n - \lim S_{n-1} = S - S = 0$ $\square$.

Определение 8.2. *Числовой ряд* $\sum a_k$ *называется абсолютно сходящимся, если*

$$\sum |a_k| < \infty.$$

Если ряд сходится, но не абсолютно, он называется условно сходящимся.

Теорема 8.1. *Если* $a_n \geq 0$, *то ряд* $\sum a_k$ *сходится тогда и только тогда, когда последовательность частичных сумм ограничена.*

Доказательство. Очевидно, так как $S_{n+1} = S_n + a_n \geq S_n$, т.е. S_n есть возрастающая последовательность. Но возрастающая последовательность имеет предел тогда и только тогда, когда она ограничена $\square$.

Теорема 8.2 (Признак Лейбница). *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(-1)^n$ *и* $a_n \downarrow 0$. *Тогда ряд сходится и для остатка* $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ *справедливо неравенство*

$$|R_n| \leq a_{n+1}.$$

Следствие. *Существуют условно сходящиеся ряды.* Например, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$.

Теорема 8.3 (Интегральный признак). *Пусть*
1) $a_n \downarrow 0,\ a_n \geq 0$,
2) $f(x) \downarrow 0\ \ (x \to \infty)$,
3) $f(n) = a_n$.
Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится тогда и только тогда, когда интеграл* $\int_1^{\infty} f(x)dx$ *сходится, т.е. существует* $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_1^b f(x)dx$.

Доказательство.
1. Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то последовательность $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ – ограничена. Из монотонности функции f имеем

$$\int_1^{n+1} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) = a_1 + a_2 + ... + a_n = S_n,$$

то есть последовательность интегралов $\left(\int_1^n f\right)_n^\infty$ есть возрастающая ограниченная последовательность. Значит, существует

$$\lim_{n\to+\infty}\int_1^n f(x)dx = \int_1^\infty f(x)dx.$$

Так как $f(x)\downarrow 0$, то $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^n f(x)dx$. В самом деле, если $n+1>b>n$, то $\int_n^b f(x)dx \le f(n)$ и $f(n)\to 0$ по условию. Следовательно, $\int_n^b f(x)dx \to 0$, значит, $\lim\limits_{b\to\infty}\int_1^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty}\int_1^n f(x)dx$.
2. Обратное утверждение получается аналогично, а именно:

$$S_n - a_1 = a_2 + a_3 + ... + a_n \le \int_1^n f(x)dx \le C.$$

Отсюда следует, что частные суммы ограничены, значит, ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k$ сходится. Следовательно, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. □

Пример. Пусть $f(x)=\frac{1}{x^p}$ Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$ сходится, если $p>1$, расходится, если $p\le 1$.

9. Функциональный ряд. Равномерная сходимость. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций

Определение 9.1. *Пусть $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ – функциональная последовательность, $x\in E\subset\mathbb{R}$.*
1) Последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ на E поточечно, если $\forall\, x_0\in E,\ \ f_n(x_0)\to f(x_0)$.
2) Последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ на E равномерно, если

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \ \exists\, n_0\in\mathbb{N},\ \ \forall\, n\ge n_0,\ \ \forall\, x\in E,\ \ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

Геометрический смысл. График функции $f_n(x)$ при $n\ge n_0$ лежит внутри 2ε-полоски с центром в $f(x)$.

Теорема 9.1. *Если $f_n(x)$ сходится равномерно к $f(x)$ на E и $f_n(x)$ непрерывны на E, то $f(x)$ непрерывна на E.*

Доказательство. Выберем $\varepsilon>0$. Тогда $\exists\, n_0$, что $\forall\, x\in E$ $|f_{n_0}(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$. Пусть $x_0\in E$. Так как $f_{n_0}(x)$ непрерывна в точке x_0, то $\exists\,\delta>0,\ \ \forall\, x\in E,\ \ |x-x_0|<\delta\Rightarrow |f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$. Тогда $\forall\, x\in E,$ для которых $|x-x_0|<\delta$ выполняется неравенство $|f(x)-f(x_0)|\le|f(x)-f_{n_0}(x)|+|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)|+|f_{n_0}(x_0)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}$. □

Теорема 9.2. *1) Если $f_n(x)$ сходится равномерно на E к $f(x)$, то $f_n(x)$ сходятся к $f(x)$ на E поточечно.*
2) Обратное утверждение неверно.

Доказательство. 1) Очевидно.
2) Например, $f_n(x) = x^n, \quad x \in [0,1] \quad (E = [0,1])$. Тогда $\forall\ x \in [0,1), \quad f_n(x) = x^n \to 0$ и $f_n(1) = 1^n \to 1$, т.е. поточечно $f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1. \end{cases}$ Но $f(x)$ не является непрерывной на $[0,1]$, следовательно, $f_n(x)$ не сходится равномерно. □

Определение 9.2. *Функциональный ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *называется сходящимся равномерно к функции* $f(x)$ *на* E, *если последовательность частных сумм* $S_n(x)$ *сходится равномерно к* $f(x)$ *на* E.

Поэтому справедлива

Теорема 9.3. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится равномерно на* E, $f_n(x)$ *непрерывны на* E, *то сумма ряда, т.е. функция* $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *непрерывна на* E.

Теорема 9.4 (Признак Вейерштрасса). *Если 1) на* E $|f_n(x)| \le a_n$
2) $\sum a_n < +\infty$,
то функциональный ряд $\sum f_n(x)$ *сходится на* E *абсолютно и равномерно.*

10. Степенные ряды. Теорема Коши-Адамара о радиусе сходимости

Определение 10.1. *Ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{10.1}$$

называется степенным рядом. Он всегда сходится в точке $x = 0$.

Основной вопрос: в каких точках ряд сходится, а в каких нет?

Теорема 10.1 (Абеля). *1) Если ряд (10.1) сходится в точке* $x_0 \ne 0$, *то он сходится в интервале*

$$|x| < |x_0| \quad \text{т.е. при} \quad -|x_0| < x < |x_0|$$

поточечно, а в любом отрезке

$$|x| \le d < |x_0|,$$

лежащем внутри интервала $(-|x_0|, |x_0|)$, *сходится абсолютно и равномерно.*
2) Если (10.1) расходится в точке $x_0 \ne 0$, *то он расходится* $\forall\ x$ *таких, что* $|x| > |x_0|$.

Определение 10.2. *Число*

$$R = \sup\{|x_0| : \ \sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n \ \text{сходится}\}$$

называют радиусом сходимости ряда (10.1).

Следствие. *Если $R > 0$ – радиус сходимости ряда (10.1), то*
1) ряд сходится в интервале $|x| < R$,
2) расходится при $|x| > R$,
3) при $|x| = R$ ряд может сходиться, а может расходиться.

Теорема 10.2. *Если $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L > 0$, то $\frac{1}{L} = R$.*

Доказательство. 1) Если $|x_0| < \frac{1}{L}$, то $|x_0|L < 1$. Так как $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L$, то $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n x_0^n|} = |x_0|L < 1$, следовательно, по признаку Коши ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n x_0^n|$ сходится.
2) Пусть $|x_0| > \frac{1}{L}$. Тогда $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n x_0^n|} = |x_0|L > 1$. Откуда следует, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$ расходится, так как не выполнено необходимое условие сходимости. □

11. Тригонометрический ряд Фурье и интеграл Фурье. Теорема Римана-Лебега. Интеграл Дирихле

Определение 11.1. *Пусть $f \in L(-\pi, \pi)$ и 2π периодична. Ряд*

$$\sigma(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

называется рядом Фурье функции $f(x)$, а числа a_n, b_n – коэффициенты Фурье. Сумма

$$S_n(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

называется частичной суммой ряда.

Теорема 11.1. *Для частичной суммы $S_n(f, x)$ справедливо равенство*

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt.$$

Выражение $\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} = D_n(t)$ называется ядром Дирихле.

Доказательство. 1) $D_n(t) = \frac{1}{2} + \cos t + ... + \cos nt$. В самом деле, умножим и поделим на $2 \sin \frac{t}{2}$:

$$\frac{2\sin\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + ... + \cos nt\right) = \left(2 \sin \frac{t}{2}\right)^{-1} \cdot$$

$$\left(\sin\frac{t}{2} + \sin\left(t + \frac{t}{2}\right) - \sin\left(t - \frac{t}{2}\right) + ... + \sin\left(nt + \frac{t}{2}\right) - \sin\left(nt - \frac{t}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin t}.$$

2)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\cos t+...+\cos nt\right)f(x-t)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)dt + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\cos ntdt\right) =$$

обозначим $x-t=\tau$, тогда

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\pi+x}^{x-\pi} f(\tau)(-d\tau) + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{x+\pi}^{x-\pi} f(\tau)\cos k(x-\tau)d(-\tau) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)d\tau + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)(\cos kx\cos k\tau + \sin kx\sin k\tau)d\tau =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx + b_k\sin kx. \quad \square$$

Теорема 11.2 (Римана-Лебега). *Если* $f \in L(-\pi,\pi)$, *то* $a_n \to 0,\ \ b_n \to 0$.

Ряд Фурье можно записать в комплексной форме

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx},$$

где

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx.$$

Ряд Фурье можно записать для функции с периодом $2l$ (а не 2π)

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\pi i\frac{k}{l}x},$$

где

$$c_k = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-\frac{\pi}{l}ikx}dx.$$

Используя это выражение, можно получить аналог ряда Фурье для функции $f(x)$, определенной на $(-\infty,+\infty)$, без требования периодичности. Предположим, что $f=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\frac{\pi}{l}ikx}$, и $c_k = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)e^{-\frac{\pi}{l}ikt}dt$. Подставим коэффициенты в ряд, получим

$$f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)e^{\frac{\pi k}{l}i(x-t)}dt.$$

Обозначим $\frac{\pi k}{l}=\omega_k, \ \Rightarrow \Delta\omega_k = \frac{\pi}{l} \ \ \Rightarrow \frac{1}{l}=\frac{1}{\pi}\Delta\omega_k \ \ \Rightarrow$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\Delta\omega_k\int_{-l}^{l} f(t)e^{i\omega_k(x-t)}dt.$$

Переходим к пределу при $l \to \infty$, имеем

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega(x-t)} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega x} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt =$$

обозначим $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega.$$

Таким образом, получаем пару формул:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \tag{12.1}$$

– преобразование Фурье.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \tag{12.2}$$

– обратное преобразование Фурье.

Теорема 11.3 (Планшереля). *Если $f \in L_2(-\infty, \infty)$, то справедливы равенства:*

$$\hat{f}(\omega) = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} f(t) e^{-i\omega t} dt,$$

$$f(x) = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} \hat{f}(\omega) e^{+i\omega t} d\omega,$$

причем предел понимается в смысле сходимости по норме в $L_2(-\infty, +\infty)$.

12. Теорема о суммируемости ряда Фурье непрерывной функции

Теорема 12.1 (Фейера). *Существует непрерывная функция $f(x)$, 2π периодическая, для которой ряд Фурье не сходится равномерно.*

Эта теорема есть следствие неограниченности констант Лебега, но ее доказательство выходит за рамки стандартного курса анализа. Она доказывается в спецкурсе.

Определение 12.1. *Пусть $f \in L(-\pi, \pi)$ имеет ряд Фурье вида*

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \tag{13.1}$$

и $S_n(f, x)$ – частичная сумма ряда (13.1).
Ряд (13.1) называется суммируемым методом средних арифметических, если средние арифметические (или средние Фейера)

$$\sigma_n(f, x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f, x)$$

имеют предел при $n \to \infty$. Если предел понимается как поточечный, то суммируемость называется поточечной, если как равномерный, то суммируемость называется равномерной.

Лемма 12.2.

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}dt.$$

Доказательство. Имеем

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{n}\cdot(S_0+S_1+...+S_{n-1}) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f,x) =$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_k(t)dt = \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\sum_{k=0}^{n-1} D_k(t)dt.$$

Поэтому достаточно доказать, что

$$\sum_{k=0}^{n-1} D_k(t) = \frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}.$$

Для этого левую часть умножим и поделим на $2\sin\frac{t}{2}$. Получаем

$$\sum_{k=0}^{n-1} D_k(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{1}{(2\sin\frac{t}{2})^2}\sum_{k=0}^{n-1} 2\sin\frac{t}{2}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t =$$

$$= \frac{1}{(2\sin\frac{t}{2})^2}\cdot(1-\cos nt) = \frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}. \qquad \square$$

Определение 12.2. *Функция $K_n(t) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} D_k(t)$ называется ядром Фейера.*

Свойства. 1) $K_n(t) \geq 0$ – доказано в лемме 13.1.
2) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = 1$.
Доказательство.

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{-\pi}^{\pi} D_k(t)dt =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\int_{-\pi}^{\pi} D_0(t)dt + \int_{-\pi}^{\pi} D_1(t)dt + ... + \int_{-\pi}^{\pi} D_{n-1}(t)dt\right) = \frac{1}{n}\cdot n\pi = \pi. \quad \square$$

Теорема 12.3. *Если $f(x)$ непрерывна на $[-\pi,\pi]$, то средние Фейера $\sigma_n(f,x)$ сходятся равномерно к $f(x)$ на $[-\pi,\pi]$.*

Доказательство.

$$|\sigma_n(f,x) - f(x)| = \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_n(t)dt - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)K_n(t)dt\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)(f(x-t)-f(x))dt\right|. \tag{13.2}$$

Так как $f(x)$ непрерывна, то $f(x)$ равномерно непрерывна, следовательно,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0, \;\; \forall\, x', x'', \;\; |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Интеграл в (12.2) представим в виде:

$$\int_{-\pi}^{\pi} = \int_{|t|<\delta} + \int_{|t|\geq\delta}. \tag{13.3}$$

Для первого интеграла имеем с учетом свойства 2)

$$\left| \int_{|t|<\delta} \right| \leq \varepsilon \int_{|t|<\delta} K_n(t)dt \leq \varepsilon \cdot \pi.$$

Обозначим $M = \sup|f(x)|$. Тогда для второго интеграла имеем

$$\int_{|t|\geq\delta} \leq \frac{1}{n} \int_{|t|\geq\delta} |K_n(t)| \cdot 2Mdt = \frac{2M}{n} \int_{|t|\geq\delta} \frac{dt}{2\sin^2\frac{t}{2}} \leq$$

$$\leq \frac{2M}{n} \frac{1}{2\sin^2\frac{\delta}{2}} \cdot 2\pi = \frac{2M \cdot \pi}{n \cdot \sin^2\frac{\delta}{2}} \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

т.е. существует n_0,что $\forall\, n \geq n_0$, $\int_{|t|\geq\delta} < \varepsilon$. Подставляя найденные оценки в (13.3), получаем утверждение теоремы. □

13. Пространство L_2. Ортонормированные системы в L_2. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля

Определение 13.1. *Множество функций, измеримых на* $[0, 1]$ *и таких, что*

$$\int_{[0,1]} f^2(x)dx < \infty,$$

называется пространством $L_2(0, 1)$.

Для функций из L_2 справедливо неравенство Коши-Буняковского:

$$\int_0^1 |fg|dx \leq \left(\int_0^1 f^2dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 g^2dx \right)^{1/2}$$

т.е., если $f, g \in L_2$, то $f \cdot g \in L_1$.

Поэтому равенство

$$(f, g) = \int_0^1 fgdx$$

определяет в L_2 скалярное произведение. Можно проверить свойства:
1) $(f, f) \geq 0$, $\quad (f, f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ почти всюду,
2) $(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$,
3) $(f, g) = (g, f)$.

Определение 13.2. *Система функций $(\varphi_n(x))_{n=1}^{\infty}$ из L_2 называется ортогональной системой, если*

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \lambda_n \neq 0, & m = n. \end{cases}$$

Определение 13.3. *Система функций $(e_n(x))_{n=1}^{\infty}$ из L_2 называется ортонормированной системой, если*

$$(e_n, e_m) = \delta_{m,n}.$$

Теорема 13.1 (о минимуме уклонении). *Если $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная система в L_2 и $f \in L_2$, то выражение*

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|_2$$

принимает наименьшее значение, если $a_k = (f, e_k) = \int_0^1 f(x) e_k(x) dx$. При этом

$$\min_{a_k} \left\| f - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|_2^2 = ||f||_2^2 - \sum_{k=1}^{n} (f, e_k)^2.$$

Доказательство.

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|_2^2 = \left(f - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k, f - \sum_{j=1}^{n} a_j e_j \right) =$$

$$= (f, f) - 2 \sum_{k=1}^{n} a_k (f, e_k) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_k a_j (e_k, e_j) = ||f||_2^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} a_k (f, e_k) + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 =$$

$$= ||f||_2^2 - \sum_{k=1}^{n} (f, e_k)^2 + \sum_{k=1}^{n} \left((f, e_k)^2 - 2 (f, e_k) a_k + a_k^2 \right) =$$

$$= ||f||_2^2 - \sum_{k=1}^{n} (f, e_k)^2 + \sum_{k=1}^{n} \left((f, e_k) - a_k \right)^2.$$

Так как $\sum\limits_{k=1}^{n} \left((f, e_k) - a_k \right)^2 \geq 0$, то $||f - \sum||^2$ имеет min, если $\sum\limits_{k=1}^{n} \left((f, e_k) - a_k \right)^2 = 0$, т.е. при $a_k = (f, e_k)$. $\square$

Определение 13.4. *Числа $(f, e_k) = \int_0^1 f(x) e_n(x) dx$ называются коэффициентами Фурье по ортонормированной системе $(e_k)_{k=1}^{\infty}$. Ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} e_k(x) \cdot (f, e_k)$$

называется рядом Фурье функции f по ортонормированной системе $(e_k)_{k=1}^{\infty}$.

Следствие 1.
$$\left\|f-\sum_{k=1}^{n}e_k(x)\cdot c_k(f)\right\|_2^2=||f||_2-\sum_{k=1}^{n}c_k(f)^2.$$

Следствие 2. $\forall\ f\in L_2\quad \sum\limits_{k=1}^{n}c_k(f)^2\leq ||f||_2^2$.

Следствие 3.(Неравенство Бесселя) $\forall\ f\in L_2$ ряд $\sum c_k^2(f)$ сходится и справедливо неравенство
$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k(f)^2\leq ||f||_2^2.$$

Определение 13.5. *Ортонормированная система $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ называется полной в L_2, если*
$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k(f)^2=||f||_2^2.$$
Это равенство называют равенством Парсеваля.

Определение 13.6. *Ортонормированная система (e_n) называется замкнутой в L_2, если $\forall\ f\in L_2$ существует последовательность многочленов $p_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^{(n)}e_k(x)$ таких, что $||f-p_n(x)||_2\to 0$.*

Теорема 13.2. *Система (e_n) замкнута в L_2 тогда и только тогда, когда она полна в L_2.*

Доказательство. Достаточность. Система (e_n) полна, следовательно, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k(f)^2=||f||_2^2$. По теореме о min уклонении
$$\left\|f-\sum_{k=1}^{n}c_k(f)e_k(x)\right\|_2^2=||f||_2^2-\sum_{k=1}^{n}c_k(f)^2.$$
Переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем замкнутость.

Необходимость. Пусть система замкнута. Тогда
$$\forall\ \varepsilon>0\ \ \exists\ p(x)=\sum_{k=1}^{n_0}a_ke_k(x),\quad ||f(x)-p(x)||_2<\varepsilon.$$
Но тогда по теореме о минимуме уклонения $\left\|f(x)-\sum\limits_{k=1}^{n_0}c_ke_k(x)\right\|_2<\varepsilon$, следовательно,
$$||f||_2^2-\sum_{k=1}^{n_0}c_k(f)^2<\varepsilon,$$
откуда
$$||f||_2^2-\sum_{k=1}^{n}c_k(f)^2<\varepsilon,\quad \forall n\geq 0.$$

Следовательно,

$$||f||_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)^2. \quad \square$$

На экзамене нужно уметь: вычислять пределы последовательностей и функций, нннн приводить примеры непрерывных и разрывных функций, вычислять производные и частные производные, вычислять неопределенные и определенные интегралы, в том числе несобственные, приводить примеры сходящихся и расходящихся рядов, записывать формулы Тейлора основных элементарных функций, вычислять криволинейные и кратные интегралы.