# Кратный интеграл Лебега

**2020**

# Глава 1

# Мощность множества

## 1 Конечные и бесконечные множества

**Определение 1.1** *Два множества $X$ и $Y$ называются равномощными, если существует взаимно однозначное отображение $X$ на $Y$. Обозначается $X \sim Y$.*

**Теорема.** *Отношение равномощности есть отношение эквивалентности, т.е. оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.*

**Определение 1.2** *Множество $X$ называется бесконечным, если существует собственное подмножество $Y \subset X$, равномощное множеству $X$. В противном случае $X$ называется конечным множеством.*

Таким образом

$$X \text{ – бесконечное} \Leftrightarrow \exists Y \subset X, Y \neq X, Y \sim X.$$

**Теорема 1.1** *Если к конечному множеству $X$ добавить 1 элемент, то получим снова конечное множество.*

**Доказательство.** Пусть $X$ – конечное множество, $x$ – произвольный элемент. Покажем, что $X \bigcup \{x\}$ – конечное. Если $x \in X$, то $X \bigcup \{x\} = X \Rightarrow X \bigcup \{x\}$ – конечное. Поэтому будем считать, что $x \notin X$. Обозначим $Y = X \bigcup \{x\}$. Доказательство проведем от противного, предположим, что $Y = X \bigcup \{x\}$ – бесконечное множество. Следовательно, $\exists Z \subset X \bigcup \{x\}$ равномощно множеству $X \bigcup \{x\}$. Пусть $\varphi :\ X \bigcup \{x\}$ на собственное подмножество $Z \subset X \bigcup \{x\}$.
1) Предположим, что $\varphi(x) = x$, тогда $\varphi$ отображает $X$ на конечное собственное подмножество взаимно однозначно, значит, $X$ – бесконечно, что невозможно.
2) Пусть $\varphi(x) = y \neq x \Rightarrow y \in X$. Тогда $\varphi$ отображает $X$ на $Z \setminus \{x\} \setminus \{y\} \subset$

$X \Rightarrow X$ – бесконечное множество, что невозможно. $\square$
**Следствие.** *Если из бесконечного множества удалить 1 элемент, получится бесконечное множество.*
**Доказательство.** Пусть $X$ – бесконечное, $Y = X \setminus \{x\}$ – конечное. Тогда $Y \bigcup \{x\} = X$ – конечно, что невозможно. $\square$

# 2 Счетные множества

**Определение 2.1** *Множество $X$ называется счетным, если оно равномощно множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$. Т.е. существует отображение $\varphi :\ \mathbb{N} \to X$ взаимно однозначное, т.е. $\forall\, n,\ \varphi(n) \in X$, и если $m \neq n$, то $\varphi(n) \neq \varphi(m)$, иными словами, все элементы $X$ занумерованы натуральными числами.*

**Предложение 2.1** *Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.*

**Доказательство.** Пусть $X$ – бесконечное множество. Выберем $x_1 \in X$, тогда $X \setminus \{x_1\}$ – бесконечное множество. Выберем $x_2 \in X \setminus \{x_1\}$, тогда $X \setminus \{x_1, x_2\}$ – бесконечное множество. И так далее. Получаем множество $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \subset X$. Очевидно, что $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ – счетно. $\square$

**Предложение 2.2** *Конечное объединение счетных множеств счетно.*

**Доказательство.** Пусть

$$\begin{array}{l} X_1 = \{x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{1,n}, \ldots\} \\ X_2 = \{x_{2,1}, x_{2,2}, \ldots, x_{2,n}, \ldots\} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_m = \{x_{m,1}, x_{m,2}, \ldots, x_{m,n}, \ldots\} \end{array}$$

Занумеруем элементы множеств $X$ по столбцам, пропуская повторяющиеся. Тогда каждому элементу принадлежащему $X_1 \bigcup \ldots \bigcup X_m$ будет присвоен некоторый номер. $\square$

**Предложение 2.3** *Счетное объединение счетных множеств – счетно.*

**Доказательство.**

$$\begin{array}{l} X_1 = \{x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{1,n}, \ldots\} \\ X_2 = \{x_{2,1}, x_{2,2}, \ldots, x_{2,n}, \ldots\} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_m = \{x_{m,1}, x_{m,2}, \ldots, x_{m,n}, \ldots\} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Занумеруем элементы по диагонали, пропуская ранее занумерованные, получим $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_k$ – счетное множество. $\square$

**Предложение 2.4 (Принцип склеивания)** *Пусть даны множества* $X_\alpha, Y_\alpha$, *где* $X_\alpha$ *– дизъюнктны,* $Y_\alpha$ *– дизъюнктны,* $X_\alpha \sim Y_\alpha$. *Тогда* $\bigsqcup\limits_\alpha X_\alpha \sim \bigsqcup\limits_\alpha Y_\alpha$.

**Доказательство** очевидно. $X_\alpha \sim Y_\alpha \Leftrightarrow \exists \varphi_\alpha : \ X_\alpha \to Y_\alpha$ взаимно однозначно. Построим $\varphi(x) = \varphi_\alpha(x)$, если $x \in X_\alpha$. $\square$

## 3 Несчетное множество, множество мощности континуум

**Теорема 3.1** *Множество чисел из отрезка* $[0, 1]$ *– несчетно.*

**Доказательство.** Каждое число $x$ будем записывать в виде десятичной дроби $x = 0, x_1 x_2 \ldots x_n \ldots$. Предположим, что отрезок $[0, 1]$ – счетное множество, тогда все элементы $x \in [0, 1]$ можно занумеровать, т.е.

$$\begin{array}{l} x_1 = 0, x_{1,1} x_{1,2} x_{1,3} \ldots \\ x_2 = 0, x_{2,1} x_{2,2} x_{2,3} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = 0, x_{n,1} x_{n,2} x_{n,3} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Причем в этой таблице все числа из $[0, 1]$. Построим новое число $y$ следующим образом: для всех $n$ выберем $y_n \neq x_{n,n}$ и $y_n \subset [0, 1]$ и рассмотрим число $y = 0, y_1 y_2 \ldots y_n \ldots$. Это десятичная дробь из $[0, 1]$, но ее нет в таблице. Получили противоречие. $\square$

**Определение 3.1** *Множество, равномощное отрезку* $[0, 1]$, *называется множеством мощности континуум.*

**Теорема 3.2** *1)*$[a, b] \sim [a, b)$.
*2) Отрезок* $[0, 1] \sim [a, b] \Rightarrow [a, b]$ *– континуальное множество.*
*3) Отрезок* $[0, 1] \sim [0, +\infty] \Rightarrow [0, +\infty]$ *– континуальное множество.*
*4) Счетное объединение континуальных множеств есть множество мощности континуум.*

**Доказательство.** 1) Выбираем последовательность $x_0 = b, x_n = b - \frac{b-a}{2^n}, n \in \mathbb{N}$ и полагаем $\varphi(x_n) = x_{n+1}$ и $\varphi(x) = x$ при $x \neq x_n$. Утверждения 2) и 3) очевидны (проверить самостоятельно). 4) Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ – дизъюнктные континуальные множества. Тогда $X_1 \sim [0,1)$, $X_2 \sim [1,2)$, $\ldots$, $X_n \sim [n-1, n), \ldots$. Тогда по признаку смешивания $\bigsqcup X_n \sim \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} [n-1, n) = [0, +\infty)$ – континуум. $\square$

# 4 Теоремы Бернштейна–Кантора

**Теорема 4.1 (Первая теорема Кантора–Бернштейна)** *Пусть $X_0 \supset X_1 \supset X_2$ и $X_0 \sim X_2$. Тогда $X_1 \sim X_0$, $X_1 \sim X_2$.*

**Доказательство.** Так как $X_0 \sim X_2$, то $\exists\, \varphi :\ X_0 \to X_2$ взаимно однозначное и $\varphi(X_0) = X_2$. Рассмотрим множества

$$\varphi(X_1) = X_3, \varphi(X_3) = X_5, \ldots, \varphi(X_{2n-1}) = X_{2n+1}, \ldots$$

$$\varphi(X_0) = X_2, \varphi(X_2) = X_4, \ldots, \varphi(X_{2n}) = X_{2n+2}, \ldots$$

Очевидно, что $X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n \supset \ldots$ и при этом

$$X_0 \sim X_2, X_2 \sim X_4, \ldots, X_{2n} \sim X_{2n+2}, \ldots$$

$$X_1 \sim X_3, X_3 \sim X_5, \ldots, X_{2n-1} \sim X_{2n+1}, \ldots$$

Отсюда

$$X_0 \setminus X_1 \sim X_2 \setminus X_3 \sim X_4 \setminus X_5 \sim \ldots$$
$$X_1 \setminus X_2 \sim X_3 \setminus X_4 \sim X_5 \setminus X_6 \sim \ldots$$

Пусть $\bigcap X_n = Y$. Тогда

$$X_1 = ((X_1 \setminus X_2) \bigsqcup (X_2 \setminus X_3) \bigsqcup (X_3 \setminus X_4) \bigsqcup (X_4 \setminus X_5) \bigsqcup \ldots) \bigcup Y.$$

$$X_0 = ((X_0 \setminus X_1) \bigsqcup (X_1 \setminus X_2) \bigsqcup (X_2 \setminus X_3) \bigsqcup (X_3 \setminus X_4) \bigsqcup \ldots) \bigcup Y.$$

Но

$$X_0 \setminus X_1 \sim X_2 \setminus X_3,\ X_2 \setminus X_3 \sim X_4 \setminus X_5,\ X_4 \setminus X_5 \sim X_6 \setminus X_7, \ldots$$

$$X_1 \setminus X_2 \sim X_1 \setminus X_2,\ X_3 \setminus X_4 \sim X_3 \setminus X_4, \ldots$$

Отсюда по принципу склеивания $X_0 \sim X_1$. Так как отношение $\sim$ есть отношение эквивалентности, то $X_2 \sim X_1$. $\square$

**Теорема 4.2 (Вторая теорема Кантора–Бернштейна)** *Пусть даны множества $A$ и $B$. Если $A \sim B_1 \subset B \wedge B \sim A_1 \subset A$ то $A \sim B$.*

**Доказательство.** Пусть отображение $\varphi: A \to B_1$ – взаимно однозначно и $\psi: B \to A_1$ – взаимно однозначно. Тогда $\psi(B_1) \subset A_1$ и $\psi(B_1) \sim B_1 \sim A$ то $A_1 \sim A$ по первой теореме. Но $A_1 \sim B \Rightarrow A \sim B$. □

# 5 Мощность множества, сравнение мощностей

**Определение 5.1** *Отношение равномощности есть отношение эквивалентности, т.е. все множества разбиваются на классы равномощных множеств. Каждый такой класс называется мощностью. Если $X$ – множество, то совокупность всех равномощных ему множеств называется мощностью множества $X$ и обозначается $\overline{\overline{X}}$.*

**Определение 5.2** *Пусть $A, B$ – множества. Будем писать $\overline{\overline{A}} \le \overline{\overline{B}}$, если $A \sim B_1 \subset B$.*

**Теорема 5.1** *Отношение $\overline{\overline{A}} \le \overline{\overline{B}}$ есть отношение нестрогого порядка, т.е. выполняются свойства*
*1) $\overline{\overline{A}} \le \overline{\overline{A}}$*
*2) $\overline{\overline{A}} \le \overline{\overline{B}} \wedge \overline{\overline{B}} \le \overline{\overline{A}} \Rightarrow \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$*
*3) $\overline{\overline{A}} \le \overline{\overline{B}} \wedge \overline{\overline{B}} \le \overline{\overline{C}} \Rightarrow \overline{\overline{A}} \le \overline{\overline{C}}$.*

**Доказательство.** 1) $\overline{\overline{A}} \le \overline{\overline{A}}$ т.к. $A \sim A \subset A$.
2) Пусть

$$\left.\begin{array}{r} \overline{\overline{A}} \le \overline{\overline{B}} \Rightarrow A \sim B_1 \subset B \\ \overline{\overline{B}} \le \overline{\overline{A}} \Rightarrow B \sim A_1 \subset A \end{array}\right\} A \sim B$$

по 2-й теореме Кантора–Бернштейна, следовательно, $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.
3) $\overline{\overline{A}} \le \overline{\overline{B}} \Rightarrow A \sim B_1 \subset B \Rightarrow \varphi: A \overset{\text{на}}{\to} B_1$ взаимно однозначно.
$\overline{\overline{B}} \le \overline{\overline{C}} \Rightarrow B \sim C_1 \subset C \Rightarrow \psi: B \overset{\text{на}}{\to} C_1$ взаимно однозначно.
Значит, $\psi: B_1 \to \psi(B_2) \subset C_1 \subset C$ взаимно однозначно. Отсюда, $\psi \circ \varphi: A \overset{\text{на}}{\to} C_1 \subset C$ взаимно однозначно, следовательно, $\overline{\overline{A}} \le \overline{\overline{C}}$. □

**Определение 5.3** *Положим по определению*

$$\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}} \overset{df}{\Leftrightarrow} (\overline{\overline{A}} \le \overline{\overline{B}}) \wedge (\neg(A \sim B)).$$

**Теорема 5.2** *Отношение $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$ является отношением открытого порядка, т.е. выполняются свойства:*
*1) $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$ то $\neg(\overline{\overline{B}} < \overline{\overline{A}})$,*
*2) $\neg(\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{A}})$,*
*3) $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}} \wedge \overline{\overline{B}} < \overline{\overline{C}} \Rightarrow \overline{\overline{A}} < \overline{\overline{C}}$.*

**Доказательство.** 2) Предположим, что $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{A}}$. Это эквивалентно тому, что $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{A}} \wedge A \not\sim A$, что невозможно.
1) $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$. Предположим, что $\overline{\overline{B}} < \overline{\overline{A}} \Rightarrow A \leq A \subset B$ и $A \not\sim B$.
$B \sim B_1 \subset A \wedge \neg(B \sim A)$.
Из условия $A \sim B_1 \subset B \wedge B \sim A_1 \subset A \Rightarrow \overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}} \wedge \overline{\overline{B}} \leq \overline{\overline{A}} \Rightarrow \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$, что противоречит условию $\neg(B \sim A)$.
3) $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}} \wedge \overline{\overline{B}} < \overline{\overline{C}} \Rightarrow \overline{\overline{A}} < \overline{\overline{C}}$. Очевидно, что $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{C}}$. Докажем, что $\overline{\overline{A}} \neq \overline{\overline{C}}$. Пусть это не так, т.е. $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{C}}$, тогда из условия $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}} \Rightarrow \overline{\overline{C}} < \overline{\overline{B}}$, что невозможно с условием $\overline{\overline{B}} < \overline{\overline{C}}$. $\square$

## 6 Существование сколь угодно больших мощностей

**Определение 6.1** *Пусть $Y$ и $X$ – непустые множества. Обозначим через $Y^X$ множество функций, определенных на множестве $X$ со значениями в $Y$.*

**Теорема 6.1** $\overline{\overline{X}} < \overline{\overline{Y^X}}$, *если* $Y^\sharp \geq 2$.

**Доказательство.** 1) Покажем, что $\overline{\overline{X}} < \overline{\overline{Y^X}}$. Для этого построим отображение $A: \ X \to Y^X$ следующим образом: каждому элементу $x \in X$ ставим в соответствие функцию $f_x$, определенную равенством $f_x(x) = y_0$, $f_x(\xi) = y_1$, если $\xi \neq x$. Обозначим $B = \{f_x\}$. Тогда $A: \ X \to B \subset Y^X$ – взаимно однозначно, тогда $\overline{\overline{X}} < \overline{\overline{Y^X}}$.
2) Покажем, что $\overline{\overline{X}} \neq \overline{\overline{Y^X}}$. От противного. Предположим, что $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y^X}}$, т.е. существует взаимно однозначное отображение $A: \ X \to Y^X$ и пусть $A: \ x \mapsto f_x$. Построим функцию $F$ следующим образом: $F(x) = y \neq f_x(x)$. Тогда $F \neq f_x$ при всех $x$. Так как $F(x) \neq f_x(x)$ и, следовательно, $A$ не является отображением на $Y^X$. Получили противоречие. $\square$
**Следствие.** *Существуют сколь угодно большие мощности.*

# Глава 2

# Теория меры

## 1 Полукольца, кольца и алгебры

**Определение 1.1** *Пусть $\Omega \neq 0$ произвольное множество, $\mathfrak{N}$ – совокупность его подмножеств. Совокупность $\mathfrak{N}$ называется полукольцом, если*
*1) $\emptyset \in \mathfrak{N}$.*
*2) Если $A, B \in \mathfrak{N}$, то $A \bigcap B \in \mathfrak{N}$.*
*3) Если $A \supset B$, то $A \setminus B$ представимо в виде конечного объединения дизъюнктных множеств из $\mathfrak{N}$.*

**Пример 1.** Совокупность полуинтервалов $[a, b)$ образует полукольцо.
1) $\emptyset = [a, a) \subset \mathfrak{N}$
2) $[a, b) \bigcap [c, d) = [\max(a, c), \min(b, d))$.
3) Пусть $[a, b) \supset [c, d)$. Тогда $[a, b) \setminus [c, d) = [a, c) \bigsqcup [d, b)$. Таким образом, совокупность $[a, b)$ – полукольцо.
**Свойства полуколец:**
1) $\forall A, B \in \mathfrak{N}, A \setminus B$ представимо в виде дизъюнктного объединения

$$A \setminus B = A \setminus (A \bigcap B) = \bigsqcup_{j=1}^{n} A_j, \;\; A_j \in \mathfrak{N}.$$

2) Для всех множеств $A_n$ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ разность $A \setminus \left( \bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j \right)$ представима в виде дизъюнктных объединений множеств из $\mathfrak{N}$.
**Доказательство.** По индукции. $A \setminus A_1 = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} B_j$. Пусть утверждение верно для некоторого $n$, т.е.

$$A \setminus \left( \bigcup_{j=1}^{n} A_j \right) = \bigsqcup_{k=1}^{m} B_k, \quad B_k \in \mathfrak{N}.$$

Тогда

$$A \setminus \left( \bigcup_{j=1}^{n+1} A_j \right) = \left( A_j \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j \right) \setminus A_{n+1} = \left( \bigsqcup_{k=1}^{m} B_k \right) \setminus A_{n+1} =$$

$$= \bigsqcup_{k=1}^{m} (B_k \setminus A_{n+1}) = \bigsqcup_{k=1}^{m} \bigsqcup_{j=1}^{j_k} B_{k,j}. \ \square$$

**Определение 1.2** *Семейство $\mathcal{K}$ называется кольцом, если $\forall\, A, B \in \mathcal{K}$: $A \setminus B \in \ \mathcal{K}$ и $A \bigcup B \in \mathcal{K}$.*

**Замечание.** Очевидно, что $A \bigcap B \in \mathcal{K}$ для любых $A, B \in \mathcal{K}$.

**Определение 1.3** *Кольцо $\mathcal{K}$ называется алгеброй, если объединение всех множеств из $\mathcal{K}$, принадлежит $\mathcal{K}$. Обозначается $\mathcal{A}$.*

**Определение 1.4** *Кольцо $\mathcal{K}$ называется $\sigma$-кольцом, если из условия $A_j \in \mathcal{K}$ $(j \in \mathbb{N})$ следует $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{K}$.*

**Свойства.** 1) Кольцо замкнуто относительно пересечений т.к. $A \bigcap B = A \setminus (A \setminus B)$.
2) Кольцо замкнуто относительно операций $\bigcup, \bigcap, \setminus$.
3) $\sigma$-кольцо замкнуто относительно счетного пересечения.

**Доказательство.** Обозначим $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_j = A \in \mathcal{K}$. Тогда

$$\left( \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \right)' = \bigcup_{j=1}^{\infty} A'_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} (A \setminus A_j) \in \mathcal{K} \Rightarrow \left( \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \right) \in \mathcal{K}$$

.

4) $A_1 \setminus A_2 \setminus A_3 \setminus \ldots \in \mathcal{K}$ т.к. $A_1 \setminus A_2 \setminus A_3 \setminus \ldots = A_1 \setminus \left( \bigcup\limits_{j=n}^{\infty} A_j \right) \in \mathcal{K}$, т.е. кольцо замкнуто относительно счетного числа операций $\bigcup, \bigcap, \setminus$.
**Пример 2.** Полукольцо прямоугольников в $\mathbb{R}^m$.

**Определение 1.5** *Пусть $\mathbf{a} = (a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(n)})$, $\mathbf{b} = (b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(n)})$. Множество $[\mathbf{a}, \mathbf{b}) \stackrel{df}{=} [a^{(1)}, b^{(1)}) \times [a^{(2)}, b^{(2)}) \times \ldots \times [a^{(n)}, b^{(n)})$ называется полуоткрытым прямоугольником в $\mathbb{R}^m$.*

**Теорема 1.1** *Совокупность полуоткрытых прямоугольников есть полукольцо.*

**Доказательство.** $m = 2$. 1) $\emptyset$ принадлежит полукольцу – очевидно.
2) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}) \bigcap [\mathbf{c}, \mathbf{d})$ принадлежит полукольцу – очевидно.
3) Пусть $[\mathbf{a}, \mathbf{b}) \supset [\mathbf{c}, \mathbf{d})$ Тогда

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}) \setminus [\mathbf{c}, \mathbf{d}) = [a^{(1)}, b^{(1)}) \times [a^{(2)}, c^{(2)}) \bigsqcup$$

$$[a^{(1)}, b^{(1)}) \times [d^{(2)}, b^{(2)}) \bigsqcup [a^{(1)}, c^{(1)}) \times [c^{(2)}, d^{(2)}) \bigsqcup [d^{(1)}, b^{(1)}) \times [c^{(2)}, d^{(2)}) \ \square$$

## 2 Функции множества

**Определение 2.1** *Пусть $\Omega$ – основное множество, $\mathcal{M}$ – совокупность его подмножеств. Функция $\varphi : \ \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ называется функцией множества.*

**Пример.** 1) $\mathcal{M}$ – полукольцо прямоугольников, $\varphi : \ [\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto |b - a|$ – функция множества.

2) $\mathcal{M}$ – полукольцо прямоугольников, $\varphi : \ [\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \int\limits_a^b f(x)\,dx$ – функция множества.
3) $\mathcal{M}$ – полукольцо прямоугольников, $\varphi : \ [\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \prod\limits_{j=1}^{m} |b^{(j)} - a^{(j)}|$ – функция множества.

**Определение 2.2** *Функция множества $\varphi$, определенная на $\mathcal{M}$, называется аддитивной, если $\forall\, A, B \in \mathcal{M}$ таких, что $A \bigcap B = \emptyset$ и $A \bigsqcup B \in \mathcal{M} \Rightarrow \varphi(A \bigsqcup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$.*

**Определение 2.3** *Функция множества $\varphi$ называется конечно-аддитивной, если*

$$\varphi\left(\bigsqcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \varphi(A_j)$$

*для любых дизъюнктных множеств $A_j \in \mathcal{M}$, $\bigsqcup\limits_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{M}$.*

**Пример 2.1.** Если функция множества $\varphi$ определена и аддитивна на кольце $\mathcal{K}$, то она конечно аддитивна.
**Доказательство.**

$$\varphi\left(\bigsqcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \varphi\left(A_1 \bigsqcup \left(\bigsqcup_{j=2}^{n} A_j\right)\right) = \varphi(A_1) + \varphi\left(\bigsqcup_{j=2}^{n} A_j\right) = \ldots =$$

$$= \varphi(A_1) + \varphi(A_2) + \ldots + \varphi(A_n). \ \square$$

**Определение 2.4** *Функция множества $\varphi$ называется счетно аддитивной, если для всех множеств $(A_j)_{j=1}^{\infty}$ таких, что*

$$\bigsqcup A_j \in \mathcal{M} \Rightarrow \varphi\left(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(A_j),$$

*причем ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \varphi(A_j)$ сходится абсолютно.*

**Определение 2.5** *Функция множества $\varphi$, определенная на кольце $\mathcal{K}$ называется непрерывной, если для любой последовательности множеств $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ $(A_j \in \mathcal{K})$ таких, что $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} A_j = \emptyset$ выполняется $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(A_n) = 0$.*

**Теорема 2.1** *Конечно аддитивная функция $\varphi$, определенная на кольце $\mathcal{K}$, счетно-аддитивна тогда и только тогда, когда $\varphi$ непрерывна на $\mathcal{K}$.*

**Доказательство.** Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $\varphi$ – счетно аддитивна и пусть $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$, такие, что $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} A_j = \emptyset$. Тогда множество $A_1$ можно представить в виде:

$$A_1 = (A_2 \backslash A_1) \bigsqcup (A_2 \backslash A_3) \bigsqcup \ldots \bigsqcup (A_n \backslash A_{n+1}) \bigsqcup \ldots \Rightarrow \varphi(A_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(A_k \backslash A_{k+1}).$$

Причем ряд справа сходится абсолютно. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \varphi(A_k \setminus A_{k+1}) = 0.$$

Но

$$A_n = \bigsqcup_{k=n}^{\infty} (A_k \setminus A_{k+1}) \Rightarrow \lim \varphi(A_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \varphi(A_k \setminus A_{k+1}) = 0$$

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $\varphi$ – конечно аддитивна и $\varphi$ – непрерывна. Покажем, что $\varphi$ счетно аддитивна. Пусть $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Рассмотрим конечное множество $B_n = \bigsqcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$. Очевидно, что $B_1 \supset B_2 \supset \ldots \supset B_n \supset \ldots$.

Покажем, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$. Выберем точку $x_0 \in A$, тогда $\exists\, k_0$, $x_0 \in A_{k_0}$ и $x_0 \notin A_k$ при $k \neq k_0$. Тогда

$$x_0 \notin \bigsqcup_{k=k_0+1}^{\infty} A_k = B_{k_0+1} \Rightarrow x_0 \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Таким образом, $\bigcap B_n = \emptyset$. Запишем $A$ в виде

$$A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k \bigsqcup \left( \bigsqcup_{k=n+1}^{\infty} A_k \right) = \left( \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k \right) \bigsqcup B_{n+1} \Rightarrow \varphi(A) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(A_n) + \varphi(B_{n+1}).$$

Т.к. $\varphi$ – непрерывна, то $\lim \varphi(B_{n+1}) = 0$, значит, $\varphi(A) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$. $\square$

## 3 Мера множества на полукольце

**Определение 3.1** *Мерой называется неотрицательная, счетно аддитивная функция, определенная на полукольце. Обозначается $\mu$. Т.е. $\mu$ определена на полукольце $\mathfrak{N}$ и удовлетворяет условиям*
*1) $\mu(A) \geq 0 \; \forall\, A \in \mathfrak{N}$.*
*2) Если $A, A_j \in \mathfrak{N}$ и $A = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$, то $\mu A = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu A_j$.*

**Свойства.** 1) $\mu\emptyset = 0$.
**Доказательство.** $\emptyset = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} \emptyset$, тогда по свойству аддитивности $\mu\emptyset = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu\emptyset \Rightarrow$ $\mu\emptyset = 0$. $\square$
2) Мера $\mu$ конечно-аддитивна.
**Доказательство.** $A = \bigsqcup_{j=1}^{n} A_j$, $A_j, A \in \mathfrak{N}$. Запишем

$$A = \bigsqcup_{j=1}^{n} A_j \bigsqcup \left( \bigsqcup_{j=k+1}^{\infty} \emptyset \right) \Rightarrow \mu A = \sum_{j=1}^{n} \mu A_j + \sum_{j=n+1}^{\infty} \mu\emptyset = \sum_{j=1}^{n} \mu A_j. \; \square$$

3)Мера $\mu$ монотонна, т.е. если $A \subset B$, $A, B \in \mathfrak{N}$, то $\mu A \leq \mu B$.
**Доказательство.** По определению полукольца $B \setminus A = \bigsqcup_{j=1}^{n} A_j$ и так как мера $\mu$ конечно-аддитивна, то $\mu B = \mu A + \sum_{j=1}^{n} \mu A_j \geq \mu A$. $\square$
4) Мера $\mu$ счетно-полуаддитивна, т.е. если $A \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$, то $\mu A \leq \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu A_j$.

**Доказательство.** Обозначим $B_j = A_j \bigcap A$. Тогда $A = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j$, $B_j \in \mathfrak{N}$. Запишем $A$ в виде

$$A = B_1 \bigsqcup (B_2 \setminus B_1) \bigsqcup (B_3 \setminus B_2 \setminus B_1) \bigsqcup \ldots \bigsqcup (B_n \setminus B_{n-1} \setminus \ldots \setminus B_1) \bigsqcup \ldots$$

Каждое из множеств $B_n \setminus B_{n-1} \setminus \ldots \setminus B_1 = \bigsqcup\limits_{k=1}^{k_n} B_{n,k}$, $B_{n,k} \in \mathfrak{N}$. Значит,

$$\mu A = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \mu B_{n,k}.$$

По свойствам полукольца

$$B_n \setminus \bigsqcup_{k=1}^{k_n} B_{n,k} = \bigsqcup_{j=1}^{m_n} C_j$$

и ввиду счетной аддитивности меры

$$\mu B_n = \sum \mu B_{n,k} + \sum \mu C_j \geq \sum \mu B_{n,k} \Rightarrow \mu A \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu B_n.$$

Но $\mu B_n \leq \mu A_n \Rightarrow \mu A \leq \sum \mu A_n$. $\square$

4) Если $A_k \subset A$, $A_k, A \in \mathfrak{N}$ и $A_k$ дизъюнктны, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu A_k \leq \mu A$.

**Доказательство.** 1) $\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k \subset A \Rightarrow A \setminus \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m_n} A_{n,j} \Rightarrow$

$$A = \left( \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k \right) \bigsqcup \left( \bigsqcup_{j=1}^{m_n} A_{n_j} \right) \Rightarrow \mu(A) = \sum_{k=1}^{n} \mu A_k + \sum_{j=1}^{m_n} \mu A_{n,j} \geq \sum_{k=1}^{n} \mu A_k.$$

2) Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем требуемое неравенство. $\square$

## 4 Мера на полукольце полуинтервалов

**Определение 4.1** $|[a,b]| = |(a,b)| = |[a,b)| = |(a,b]| = b - a.$

**Лемма 4.1** $\bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} [a_j, b_j) \subset [a,b) \Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{\infty} |[a_j, b_j)| \leq |[a,b)|.$

**Доказательство.** $\bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty}[a_j,b_j)\subset[a,b)\Rightarrow\bigsqcup\limits_{j=1}^{n}[a_j,b_j)\subset[a,b)$. Поэтому $\sum\limits_{j=1}^{n}|[a_j,b_j)|\leq|[a,b)|$. Переходя к пределу, получаем $\sum\limits_{j=1}^{\infty}|[a_j,b_j)|\leq|[a,b)|$.

**Лемма 4.2** *Пусть* $[a,b]\subset\bigcup\limits_{j=1}^{n}(a_j,b_j)$. *Тогда* $|[a,b]|\leq\sum\limits_{j=1}^{n}|(a_j,b_j)|$.

**Доказательство.** Выберем $(a_{j_1},b_{j_1})\ni a$ и выберем среди них интервал с наибольшим $b_j$. Среди оставшихся выбираем интервал$(a_{j_2},b_{j_2})\supset b_{j_1}$ и среди интервалов выбираем интервал с наибольшим $b_{j_2}$. Очевидно, что $a_{j_1}<a_{j_2}<b_{j_1}$. Выбираем среди оставшихся интервал $(a_{j_3},b_{j_3})\supset b_{j_2}$ с наибольшим $b_{j_3}$. Продолжим этот процесс, который закончим на некотором шаге. Пусть это будут интервалы $(a_{j_1},b_{j_1}),(a_{j_2},b_{j_2}),\ldots,(a_{j_s},b_{j_s})$. Последний интервал сдержит точку $b$. Таким образом, мы получили, что числа $a_{j_n},b_{j_n}$ удовлетворяют неравенствам

$$a_{j_1}<a_{j_2}<b_{j_1}<a_{j_3}<b_{j_2}<\ldots<a_{j_s}<b_{j_{s-1}}<b_{j_s}\Rightarrow$$
$$(a_{j_2}-a_{j_1})+(b_{j_1}-a_{j_2})+(a_{j_3}-b_{j_1})+(b_{j_2}-a_{j_3})+\ldots+(b_{j_s}-b_{j_{s-1}})>b-a\Rightarrow$$
$$(b_{j_1}-a_{j_1})+(b_{j_2}-a_{j_2})+\ldots+(b_{j_s}-a_{j_s})>b-a.\ \Box$$

**Лемма 4.3** *Если* $[a,b)\subset\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}[a_j,b_j)$, *то* $|[a,b)|\leq\sum\limits_{j=1}^{\infty}|[a_j,b_j)|$.

**Доказательство.** Выберем $\varepsilon>0$, такое, что $\varepsilon<b-a$. Тогда

$$[a,b-\varepsilon]\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}\left(a_j-\frac{\varepsilon}{2^j},b_j\right)\Rightarrow[a,b-\varepsilon]\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}\left(a_j-\frac{\varepsilon}{2^j},b_j\right)$$

По теореме о конечном покрытии существует $n\in\mathbb{N}$, для которого

$$[a,b-\varepsilon]\subset\bigcup_{j=1}^{n}\left(a_j-\frac{\varepsilon}{2^j},b_j\right).$$

По лемме 4.2

$$|[a,b-\varepsilon]|\leq\sum_{j=1}^{n}\left(a_j-\frac{\varepsilon}{2^j},b_j\right)\Rightarrow|b-\varepsilon-a|\leq\sum_{j=1}^{n}b_j-a_j+\frac{\varepsilon}{2^j}\leq\sum_{j=1}^{\infty}(b_j-a_j)+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon\to0$, получим $|b-a|\leq\sum\limits_{j=1}^{\infty}(b_j-a_j)$, значит, $|[b-a)|\leq\sum\limits_{j=1}^{\infty}|[a_j,b_j)|$. $\Box$

**Теорема 4.4** *Если* $[a,b) = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty}[a_j,b_j)$, *то* $|[a,b)| = \sum\limits_{j=1}^{\infty}[a_j,b_j)$.

**Доказательство.** По лемме 4.1 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}[a_j,b_j) \leq |[a,b)|$. По лемме 4.3 имеем $|[a,b)| \leq \sum\limits_{j=1}^{\infty}[a_j,b_j)$. Следовательно, имеем равенство. $\square$

**Теорема 4.5** *Равенство* $\mu[a,b) = |b-a|$ *определяет меру на полукольце полуинтервалов.*

**Доказательство.** Очевидно, т.к. $\mu[a,b) \geq 0$ и аддитивна на $\mathfrak{N}_1$. $\square$

# 5 Полукольцо прямоугольников в $\mathbb{R}^m$

Начиная с этого параграфа в качестве основного множества $\Omega$ будем рассматривать $m$-мерное Евклидово пространство $\mathbb{R}^m$, состоящее из точек $\mathbf{x} = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)})$, т.е. компоненты точки $\mathbf{x}$ будем обозначать той же буквой $x$ с верхним индексом в скобках. Если точки $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, то множества

$$[\mathbf{a},\ \mathbf{b}] = [a^{(1)}, b^{(1)}] \times [a^{(2)}, b^{(2)}] \times \dots \times [a^{(m)}, b^{(m)}],$$

$$[\mathbf{a},\ \mathbf{b}) = [a^{(1)}, b^{(1)}) \times [a^{(2)}, b^{(2)}) \times \dots \times [a^{(m)}, b^{(m)}),$$
$$(\mathbf{a},\ \mathbf{b}] = (a^{(1)}, b^{(1)}] \times (a^{(2)}, b^{(2)}] \times \dots \times (a^{(m)}, b^{(m)}],$$
$$(\mathbf{a},\ \mathbf{b}) = (a^{(1)}, b^{(1)}) \times (a^{(2)}, b^{(2)}) \times \dots \times (a^{(m)}, b^{(m)}),$$

будем называть $m$-мерными прямоугольниками, замкнутыми $[\mathbf{a},\ \mathbf{b}]$, полуоткрытыми $[\mathbf{a},\ \mathbf{b})$, $(\mathbf{a},\ \mathbf{b}]$ или открытыми $(\mathbf{a},\ \mathbf{b})$. Совокупность всех прямоугольников вида $[\mathbf{a},\ \mathbf{b})$ будем обозначать $\mathcal{N}_m$. Прямоугольники $[\mathbf{a},\ \mathbf{b})$ часто будем обозначать через $\Delta$.

**Теорема 5.1** *Совокупность* $\mathcal{N}_m$ *образует полукольцо.*

**Доказательство.** Проверим аксиомы полукольца.
1) $\emptyset \in \mathcal{N}_m$. Это очевидно, т.к. $\emptyset = [\mathbf{a},\ \mathbf{a})$;
2) $[\mathbf{a},\ \mathbf{b}) \cap [\mathbf{c},\ \mathbf{d}) \in \mathcal{N}_m$, т.к.

$$[\mathbf{a},\ \mathbf{b}) \cap [\mathbf{c},\ \mathbf{d}) = \prod_{j=1}^{m} \Big[\max(a^{(j)},\ c^{(j)}),\ \min(b^{(j)},\ d^{(j)})\Big) \in \mathcal{N}_m;$$

3) Покажем, что $[\mathbf{a},\ \mathbf{b}) \setminus [\mathbf{c},\ \mathbf{d})$ представимо в виде конечного объединения дизъюнктных прямоугольников, принадлежащих $\mathcal{N}_m$. Доказательство проведем по индукции. При $m = 1$ это было доказано раньше. Предположим, что утверждение верно для размерности $m$ и покажем, что оно верно для размерности $m + 1$.

Обозначим

$$\mathbf{a}^{(m+1)} = (\mathbf{a}, a^{(m+1)}) = \left(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(m)}, a^{(m+1)}\right),$$

$$\mathbf{b}^{(m+1)} = (\mathbf{b}, b^{(m+1)}) = \left(b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(m)}, b^{(m+1)}\right),$$

$$\mathbf{c}^{(m+1)} = (\mathbf{c}, c^{(m+1)}) = \left(c^{(1)}, c^{(2)}, \ldots, c^{(m)}, c^{(m+1)}\right),$$

$$\mathbf{d}^{(m+1)} = (\mathbf{d}, d^{(m+1)}) = \left(d^{(1)}, d^{(2)}, \ldots, d^{(m)}, d^{(m+1)}\right)$$

и пусть $[\mathbf{a}^{(m+1)}, \mathbf{b}^{(m+1)}) \supset [\mathbf{c}^{(m+1)}, \mathbf{d}^{(m+1)})$. Представим $[\mathbf{a}^{(m+1)}, \mathbf{b}^{(m+1)})$ в виде

$$[\mathbf{a}^{(m+1)}, \mathbf{b}^{(m+1)}) = [\mathbf{a}, \mathbf{b}) \times [a^{(m+1)}, b^{(m+1)}).$$

Так как

$$[a^{(m+1)}, b^{(m+1)}) \supset [c^{(m+1)}, d^{(m+1)}],$$

то

$$[a^{(m+1)}, b^{(m+1)}) = [a^{(m+1)}, c^{(m+1)}) \sqcup [c^{(m+1)}, d^{(m+1)}) \sqcup [d^{(m+1)}, b^{(m+1)}).$$

Поэтому

$$[\mathbf{a}^{(m+1)}, \mathbf{b}^{(m+1)}) \setminus [\mathbf{c}^{(m+1)}, \mathbf{d}^{(m+1)}) =$$

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}) \times \left([a^{(m+1)}, c^{(m+1)}) \sqcup [c^{(m+1)}, d^{(m+1)}) \sqcup [d^{(m+1)}, b^{(m+1)})\right) \setminus$$

$$\setminus \left([\mathbf{c}, \mathbf{d}) \times [c^{(m+1)}, d^{(m+1)})\right) =$$

$$= [\mathbf{a}, \mathbf{b}) \times \left[a^{(m+1)}, c^{(m+1)}\right) \sqcup [\mathbf{a}, \mathbf{b}) \times \left([d^{(m+1)}, b^{(m+1)}\right) \sqcup$$

$$\sqcup([\mathbf{a}, \mathbf{b}) \setminus [\mathbf{c}, \mathbf{d})) \times \left[c^{(m+1)}, d^{(m+1)}\right).$$

По предположению индукции

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}) \setminus [\mathbf{c}, \mathbf{d}) = \bigsqcup_{j=1}^{M} A_j \quad (A_j \in \mathcal{N}_m),$$

и значит разность $[\mathbf{a}^{(m+1)}, \mathbf{b}^{(m+1)}) \setminus [\mathbf{c}^{(m+1)}, \mathbf{d}^{(m+1)})$ представима в виде конечного разбиения прямоугольников из $\mathcal{N}_{m+1}$. Третья аксиома полукольца выполнена. $\square$

## 6 Мера на полукольце прямоугольников в $\mathbb{R}^m$

**Определение 6.1** *Если* $[\mathbf{a},\mathbf{b})\in\mathcal{N}_m$, *то положим по определению*

$$\mu[\mathbf{a},\mathbf{b})=\prod_{j=1}^{m}|b^{(j)}-a^{(j)}| \tag{6.1}$$

Очевидно, что при $m=2$ $\mu[\mathbf{a},\mathbf{b})$ есть площадь прямоугольника $[\mathbf{a},\mathbf{b})$.

**Теорема 6.1** *Равенство (6.1) определяет меру на полукольце прямоугольников.*

Доказательству предпошлем несколько лемм. Первая из них относится к специальному виду разбиений, называемых сетчатыми.

**Определение 6.2** *Пусть* $[\mathbf{a},\mathbf{b})\in\mathcal{N}_m$, *и каждый одномерный полуинтервал* $[a^{(j)},b^{(j)})$ *есть объединение полуинтервалов*

$$[a^{(j)},b^{(j)})=\bigsqcup_{\nu=0}^{n_j-1}[a^{(j)}_{\nu},a^{(j)}_{\nu+1}) \tag{6.2}$$

*где*

$$a^{(j)}=a^{(j)}_0<a^{(j)}_1<\ldots<a^{(j)}_{n_j}=b^{(j)}.$$

*Тогда мы можем записать*

$$[\mathbf{a},\mathbf{b})=\prod_{j=1}^{m}\left(\bigsqcup_{\nu_j=0}^{n_j-1}[a^{(j)}_{\nu_j},a^{(j)}_{\nu_j+1})\right)=$$

$$=\left([a^{(1)}_0,a^{(1)}_1)\sqcup[a^{(1)}_1,a^{(1)}_2)\sqcup\ldots\sqcup[a^{(1)}_{n_1-1},a^{(1)}_{n_1})\right)\times$$

$$\times\left([a^{(2)}_0,a^{(2)}_1)\sqcup[a^{(2)}_1,a^{(2)}_2)\sqcup\ldots\sqcup[a^{(2)}_{n_2-1},a^{(2)}_{n_2})\right)\times$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\times\left([a^{(m)}_0,a^{(m)}_1)\sqcup[a^{(m)}_1,a^{(m)}_2)\sqcup\ldots\sqcup[a^{(m)}_{n_m-1},a^{(m)}_{n_m})\right)=$$

$$=\bigsqcup_{\nu_1=0}^{n_1-1}\bigsqcup_{\nu_2=0}^{n_2-1}\ldots\bigsqcup_{\nu_m=0}^{n_m-1}[a^{(1)}_{\nu_1},a^{(1)}_{\nu_1+1})\times[a^{(2)}_{\nu_2},a^{(2)}_{\nu_2+1})\times\ldots\times[a^{(m)}_{\nu_m},a^{(m)}_{\nu_m+1}). \tag{6.3}$$

*Представление прямоугольника* $[\mathbf{a},\mathbf{b})$ *в виде (6.3) и называют сетчатым разбиением.*

**Лемма 6.2** *Если*

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}) = \bigsqcup_{j=1}^{N} [\mathbf{a}_j,\mathbf{b}_j)$$

*есть сетчатое разбиение,то*

$$\mu[\mathbf{a},\mathbf{b}) = \sum_{j=1}^{N} \mu[\mathbf{a}_j,\mathbf{b}_j) \tag{6.4}$$

**Доказательство** проводится индукцией по размерности $m$.
1. При $m = 1$ равенство (6.4) очевидно.
2. Пусть (6.4) верно для размерности $m$. Покажем, что оно верно и для размерности $m+1$. Будем использовать обозначения, введенные в теореме 5.1. Равенство (6.3) для размерности $m+1$ будет записано в виде

$$[\mathbf{a}^{(m+1)},\mathbf{b}^{(m+1)}) =$$

$$= \bigsqcup_{\nu_1=0}^{n_1-1} \dots \bigsqcup_{\nu_m=0}^{n_m-1} \bigsqcup_{\nu_{m+1}=0}^{n_{m+1}-1} [a^{(1)}_{\nu_1}, a^{(1)}_{\nu_1+1}) \times \ldots \times [a^{(m)}_{\nu_m}, a^{(m)}_{\nu_m+1}) \times [a^{(m+1)}_{\nu_{m+1}}, a^{(m+1)}_{\nu_{m+1}+1}). \tag{6.5}$$

По определению меры $\mu$ и по предположению индукции

$$\mu[\mathbf{a}^{(m+1)},\mathbf{b}^{(m+1)}) = \mu[\mathbf{a},\mathbf{b}) \cdot (b^{(m)} - a^{(m)}) =$$

$$\left(\sum_{\nu_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{\nu_m=0}^{n_m-1} \mu\left([a^{(1)}_{\nu_1}, a^{(1)}_{\nu_1+1}) \times \ldots \times [a^{(m)}_{\nu_m}, a^{(m)}_{\nu_m+1})\right)\right) \cdot$$

$$\cdot \left(\sum_{\nu_{m+1}=0}^{n_{m+1}-1} \left| a^{(m+1)}_{\nu_{m+1}} - a^{(m+1)}_{\nu_{m+1}+1} \right| \right) =$$

$$\sum_{\nu_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{\nu_m=0}^{n_m-1} \sum_{\nu_{m+1}=0}^{n_{m+1}-1} \mu\left([a^{(1)}_{\nu_1}, a^{(1)}_{\nu_1+1}) \times \ldots \times [a^{(m)}_{\nu_m}, a^{(m)}_{\nu_m+1}) \times [a^{(m+1)}_{\nu_{m+1}}, a^{(m+1)}_{\nu_{m+1}+1})\right).$$

Сравнивая это равенство с равенством (6.5), мы убеждаемся в справедливости (6.4) в случае размерности $m+1$. □

**Лемма 6.3** *Если*

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}) = \bigsqcup_{\nu=1}^{N} [\mathbf{a}_\nu,\mathbf{b}_\nu)$$

*есть дизъюнктное разбиение прямоугольника* $[\mathbf{a},\mathbf{b})$, *не обязательно сетчатое, то*

$$\mu[\mathbf{a},\mathbf{b}) = \sum_{\nu=1}^{N} \mu[\mathbf{a}_\nu,\mathbf{b}_\nu).$$

**Доказательство.** Построим сетчатое разбиение прямоугольника $[\mathbf{a},\mathbf{b})$ такое, чтобы из составляющих его прямоугольников можно было построить сетчатое разбиение каждого прямоугольника $[\mathbf{a}_\nu,\mathbf{b}_\nu)$. Чтобы построить такое разбиение нужно при каждом $j = 1,2,\ldots,m$ $j$-е компоненты $a_\nu^{(j)}, b_\nu^{(j)}$ $(\nu = 1,2,\ldots,N)$ расположить в порядке возрастания и обозначить их

$$a_0^{(j)}, a_1^{(j)}, \ldots, a_{n_j-1}^{(j)} \tag{6.6}$$

Тогда числа (6.6) задают нужное сетчатое разбиение (6.3). Обозначим для краткости

$$\Delta_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_m} = \left[a_{\nu_1}^{(1)}, a_{\nu_1+1}^{(1)}\right) \times \left[a_{\nu_2}^{(2)}, a_{\nu_2+1}^{(2)}\right) \times \ldots \times \left[a_{\nu_m}^{(m)}, a_{\nu_m+1}^{(m)}\right).$$

В этих обозначениях равенство (6.3) примет вид

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}) = \bigsqcup_{\nu_1=0}^{n_1-1} \bigsqcup_{\nu_2=0}^{n_2-1} \ldots \bigsqcup_{\nu_m=0}^{n_m-1} \Delta_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_m}$$

и по лемме 6.2

$$\mu[\mathbf{a},\mathbf{b}) = \sum_{\nu_1=0}^{n_1-1} \sum_{\nu_2=0}^{n_2-1} \ldots \sum_{\nu_m=0}^{n_m-1} \mu\Delta_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_m}. \tag{6.7}$$

Обозначим через $S_\nu$ $(\nu = 1,2,\ldots,N)$ совокупность тех прямоугольников, которые образуют сетчатое разбиение прямоугольника $[\mathbf{a}_\nu,\mathbf{b}_\nu)$. По лемме 6.2

$$\mu[\mathbf{a}_\nu,\mathbf{b}_\nu) = \sum_{\Delta_{\nu_1,\ldots,\nu_m}\in S_\nu} \mu\Delta_{\nu_1,\ldots,\nu_m}.$$

Суммируя эти равенства по $\nu$, имеем

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mu[\mathbf{a}_\nu,\mathbf{b}_\nu) = \sum_{\nu=1}^{N} \left( \sum_{\Delta_{\nu_1,\ldots,\nu_m}\in S_\nu} \mu\Delta_{\nu_1,\ldots,\nu_m} \right). \tag{6.8}$$

Правые части в (6.7) и (6.8) равны, значит равны левые части и лемма доказана. □

**Лемма 6.4** *Если*

$$\bigsqcup_{\nu=1}^{N} [\mathbf{a}_\nu, \mathbf{b}_\nu) \subset [\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

*то*

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mu[\mathbf{a}_\nu, \mathbf{b}_\nu) \leq \mu[\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

**Доказательство** аналогично доказательству предыдущей леммы. Надо только заметить, что в правой части в равенстве (6.7) слагаемых больше, чем в правой части равенства (6.8). Поэтому правая часть в (6.7) больше, чем в (6.8), и лемма доказана. □

**Лемма 6.5** *Если*

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \bigcup_{\nu=1}^{N} [\mathbf{a}_\nu, \mathbf{b}_\nu),$$

*то*

$$\mu[\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq \sum_{\nu=1}^{N} \mu[\mathbf{a}_\nu, \mathbf{b}_\nu).$$

**Доказательство** аналогично доказательству леммы 6.4. Но в данной ситуации каждое слагаемое в левой части (6.7) присутствует и в правой части (6.8), но возможно присутствует там несколько раз. Поэтому правая часть в (6.8) больше правой части в (6.7), что и доказывает лемму. □

**Следствие.** *Если*

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subset \bigcup_{\nu=1}^{N} [\mathbf{a}_\nu, \mathbf{b}_\nu),$$

*то*

$$\mu[\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq \sum_{\nu=1}^{N} \mu[\mathbf{a}_\nu, \mathbf{b}_\nu).$$

**Доказательство.** Образуем прямоугольники

$$[\mathbf{a}'_\nu, \mathbf{b}'_\nu) = [\mathbf{a}, \mathbf{b}) \bigcap [\mathbf{a}_\nu, \mathbf{b}_\nu).$$

Тогда

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \bigcup_{\nu=1}^{N} [\mathbf{a}'_\nu, \mathbf{b}'_\nu)$$

и по лемме 6.4

$$\mu[\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq \sum_{\nu=1}^{N} \mu[\mathbf{a}'_\nu, \mathbf{b}'_\nu)$$

Осталось отметить, что $\mu[\mathbf{a}'_\nu, \mathbf{b}'_\nu) \le \mu[\mathbf{a}_\nu, \mathbf{b}_\nu)$. □

**Лемма 6.6** *Если*

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \bigsqcup_{\nu=1}^{\infty} [\mathbf{a}_\nu, \mathbf{b}_\nu),$$

*то*

$$\mu[\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu[\mathbf{a}_\nu, \mathbf{b}_\nu).$$

**Доказательство.** 1) Ясно, что при любом натуральном $N$

$$\bigsqcup_{\nu=1}^{N} [\mathbf{a}_\nu, \mathbf{b}_\nu) \subset [\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Поэтому по лемме 6.4

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mu[\mathbf{a}_\nu, \mathbf{b}_\nu) \le \mu[\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Так как последнее неравенство верно при любом $N$, то

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \mu[\mathbf{a}_\nu, \mathbf{b}_\nu) \le \mu[\mathbf{a}, \mathbf{b}). \tag{6.9}$$

2) Докажем неравенство, которое противоположно (6.9). Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда существует $\delta > 0$, такое, что

$$\mu[\mathbf{a}, \mathbf{b}) < \varepsilon + \mu[\mathbf{a}, \mathbf{b} - \bar{\delta}) \quad (\bar{\delta} = (\delta, \delta, \dots, \delta)) \tag{6.10}$$

и при каждом $\nu = 1, 2, \dots$ существует $\delta_\nu > 0$, что

$$\mu[\mathbf{a}_\nu - \bar{\delta}_\nu, \mathbf{b}_\nu + \bar{\delta}_\nu) < \frac{\varepsilon}{2^\nu} + \mu[\mathbf{a}_\nu, \mathbf{b}_\nu) \quad (\bar{\delta}_\nu = (\delta_\nu, \dots, \delta_\nu)) \tag{6.11}$$

При таких $\bar{\delta}$ и $\bar{\delta}_\nu$ справедливо включение

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b} - \bar{\delta}] \subset \bigcup_{\nu=1}^{\infty} (\mathbf{a}_\nu - \bar{\delta}_\nu, \mathbf{b}_\nu + \bar{\delta}_\nu).$$

По лемме Бореля–Лебега из бесконечного покрытия замкнутого прямоугольника открытыми можно выделить конечное подпокрытие, т.е. при некотором $N$

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b} - \bar{\delta}] \subset \bigcup_{\nu=1}^{N} (\mathbf{a}_\nu - \bar{\delta}_\nu, \mathbf{b}_\nu + \bar{\delta}_\nu)$$

и тем более

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b} - \bar{\delta}) \subset \bigcup_{\nu=1}^{N} [\mathbf{a}_\nu - \bar{\delta}_\nu, \mathbf{b}_\nu + \bar{\delta}_\nu).$$

Отсюда по следствию из леммы 6.5

$$\mu[\mathbf{a}, \mathbf{b} - \bar{\delta}) \le \sum_{\nu=1}^{N} \mu[\mathbf{a}_\nu - \bar{\delta}_\nu, \mathbf{b}_\nu + \bar{\delta}_\nu). \tag{6.12}$$

Учитывая (6.10) и (6.11), из (6.12) получаем неравенство

$$\mu[\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \varepsilon < \sum_{\nu=1}^{N} \mu[\mathbf{a}_\nu, \mathbf{b}_\nu) + \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2^\nu} \le \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu[\mathbf{a}_\nu, \mathbf{b}_\nu) + \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то из последнего неравенства находим

$$\mu[\mathbf{a}, \mathbf{b}) \le \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu[\mathbf{a}_\nu, \mathbf{b}_\nu).$$

Соединяя это неравенство с (6.9), мы и получаем утверждение леммы. □
**Доказательство** теоремы 6.1 Проверим аксиомы меры.
1) Неравенство $\mu[\mathbf{a}, \mathbf{b}) \ge 0$ очевидно следует из определения.
2) Счетная аддитивность доказана в лемме 6.6. □

# 7 Внешняя мера

**Определение 7.1** *Пусть $\Omega$ – основное множество. $\mathcal{M}$ – совокупность всех его подмножеств. Функцию $\mu^*$, определенную на $\mathcal{M}$ называют внешней мерой, если*
*1) $\mu^* A \ge 0 \ \forall A \in \mathcal{M}$.*
*2) $\mu^* A$ счетно аддитивна, т.е. если $A \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$, то $\mu^* A \le \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu A_j$.*
*3) $\mu^* \emptyset = 0$.*

**Замечание.** Внешняя мера монотонна, т.е. $A \subset B \Rightarrow \mu^* A \le \mu^* B$.
**Доказательство.**

$$A \subset B \Rightarrow A \subset B \bigcup \emptyset \Rightarrow \mu^* A \le \mu^* B + \sum \mu^* \emptyset \Rightarrow \mu^* A \le \mu^* B. \ \square$$

**Определение 7.2** *Пусть $\mu$ – мера на полукольце $\mathfrak{N}$. Определим функцию $\mu^*$ следующим образом:*

$$\mu^* A = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu A_j : \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \supset A, A_j \in \mathfrak{N} \right\}. \tag{7.1}$$

*если покрытие* $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \supset A$ *существует и* $\mu^* = \infty$ *если такого покрытия не существует.*

**Теорема 7.1** *1) Равенство (7.1) определяет внешнюю меру.*
*2)* $\forall\, A \in \mathfrak{N}$, $\mu^* A = \mu A$.

**Доказательство.** 1) $\mu^*\emptyset = 0$ т.к. $\emptyset \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \emptyset$ и $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu\emptyset = 0$. Отсюда $\mu^*\emptyset = 0$.
2)Очевидно, что $\mu^* A \geq 0$. Покажем, что $\mu^*$ обладает свойством счетной полуаддитивности. Пусть $A \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \Rightarrow \mu^* A \leq \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu^* A_j$.

Если $\exists\, j, \mu^* A_j = +\infty$, то неравенство верно. Поэтому будем считать, что $\forall\, j\ \mu^* A_j < +\infty$. Отсюда, по определению $\mu^*$: $\forall\, j \in \mathbb{N}, \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_{j,n} \supset A_j$ так, что $\mu^* A_j \leq \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu A_{j,n} < \mu^* A_j + \frac{\varepsilon}{2^j}$. Сложим правые части:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_{j,n} < \sum_{j=1}^{\infty} \mu^* A_j + \varepsilon.$$

И так как $\bigcup\limits_{j}\bigcup\limits_{n} A_{j,n} \supset A$, то $\mu^* A \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^* A_j + \varepsilon$. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим $\mu^* A \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^* A_j$. $\square$
3) Пусть $A \in \mathfrak{N}$. Так как $A$ есть покрытие самого себя, то $\mu^* \leq \mu A$. Покажем обратное неравенство. Пусть $A \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$, $A_j \in \mathfrak{N}$. Тогда по свойству счетно аддитивности $\mu$: $\mu A \leq \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu A_j \Rightarrow \mu A \leq \inf \sum \mu A_j = \mu^* A$. Соединяя эти неравенства, получаем $\mu^* A = \mu A$. $\square$

# 8 Измеримые множества по данной внешней мере. Свойства измеримых множеств

Будем предполагать, что $\mu^*$ – произвольная внешняя мера в $\Omega$.

**Определение 8.1** *Множество* $E \subset \Omega$ *будем называть* $\mu^*$ *измеримым (или измеримым относительно данной внешней меры) если*

$$\forall\, A \subset \Omega\ \ \mu^* A = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E'). \tag{8.1}$$

**Замечание.** Так как

$$E \sqcup E' = \Omega \Rightarrow A \cap \Omega = A \cap (E \sqcup E') = (A \cap E) \sqcup (A \cap E').$$

Отсюда по свойству счетной аддитивности внешней меры $\mu^*$ имеем

$$\mu^* A \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E').$$

Таким образом, чтобы доказывать измеримость множества $E$, достаточно доказать, что для всех $A$

$$\mu^* A \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E').$$

**Теорема 8.1** *Совокупность $\mathcal{A}$ всех $\mu^*$ измеримых множеств образует алгебру, т.е. замкнуто относительно $\cup, \cap, \setminus$ и содержит $\emptyset$ и $\Omega$.*

**Доказательство.** 1) Если $E = \emptyset$, то $\forall\, A$

$$\mu^*(A \cap \emptyset) + \mu^*(A \cap \emptyset') = \mu^*(\emptyset) + \mu^*(A) = \mu^*(A),$$

т.е. (8.1) выполнено.
2) Если $E = \Omega$,то $\forall\, A \subset \Omega$

$$\mu^*(A \cap \Omega) + \mu^*(A \cap \Omega') = \mu^*(A) + \mu^*(\emptyset) = \mu^*(A).$$

3) Если $E - \mu^*$ измеримо, то $E' - \mu^*$ также измеримо. В самом деле, $\forall\, A$

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E') = \mu^*(A \cap (E')') + \mu^*(A \cap E').$$

4) Пусть $E_1, E_2 - \mu^*$ измеримы. Покажем, что $E_1 \cap E_2 - \mu^*$ измеримо. Обозначим $E = E_1 \bigcap E_2$. Надо доказать, что

$$\forall\, A \;\; \mu^* A = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E'). \tag{8.2}$$

Так как $E_1$ измеримо, то

$$\forall\, A \subset \Omega \;\; \mu^* A = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1').$$

Так как $E_2$ измеримо, то для множества $A \cap E_1$

$$\mu^*(A \cap E_1) = \mu^*(A \cap E_1 \cap E_2) + \mu^*(A \cap E_1' \cap E_2').$$

Тогда

$$\mu^* A = \mu^*(A \cap E_1 \cap E_2) + \mu^*(A \cap E_1 \cap E_2') + \mu^*(A \cap E_1'). \tag{8.3}$$

Преобразуем правую часть в (8.2) с учетом, что $E_1$ измеримо.

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E') = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E' \cap E_1) + \mu^*(A \cap E' \cap E_1'). \tag{8.4}$$

Так как $E = E_1 \cap E_2 \Rightarrow E' = E'_1 \cup E'_2 \Rightarrow E' \cap E_1 = (E'_1 \cup E'_2) \cap E_1 = E_1 \cap E'_2 \Rightarrow$

$$\mu^*(A \cap E' \cap E_1) = \mu^*(A \cap E_1 \cap E'_2). \tag{8.5}$$

Так как $E = E_1 \cap E_2 \subset E_1 \Rightarrow E' \supset E'_1 \Rightarrow E' \cap E'_1 = E'_1 \Rightarrow$

$$\mu^*(A \cap E' \cap E'_1) = \mu^*(A \cap E'_1). \tag{8.6}$$

Подставим (8.6), (8.5) в (8.4), получим

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E') = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E_1 \cap E'_2) + \mu^*(A \cap E'_1). \tag{8.7}$$

Правые части в (8.7) и (8.3) одинаковы, значит, равны левые, значит, (8.2) выполнено. $\square$
5) Если $E_1$ и $E_2$-$\mu^*$ измеримы, то $E_1 \cup E_2$-$\mu^*$ измеримо, т.к. $(E_1 \cup E_2) = (E'_1 \cap E'_2)'$. Но $E'_1, E'_2$ измеримы, значит, $E'_1 \cap E'_2$ и $(E'_1 \cap E'_2)'$ – измеримы. Таким образом, $\mathcal{A}$ есть алгебра. $\square$

**Предложение 8.2** *Если* $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$ *и* $E_1 \bigcap E_2 = \emptyset$ *то* $\mu^*(E_1 \sqcup E_2) = \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2)$.

**Доказательство.** Так как $E_1$ измеримо, то $\mu^* A = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E'_1)$. Положим в этом равенстве $A = E_1 \sqcup E_2$, получим $\mu^* A = \mu^* E_1 + \mu^* E_2$. $\square$
**Следствие.** *Если* $E_1, E_2, \ldots, E_n \in \mathcal{A}$ *и дизъюнктно, то*

$$\mu^*\left(\sqcup_{k=1}^n E_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu^* E_k.$$

**Лемма 8.3** *Если* $E_2 \cap E_1 = \emptyset$, $E_2 - \mu^*$ *измеримо, то* $\forall\, A \subset \Omega$

$$\mu^*((E_1 \sqcup E_2) \cap A) = \mu^*(E_1 \cap A) + \mu^*(E_2 \cap A).$$

**Доказательство.** Так как $E_2 - \mu^*$ измеримо, то

$$\mu^*((E_1 \sqcup E_2) \cap A) = \mu^*((E_1 \sqcup E_2) \cap A \cap E_2) + \mu^*((E_1 \sqcup E_2) \cap A \cap E'_2) =$$

$$= \mu^*((E_2 \cap A) + \mu^*((E_1 \cap A). \ \square$$

**Лемма 8.4** *Если* $E_1, \ldots, E_n - \mu^*$*измеримы, дизъюнктны, то* $\forall\, A \subset \Omega$

$$\mu^*\left(\sqcup_{j=1}^n E_j \cap A\right) = \sum_{j=1}^n \mu^*(E_j \cap A).$$

**Доказательство.** По индукции. При $n = 2$ – доказано. Пусть верно для $n$. Тогда

$$\mu^*\left(\sqcup_{j=1}^{n+1} E_j \cap A\right) = \mu^*\left((\sqcup_{j=1}^{n} E_j \cap A) \sqcup (E_{n+1} \cap A)\right) =$$

по лемме 6.3

$$= \mu^*\left(\sqcup_{j=1}^{n+1} E_j \cap A\right) + \mu^*(E_{n+1} \cap A) = \sum_{j=1}^{n+1} \mu^*(E_j \cap A). \ \square$$

**Лемма 8.5** *Если $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ – счетная совокупность дизъюнктных $\mu^*$-измеримых множеств, то*

$$\mu^*\left(\sqcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^* E_j.$$

**Доказательство.**

$$\mu^*\left(\sqcup_{j=1}^{\infty} E_j \cap A\right) = \mu^*\left(\sqcup_{j=1}^{n} (E_j \cap A) \sqcup \left(\sqcup_{j=n+1}^{\infty} E_j\right) \cap A\right) \geq \sum_{j=1}^{n} \mu^*(E_j \cap A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu^* \sum_{j=1}^{\infty} (E_j \cap A) \leq \mu^*\left(\sqcup_{j=1}^{\infty} (E_j \cap A)\right).$$

Обратное неравенство верно по свойству счетной полуаддитивности, т.е.

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E_j \cap A) = \mu^*\left((\sqcup_{j=1}^{\infty} E_j) \cap A\right).$$

Покрытие $A = \sqcup E_j$, значит, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu^* E_j = \mu^*\left(\sqcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)$. $\square$

**Лемма 8.6** *Если $(E_j)_{j=1}^{\infty}$ – $\mu^*$ измеримы и дизъюнктны, то $\sqcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{A}$.*

**Доказательство.** Надо доказать, что $\forall\, A$

$$\mu^* A \geq \mu^*\left((\sqcup_{j=1}^{\infty} E_j) \cap A\right) + \mu^*\left(A \cap \left(\sqcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)'\right).$$

Обозначим $\sqcup_{j=1}^{n} E_j = B_n \in \mathcal{A}$. Тогда

$$\mu^*(A \cap B_n) + \mu^*\left(A \cap \left(\sqcup_{j=1}^{n} E_j\right)'\right) = \mu^* A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \mu^*(A \cap E_j) + \mu^* \left( A \cap \left( \sqcup_{j=1}^{\infty} E_j \right)' \right) \leq \mu^* A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_j) + \mu^* \left( A \cap \left( \sqcup_{j=1}^{\infty} E_j \right)' \right) \leq \mu^* A.$$

$$\mu^* \left( A \cap \left( \sqcup_{j=1}^{\infty} E_j \right) \right) + \mu^* \left( A \cap \left( \sqcup_{j=1}^{\infty} E_j \right)' \right) \leq \mu^* A \leq \mu^* A.$$

Следовательно, выполняется равенство, значит, $\sqcup_{j=1}^{\infty} E_j$ – $\mu^*$-измеримо. $\square$

**Теорема 8.7** *$\mathcal{A}$ есть $\sigma$-алгебра и $\mu^*$ – счетно аддитивная функция $\mathcal{A}$.*

**Доказательство.** 1) Пусть $E = \cup_{j=1}^{\infty} E_j$. Тогда

$$E = E_1 \sqcup (E_2 \setminus E_1) \sqcup (E_3 \setminus E_2 \setminus E_1) \sqcup \ldots \sqcup (E_{n+1} \setminus E_n \setminus \ldots \setminus E_1) \sqcup \ldots$$

Отсюда по лемме 8.6 $E \in \mathcal{A}$.
2) Счетная аддитивность $\mu^*$ на $\mathcal{A}$ доказана в лемме 6.5. $\square$

# 9 Свойства $\mu^*$ измеримых множеств

1) Если $\mu^* E = 0$ то $E \in \mathcal{A}$.
**Доказательство.** Для всех $A$

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E') \leq \mu^* E + \mu^* A = \mu^* A \Rightarrow$$

$E - \mu^*$ измеримо. $\square$
2) Если $\mu^* E = 0$ и $E_1 \subset E$, то $E_1 \in \mathcal{A}$.
**Доказательство.** $\mu^* E_1 \leq \mu^* E = 0 \Rightarrow E_1 \in \mathcal{A}$.
3) Пусть $A \subset E \subset B,\ A, B \in \mathcal{A}$, $\mu^*(B \setminus A) = 0$. Тогда $E \in \mathcal{A}$.
**Доказательство.** Из $A \subset E \subset B \Rightarrow E \setminus A \subset B \setminus A \Rightarrow \mu^*(E \setminus A) \leq \mu^*(B \setminus A) = 0 \Rightarrow E \setminus A$ – $\mu^*$ измеримо. $\square$
4) Пусть $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, A_\varepsilon \subset E \subset B_\varepsilon$, $A_\varepsilon, B_\varepsilon \in \mathcal{A}$ и $\mu^*(B_\varepsilon \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$. Тогда $E - \mu^*$ измеримо.
**Доказательство.** Выберем $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Тогда существует $A_n \subset E \subset B_n$, $A_n, B_n \in \mathcal{A}$ $\mu^*(B_n \setminus A_n) < \frac{1}{n}$. Обозначим $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, $B = \cap_{n=1}^{\infty} B_n$. Тогда $A \subset E \subset B$ и $B \setminus A = (\cap B_n) \setminus (\cup A_n) = \cap_{k=1}^{\infty} (B_n \setminus A_n) \Rightarrow B \setminus A \subset B_n \setminus A_n$ $\forall\, n \Rightarrow \mu^*(B \setminus A) \leq \mu^*(B_n \setminus A_n) < \frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow \mu^*(B \setminus A) = 0 \Rightarrow E - \mu^*$ измеримо. $\square$

# 10 Продолжение меры с полукольца на $\sigma$-алгебру

1) Пусть $\Omega$ – произвольное множество, $\mathfrak{N}$ – полукольцо, $\mu$ – мера на $\mathfrak{N}$.
2) Пусть $\mu^*$ –внешняя мера, построенная по мере $\mu$.
3) Пусть $\mathcal{A}$ – $\sigma$-алгебра $\mu^*$ измеримых множеств.

**Теорема 10.1** *Если $E \in \mathfrak{N}$, то $E - \mu^*$ измеримо и $\mu^* E = \mu E$.*

**Доказательство.** Пусть $E \in \mathfrak{N}$. Надо доказать, что $\forall\, A$

$$\mu^* A \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E'). \tag{10.1}$$

По определению $\mu^*$ : $\forall\, \varepsilon > 0$ существуют множества $E_k \in \mathfrak{N}$, такие, что $\cup_{k=1}^{\infty} E_k \supset A$ и

$$\mu^* A \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu E_k < \mu^* A + \varepsilon. \tag{10.2}$$

Так как $\cup E_k \supset A \Rightarrow (\cup_{k=1}^{\infty} E_k) \cap E \supset A \cap E$, то по определению внешней меры

$$\mu^*(A \cap E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k \cap E). \tag{10.3}$$

$A \cap E' \subset (\cup E_k) \cap E_1 = \cup_{k=1}^{\infty} (E_k \setminus E) = \cup_{k=1}^{\infty} (E_k \setminus (E_k \cap E)) = \cup_{k=1}^{\infty} \left( \sqcup_{j=1}^{k_j} E_{k_j} \right).$

Снова по определению внешней меры

$$\mu^*(A \cap E') \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k_j} \mu E_{k,j}.$$

Кроме того,

$$\mu E_k = \mu(E_k \cap E) + \sum_{j=1}^{k_j} \mu E_{k,j} \Rightarrow \sum \mu E_{k,j} = \mu E_k - \mu(E_k \cap E) \Rightarrow$$

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E') \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k \cap E) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k_j} \mu E_{k,j} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left( \mu(E_k \cap E) + \sum_{j=1}^{j_k} \mu E_{k,j} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu E_k < \mu^* A + \varepsilon.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем, что $\mu^* E = \mu E$. $\square$

**Определение 10.1** *Из теоремы 10.1 следует, что $\mu^*$ является продолжением меры $\mu$ с полукольца $\mathfrak{N}$ на $\sigma$ алгебру $\mathcal{A}$ и является мерой на $\mathcal{A}$. Ее называют стандартным продолжением или продолжением по схеме Каратеодори.*

**Определение 10.2** *Пусть $\mathfrak{N}_m$ – полукольцо полуоткрытых прямоугольников $[\mathbf{a}, \mathbf{b})$ в $\mathbb{R}^m$, мера $\mu$ определена на полукольце $\mathfrak{N}_m$ равенством $\mu[\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \prod_{j=1}^m |b^{(j)} - a^{(j)}|$. Продолжение меры с полукольца $\mathfrak{N}_m$ на $\sigma$ алгебру $\mathcal{A}_m$ по схеме Каратеодори называется мерой Лебега в $\mathbb{R}^m$ и обозначается снова через $\mu$. Все множества, входящие в $\sigma$-алгебру $\mathcal{A}_m$ называются измеримыми по Лебегу.*

**Замечание.** Из теоремы 10.1 следует, что все прямоугольники $[\mathbf{a}, \mathbf{b})$ и все множества, получающиеся из них с помощью конечного или счетного количества объединений, пересечений и разностей будут измеримыми множествами.

## 11 Свойства измеримых множеств в $\mathbb{R}^m$

**Лемма 11.1** *Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$ и $\mu E < +\infty$. Тогда*

$$\mu^* E = \inf_{G \supset E} \mu G.$$

**Доказательство.** По определению внешней меры

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \cup_{k\in\mathbb{Z}} (\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k) \supset E, \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k) < \mu^* E + \varepsilon.$$

При каждом $k \in \mathbb{N}$ выберем интервал $(\alpha_k, \mathbf{b}_k) \supset [\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k)$ так, чтобы

$$\mu(\alpha_k, \mathbf{b}_k) < \mu[\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Положим $G = \bigcup_k (\alpha_k, \mathbf{b}_k)$. Тогда $G \supset E$ и

$$\mu^* G < \sum_k \mu(\alpha_k, \mathbf{b}) < \sum_k \mu(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}) + \varepsilon < 2\varepsilon. \qquad \square$$

**Лемма 11.2** *Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$ измеримо. Тогда*

$$(1) \forall \varepsilon > 0, \exists G \supset E, \mu(G \setminus E) < \varepsilon,$$

$$(2) \forall \varepsilon > 0, \exists F \subset E, F - \text{замкнутое}, \mu(E \setminus F) < \varepsilon.$$

**Доказательство** (1). Если $\mu E < +\infty$, то это следует из леммы 11.1. Если $\mu E = \infty$, то определим множество $E_{\mathbf{n}} = E \cap [\mathbf{n} - 1, \mathbf{n})$. Очевидно, что $E = \sqcup_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^{\mathbf{n}}}$ и $\mu E_{\mathbf{n}} \leq 1$. Поэтому при каждом $\mathbf{n}$ существуют множества $G_{\mathbf{n}} \supset E_{\mathbf{n}}$, $G_{\mathbf{n}}$ - открытые и $\mu(G_{\mathbf{n}} \setminus E_{\mathbf{n}}) < \frac{\varepsilon}{(2\|n\|)^m} \frac{1}{2^{\|n\|}}$.
Положим $G = \bigcup_{\mathbf{n}} G_{\mathbf{n}}$. Тогда $G \supset E$ и

$$\mu(G \setminus E) = \mu(\cup_{\mathbf{n}} G_{\mathbf{n}} \setminus \cup_{\mathbf{n}} E_{\mathbf{n}}) \leq \sum_{\mathbf{n}} \mu(G_{\mathbf{n}} \setminus E_{\mathbf{n}}) < \varepsilon.$$

И (1) доказано.

Для доказательства части (2) рассмотрим множество $E'$, которое измеримо. По первой части леммы $\forall \varepsilon > 0 \exists G \supset E'$, $G$ - открытое и $\mu(G \setminus E') < \varepsilon$. Но $G \setminus E' = E \setminus G'$. Обозначим $G' = F$. Тогда $F$ - замкнутое, $F \subset E$ и $\mu(E \setminus F) = \mu(G \setminus E') < \varepsilon$. □

**Определение 11.1.** *Счетное пересечение открытых множеств называется множеством типа* $G_\delta$ *или, короче,* $G_\delta$ *множеством. Счетное объединение замкнутых множеств называется множеством типа* $F_\sigma$ *или, короче,* $F_\sigma$ *множеством.*

**Теорема 11.3** *Для любого измеримого множества* $E \subset \mathbb{R}^m$ *существует множество* $H$ *типа* $F_\sigma$ *и множество* $K$ *типа* $G_\delta$ *такие, что*

$$H \subset E \subset K, \mu(K \setminus H) = 0, \mu H = \mu E = \mu K.$$

**Доказательство.** По лемме 11.2 существуют множества $G_n$ и $F_n$ ($G_n$ - открытые, $F_n$ - замкнутые) такие, что

$$F_n \subset H \subset G_n, \mu(G_n \setminus H) < \frac{1}{n}, \mu(H \setminus F_n) < \frac{1}{n}.$$

Положим $G = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n, F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Тогда

$$F \subset H \subset G, \mu(G \setminus H) \leq \mu(G_n \setminus H) < \frac{1}{n}, \mu(H \setminus F) \leq \mu(H \setminus F_n) < \frac{1}{n}.$$

Так как $n \in \mathbb{N}$ произвольные, то $\mu(G \setminus H) = \mu(H \setminus F) = 0$. Кроме этого,

$$H = F \bigsqcup (H \setminus F), G = H \bigsqcup (G \setminus H),$$

и, значит, $\mu H = \mu F + \mu(H \setminus F) = \mu F$, $\mu G = \mu H + \mu(G \setminus H) = \mu H$. □

**Следствие.** 1)Любое измеримое множество в $\mathbb{R}^m$ есть объединение множества типа $F_\sigma$ и множества меры ноль.
2)Любое измеримое множество в $\mathbb{R}^m$ может быть получено как разность множества типа $G_\delta$ и множества меры ноль.

# Глава 3

# Измеримые функции

## 1 Множества Лебега

Пусть $\Omega$ – основное множество, $\mathcal{A}-\sigma$-алгебра, мера $\mu$, построенная по схеме Кирониодари.

**Определение 1.1** *Пусть $E \subset \Omega, f$ определена на $E$. Множества*

$$I): \ E(f > a) \overset{df}{=} \{x \in E: \ f(x) > a\},$$

$$II): \ E(f \geq a) \overset{df}{=} \{x \in E: \ f(x) \geq a\},$$

$$III): \ E(f < a) \overset{df}{=} \{x \in E: \ f(x) < a\},$$

$$IV): \ E(f \leq a) \overset{df}{=} \{x \in E: \ f(x) \leq a\},$$

*называются множествами Лебега.*

**Теорема 1.1** *Если измеримы все множества Лебега одного из типов I-IV, то измеримы все множества Лебега остальных 3 типов.*

**Доказательство.** 1) Пусть $\forall\, a \in \mathbb{R}$ Измеримы множества I-го типа. Множество $E(f \geq a)$ можно представить в виде

$$E(f \geq a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f > a - \frac{1}{n}). \tag{1.1}$$

В самом деле, если $x \in E(f \geq 0) \Rightarrow f(x) \geq a \Rightarrow \forall\, n,\ f(x) > a - \frac{1}{n} \Rightarrow \forall\, n$ $x \in E\left(f(x) > a - \frac{1}{n}\right) \Rightarrow x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E\left(f(x) > a - \frac{1}{n}\right)$, т.е.

$$E(f \geq a) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left(f > a - \frac{1}{n}\right). \tag{1.2}$$

Проверим противоположное включение. Пусть $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E\left(f > a - \frac{1}{n}\right) \Rightarrow$ $\forall\, n,\ f(x) > a - \frac{1}{n}$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем $f(x) \geq a \Rightarrow$ $x \in E(f \geq a)$. Следовательно, (1.1) выполнено, значит, $E(f \geq a)$ измеримо.
2) Покажем, что если измеримы все множества II типа, то измеримы все множества I типа. Запишем

$$E(f > a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left(f \geq a + \frac{1}{n}\right).$$

В самом деле, если $x \in E(f > a) \Rightarrow f(x) > a \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}\ f(x) \geq a + \frac{1}{n} \Rightarrow$ $\exists\, n \in \mathbb{N}\ x \in E\left(f(x) \geq a + \frac{1}{n}\right) \Rightarrow x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E\left(f(x) \geq a + \frac{1}{n}\right)$. Проверим противоположное включение. Пусть $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E\left(f \geq a + \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \exists\, n,\ f(x) \geq a + \frac{1}{n}$. Поэтому $f(x) > a$ и $x \in E(f > a)$. Следовательно, $E(f > a)$ измеримо.
3) Пусть измеримы множества I-го типа. Так как $E(f \leq a) \bigsqcup E(f > a) = E$, то измеримы множества IV-го типа. По пункту 1) измеримы множества II-го типа, а так как $E(f < a) \bigsqcup E(f \geq a) = E$, то измеримы множества III-го типа. Т.о. из измеримости множеств I-го типа следует измеримость множеств остальных типов.
4) Аналогично доказывается, что из измеримости множеств одного из типов II, III и IV, следует измеримость множеств остальных типов $\square$

**Определение 1.2** *Пусть $f$ определена на измеримом множестве $E$. $f$ называется измеримой на $E$, если $\forall\, a \in \mathbb{R}$ измеримы все множества Лебега.*

**Замечание.** По теореме 1.1 достаточно потребовать, чтобы были измеримы все множества одного из типов $I - IV$.

## 2 Свойства измеримых функций

1) Если $f$ и $g$ измеримы на $E$, то $f + g$ измерима на $E$.
**Доказательство.** Покажем, что справедливо равенство

$$E(f + g > a) = \bigcup_{r \in a} (E(f > r) \bigcap E(g > a - r)) \tag{2.1}$$

В самом деле, пусть $x \in E(f + g > a) \Rightarrow f(x) + g(x) > a \Rightarrow$
$f(x) > a - g(x) \Rightarrow \exists\, r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q},\quad f(x) > r > a - g(x) \Rightarrow$
$\exists\, r \in \mathbb{Q} : x \in (E(f > r) \bigcap E(g > a - r))$

$\Rightarrow x \in \bigcup\limits_{r\in\mathbb{Q}} (E(f > r) \bigcap E(g > a - r))$. Таким образом справедливо включение

$$E(f+g>a) \subset \bigcup_{r\in a}(E(f>r)\bigcap E(g>a-r))$$

Покажем обратное включение. Если $x \in (\bigcup\limits_{r\in\mathbb{Q}} (E(f > r) \bigcap E(g > a - r))$ то $\exists\, r,\ f(x) > r \wedge g(x) > a - r \Rightarrow f(x) + g(x) > a$. Таким образом, равенство (2.1) доказано. Но рациональных чисел – счетное множество. Значит, $E(f + g > a) \in \mathcal{A}$. $\square$

2) $f(x) \equiv C = (\mathrm{const})$ измеримо.

**Доказательство.** $E(f(x) > a) = \begin{cases} E, & \text{если } c > a \\ \emptyset, & \text{если } c \leq a \end{cases}$ – измеримо.

3) Если $f$ измерима на $E$, то $\lambda f$ измерима на $E$.

**Доказательство.** Если $\lambda = 0$, то это свойство 2). При $\lambda > 0 \Rightarrow E(\lambda f(x) > a) = E(f(x) > \frac{a}{\lambda})$ – измеримо. Если $\lambda < 0 \Rightarrow E(\lambda f(x) > a) = E(f(x) < \frac{a}{\lambda})$ – измеримо. $\square$

4) Если $f$ измерима, то $|f(x)|$ измерима.

**Доказательство.** $E(|f(x)| \geq a) = \begin{cases} E, & a \leq 0, \\ E(f(x) \geq a) \bigcup E(f(x) \leq -a), & a > 0 \end{cases} \Rightarrow$ $|f|$ измеримая функция. $\square$

5) Если $f$ измерима, то $f^2(x)$ измерима.

**Доказательство.** $E(f^2(x) \geq a) = \begin{cases} E, & a \leq 0, \\ E(f(x) \geq \sqrt{a}), & a > 0. \end{cases}$ $\square$

6) Если $f, g$ измеримы, то $fg$ измерима.

**Доказательство.** $(f + g) = f^2 + 2fg + g^2 \Rightarrow fg$ измерима. $\square$

7) Если $f \neq 0$ на $E$ и измерима, то $\frac{1}{f}$ измерима.

**Доказательство.** Если $a = 0$, то $E(f > 0) = E\left(\frac{1}{f} > 0\right)$. Если $a > 0$, то $E\left(\frac{1}{f} > a\right) = E\left(f < 0\frac{1}{a}\right) \bigcup E\left(f > 0\right) \Rightarrow \frac{1}{f}$ – измерима. Если $a < 0$, то $E\left(\frac{1}{f} > a\right) = E\left(f <\right) \bigcup E\left(f > \frac{1}{a}\right) \Rightarrow \frac{1}{f}$ – измерима. $\square$

# 3 Измеримость предела последовательности измеримых функций

**Теорема 3.1** *Пусть $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ – последовательность измеримых функций на $E$. Тогда*

*1) $\sup f_n(x)$ измерима на $E$.*

*2) $\inf f_n(x)$ измерима на $E$.*

**Доказательство.** Пусть $\sup f_n(x) = f(x)$. Тогда

$$E(f > a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n > a).$$

. В самом деле, если

$$x \in E(f > a) \Rightarrow \exists\, n \ f_n(x) > a \Rightarrow \exists\, n \quad x \in E(f_n > a).$$

Обратно, $x \in \bigcup(f_n > a) \Rightarrow \exists\, n,\ x \in E(f_n > a) \Rightarrow \exists\, n,\ f_n(x) > a \Rightarrow \sup f_n(x) > a \Rightarrow x \in E(f_n > a)$. Аналогично доказываем, что $\inf f_n(x)$ измерима на $E$. $\square$

**Теорема 3.2** *Если $f_n(x)$ измеримы на $E$ и существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, то $f$ измерима на $E$.*

**Доказательство.** Образуем функции $F_n(x) = \sup\limits_{k\geq n} f_n(x)$, $F_n(x)$ – убывающая последовательность функций и $f(x) = \lim f_n(x) = \inf\limits_{n} F_n(x)$. $F_n(x)$ измеримы по теореме 3.1. Значит, $\inf F_n(x)$ измерим по теореме 3.1. $\square$

# 4 Понятие почти всюду, сходимость почти всюду

**Определение 4.1** *Свойство $A(x)$ выполняется п.в. на $E$, если $\mu\{x \in E :$ $A(x)$ не выполняется$\} = 0$.*

**Пример.** $f(x) = g(x)$ п.в. означает, что $\mu\{x \in E :\ f(x) \neq g(x)\} = 0$.

**Теорема 4.1** *Если $f(x)$ измерима на $E$ и $f = g$ п.вс. на $E$, то $g$ измерима на $E$.*

**Доказательство.** Так как $f(x) = g(x)$ п.вс., то множества Лебега $E(f > a)$ и $E(g > a)$ отличаются на множество нулевой меры. Поэтому, если $E(f > a)$ измеримо, то $E(g > a) = E(f > a) \bigsqcup E_0$ и $\mu E_0 = 0$ или $E(f > a) = E(f > a) \bigsqcup E_0$ и $\mu E_0 = 0 \Rightarrow E_0$ – измеримо, тогда $E(g > a)$ измеримо, значит, $g$ измерима. $\square$

**Теорема 4.2** *Если $f_n$ измерима на $E$ и $f_n \to f$ п.в. на $E$, то $f$ – измерима.*

**Доказательство.** $E_0 = \{x \in E :\ \ f_n \not\to f\} \Rightarrow \mu E_0 = 0 \Rightarrow f_n \to f$ на $E \setminus E_0$. Значит, $f$ измерима на $E \setminus E_0$. Но $\mu E_0 = 0 \Rightarrow f$ измерима на $E = (E \setminus E_0) \bigsqcup E$. $\square$

# 5 Сходимость по мере

**Определение 5.1** *Пусть* $(f_n)$ *измерима на* $E$. *Последовательность* $(f_n)$ *называется сходящейся к* $f$ *по мере на* $E$, *если* $\forall\,\varepsilon > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} \mu E(|f_n - f| > \varepsilon) = 0$.

**Теорема 5.1** *Если* $f_n$ *сходится по мере, то этот предел единственен, т.е. если* $f_n \to f$ *по мере и* $f_n \to g$ *по мере, то* $f = g$ *п.в.*

**Доказательство.** 1) Докажем включение.

$$E(|f-g| > \varepsilon) \subset E(|f-f_n| > \frac{\varepsilon}{2}) \bigcup E(|f_n - g| > \frac{\varepsilon}{2}). \tag{5.1}$$

Выберем $x \in E(|f-g| > \varepsilon) \Rightarrow |f(x) - g(x)| > \varepsilon$. Покажем, что $x \in E(|f - f_n| > \frac{\varepsilon}{2}) \bigcup E(|f_n - g| > \frac{\varepsilon}{2})$. Пусть это не так, $x \notin \bigcup$, тогда $|f(x) - f_n(x)| \le \frac{\varepsilon}{2}$ и $|f_n(x) - g(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |f(x) - g(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, что невозможно.
2) Из (5.1) следует

$$\mu E(|f-g| > \varepsilon) \le \mu E(|f - f_n| > \frac{\varepsilon}{2}) + \mu E(|f_n - g| > \frac{\varepsilon}{2}).$$

Перейдя справа к пределу при $n \to \infty$, получим $\mu E(|f-g| > \varepsilon) = 0$ $\forall\,\varepsilon > 0$. Но

$$\mu E(f \ne g) = \mu E(|f-g| > 0) = \mu \bigcup_{n=1}^{\infty} E(|f-g| > \frac{1}{n}) \le \sum \mu E(|f-g| > \frac{1}{n}) = 0. \ \square$$

**Лемма 5.2** *Пусть* $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, $E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset \ldots$ *и* $E_n$ *измеримы и* $\mu E_1 < +\infty$. *Тогда* $\mu E = \lim\limits_{n\to\infty} \mu E_n$.

**Доказательство.** Пусть $E = (E_1 \setminus E_2) \bigsqcup (E_2 \setminus E_3) \bigsqcup \ldots$ Тогда $\mu E = \mu(E_1 \setminus E_2) + \ldots = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(E_k \setminus E_{k+1}) + \mu E$. Но

$$E_k = E_{k+1} \bigsqcup (E_k \setminus E_{k+1}) \Rightarrow \mu E_k = \mu E_{k+1} + \mu(E_k \setminus E_{k+1}) \Rightarrow$$

$$\mu(E_k \setminus E_{k+1}) = \mu E_k - \mu E_{k+1}$$

(т.к. $\mu E_k$ и $\mu E_{k+1} < +\infty$). Тогда

$$\mu E = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k \setminus E_{k+1}) = \lim(\mu E_1 - \mu E_{k+1}) + \mu E \Rightarrow \mu E = \lim_{n\to\infty} \mu E_{n+1}. \ \square$$

**Теорема 5.3** *Пусть $\mu E < +\infty$, $f_n$ измеримы на $E$ и $f_n(x) \to f(x)$ п.вс. на $E$. Тогда $f_n(x) \to f(x)$ по мере на $E$.*

**Доказательство.** Обозначим $A = \{x \in E : \ f_n(x) \not\to f(x)\}$. По условию $\mu A = 0$. Надо доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \mu E(|f_n - f| > \varepsilon) = 0$. Рассмотрим множества $E_n = \{x \in E : \ |f_n - f| > \varepsilon\}$. Обозначим $\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E_k = B_n$, очевидно, что $B_{n+1} \subset B_n$, и пусть $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_k = B$. Покажем, что $B \subset A$. Пусть $x \in B$. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}, x \in B_n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists k > n, x \in E_k \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists k > n, |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon \Rightarrow f_k(x) \not\to f(x)$ в точке $x$, значит, $x \in A$. Но $\mu A = 0 \Rightarrow \mu B = 0$. Тогда по лемме

$$\mu B = \lim_{n\to\infty} \mu B_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu B_n = 0.$$

А так как $E_n \subset B_n \Rightarrow \mu E_n \leq \mu B_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \mu E_n = 0$. $\Box$

**Замечание 1.** Теорема 5.3 неверна, если $\mu E = +\infty$, например, $E = [0, +\infty)$, $\mu E = +\infty$, $f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, n], \\ 0 & x > n. \end{cases}$ Очевидно, что $f_n(x) \to f(x) \equiv 1$ всюду на $[0, +\infty)$, но $\mu E\left(|f_n - f| > \frac{1}{2}\right) = n \not\to 0$.

**Замечание 2.** Утверждение, обратное к теореме 5.3, не верно, т.е. из сходимости по мере не следует сходимость п.вс.

**Пример.**

$$f_{2^n+k}(x) = \begin{cases} 2^n, & x \in \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right), \\ 0 & x \notin \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right). \end{cases}$$

Очевидно, что $f_{2^n+k} \to f(x) \equiv 0$ мере, т.к. $E(|f_{2^n+k}(x) - 0| > \varepsilon) = \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)$ и $\mu\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} \to 0$ при $n \to \infty$. Но $\forall x \in [0, 1]$ $\exists f_{2^n+k}$, в которых $f_{2^n+k}(x) = 2^n \to +\infty$, т.е. $f_{2^n+k}(x)$ не сходится ни в одной точке и при этом $f_{2^n+k}(x) = 0$. Значит, последовательность $f_{2^n+k}$ не сходится ни в одной точке. $\Box$

**Теорема 5.4** *Если $f_n(x) \to f(x)$ по мере на $E, \mu E < +\infty$, то существует подпоследовательность $f_{n_k}(x) \to f(x)$ п.вс. на $E$.*

**Доказательство.** Построим последовательность $n_k$, такую, что $f_{n_k}(x)$ фундаментальна п.вс. на $E$. По условию $f_n(x) \to f(x)$ по мере на $E$, значит,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \lim_{n\to\infty} \mu E(|f_n - f| > \varepsilon) = 0 \Rightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists n_0, \ \forall n \geq n_0 \ \mu E(|f_n - f| > \frac{\varepsilon}{2}) < \frac{\delta}{2}.$$

Покажем, что

$$\forall\,\varepsilon>0\;\forall\,\delta>0\;\exists\,n_0,\;\forall\,m,n\geq n_0\;\mu E(|f_n-f_m|>\varepsilon)<\delta. \tag{5.2}$$

Для этого докажем включение

$$E(|f_n-f_m|>\varepsilon)\subset E\Big(|f_n-f|>\frac{\varepsilon}{2}\Big)\bigcup E\Big(|f-f_m|>\frac{\varepsilon}{2}\Big).$$

Пусть $x\in E(|f_n-f_m|>\varepsilon)$,т.е. $|f_n-f_m|>\varepsilon$, но $x$ не принадлежит правой части, значит,

$$|f_n-f|\leq\frac{\varepsilon}{2}\wedge|f-f_m|\leq\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow$$

$|f_n-f_m|\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$, что невозможно. Значит,

$$\mu E(|f_n-f_m|>\varepsilon)\leq\mu E(|f_n-f|>\frac{\varepsilon}{2})+\mu E(|f-f_m|>\frac{\varepsilon}{2})<\delta,$$

и, таким образом, (5.2) доказано.

Выберем последовательность $\varepsilon_j\downarrow 0$ и такую, что $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\varepsilon_j<+\infty$. Отметим, что в этом случае $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}\varepsilon_j=0$. Положим в (5.2) $\varepsilon=\varepsilon_1$, $\delta=\varepsilon_1$. Тогда

$$\exists\,n_1,\forall\,n\geq n_1,\mu E(|f_{n_1}-f_n|>\varepsilon_1)<\varepsilon_1 \tag{5.3}$$

Положим в (5.2) $\varepsilon=\varepsilon_2$, $\delta=\varepsilon_2$. Получим

$$\exists\,n_2>n_1,\forall\,n\geq n_2,\mu E(|f_{n_2}-f_n|>\varepsilon_2)<\varepsilon_2. \tag{5.4}$$

Положим в (5.3) $n=n_2$. Тогда (5.3) примет вид

$$\exists\,n_1,\forall\,n\geq n_1,\mu E(|f_{n_1}-f_{n_2}|>\varepsilon_1)<\varepsilon_1 \tag{5.5}$$

Обозначим $E(|f_{n_2}-f_{n_1}|>\varepsilon_2)<\varepsilon_2=E_1$.

Положим в (5.2) $\varepsilon=\varepsilon_3$, $\delta=\varepsilon_3$. Тогда

$$\exists\,n_3>n_2,\forall\,n\geq n_3,\mu E(|f_{n_3}-f_n|>\varepsilon_3)<\varepsilon_3\Rightarrow$$

Положим в (5.4)$n=n_3$. Тогда (5.4) примет вид

$$\exists\,n_2>n_1,\forall\,n\geq n_2,\mu E(|f_{n_2}-f_{n_3}|>\varepsilon_2)<\varepsilon_2. \tag{5.6}$$

Обозначим $E_2=E(|f_{n_2}-f_{n_3}|>\varepsilon_2)$ и продолжим эти построения. Получим последовательность множеств $(E_k)$ и последовательность чисел $(n_k)$ таких, что $E_k=E(|f_{n_k}-f_{n_{k+1}}|>\varepsilon_k)$ и $\mu E_k<\varepsilon_k$. Образуем множества

$\tilde{E} = \bigcup\limits_{l=k}^{\infty} E_l$ и $\tilde{E} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{E}_k$. Очевидно, что $\tilde{E}_k$ образуют убывающую последовательность т.к. $\mu E < +\infty$, то $\mu\tilde{E} = \lim\limits_{k\to\infty} \tilde{E}_k$.

Но $\mu\tilde{E}_k \le \sum\limits_{l=k}^{\infty} \mu E_l < \sum\limits_{l=k}^{\infty} \varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty \Rightarrow \mu\tilde{E} = 0$.

Покажем, что $f_{n_k}(x)$ фундаментальна на $E \setminus \tilde{E}$. В самом деле, пусть $x \in E \setminus \tilde{E} \Rightarrow \exists\, k, x \notin \tilde{E}_k \Rightarrow x \notin E_l \Rightarrow |f_{n_l}(x) - f_{n_{l+1}}(x)| \le \varepsilon_l \Rightarrow$

$$\sum |f_{n_l}(x) - f_{n_{l+1}}(x)| \le \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon_l < +\infty \Rightarrow \exists \lim \sum_{l=1}^{k} (f_{n_l} - f_{n_{l+1}}) = \lim_{k\to\infty} (f_{n_k} - f_{n_{k+1}}) \Rightarrow$$

$\exists \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$.

Таким образом, $\forall\, x \in E \setminus \tilde{E}\ \exists \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$. Обозначим его $g(x)$. Тогда *** $g(x)$ на $\tilde{E}$ равенства $g(x) = f(x)$. Тогда $f_{n_k}(x) \to g(x)$ п.вс. на $E$. Значит, $f_{n_k}(x) \to g(x)$ по мере. По теореме 5.1 $f_{n_k}(x) \to f(x)$ по мере на $E$. В силу единственности предела по мере $f(x) = g(x)$ п.вс., следовательно, $f_{n_k}(x) \to f(x)$ п.вс. $\square$

# 6 Устойчивость сходимости

**Теорема 6.1** *Пусть $f_n(x) \to 0$ п.вс. на $E$, $\mu E < +\infty$. Тогда существует последовательность $\lambda_n \uparrow +\infty$ такая,что $\lambda_n f_n(x) \to 0$ п.вс. на $E$.*

**Доказательство.** 1) Можно считать, что $f_n(x) \to 0$ всюду на $E$ и $f_n(x) \ge 0$ на $E$, т.к. $|f_n(x)| \to 0 \Leftrightarrow f_n(x) \to 0$.
2) Можно считать, что $f_n(x) \downarrow 0$ на $E$. В самом деле, пусть $f_n(x) \to 0$ в точке $x$. Обозначим $\varphi_n(x) = \sup\limits_{k\ge n} f_k(x)$. Тогда $\varphi_n(x) \ge f_n(x)$ и $\varphi_{n+1}(x) \le \varphi_n(x)$. И если мы сможем доказать теорему для $\varphi_n(x)$, то она будет доказана для $f_n(x)$.
3) Поэтому будем считать, что $f_n(x) \downarrow 0$ всюду на $E$. Так как $f_n(x) \to 0$ всюду на $E$, то $f_n(x) \to 0$ по мере на $E$. Значит, $\forall\, \varepsilon > 0 \lim\limits_{n\to\infty} \mu E(f_n(x) > \varepsilon) = 0$. Тогда

$$\forall\, \varepsilon > 0, \forall\, \delta > 0, \exists\, n_0, \forall\, n \ge n_0\ \ \mu E(f_n(x) > \varepsilon) < \delta$$

Пусть

$$\varepsilon = \frac{1}{1^2}\ \delta = \frac{1}{2^1}\ \exists\, n_1, \forall\, n \ge n_1\ \ \mu E(f_n(x) > \frac{1}{1^2}) < \frac{1}{2^1} \Rightarrow \mu E(f_{n_1}(x) > \frac{1}{1^2}) < \frac{1}{2^1}.$$

$\varepsilon = \dfrac{1}{2^2}$ $\delta = \dfrac{1}{2^2}$ $\exists\, n_2, \forall\, n \geq n_2$ $\mu E(f_n(x) > \dfrac{1}{2^2}) < \dfrac{1}{2^2} \Rightarrow \mu E(f_{n_2}(x) > \dfrac{1}{2^2}) < \dfrac{1}{2^2}$.
$\varepsilon = \dfrac{1}{3^2}$ $\delta = \dfrac{1}{2^3}$ $\exists\, n_3, \forall\, n \geq n_3$ $\mu E(f_n(x) > \dfrac{1}{3^2}) < \dfrac{1}{2^3} \Rightarrow \mu E(f_{n_3}(x) > \dfrac{1}{3^2}) < \dfrac{1}{2^3}$.
И так далее...

$$\varepsilon = \frac{1}{l^2},\ \delta = \frac{1}{2^l}\ \exists\, n_l, \forall\, n \geq n_l\ \ \mu E(f_{n_l}(x) > \frac{1}{l^2}) < \frac{1}{2^l}.$$

И так далее...
Образуем множества $E_l = \{x \in E:\ \ f_{n_l}(x) \geq \frac{1}{l^2}\}$, $\mu E_l < \frac{1}{2^l}$. Определяем последовательность $\lambda_n$ следующим образом.

$$\lambda_n = \begin{cases} 1, & n < n_1 \\ l, & n_l \leq n < n_{l+1}\ \ (l = 2, 3, \ldots) \end{cases}$$

Рассмотрим множества

$$A_l = \bigcup_{j=l}^{\infty} \bigcup_{n=n_j}^{n_{j+1}-1} \{x \in E:\ \lambda_n f_n(x) \geq \frac{1}{j}\}.$$

Если $n_j \leq n < n_{j+1} - 1$, то $\lambda_n = j \Rightarrow$
Если $\lambda_n f_n(x) \geq \frac{1}{j}$, то $\lambda_n f_{n_j}(x) \geq \frac{1}{j} \Rightarrow$

$$\{x \in E:\ \lambda_n f_n(x) \geq \frac{1}{j}\} \subset \{x \in E:\ \lambda_n f_{n_j}(x) > \frac{1}{j}\} \Rightarrow$$

$$\bigcup_{n=n_j}^{n_{j+1}-1} E(\lambda_n f_n(x) \geq \frac{1}{l}) = \{x \in E:\ j f_{n_j}(x) \geq \frac{1}{j}\} \Rightarrow$$

$$A_l = \bigcup_{j=l}^{\infty} \{x \in E:\ j f_{n_j}(x) \geq \frac{1}{j}\} \Rightarrow \tilde{A}_k = \bigcup_{l=k}^{\infty} A_l,\ \ A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k.$$

Покажем, что $\mu A = 0$. В самом деле,

$$\mu A = \lim \mu \tilde{A}_k, \mu \tilde{A}_k \leq \sum_{l=k}^{\infty} \mu A_l \leq \sum_{l=k}^{\infty} \left( \sum_{j=l}^{\infty} \frac{1}{2^j} \right) \leq \sum_{l=k}^{\infty} \frac{1}{2^{l-1}} = \frac{1}{2^{k-2}} \Rightarrow$$

$\lim \mu \tilde{A}_k = 0 \Rightarrow \mu A = 0$.

Покажем, что если $x \in E \setminus A$, то $\lambda_n f_n(x) \to 0$. Пусть $x \in E \setminus A \Rightarrow x \notin \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k \Rightarrow \exists\, k_0,\ x \notin \tilde{A}_{k_0} \Rightarrow x \notin \bigcup\limits_{l=k_0}^{\infty} A_l \Rightarrow \forall\, l \geq k_0,\ x \notin A_l \Rightarrow \forall\, j \geq l$
$x \notin \bigcup\limits_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \Rightarrow \forall\, n = \overline{n_j, n_{j+1} - 1},\ \lambda_n f_n(x) \leq \frac{1}{j} \to 0$. $\square$

# 7 Теорема Егорова

**Теорема 7.1** *Если $f_n(x) \to 0$ п.вс. на $E$, то существует функция $\varphi(x) \geq 0$, которая конечна п.вс. и последовательность $\alpha_n \downarrow 0$ такие, что $|f_n(x)| \leq \lambda_n \varphi(x)$ п.вс. на $E$.*

**Доказательство.** По теореме 6.1 существует $\lambda_n \uparrow +\infty$ такая, что $\lambda_n |f_n(x)| \to 0$. Обозначим $\varphi(x) = \sup\limits_n \lambda_n |f_n(x)| \Rightarrow \varphi(x)$ конечна п.вс. и $\varphi(x) \geq \lambda_n |f_n(x)| \Rightarrow |f_n(x)| \leq \frac{1}{\lambda_n}\varphi(x)$. □
Теорема 7.1 называется теоремой о регуляторе сходимости.

**Теорема 7.2 (Теорема Егорова Д.Ф.)** *Если последовательность $f_n(x) \to f(x)$ п.вс. на $E$, то $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists E_\varepsilon \subset E$, $\mu E \setminus E_\varepsilon < \varepsilon$ и такие, что $f_n(x) \to f(x)$ на $E$ равномерно.*

**Доказательство.** По условию $(f_n(x) - f(x)) \to 0$ п.вс. на $E$, значит, по теореме 7.1 существует последовательность $\alpha_n$ и функция $\varphi(x)$ конечна п.вс. такие, что

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n \varphi(x).$$

По условию $\varphi(x)$ конечна п.вс., значит, $\mu E(\varphi(x) = +\infty) = 0$. Но $E(\varphi(x) = +\infty) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E(\varphi(x) > k)$. По свойству непрерывности меры $0 = \mu E(\varphi(x) = +\infty) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu E(\varphi > k) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists k_0$, $\mu E(\varphi > k_0) < \varepsilon$. Тогда на множестве $E(\varphi \leq k_0)$ имеем $|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_k \; k_0 \to 0$ при $n \to \infty$. Значит, $f_n(x) \overset{\rightarrow}{\rightarrow} f(x)$ на $E \setminus E(\varphi > k_0) = E_\varepsilon$. □

# Глава 4

# Интеграл от ограниченной функции по множеству конечной меры

## 1 Суммы Дарбу-Лебега и их свойства

Будем считать в этой главе, что $\mu E < +\infty$ и $f(x)$ определена, измерима и ограничена на $E$.

**Определение 1.1** *Пусть $E$ представимо в виде $E = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} E_k$, $E_k$ – измеримые. Такое представление будем называть разбиением множества $E$ и обозначать $(E_k)$ или $(E_k)_{k=1}^n$.*

**Определение 1.2** *Пусть $f$ ограничена измерима на $E$, $(E_k)_{k=1}^n$ – разбиение $E$. Обозначим $m_k(f) = \inf\limits_{x \in E_k} f_k(x)$, $M_k(f) = \sup\limits_{x \in E_k} f_k(x)$. Сумму $\overline{S}(f, (E_k)) = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k(f)\mu E_k$ будем называть верхней интегральной суммой Дарбу-Лебега. Сумму $\underline{S}(f, (E_k)) = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k(f)\mu E_k$ будем называть нижней интегральной суммой Дарбу-Лебега.*

**Замечание.** Очевидно, что для фиксированного разбиения $(E_k)_{k=1}^n$

$$\underline{S}(f, (E_n)) \leq \overline{S}(f, (E_n)).$$

**Определение 1.3** *Разбиение $(E'_l)$ будем называть более мелким, чем $(E_k)$ , если любое $E_k$ представимо в виде объединения множеств $E'_l$.*

**Лемма 1.1** *При измельчении разбиения верхняя интегральная сумма уменьшается, а нижняя – увеличивается.*

**Доказательство.** Пусть $E = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} E_k$ – разбиение и пусть $E_k$ представимо в виде $E_k = \bigsqcup\limits_{l=1}^{n_k} E_{kl}$. Очевидно, что $\mu E_k = \sum\limits_{l=1}^{n_k} \mu E_{kl}$ и $M_k(f) \geq M_{kl}(f)$. Поэтому

$$\overline{S}(f,(E_k)) = \sum_{k=1}^{n} M_k \mu E_k = \sum_{k=1}^{n} M_k \sum_{l=1}^{n_k} \mu E_{kl} \geq \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n_k} M_{kl}\mu E_{kl} = \overline{S}(f,(E_{kl})).$$

Аналогично доказывается, что $\underline{S}(f,(E_k)) \leq \underline{S}(f,(E_{kl}))$. $\square$

**Теорема 1.2** *Любая нижняя сумма Дарбу-Лебега не больше любой верхней суммы.*

**Доказательство.** Пусть $(E'_k)_{k=1}^{n'}, (E''_l)_{l=1}^{n''}$ – два различных разбиения множества $E$ и пусть $E_{k,l} = E'_k \cap E''_l$. Тогда $(E_{k,l})$ есть разбиение множества $E$, причем оно мельче $E'_k$ и $E''_l$. Поэтому по лемме 1.3

$$\underline{S}(f,(E'_k)) \leq \underline{S}(f,(E_{k,l})) \leq \overline{S}(f,(E_{k,l})) \leq \overline{S}(f,(E''_l)). \ \square$$

# 2 Верхний и нижний интегралы. Интегрируемые функции

**Определение 2.1** *Пусть $f$ измерима и ограничена на $E$, $\mu E < +\infty$. Число $\overline{I}(f,E) = \inf\limits_{(E_k)} \overline{S}(f,(E_k))$ называется верхним интегралом Дарбу-Лебега. Число $\underline{I}(f,E) = \sup\limits_{(E_k)} \underline{S}(f,(E_k))$ называется нижним интегралом Дарбу-Лебега.*

**Лемма 2.1** *Всегда $\underline{I}(f,E) \leq \overline{I}(f,E)$.*

**Доказательство.** Пусть $E = \sqcup E'_n$ и $E = \sqcup E''_l$ – два произвольных разбиения. Тогда $\underline{S}(f,(E'_k)) \leq \overline{S}(f,(E''_l))$. Зафиксируем разбиение $(E'_k)$ и перейдем к inf по $(E''_l)$. Получим

$$\underline{S}(f,(E'_k)) \leq \overline{I}(f,E).$$

Правая часть не зависит от $E$. Переходя к sup по $E'_k$, получим

$$\underline{I}(f,E) \leq \overline{I}(f,E). \ \square$$

**Определение 2.2** *Если $\underline{I}(f,E) = \overline{I}(f,E)$, то функция $f$ называется интегрируемой по Лебегу, и общее значение называется интегралом Лебега от $f$ на $E$ и обозначается $\int\limits_E f\,d\,\mu$.*

## 3 Критерий интегрируемости. Интегрируемость ограниченной измеримой функции

**Теорема 3.1 (Критерий интегрируемости)** *Пусть $f$ ограничена, измерима на $E$, $\mu E < +\infty$. $f$ интегрируема на $E$ тогда и только тогда, когда $\forall\, \varepsilon > 0$ существует разбиение $(E_k)$ такое, что $\overline{S}(f,(E_k)) - \underline{S}(f,(E_k)) < \varepsilon$.*

**Доказательство.** Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $f$ интегрируема на $E$. Выберем $\varepsilon > 0$, тогда существует разбиение $(E'_k)$ такое, что $\overline{S}(f,(E'_k)) - \int\limits_E f\,d\,\mu < \frac{\varepsilon}{2}$, существует разбиение $(E''_l)$ такое, что $\int\limits_E f\,d\,\mu - \underline{S}(f,(E''_l)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Построим новое разбиение $(E'_k \cap E''_l) = E_{k,l}$. Так как оно мельче $E'_k$ и $E''_l$, то

$$\overline{S}(f,(E_{k,l})) - \int\limits_E f\,d\,\mu < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\int\limits_E f\,d\,\mu - \underline{S}(f,(E_{kl})) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно,

$$\overline{S}(f,(E_{k,l})) - \underline{S}(f,(E_{k,l})) = \overline{S}(f,(E_{k,l})) - \int\limits_E f\,d\,\mu + \int\limits_E f\,d\,\mu - \underline{S}(f,(E_{k,l})) < \varepsilon.$$

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $\forall\, \varepsilon > 0$ существует разбиение $(E_k)$, что $\overline{S}(f,(E_k)) - \underline{S}(f,(E_k)) < \varepsilon$. Так как

$$\overline{S}(f,(E_k)) \geq \overline{I}(f,E) \wedge \underline{S}(f,(E_k)) \leq \underline{I}(f,E) \Rightarrow \overline{I}(f,E) - \underline{I}(f,E) \leq$$

$$\leq \overline{S}(f,(E_k)) - \underline{S}(f,(E_k)) < \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольное, то $\overline{I}(f,E) - \underline{I}(f,E) \leq 0$, значит, $\overline{I}(f,E) \leq \underline{I}(f,E)$. Так как противоположное неравенство верно всегда, то $\overline{I}(f,E) = \underline{I}(f,E)$. $\square$

**Теорема 3.2** *Любая ограниченная измеримая функция на $E$ с $\mu E < \infty$ интегрируема на $E$.*

**Доказательство.** Пусть $f$ ограничена, измерима на $E$. Тогда $\exists \sup f(x) = M$, $\exists \inf f(x) = m$. Пусть $y_0 = m$, $y_k = y_0 + k\frac{M-m}{n}$.

Рассмотрим разбиение $E_k = \{x \in E: \ y_{k-1} \leq f(x) < y_k\}$ $k = 1, \dots, n-1$. $E_n = \{x \in E: \ y_{n-1} \leq f(x) \leq y_n\}$. Тогда $m_k(f) = y_{k-1}$, $M_k(f) = y_k$. Отсюда

$$\overline{S}(f, (E_n)) = \sum_{k=1}^{n} y_k \mu E_k, \quad \underline{S}(f, (E_n)) = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} \mu E_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{S}(f, (E_n)) - \underline{S}(f, (E_n)) = \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1}) \mu E_k \leq \frac{M-m}{n} \sum_{k=1}^{n} \mu E_k =$$
$$= \frac{M-m}{n} \cdot \mu E \to 0,$$

т.е. выполнено условие теоремы 3.1, значит, $f$ интегрируема по Лебегу на $E$. $\square$

# 4 Свойства интегралов

**Теорема 4.1** *Если $m \leq f(x) \leq M$ на $E$, то $m\mu E \leq \int\limits_E f \, d\,\mu \leq M \mu E$.*

**Доказательство.** 1) $\overline{S}(f, (E_n)) = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k(f) \mu E_k \leq M \sum \mu E_n = M \mu E$. Тогда $\overline{I}(f, E) = \inf \overline{S}(f, (E_n)) \leq M \mu E$. $\square$
2) Левое неравенство доказывается аналогично. $\square$
**Следствие.** Если $f(x) \geq 0$ на $E$, то $\int\limits_E f \, d\,\mu \geq 0$. Если $f(x) \leq 0$ на $E$, то $\int\limits_E f \, d\,\mu \leq 0$. $\square$

**Теорема 4.2** *Интеграл $\int\limits_E f \, d\,\mu$ есть конечно-аддитивная функция множества, т.е. если $E = \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} E_k$, $E_k$ измеримы, то $\int\limits_E f \, d\,\mu = \sum\limits_{k=1}^{m} \int\limits_{E_k} f \, d\,\mu$.*

**Доказательство.** а) Пусть $E = E_1 \sqcup E_2$, докажем $\int\limits_E f \, d\,\mu = \int\limits_{E_1} f \, d\,\mu + \int\limits_{E_2} f \, d\,\mu$. Так как $f$ ограничена, измерима на $E$, $E_1$ и $E_2$ – измеримы, то $f$ ограничена измерима на $E_1$ и $E_2$, следовательно, интегралы $\int\limits_{E_1} f \, d\,\mu$ и $\int\limits_{E_2} f \, d\,\mu$ существуют. Проверим равенство.

Выберем разбиение $E = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} e_k$. Обозначим $e_k \cap E_1 = e'_k$, $e_k \cap E_2 = e''_k$. Очевидно, что $e_k = e'_k \sqcup e''_k$. Поэтому $(e'_k)$ – разбиение множества $E_1$, $(e''_k)$ – разбиение множества $E_2$. Значит,

$$\underline{S}(f,(e_k)) = \sum_{k=1}^{n} \inf_{x\in e_k} f(x)\cdot \mu e_k = \sum_{k=1}^{n} \inf_{x\in e_k} f(x)\cdot(\mu e'_k + \mu e''_k) = \sum_{k=1}^{m} \inf_{x\in e_k} f(x)\cdot \mu e'_k +$$

$$+\sum_{k=1}^{n} \inf_{x\in e_k} f(x)\cdot \mu e''_k \le \sum_{k=1}^{n} \inf_{x\in e'_k} f(x)\cdot \mu e'_k + \sum_{k=1}^{n} \inf_{x\in e''_k} f(x)\cdot \mu e''_k =$$

$$= \underline{S}(f,(e'_k)) + \underline{S}(f,(e''_k)) \le \underline{I}(f,E_1) + \underline{I}(f,E_2) = \int\limits_{E_1} f\,d\,\mu + \int\limits_{E_2} f\,d\,\mu \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{I}(f,E) \le \int\limits_{E_1} f\,d\,\mu + \int\limits_{E_2} f\,d\,\mu \Rightarrow \int\limits_{E} f\,d\,\mu \le \int\limits_{E_1} f\,d\,\mu + \int\limits_{E_2} f\,d\,\mu.$$

Покажем противоположное неравенство. Будем использовать предыдущие обозначения. Тогда

$$\overline{S}(f,(e'_k)) + \overline{S}(f,(e''_k)) = \sum_{k=1}^{n} \sup_{x\in e'_k} f(x)\cdot \mu e'_k + \sum_{k=1}^{n} \sup_{x\in e''_k} f(x)\cdot \mu e''_k \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} \sup_{x\in e_k} f(x)\cdot \mu e'_k + \sum_{k=1}^{n} \sup_{x\in e_k} f(x)\cdot \mu e''_k = \sum_{k=1}^{n} \sup_{x\in e_k} f(x)\cdot \mu e_k = \overline{S}(f,(e_k)).$$

$$\Rightarrow \overline{I}(f,E_1) + \overline{I}(f,E_2) \le \overline{S}(f,(e_k)) \Rightarrow \int\limits_{E_1} f\,d\,\mu + \int\limits_{E_2} f\,d\,\mu \le \int\limits_{E} f\,d\,\mu.$$

Соединяя полученные неравенства, получаем равенство.

б) Пусть $E = \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} E_k$. Тогда по индукции получаем

$$\int\limits_{E} f\,d\,\mu = \sum_{n=1}^{m} \int\limits_{E_n} f\,d\,\mu. \ \square$$

**Теорема 4.3** *Если* $f \in L(E)$, *то* $\int\limits_{E} f\,d\,\mu$ *есть счетно-аддитивная функция множества, т.е. если* $E = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, $E_k$ *– измеримы, то* $\int\limits_{E} f\,d\,\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f\,d\,\mu$.

**Доказательство.** Обозначим $\tilde{E}_n = \bigsqcup\limits_{k=n+1}^{\infty} E_k$. Тогда

$$E = \left(\bigsqcup_{k=1}^{n} E_k\right) \bigsqcup \tilde{E}_n \Rightarrow \mu E = \sum_{k=1}^{n} \mu E_n + \mu \tilde{E}_n$$

и $\mu \tilde{E}_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu E_k \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда

$$\int\limits_E f d\,\mu = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{E_n} f d\,\mu + \int\limits_{\tilde{E}_n} f d\,\mu. \tag{4.1}$$

Обозначим $m = \inf f(x), M = \sup f(x)$. Тогда

$$0 \leftarrow m\mu\tilde{E}_n \leq \int\limits_{\tilde{E}_n} f d\,\mu \leq M\mu\tilde{E}_n \to 0 \Rightarrow \int\limits_{E_n} f d\,\mu \to 0.$$

Перейдем в (4.1) к пределу при $n \to \infty$, получим $\int\limits_E f d\,\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_n} f d\,\mu$. $\square$

# 5 Интеграл как линейный оператор

**Теорема 5.1** *Если* $f, g \in L(E)$, *то*
*1)* $\int\limits_E (f+g) d\,\mu = \int\limits_E f d\,\mu + \int\limits_E g d\,\mu$.
*2)* $\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \ \int\limits_E f\lambda d\,\mu = \lambda \int\limits_E f d\,\mu$.

**Доказательство.** 1) Выберем разбиение $(E'_k)$ множества $E$ и $(E''_l)$ множества $E$. Тогда $E_{kl} = E'_k \cap E''_l$ –разбиение множества $E$ более мелкое, чем $(E'_k)$ и $(E''_l)$. Тогда

$$\underline{S}(f+g,(E_{kl})) = \sum \inf_{x\in E_{kl}} (f+g)(x)\mu E_{kl} \geq \sum \left(\inf_{x\in E_{kl}} f(x) + \inf_{x\in E_{kl}} g(x)\right) \mu E_{kl} =$$

$$= \sum \inf_{x\in E_{kl}} f(x)\mu E_{kl} + \sum \inf_{x\in E_{kl}} g(x)\mu E_{kl} = \underline{S}(f,(E_{kl})) + \underline{S}(g,(E_{kl})) \geq$$
$$\geq \underline{S}(f,(E'_k)) + \underline{S}(g,(E''_l)) \Rightarrow \underline{I}(f+g,E) \geq \underline{S}(f,(E'_k)) + \underline{S}(g,(E''_l)).$$

Переходя к sup по $(E'_k)$ при фиксированном $(E''_l)$, а затем к sup по $(E''_l)$, получаем $\underline{I}(f+g,E) \geq \underline{I}(f,E) + \underline{I}(g,E)$.

Обратное неравенство при тех же обозначениях

$$\overline{S}(f+g,(E_{kl})) = \sum \sup_{x\in E_{kl}} (f+g)(x)\mu E_{kl} \leq \sum \left( \sup_{x\in E_{kl}} f(x) + \sup_{x\in E_{kl}} g(x) \right) \mu E_{kl} =$$

$$= \sum \sup_{x\in E_{kl}} f(x)\mu E_{kl} + \sum \sup_{x\in E_{kl}} g(x)\mu E_{kl} = \overline{S}(f,(E_{kl})) + \overline{S}(g,(E_{kl})) \leq$$

$$\leq \overline{S}(f,(E'_k)) + \overline{S}(g,(E''_l)) \Rightarrow \overline{I}(f+g,E) \leq \overline{S}(f,(E'_k)) + \overline{S}(g,(E''_l)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{I}(f+g,E) \leq \overline{I}(f,E)+\overline{I}(g,E) \Rightarrow \int\limits_E (f+g)(x)\,d\mu = \int\limits_E f(x)\,d\mu + \int\limits_E g(x)\,d\mu. \ \square$$

2) Доказывается аналогично. Надо рассмотреть 3 случая: $\lambda > 0, \lambda = 0, \lambda < 0$. $\square$

**Следствие 1.** Если $f \leq g$, $f, g$ – ограничены, измеримы, то $\int\limits_E f d\,\mu \leq \int\limits_E g d\,\mu$.

**Доказательство.**

$$g \geq f \Rightarrow g - f \geq 0 \Rightarrow \int\limits_E (g-f) d\,\mu \geq 0 \Rightarrow \int\limits_E g d\,\mu - \int\limits_E f d\,\mu \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_E g d\,\mu \geq \int\limits_E f d\,\mu. \ \square$$

**Следствие 2.** $\left|\int\limits_E f d\,\mu\right| \leq \int\limits_E |f| d\,\mu$.

**Доказательство.** Так как $-|f| \leq f \leq |f|$, то $-\int\limits_E |f| d\,\mu \leq \int\limits_E f d\,\mu \leq \int\limits_E |f| d\,\mu$. Поэтому $\left|\int\limits_E f d\,\mu\right| \leq \int\limits_E |f| d\,\mu$. $\square$

# 6 Предельный переход под знаком интеграла. Теорема Лебега

**Теорема 6.1** *Пусть $f_n$ – ограничены, измеримы на $E$, $\mu E < \infty$ и $f_n \to f$ п.вс. на $E$, и $\exists\, c > 0$, что $|f_n| \leq c$. Тогда*
*1) $f$ интегрируема на $E$.*
*2) $\int\limits_E f d\,\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n d\,\mu$.*

**Доказательство.** 1) Так как $|f_n(x)| \le c$, то $|f(x)| \le c$ и $f$ измерима, значит, $f \in Ł(E)$.
2) Будем доказывать, что $\int\limits_E f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{E_n} f_n d\mu$ или, что то же самое, $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\int\limits_E f d\mu - \int\limits_{E_n} f_n d\mu\right| = 0$ или $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\int\limits_E (f-f_n) d\mu\right| = 0$. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_E |(f-f_n)|\, d\mu = 0$. По условию $f_n \to f$ п.в., значит, сходится по мере, т.е.

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \lim_{n\to\infty} \mu\{x \in E : \ |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} = 0.$$

Отсюда $\forall\, \varepsilon > 0\ \forall\, \delta = \varepsilon,\ \exists\, n_0,\ \forall\, n \ge n_0\ \ \mu\{x \in E : \ |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} < \varepsilon$. Значит,

$$\int\limits_E |f - f_n| d\mu = \int\limits_{E(|f_n - f| > \varepsilon)} |f - f_n| d\mu + \int\limits_{E(|f_n - f| \le \varepsilon)} |f - f_n| d\mu = I_1 + I_2.$$

При $x \in E(|f_n - f| \le \varepsilon)$

$$I_2 = \int\limits_{E(|f_n - f| \le \varepsilon)} |f - f_n| d\mu \le \varepsilon \mu E(|f_n - f| \le \varepsilon) < \varepsilon \mu E.$$

Оценим $I_1$. Так как $|f_n| \le c$, то $|f| \le c$, значит $|f_n - f| \le 2c$. Тогда

$$\int\limits_{E(|f_n - f| > \varepsilon)} |f - f_n| d\mu \le 2c \cdot \int\limits_{E(|f_n - f| > \varepsilon)} d\mu = 2c\mu E(|f_n - f| > \varepsilon) < 2c\varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_E |f - f_n| d\mu < \varepsilon(2c + \mu E) \Rightarrow \lim \int\limits_E |f - f_n| d\mu = 0. \ \square$$

# Глава 5

# Интеграл от неограниченной функции по множеству конечной меры

## 1 Срезка функции и ее свойства

**Определение 1.1** *Пусть* $E \subset \mathbb{R}^m$, $\mu E < +\infty, f$ *измерима на* $E$, $f \geq 0$ *на* $E$, $N \in \mathbb{N}$ . *Функция*

$$f_{(N)}(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq N \\ N, & f(x) > N \end{cases}$$

*называется срезкой функции.*

**Свойства.**
1) $f_{(N)}$ – возрастающая последовательность функций – очевидно.
2) $f_{(N)}$ – измеримая функция – очевидно.
3) $(f+g)_{(N)} \leq (f)_{(N)} + (g)_{(N)} \leq (f+g)_{(2N)}$.
Для доказательства надо рассмотреть 3 случая: $0 \leq f+g \leq N$, $N < f+g \leq 2N$, $2N < f+g$. Например, если $0 \leq f+g \leq N$, то $(f+g)_N = f+g$, $(f)_N = f, (g)_N = g$, $(f+g)_{2N} = f+g$, т.е. получили равенство.

## 2 Определение интеграла от неограниченной функции

**Определение 2.1** *Пусть* $f \geq 0$ *измерима на* $E$, $\mu E < +\infty$. $(f_{(N)})_{N=1}^{\infty}$ *– возрастающая последовательность срезок. Тогда интегралы* $\int\limits_E f_{(N)}$ *существуют и* $\int\limits_E f_{(N)}$ *– возрастающая последовательность. Если последовательность* $\int\limits_E f_{(N)}$ *ограничена, то функция называется интегрируе-*

*мой по Лебегу. В этом случае существует* $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_E f_{(N)}$, *который называется интегралом Лебега от* $f$ *и обозначается* $(L)\int\limits_E f d\,\mu$, *т.е.* $\int\limits_E f d\,\mu = \lim\limits_{N\to\infty}\int\limits_E f_{(N)} d\,\mu$

**Определение 2.2** *Если* $f$ *измерима на* $E, \mu E < \infty$, *то определим функции*

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ 0, & f(x) < 0 \end{cases}, \quad f^-(x) = \begin{cases} -f(x), & f(x) \leq 0 \\ 0, & f(x) > 0 \end{cases}.$$

Очевидно, что 1) $f^+ = \frac{|f|+f}{2}$, $f^- = \frac{|f|-f}{2}$.
2) $f^+ + f^- = |f|$.
3) $f^+ - f^- = f$.
4) $f^+ \geq 0$, $f^- \geq 0$.

**Определение 2.3** *Функция* $f$ *называется интегрируемой по Лебегу на* $E$, *если* $f^+$ *и* $f^-$ *интегрируемы. При этом* $\int\limits_E f d\,\mu \stackrel{df}{=} \int\limits_E f^+ d\,\mu - \int\limits_E f^- d\,\mu$. *Совокупность функций, интегрируемых на* $E$, *обозначается* $L(E)$.

**Свойства.** 1) Если $f \leq 0$, то $\int\limits_E f d\,\mu = -\int\limits_E -f d\,\mu$. Это очевидно из определения, т.к. $f^+ = 0$, $f^- = -f$.
2) $f$ – интегрируема на $E$ тогда и только тогда, когда $|f|$ интегрируема на $E$.
**Доказательство.** $|f| = f^+ + f^-$ и по свойству 3 из параграфа 1:

$$|f|_{(N)} \leq f^+{}_{(N)} + f^-{}_{(N)} \leq |f|_{(2N)} \Rightarrow$$

$$\int\limits_E |f|_{(N)} d\,\mu \leq \int\limits_E (f^+)_{(N)} d\,\mu + \int\limits_E (f^-)_{(N)} d\,\mu \leq \int\limits_E |f|_{(2N)} d\,\mu.$$

Из этого неравенства и получается доказательство.
Д о с т а т о ч н о с т ь. Если $|f|$ интегрируема, то последовательность $\int\limits_E |f|_{(2N)} d\,\mu$ – ограничена. Следовательно, $\int\limits_E (f^+)_{(N)} d\,\mu$ и $\int\limits_E (f^-)_{(N)} d\,\mu$ ограничены. Тогда $f^+$ и $f^-$ – интегрируемы, значит, $f$ – интегрируема.
Н е о б х о д и м о с т ь. Если $f$ интегрируема, $f^+, f^-$ интегрируемы, то последовательность $\int\limits_E (f^+)_{(N)} d\,\mu$ ограничена и $\int\limits_E (f^-)_{(N)} d\,\mu$ – ограничена. Значит, $\int\limits_E |f|_{(N)} d\,\mu$ – ограничена, следовательно $|f|$ – интегрируема. □

# 3 Интеграл – счетно-аддитивная функция множества

**Теорема 3.1** *Пусть* $f \in L(E)$, $E = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, $E_n$ *– измеримы. Тогда* $f \in L(E_n)$ $\forall\, n$ *и*

$$\int\limits_E f d\,\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{E_n} f d\,\mu. \tag{3.1}$$

**Доказательство.** 1) Пусть $f \geq 0$. Для функции $(f)_N$ имеем равенство

$$\int\limits_E (f)_N d\,\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{E_n} (f)_N d\,\mu. \tag{3.2}$$

Кроме этого

$$\int\limits_{E_n} (f)_N d\,\mu \leq \int\limits_E (f)_N d\,\mu \leq N \Rightarrow f \in L(E_n).$$

Проверим равенство (3.1). Из (3.2) имеем

$$\int\limits_E (f)_N d\,\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{E_n} f d\,\mu \Rightarrow \int\limits_E f d\,\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{E_n} f d\,\mu.$$

Проверим обратное неравенство. Очевидно

$$\int\limits_E f d\,\mu \geq \int\limits_E (f)_N d\,\mu \geq \sum_{n=1}^{M} \int\limits_{E_n} (f)_N d\,\mu.$$

Переходя к пределу при $M \to \infty$, получаем

$$\int\limits_E f d\,\mu \geq \sum_{n=1}^{M} \int\limits_{E_n} f d\,\mu \Rightarrow \int\limits_E f d\,\mu \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{E_n} f d\,\mu. \ \square$$

2) $f$ имеет произвольный знак. По пункту 1) $\Rightarrow$

$$\int\limits_E f^+ d\,\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{E_n} f^+ d\,\mu, \quad \int\limits_E f^- d\,\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{E_n} f^- d\,\mu.$$

Вычтем почленно

$$\int\limits_E f^+ d\,\mu - \int\limits_E f^- d\,\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int\limits_{E_n} f^+ d\,\mu - \int\limits_{E_n} f^- d\,\mu \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{E_n} (f^+ - f^-) d\,\mu. \ \square$$

# 4 Интеграл как линейный оператор

**Теорема 4.1** *Если* $f, g \in L(E)$, *то 1)* $f + g \in L(E)$ *и* $\int\limits_E (f + g) d\,\mu = \int\limits_E f d\,\mu + \int\limits_E g d\,\mu$
*2)* $\forall\,\lambda \in \mathbb{R}$, $\int\limits_E \lambda f d\,\mu = \lambda \int\limits_E f d\,\mu$.

**Доказательство.** 1а) $f \geq 0, g \geq 0$. По свойству 3 из параграфа 1

$$(f + g)_N \leq (f)_N + (g)_N \leq (f + g)_{2N} \tag{4.1}$$

и левая часть этого неравенства дает нам $f + g \in L(E)$. Из неравенства 4.1 имеем

$$\int\limits_E (f + g)_N d\,\mu \leq \int\limits_E (f)_N d\,\mu + \int\limits_E (g)_N d\,\mu \leq \int\limits_E (f + g)_{2N} d\,\mu.$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$, получаем

$$\int\limits_E (f + g) d\,\mu = \int\limits_E f d\,\mu + \int\limits_E g d\,\mu.$$

1б) $f \geq 0, g < 0$. Обозначим $h = f + g$. Рассмотрим два случая. $h \geq 0$. Тогда

$$h - g = f \Leftrightarrow h + (-g) = f \Rightarrow \int\limits_E h d\,\mu + \int\limits_E -g d\,\mu = \int\limits_E f d\,\mu \Rightarrow$$

$$\int\limits_E h d\,\mu = \int\limits_E f d\,\mu + - \int\limits_E -g d\,\mu = \int\limits_E f d\,\mu + \int\limits_E g d\,\mu.$$

Если $h < 0$, то $f - h = -g \Rightarrow \int\limits_E f d\,\mu - \int\limits_E h d\,\mu = -\int\limits_E g d\,\mu \Rightarrow \int\limits_E h d\,\mu = \int\limits_E f d\,\mu + \int\limits_E g d\,\mu$.
1в) $f \geq 0, g$ – произвольная. $E_1 = E(g \geq 0), E_2 = E(g < 0)$. Ясно, что $E = E_1 \sqcup E_2 \Rightarrow$

$$\int\limits_E f + g d\,\mu = \int\limits_{E_1} f + g d\,\mu + \int\limits_{E_2} f + g d\,\mu = \int\limits_{E_1} f d\,\mu + \int\limits_{E_1} g d\,\mu + \int\limits_{E_2} f d\,\mu + \int\limits_{E_2} g d\,\mu =$$

$$= \int\limits_E f d\,\mu + \int\limits_E g d\,\mu.$$

Аналогично рассматриваются случаи $f < 0$.
2) $\int\limits_E \lambda f d\,\mu = \lambda \int\limits_E f d\,\mu$ доказывается рассмотрением случаев $\lambda \geq 0$ и $\lambda < 0$.
$\square$

# 5 Свойства интеграла, связанные с неравенствами

1) Если $f(x) \geq 0$ на $E$, то $\int\limits_E f d\,\mu \geq 0$ – очевидно.

2) Если $f(x) \leq g(x)$ на $E$, то $\int\limits_E f d\,\mu \leq \int\limits_E g d\,\mu$. Очевидно из 1).

3) Если $f \in L(E)$, то $\left|\int\limits_E f d\,\mu\right| \leq \int\limits_E |f| d\,\mu$.

**Доказательство.**

$$-|f| \leq f \leq |f| \Rightarrow -\int\limits_E |f| d\,\mu \leq \int\limits_E |f| d\,\mu \leq \int\limits_E |f| d\,\mu \Rightarrow \left|\int\limits_E f d\,\mu\right| \leq \int\limits_E |f| d\,\mu.$$

4) Если $f(x) = 0$ п.в., то $\int\limits_E f d\,\mu = 0$ п.в.

**Доказательство.** $f = 0$ п.вс. $\Rightarrow f^+ = 0$ п.в. и $f^- = 0$ п.в. $\Rightarrow (f^+)_{(N)} = 0$ п.в. и $(f^-)_{(N)} = 0$ п.в.

$$\Rightarrow \int\limits_E (f^+)_{(N)}\, d\mu = 0 \ \wedge \ \int\limits_E (f^-)_{(N)}\, d\mu = 0 \Rightarrow \int\limits_E f^-\, d\mu = \int\limits_E f^+\, d\mu = 0. \ \square$$

5) Если $f(x) = g(x)$ п.в., то $\int\limits_E f\, d\mu = \int\limits_E g\, d\mu$.

**Доказательство.** $f - g = 0$ п.вс. $\Rightarrow \int\limits_E (f-g)\, d\mu = 0 \Rightarrow \int\limits_E f\, d\mu - \int\limits_E g\, d\mu = 0 \Rightarrow \int\limits_E f\, d\mu = \int\limits_E g\, d\mu$. $\square$

**Следствие.** Если изменить $f$ на множестве меры 0, то интеграл не изменится.

# 6 Интеграл как абсолютно непрерывная функция множества

**Теорема 6.1** *Если $f \in L(E)$, то*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0,\ \forall e \subset E, \mu e < \delta \quad \left| \int\limits_e f\,d\mu \right| < \varepsilon.$$

**Доказательство.** Достаточно рассмотреть случай $f \geq 0$. Для числа $\varepsilon > 0$ найдется $N$, что $\int\limits_E (f - f_{(N)})\,d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$\int\limits_e f\,d\mu = \int\limits_e f - f_{(N)}\,d\mu + \int\limits_e f_{(N)}\,d\mu \leq \int\limits_E (f - f_{(N)})\,d\mu + \int\limits_e f_{(N)}\,d\mu.$$

Но $\int\limits_e f_{(N)}\,d\mu \leq N \cdot \mu e$. Выберем $\delta = \frac{\varepsilon}{2N}$. Тогда если $\mu e < \delta$, то $\int\limits_e f_{(N)}\,d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, $\int\limits_e f\,d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. $\square$

# 7 Предельный переход под знаком интеграла. Теорема Лебега

**Лемма 7.1** *Пусть $f$ – измерима на $E$, $|f(x)| \leq \varphi(x) \in L(E)$. Тогда $f \in L(E)$.*

**Доказательство.**

$$|f(x)|_{(N)} \leq \varphi_{(N)} \Rightarrow \int\limits_E |f|_{(N)}\,d\mu \leq \int\limits_E \varphi_{(N)}\,d\mu \leq c.$$

$\Rightarrow \int\limits_E |f|\,d\mu$ существует, значит, $|f| \in L(E) \Rightarrow f \in L(E)$. $\square$

**Теорема 7.2 (Теорема Лебега)** *Пусть $f_n \to f$ на $E$, $f_n$ – измеримы и $\exists \varphi \in L(E)$, $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ на $E$. Тогда*
*1) $f \in L(E)$.*
*2) $\int\limits_E f\,d\mu = \lim \int\limits_E f_n\,d\mu$.*

**Доказательство.** 1) Так как $|f_n| \leq \varphi \Rightarrow f_n \in L(E)$, т.к. $f_n$ измеримы, то $f = \lim f_n$ – измерима, т.к. $|f_n| \leq \varphi \Rightarrow |f| \leq \varphi$. Тогда по лемме 7.1

$f \in L(E)$.
2) Покажем, что $\int\limits_E f\,d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n\,d\mu$. Достаточно доказать, что $\int\limits_E |f_n - f|\,d\mu \to 0$ $(n \to \infty)$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Положим $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{1+\mu E}$. Имеем

$$\int\limits_E |f - f_n|\,d\mu = \int\limits_{E(|f-f_n|>\varepsilon_1)} |f - f_n|\,d\mu + \int\limits_{E(|f-f_n|\le\varepsilon_1)} |f - f_n|\,d\mu = I_1 + I_2. \quad (7.1)$$

Оцениваем $I_2$.

$$I_2 = \int\limits_{E(|f-f_n|\le\varepsilon_1)} |f - f_n|\,d\mu \le \varepsilon_1 \mu E(|f_n - f| \le \varepsilon_1) < \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{1+\mu E} \cdot \mu E < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (7.2)$$

Оцениваем $I_1$. Так как $|f - f_n| \to 0$ всюду, то $|f - f_n| \to 0$ по мере, т.е.

$$\forall\,\varepsilon > 0 \ \lim_{n\to\infty} \mu(E(f - f_n) > \varepsilon) = 0.$$

Значит

$$\forall\,\varepsilon > 0\,\forall\,\delta > 0\,\exists\,n_0, \forall\,n \ge n_0 \ \ \mu E(|f - f_n| > \varepsilon) < \delta. \quad (7.3)$$

Пусть $\varepsilon = \varepsilon_1$. Обозначим $e = E(|f - f_n| > \varepsilon_1)$. Тогда

$$I_1 = \int\limits_{E(|f-f_n|>\varepsilon_1)} |f - f_n|\,d\mu \le \int\limits_e 2\varphi\,d\mu.$$

Так как интеграл – абсолютно непрерывная функция множества, то $\exists\,\delta > 0$ такое, что если $\mu e < \delta$, то

$$\int\limits_e 2\varphi\,d\mu < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (7.4)$$

Выберем в (7.3) $\delta$ так, чтобы выполнялось (7.4). Тогда

$$\forall\,n \ge n_0, \ \ I_1 = \int\limits_{E(|f-f_n|>\varepsilon_1)} |f - f_n|\,d\mu \le \int\limits_e 2\varphi\,d\mu < \frac{\varepsilon}{2} \quad (7.5)$$

Соединяя (7.5) и (7.2), в (7.2) получаем утверждение теоремы.$\square$

# 8 Предельный переход под знаком интеграла Лебега. Теорема Фату

**Теорема 8.1** *Пусть* $f_n(x) \ge 0$ *и* $f_n \in L(E)$. *Тогда*

$$\int\limits_E \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\,d\mu \le \liminf \int\limits_E f_n(x)\,d\mu.$$

**Доказательство.** Обозначим $F_n(x) = \inf\limits_{k \geq n} f_k(x)$. Тогда $f_n(x)$ – возрастающая последовательность, т.е.

$$0 \leq F_1(x) \leq F_2(x) \leq \dots$$

Поэтому существует $\lim\limits_{n \to \infty} F_n(x) = F(x) \geq 0$. Тогда при каждом $N \in \mathbb{N}$

$$(F_n(x))_{(N)} \to F_{(N)}(x) \ \ (n \to \infty)$$

и по теореме Лебега

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_E (F_n(x))_{(N)}\, d\mu = \int\limits_E F_{(N)}(x)\, d\mu. \tag{8.1}$$

По построению $F_n(x)$ имеем $F_n(x) \leq f_n(x)$, и, значит,

$$\int\limits_E F_n(x)\, d\mu \leq \int\limits_E f_n(x)\, d\mu.$$

Отсюда получаем неравенство

$$\liminf_{n \to \infty} \int\limits_E F_n(x)\, d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int\limits_E f_n(x)\, d\mu. \tag{8.2}$$

Так как $F_n(x)$ возрастающая последовательность, то

$$\liminf_{n \to \infty} \int\limits_E F_n(x)\, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int\limits_E F_n(x)\, d\mu$$

и (8.2) принимает вид

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_E F_n(x)\, d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int\limits_E f_n(x)\, d\mu$$

и поэтому

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \int\limits_E F_n(x)\, d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int\limits_E f_n(x)\, d\mu.$$

Отсюда следует, что $\forall\, N \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_E (F_n(x))_{(N)}\, d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int\limits_E f_n(x)\, d\mu.$$

Перейдем к пределу при $n \to \infty$. Учитывая (8.1), имеем

$$\int\limits_E F_{(N)}(x)\,d\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int\limits_E f_k(x)\,d\mu.$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$, по определению интеграла от неограниченной функции получаем

$$\int\limits_E F(x)\,d\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int\limits_E f_k(x)\,d\mu.$$

Учитывая, что $F(x) = \liminf\limits_{k\to\infty} f_k(x)$, получаем утверждение теоремы. □

## 9 Предельный переход под знаком интеграла. Теорема Леви

**Теорема 9.1** *Пусть $(f_n(x))$ – возрастающая последовательность неотрицательных интегрируемых функций на $E$, т.е.*

$$0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \dots$$

*и пусть $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ всюду на $E$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)\,d\mu = \int\limits_E f(x)\,d\mu. \tag{9.1}$$

**Доказательство.** Очевидно, что $f_n(x) \le f(x)$, и, значит, $\int\limits_E f_n(x)\,d\mu \le \int\limits_E f(x)\,d\mu$. Так как последовательность $\int\limits_E f_n(x)\,d\mu$ возрастает, то

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)\,d\mu \le \int\limits_E f(x)\,d\mu.$$

По теореме Фату справедливо противоположное неравенство, следовательно, (9.1) выполняется. □

## 10 Интеграл Лебега по множеству бесконечной меры.

В этом параграфе мы определим интеграл Лебега по множеству бесконечной меры.

**Определение 10.1** *Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$, $\mu E = \infty$, функция $f(x) \geq 0$ на $E$ и измерима. Пусть для любого натурального $n$ существует интеграл*

$$\int_{E \cap [-\mathbf{n}, \mathbf{n}]} f(\mathbf{x}) d\mu = I_n.$$

*Последовательность интегралов $I_n$ возрастает. Если она ограничена, то существует предел конечный предел $\lim_{n\to\infty} I_n$, который называется интегралом от функции $f$ по множеству $E$ и обозначается обычным образом $\int_E f(\mathbf{x}) d\mu$. Если $f$ имеет произвольный знак, то она называется интегрируемой на множестве $E$, если конечны интегралы $\int_E f^+ d\mu$ и $\int_E f^- d\mu$. При этом полагаем*

$$\int_E f(\mathbf{x}) d\mu = \int_E f^+(\mathbf{x}) d\mu - \int_E f^-(\mathbf{x}) d\mu.$$

Как и в случае интеграла от неограниченной функции получаем, что интеграл Лебега по множеству бесконечной меры является абсолютно сходящимся, т.е интеграл $\int_E f(\mathbf{x}) d\mu$ конечен тогда и только тогда, года конечен интеграл $\int_E |f(\mathbf{x})| d\mu$. Для него остаются справедливыми большинство ранее доказанных свойств, в частности теоремы Лебега, Фату и Леви о предельном переходе.

# 11 Геометрический смысл интеграла в $\mathbb{R}^m$

**Лемма 11.1** *Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$ - измеримо, $y \geq 0$. Тогда*
*1) множество $E \times [0, y]$ -измеримо;*
*2) $\mu(E \times [0, y]) = y \cdot \mu E$.*

**Доказательство.**
1) Пусть вначале $y = 0$. Тогда $E \times [0, y]$ - это $m$-мерное множество в $(m+1)$ мерном пространстве, и его мера $= 0$. В самом деле, обозначим через $E_\mathbf{n} = E \cap [\mathbf{n} - 1, \mathbf{n})$, тогда $E_\mathbf{n}$ лежит внутри куба со стороной 1 и $\mu E_\mathbf{n} \leq 1$. Очевидно, что $E = \bigsqcup\limits_\mathbf{n} E_\mathbf{n}$ и $E \times [0,0] = \bigsqcup\limits_\mathbf{n} E_\mathbf{n} \times [0,0]$. Покажем, что $\mu(E_n \times [0,0]) = 0$. В самом деле, $E_n \times [0,0] \subset [\mathbf{n} - 1, \mathbf{n}) \times [0, \varepsilon]$ $\forall\, \varepsilon > 0$. Следовательно, $\mu\left(E_n \times [0,0]\right) \leq 1 \cdot \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ – произвольное, то $\mu\left(E_n \times [0,0]\right) = 0$. Но тогда в силу счетной аддитивности меры: $\mu E \times [0,0] = 0$.
2) Пусть $E = [\mathbf{a}, \mathbf{b})$ и $y > 0$. Тогда $E \times [0, y] = [a^{(1)}, b^{(1)}) \times [a^{(2)}, b^{(2)}) \times \ldots \times [a^{(m)}, b^{(m)}) \times [0, y)$. Отсюда $\mu E \times [0, y] = |b^{(1)} - a^{(1)}| \cdot |b^{(2)} - a^{(2)}| \cdot \ldots \cdot |b^{(m)} - a^{(m)}| \cdot |y - 0| = \mu[\mathbf{a}, \mathbf{b}) \cdot y$.

3) Пусть $E$ открытое, тогда $E = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} [\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_n)$. Отсюда $E \times [0, y] = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} [\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_n) \times [0, y]$. Следовательно, $\mu E \times [0, y] = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu[\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_n) \cdot y = y\mu E$.
4) Пусть $E$ замкнутое, ограниченное множество. Тогда $\exists\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \supset E$, отсюда $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \setminus E = G$ – открыто, значит $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = E \bigsqcup G$, отсюда $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \times [0, y] = E \times [0, y] \bigsqcup G \times [0, y]$. Имеем

$$\mu\left((\mathbf{a}, \mathbf{b}) \times [0, y]\right) = \mu\left(E \times [0, y]\right) + \mu(G \times [0, y]).$$

Следовательно, $\mu(E \times [0, y]) = = y(\mu(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \mu G) = y\mu E$.
5) Пусть $E$ измеримо и $\mu E < \infty$. Тогда $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ F_\varepsilon$-замкнутое, $G_\varepsilon$-открытое, ограниченное, такое, что $F_\varepsilon \subset E \subset G_\varepsilon$ и $\mu(G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$. Тогда $F_\varepsilon \times [0, y] \subset E \times [0, y] \subset G_\varepsilon \times [0, y]$ и $\mu(G_\varepsilon \times [0, y] \setminus F_\varepsilon \times [0, y]) < \varepsilon \cdot y$. То есть $E \times [0, y]$ – измеримо и

$$\mu(F_\varepsilon \times [0, y]) \leq \mu(E \times [0, y]) \leq \mu(G_\varepsilon \times [0, y]) \Rightarrow$$

$$y\mu F_\varepsilon \leq \mu(E \times [0, y]) \leq y \cdot \mu G_\varepsilon.$$

Переходя к sup в левой части и к inf в правой части, получаем $y\mu E = \mu(E \times [0, y])$.
6) $E$ измеримо и $\mu E = +\infty$ и $E$ неограничено. Положим $E_{\mathbf{n}} = E \cap [\mathbf{n} - 1, \mathbf{n})$, тогда $E = \bigsqcup\limits_{\mathbf{n}} E_{\mathbf{n}}$ и $E_{\mathbf{n}}$-ограничено и измеримо. Отсюда

$$E \times [0, y] = \bigsqcup_{\mathbf{n}} E_{\mathbf{n}} \times [0, y] \Rightarrow \mu E \times [0, y] = \sum_{\mathbf{n}} \mu E_{\mathbf{n}} \times [0, y] =$$

$$= y \cdot \sum \mu E_{\mathbf{n}} = y \cdot \mu E \ \square$$

**Теорема 11.2** *Пусть* $E \subset \mathbb{R}^m$ *измеримо,* $f(\mathbf{x})$ *интегрируема на* $E$, $f(\mathbf{x}) \geq 0$ *на* $E$. *Тогда подграфик*

$$B(f, E) = \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{m+1} : \ \mathbf{x} \in E, 0 \leq y \leq f(\mathbf{x})\}$$

*есть измеримое множество в* $\mathbb{R}^{m+1}$ *и*

$$\mu B(f, E) = \int\limits_E f(\mathbf{x})\, d\mu. \tag{11.1}$$

**Доказательство.** Рассмотрим несколько случаев.
1) $f(x) \equiv \lambda =$const на $E$. Тогда $B(f, E) = E \times [0, \lambda]$ – измеримо, $\mu B(f, E) = \lambda \cdot \mu E$. С другой стороны $\int\limits_E f\, d\mu = \lambda \cdot \mu E$, т.е. (10.1) верно.

2) Пусть $\mu E < \infty$ и $f$ ограничена и измерима на $E$. Пусть $E = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} E_k$– разбиение множества $E$ и $M_k = \sup\limits_{E_k} f, \quad m_k = \inf\limits_{E_k} f$. Тогда $B(f,E) = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} B(f,E_k)$ и

$$E_k \times [0, m_k] \subset B(f, E_k) \subset E_k \times [0, M_k].$$

Тогда объединение множеств

$$\bigsqcup_{k=1}^{n} E_k \times [0, m_k] \subset B(f,E) \subset \bigsqcup_{k=1}^{n} E_k \times [0, M_k] \tag{11.2}$$

и

$$\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{n} E_k \times [0, M_k]\right) = \sum_{k=1}^{n} M_k \mu E_k = \overline{S}(f, (E_k)),$$

$$\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{n} E_k \times [0, m_k]\right) = \sum_{k=1}^{n} m_k \mu E_k = \underline{S}(f, (E_k)),$$

и т.к. $f$ интегрируема на $E$, то $\forall\ \varepsilon > 0$ существует разбиение $E = \bigsqcup E_k$, что $|\overline{S}(f,(E_k)) - \underline{S}(f,(E_k))| < \varepsilon$, отсюда

$$\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{n} E_k \times [0, M_k]\right) - \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{n} E_k \times [0, m_k]\right) < \varepsilon,$$

следовательно, из (**??**) получаем, что $B(f,E)$ измеримо. Отсюда $\underline{S}(f,(E_k)) \leq \mu B(f,E) \leq \overline{S}(f,(E_k))$. Переходя в правой части к inf по всем разбиениям, а в левой части к sup, получаем

$$\int\limits_E f\, d\mu \leq \mu B(f,E) \leq \int\limits_E f\, d\mu.$$

3) Пусть $\mu E < +\infty$ и $f$ неограничена и интегрируема. Обозначим

$$E_n = \{\mathbf{x} \in E :\ n-1 \leq |f(\mathbf{x})| < n\} \ \ n = 1, 2, \ldots$$

Тогда $E = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ и $f(\mathbf{x})$ – ограничена измерима на $E_n$. Отсюда

$$\mu B(f,E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu B(f, E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{E_n} f\, d\mu = \int\limits_E f\, d\mu.$$

4) Пусть $\mu E = +\infty$. Обозначим $E_{\mathbf{n}} = E \cap [\mathbf{n}-1, \mathbf{n})$. Тогда $E = \bigsqcup\limits_{\mathbf{n}} E_{\mathbf{n}}$. Отсюда $B(f,E) = \bigsqcup\limits_{\mathbf{n}} B(f, E_{\mathbf{n}})$, следовательно,

$$\mu B(f,E) = \sum_{\mathbf{n}} \mu B(f, E_{\mathbf{n}}) = \sum_{\mathbf{n}} \int\limits_{E_{\mathbf{n}}} f\, d\mu = \int\limits_{E} f\, d\mu. \ \square$$

## 12 Выражение меры множества через меры его сечений

**Определение 12.1** *Определение и обозначения:* $m \geq 2,\ m = m_1+m_2,\ \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}$;
$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2),\ \xi = (\xi_1, \xi_2)$, *где* $\mathbf{x}_1, \xi_1 \in \mathbb{R}^{m_1}, \mathbf{x}_2, \xi_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$,
$\xi_1 = (\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(m_1)}),\ \xi_2 = (\xi^{(m_1+1)}, \xi^{(m_1+2)}, \ldots, \xi^{(m_1+m_2)})$; $\mathbf{x}_1 = (x^{(1)}, \ldots, x^{(m_1)})$,
$\mathbf{x}_2 = (x^{(m_1+1)}, x^{(m_1+2)}, \ldots, x^{(m_1+m_2)}),\ E \subset \mathbb{R}^m$.
*Множество* $E(\xi_1) = \{\xi_2 \in \mathbb{R}^{m_2} :\ (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^m\}$ *называется сечением множества* $E$ *по элементу* $\xi_1$.

**Теорема 12.1** *Пусть* $E \subset \mathbb{R}^m$, $E$ *– измеримо,* $\mu E < +\infty$. *Тогда*
*1) для почти всех* $\xi_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$ *сечения* $E(\xi_1)$ *измеримые в* $\mathbb{R}^{m_2}$ *множества;*
*2) функция* $\mu E(\xi_1)$ *– конечна почти всюду измеримая функция в* $\mathbb{R}^{m_1}$*;*
*3) справедливо равенство*

$$\mu E = \int\limits_{\mathbb{R}^{m_1}} \mu E(\xi_1)\, d\mu(\xi_1) \tag{12.1}$$

**Доказательство.** 1) $E = [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) \times [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2)$. Тогда

$$E(\xi_1) = \begin{cases} [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2), & \text{если } \ \xi_1 \in [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) \\ \emptyset, & \text{если } \ \xi_1 \notin [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) \end{cases}$$

– измеримое множество для всех $\xi_1$.

$$\mu E(\xi_1) = \begin{cases} |[\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2)|, & \text{если } \ \xi_1 \in [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) \\ 0, & \text{если } \ \xi_1 \notin [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) \end{cases}$$

– измеримая функция на $\mathbb{R}^{m_1}$. Кроме этого $\mu E = \mu[\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) \cdot \mu[\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2)$ и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{m_1}} \mu E(\xi_1)\, d\mu(\xi_1) = \int\limits_{|[\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2)|} \mu E(\xi_1)\, d\mu(\xi_1) = \mu[\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) \cdot \mu[\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2).$$

2) $E$ – открытое множество. Тогда $E = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} [\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_n) = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \Rightarrow E(\xi_1) = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n(\xi_1) \Rightarrow$ по пункту 1) $E(\xi_1)$ измеримо и $\mu E(\xi_1) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu E_n(\xi_1)$ – измеримая функция. Тогда

$$\mu E = \mu \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mu E_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^{m_1}} \mu E_n(\xi_1)\, d\mu(\xi_1) =$$

по теореме Леви

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{m_1}} \sum_{n=1}^{\infty} \mu E_n(\xi_1)\, d\mu(\xi_1) = \int\limits_{\mathbb{R}^{m_1}} \mu E(\xi_1)\, d\mu(\xi_1),$$

и если $\mu E < +\infty$, то функция $\mu E(\xi_1)$ почти всюду конечна.
3) $E$ – ограниченное множество типа $G_\delta$, т.е. $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, где $G_n$ – открытые и ограниченные множества. Можно считать, что $G_1 \supset G_2 \supset \ldots$. Тогда $\forall\ \xi_1, \quad G_1(\xi_1) \supset G_2(\xi_2) \supset \ldots$ и $E(\xi_1) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n(\xi_1)$ – измеримо для всех $\xi_1$. Ввиду непрерывности меры $\mu E = \lim\limits_{n\to\infty} \mu G_n$ и $\mu E(\xi_1) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu G_n(\xi_1)$ – измеримая функция. Для меры $\mu E$ имеем:

$$\mu E = \lim_{n\to\infty} \mu G_n = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^{m_1}} \mu G_n(\xi_1)\, d\mu(\xi_1) =$$

по теореме Лебега о предельном переходе, так как $\mu G_1(\xi_1) \in L$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{m_1}} \lim_{n\to\infty} \mu G_n(\xi_1)\, d\mu(\xi_1) = \int\limits_{\mathbb{R}^{m_1}} \mu E(\xi_1)\, d\mu(\xi_1).$$

4) $E$ имеет меру ноль, т.е. $\mu E = 0$. Тогда существует $K \supset E$, $K$-типа $G_\delta$, что $\mu(K \setminus E) = 0$, но? $K = E \bigsqcup (K \setminus E) \Rightarrow K(\xi_1) = E(\xi_1) \bigsqcup (K \setminus E)(\xi_1)$. Тогда $0 = \mu K = \int\limits_{\mathbb{R}^{m_1}} \mu K(\xi_1)\, d\mu(\xi_1)$, отсюда $\mu K(\xi_1) = 0$ почти всюду. Но $E(\xi_1) \subset K(\xi_1) \Rightarrow \mu E(\xi_1) = 0$ почти всюду, следовательно, $\mu E(\xi_1)$ измеримая функция и $0 = \int\limits_{\mathbb{R}^{m_1}} \mu E(\xi_1)\, d\mu(\xi_1)$ и $0 = \mu E$.

5) $E$ – ограниченное измеримое множество. Тогда существует ограниченное множество $K$ типа $G_\delta$ такое, что $K \supset E$, $\mu(K \setminus E) = 0$, т.е. $K = E \bigsqcup (K \setminus E) = E \bigsqcup K_0$ и $\mu K_0 = 0$. Отсюда $K(\xi_1) = E(\xi_1) \bigsqcup K_0(\xi_1)$

из пунктов 4) и 5) следует, что $E(\xi_1)$ измеримо для почти всех $\xi_1$ и

$$\mu K(\xi_1) = \mu E(\xi_1) + \mu K_0(\xi_1) \Rightarrow \mu K(\xi_1) = \mu E(\xi_1).$$

Тогда

$$\mu E = \mu K = \int\limits_{\mathbb{R}^{m_1}} \mu K(\xi_1)\, d\mu(\xi_1) = \int\limits_{\mathbb{R}^{m_1}} \mu E(\xi_1)\, d\mu(\xi_1).$$

6) $E$ – неограниченное измеримое множество. Для доказательства запишем $E = \bigsqcup\limits_{\mathbf{n}} E_{\mathbf{n}}$, где $E_{\mathbf{n}} = E \cap [-\mathbf{n}, \mathbf{n})$. Воспользуемся пунктом 5 и равенством $\mu E(\xi_1) = \sum\limits_{\mathbf{n}} \mu E_{\mathbf{n}}(\xi_1)$. Отсюда

$$\mu E = \sum \mu E_{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{n}} \int\limits_{\mathbb{R}^{m_1}} \mu E_{\mathbf{n}}(\xi_1)\, d\mu(\xi_1) =$$

по теореме Леви

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{m_1}} \sum_{\mathbf{n}} \mu E_{\mathbf{n}}(\xi_1)\, d\mu(\xi_1) = \int\limits_{\mathbb{R}^{m_1}} \mu E(\xi_1)\, d\mu(\xi_1). \ \square$$

## 13 Сведение интеграла к повторному. Теорема Фубини

**Лемма 13.1** *Пусть $f(x) \geq 0$ на $E \subset \mathbb{R}$, $\mu E < +\infty$, $B(f, E)$ – подграфик. Если $B(f, E)$ измеримое множество, то $f(x)$ измерима на $E$.*

**Доказательство.** Так как $B(f, E)$ измеримо, то по теореме 12.1 для п.в. $x \in E$ сечение $E(x)$ измеримо. Но $E(x) = [0, f(x)]$, и его мера $\mu E(x) = f(x)$ есть измеримая функция. $\square$

**Теорема 13.2** *Пусть $f(\mathbf{x}) \in L(E)$, $f(\mathbf{x}) \geq 0$ на $E \subset \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m_1+m_2}$, $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$, $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$. Тогда*
*1) для п.в. $\mathbf{x}_1$ функция $f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ интегрируема как функция от переменной $\mathbf{x}_2$ на множестве $E(\mathbf{x}_1)$,*
*2)*

$$\int\limits_{E(\mathbf{x}_1)} f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) d\,\mu(\mathbf{x}_2) < +\infty,$$

*3) функция*

$$\Phi(\mathbf{x}_1) = \int\limits_{E(\mathbf{x}_1)} f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) d\,\mu(\mathbf{x}_2) \in L(pr_{\mathbb{R}^{m_1}} E).$$

*4) Справедливо равенство*

$$\int\limits_{E} f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) d\,\mu(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \int\limits_{pr_{\mathbb{R}^{m_1}} E} d\,\mu(\mathbf{x}_1) \int\limits_{E(\mathbf{x}_1)} f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) d\,\mu \mathbf{x}_2.$$

**Доказательство** проведем для случая, когда $m_1 = m_2 = 1$, т.е. $m = 2$, $f = f(x^{(1)}, x^{(2)})$. В этом случае надо доказать равенство

$$\int\limits_{E} f(x^{(1)}, x^{(2)}) d\,\mu(x^{(1)}, x^{(2)}) = \int\limits_{pr_{\mathbb{R}} E} d\,\mu(x^{(1)}) \int\limits_{E(x^{(1)})} f(x^{(1)}, x^{(2)}) d\,\mu(x^{(2)})$$

или, что то же самое,

$$\int\limits_{E} f(x^{(1)}, x^{(2)}) d\,\mu(x^{(1)}, x^{(2)}) = \int\limits_{\mathbb{R}} d\,\mu(x^{(1)}) \int\limits_{E(x^{(1)})} f(x^{(1)}, x^{(2)}) d\,\mu(x^{(2)}).$$

Так как $f \in L(E)$, то $\int\limits_{E} f d\,\mu = \mu B(f, E)$. По теореме 12.1

$$\mu B(f, E) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mu(B(f, E)(x^{(1)})) d\,\mu(x^{(1)}), \qquad (13.1)$$

и при п.в. $x^{(1)}$ множество $B(f, E)(x^{(1)}) = B(f, E(x^{(1)}))$ измеримо, и по лемме 13.1 при п.в. $x^{(1)}$ функция $f(x^{(1)}, x^{(2)})$ измерима как функция переменной $x^{(2)}$, и, значит,

$$\mu B(f, E(x^{(1)})) = \int\limits_{E(x^{(1)})} f(x^{(1)}, x^{(2)}) d\,\mu x^{(2)}.$$

Подставим в равенство (13.1), получаем

$$\mu B(f, E) = \int\limits_{\mathbb{R}} d\,\mu(x^{(1)}) \int\limits_{E(x^{(1)})} f(x^{(1)}, x^{(2)}) d\,\mu(x^{(2)}), \qquad (13.2)$$

и для $f(\mathbf{x}) \geq 0$ теорема доказана.

Если $f(x^{(1)}, x^{(2)}) \in L(E)$, но имеет разные знаки, то надо представить $f$ в виде

$$f(x^{(1)}, x^{(2)}) = f^{+}(x^{(1)}, x^{(2)}) - f^{-}(x^{(1)}, x^{(2)})$$

и воспользоваться равенством (13.2). $\square$

## 14 Замена переменной в кратном интеграле Лебега

**Определение 14.1** *Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^m$ два множества в $\mathbb{R}^m$. Отображение $\varphi: \ A \overset{на}{\to} B$ называется гомоморфизмом, если*
*1) $\varphi$ – взаимно-однозначно и, значит, существует $\varphi^{-1}: \ B \overset{на}{\to} A$.*
*2) $\varphi$ и $\varphi^{-1}$ непрерывные отображения.*

**Определение 14.2** *Гомоморфизм $\varphi: \ A \overset{на}{\to} B$ называется диффеоморфизмом, если частные производные компонент отображения $\varphi$ и $\varphi^{-1}$ непрерывны.*

**Теорема 14.1** *Пусть $G, \Omega \subset \mathbb{R}^m$ – открытые множества. $\varphi: \ \Omega \overset{на}{\to} G$ – диффеоморфизм $\Omega$ на $G$. Пусть $f(\mathbf{x})$ непрерывна на $G$ и $supp f(\mathbf{x}) = K \subset G$, $K$ – компактное множество. Тогда справедливо равенство*

$$(L)\int\limits_G f(\mathbf{x})\,d\mu(\mathbf{x}) = (L)\int\limits_\Omega f(\varphi(\mathbf{t}))\left|\frac{D\varphi(\mathbf{t})}{D(\mathbf{t})}\right|\,d\mu(\mathbf{t}) \tag{14.1}$$

**Доказательство.** 1) Так как $f$ непрерывна на $G$, то $f$ непрерывна на $K$, значит $f$ ограничена и измерима на ограниченном замкнутом множестве, отсюда $f \in L(K)$, следовательно, $f \in L(G)$.
Аналогично, $f(\varphi(\mathbf{t}))$ непрерывна на компактном множестве $\varphi^{-1}(K) \subset \Omega$, значит, $f(\varphi(\mathbf{t}))$ ограничена и измерима на ограниченном замкнутом множестве $\varphi^{-1}(K)$, следовательно, $f(\varphi(\mathbf{t}))\left|\frac{D\varphi(\mathbf{t})}{D(\mathbf{t})}\right|$ ограничено измеримо на $\varphi^{-1}(K) = f \cdot \left|\frac{D\varphi}{Dt}\right| \in L(\Omega)$, таким образом, надо доказать только равенство.
В дальнейшем не будем перед интегралом писать $(L)$, так как будет присутствовать только интеграл Лебега.
2) Доказываем равенство по индукции. Пусть $m = 1$. Тогда эта теорема верна (т. 7.1). Пусть равенство (14.1) верно в $\mathbb{R}^{m-1}$. Докажем, что это верно в $\mathbb{R}^m$.
3) Вначале предположим, что отображение $\varphi$ задается равенствами:

$$\varphi: \quad \begin{array}{l} x^{(1)} = \varphi^{(1)}(\mathbf{t}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x^{(i-1)} = \varphi^{(i-1)}(\mathbf{t}) \\ x^{(i)} = t^j = \varphi^{(i)}(\mathbf{t}) \\ x^{(i+1)} = \varphi^{(i+1)}(\mathbf{t}) \\ x^{(m)} = \varphi^{(m)}(\mathbf{t}) \end{array} \tag{14.2}$$

Обозначим для удобства $x^{(i)} = t^{(j)} = u$. По теореме Фубини

$$\int\limits_G f(\mathbf{x})\,d\mu(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}} dx^{(i)} \int\limits_{G(x^{(j)})} f(x^{(1)},\ldots,x^{(i-1)},x^{(i)},\ldots,x^{(m)})\,d\mu(\mathbf{x}^{(i)}) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} d\mu(x) \int\limits_{G(u)} f(x^{(1)},\ldots,x^{(i-1)},x^{(i)},\ldots,x^{(m)})\,d\mu(\mathbf{x}^{(i)}). \tag{14.3}$$

Так как $G$ – открытое множество в $\mathbb{R}^m$, то сечение $G(u)$ есть открытое множество в $\mathbb{R}^{m-1}$. Так как $K$ – компактное множество в $\mathbb{R}^m$, то сечение $K(u)$ есть компактное множество в $\mathbb{R}^{m-1}$.
Определим отображение $\psi$ множества $\Omega(t^{(j)}) = \Omega(u)$ на множество $G(x^{(i)}) = G(u)$ равенствами:

$$\begin{array}{l}
x^{(1)} = \psi^{(1)}(t^{(1)},\ldots,t^{(j-1)},t^{(j+1)},\ldots,t^{(m)}) = \varphi^{(1)}(t^{(1)},\\
\ldots,t^{(j-1)},u,t^{(j+1)},\ldots,t^{(m)})\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x^{(i-1)} = \psi^{(i-1)}(t^{(1)},\ldots,t^{(j-1)},t^{(j+1)},\ldots,t^{(m)}) = \varphi^{(i-1)}(t^{(1)},\\
\ldots,t^{(j-1)},u,t^{(j+1)},\ldots,t^{(m)})\\
x^{(i+1)} = \psi^{(i+1)}(t^{(1)},\ldots,t^{(i-1)},t^{(j+1)},\ldots,t^{(m)}) = \varphi^{(i+1)}(t^{(1)},\\
\ldots,t^{(j-1)},u,t^{(j+1)},\ldots,t^{(m)})\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x^{(m)} = \psi^{(m)}(t^{(1)},\ldots,t^{(j-1)},t^{(j+1)},\ldots,t^{(m)}) = \varphi^{(m)}(t^{(1)},\\
\ldots,t^{(j-1)},u,t^{(j+1)},\ldots,t^{(m)})
\end{array} \tag{14.4}$$

Определенное таким образом отображение $\psi$ будет диффеоморфизмом множества $\Omega(u)$ на $G(x)$. Обозначим для краткости $(t^{(1)},\ldots,t^{(j-1)},t^{(j+1)},\ldots,t^{(m)}) = \mathbf{t}^{(j)}$. Поэтому по предположению индукции

$$\int\limits_{G(x)} f(x^{(1)},\ldots,x^{(j-1)},u,x^{(j+1)},\ldots,x^{(m)})\,d\mu\mathbf{x}^{(i)} =$$

$$= \int\limits_{\Omega(x)} f(\psi^{(1)}(t^{(1)},\ldots,t^{(j-1)},t^{(j+1)},\ldots,t^{(m)}),\ldots,\psi^{(i-1)}(\mathbf{t}^{(j)},w,$$

$$\psi^{(i+1)}(\mathbf{t}^{(j+1)},\ldots\psi^{(m)}(\mathbf{t}^{(j)})\cdot\left|\frac{D\psi(\mathbf{t}^{(j)})}{D\mathbf{t}^{(j)}}\right|\,d\mu\mathbf{t}^{(j)}, \tag{14.5}$$

где $w = t^{(j)}$. Вычислим определитель, ***** в (14.5). Имеем

$$\frac{D\psi(\mathbf{t}^{(j)})}{D\mathbf{t}^{(j)}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial t^{(1)}} & \dots & \frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial t^{(j-1)}} & \frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial t^{(j+1)}} & \dots & \frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial t^{(m)}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\varphi^{(i-1)}}{\partial t^{(1)}} & \dots & \frac{\partial\varphi^{(i-1)}}{\partial t^{(j-1)}} & \frac{\partial\varphi^{(i-1)}}{\partial t^{(j+1)}} & \dots & \frac{\partial\varphi^{(i-1)}}{\partial t^{(m)}} \\ \frac{\partial\varphi^{(i+1)}}{\partial t^{(1)}} & \dots & \frac{\partial\varphi^{(i+1)}}{\partial t^{(j-1)}} & \frac{\partial\varphi^{(i+1)}}{\partial t^{(j+1)}} & \dots & \frac{\partial\varphi^{(i+1)}}{\partial t^{(m)}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\varphi^{(m)}}{\partial t^{(1)}} & \dots & \frac{\partial\varphi^{(m)}}{\partial t^{(j-1)}} & \frac{\partial\varphi^{(m)}}{\partial t^{(j+1)}} & \dots & \frac{\partial\varphi^{(m)}}{\partial t^{(m)}} \end{vmatrix} \tag{14.6}$$

Вычислим определитель $\frac{D\varphi(\mathbf{t})}{D\mathbf{t}}$. Имеем

$$\frac{D\varphi(\mathbf{t})}{D\mathbf{t}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial t^{(1)}} & \dots & \frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial t^{(j-1)}} & \frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial t^{(j)}} & \frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial t^{(j+1)}} & \dots & \frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial t^{(m)}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\varphi^{(i-1)}}{\partial t^{(1)}} & \dots & \frac{\partial\varphi^{(i-1)}}{\partial t^{(j-1)}} & \frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial t^{(j)}} & \frac{\partial\varphi^{(i-1)}}{\partial t^{(j+1)}} & \dots & \frac{\partial\varphi^{(i-1)}}{\partial t^{(m)}} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial\varphi^{(i+1)}}{\partial t^{(1)}} & \dots & \frac{\partial\varphi^{(i+1)}}{\partial t^{(j-1)}} & \frac{\partial\varphi^{(i+1)}}{\partial t^{(j)}} & \frac{\partial\varphi^{(i+1)}}{\partial t^{(j+1)}} & \dots & \frac{\partial\varphi^{(i+1)}}{\partial t^{(m)}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\varphi^{(m)}}{\partial t^{(1)}} & \dots & \frac{\partial\varphi^{(m)}}{\partial t^{(j-1)}} & \frac{\partial\varphi^{(i+1)}}{\partial t^{(j)}} & \frac{\partial\varphi^{(m)}}{\partial t^{(j+1)}} & \dots & \frac{\partial\varphi^{(m)}}{\partial t^{(m)}} \end{vmatrix} =$$

$= |$по теореме Лапласа$| = (-1)^{i+j}\frac{D\psi(\mathbf{t}^{(j)})}{D\mathbf{t}^{(j)}}$. И значит $\left|\frac{D\psi(\mathbf{t}^{(j)})}{D\mathbf{t}^{(j)}}\right| = \left|\frac{D\varphi(\mathbf{t})}{D\mathbf{t}}\right|$. Подставляя это равенство в (14.5), а затем (14.5) в (14.3), имеем

$$\int\limits_G f(\mathbf{x})\,d\mu(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}} du \int\limits_{\Omega(u)} f(\varphi(t^{(1)}, \dots t^{(j-1)}, u, t^{(j+1)}, t^{(m)}))\,d\mu(t^{(1)},$$

$$\dots t^{(j-1)}, t^{(j+1)}, t^{(m)}) =$$

снова воспользуемся теоремой Фубини

$$= \int\limits_{\Omega} f(\varphi(\mathbf{t}))\left|\frac{D\varphi(\mathbf{t})}{D\mathbf{t}}\right|\,d\mu(\mathbf{t}).$$

Таким образом, равенство (14.1) выполняется, если $\varphi$ имеет вид (14.2).
4) Пусть теперь $\varphi(\mathbf{t})$ – произвольный диффеоморфизм $\Omega$ на $G$. Тогда $\varphi^{-1}$ – диффеоморфизм $G$ на $\Omega$ и справедливо равенство

$$\varphi^{-1}(\varphi(\mathbf{t})) \equiv \mathbf{t}.$$

По свойствам Якобианов:

$$\frac{D\varphi^{-1}(\mathbf{x})}{D\mathbf{x}} \cdot \frac{D\varphi(\mathbf{t})}{D\mathbf{t}} = \frac{D\mathbf{t}}{D\mathbf{t}} = det(E) = 1, \tag{14.7}$$

где $E$ – единичная матрица размерности $m \times m$. Из (14.7) следует, что $\forall\, t \in \Omega,\;\; \frac{D\varphi(\mathbf{t})}{D\mathbf{t}} \neq 0$.

Выберем точку $\mathbf{r} \in \Omega$. В этой точке $\frac{D\varphi(\mathbf{t})}{D\mathbf{t}} \neq 0$, следовательно, существует элемент этого определения?, неравный нулю. Пусть это $\frac{\partial \varphi^{(i)}(\tau)}{\partial t^{(j)}} = 0$. Определим отображение $\psi_{\mathbf{r}} :\; \Omega \to G$ равенствами

$$\psi_\tau : \quad \begin{array}{l} y^{(1)} = t^{(1)} = \psi^{(1)}(\mathbf{t}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(j-1)} = t^{(j-1)} = \psi^{(j-1)}(\mathbf{t}) \\ y^{(j)} = \varphi^{(i)}(t^{(1)}, \dots, t^{(m)}) = \psi^{(j)}(\mathbf{t}) \\ y^{(j+1)} = t^{(j+1)} = \psi^{(j+1)}(\mathbf{t}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(m)} = t^{(m)} = \psi^{(m)}(\mathbf{t}) \end{array} \tag{14.8}$$

Найдем Якобиан этого преобразования.

$$\frac{\psi_\tau(\mathbf{t})}{D\mathbf{t}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial \varphi^{(j)}}{\partial t^{(1)}} & \dots & \dots & \frac{\partial \varphi^{(j)}}{\partial t^{(j-1)}} & \dots & \frac{\partial \varphi^{(j)}}{\partial t^{(j)}} & \dots & \frac{\partial \varphi^{(j)}}{\partial t^{(m)}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial t^{(j)}} \neq 0$$

в точке $\mathbf{t} = \tilde{\tau}$

Тогда по теореме о неявных функциях системы (14.8) в некоторой окрестности точки $\tau$ разрешимы относительно переменной $\mathbf{t} = (t^{(1)}, t^{(2)}, \dots, t^{(m)})$, т.е. функция $\psi_\tau$ имеет в окрестности точки $\tau$ обратную функцию $\psi_\tau^{-1}$. Согласно теореме о неявных функциях существует окрестность $\Omega_\tau$ точки $\tau$, в которой $\psi_\tau$ есть диффеоморфизм $\Omega_\tau$ на некоторое открытое множество $U_{\mathbf{r}} \subset G$. Отображение $\psi_\tau^{-1}$ имеет вид

$$\psi_\tau^{-1} : \quad \begin{array}{l} t^{(1)} = y^{(1)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ t^{(j-1)} = y^{(j-1)} \\ t^{(j)} = \Theta_i(y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(m)}) \\ t^{(j+1)} = y^{(j+1)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ t^{(m)} = y^{(m)} \end{array} \tag{14.9}$$

Очевидно, что $\varphi^{(i)}(y^{(1)},\ldots,y^{(j-1)},\Theta_i(y^{(1)},\ldots,y^{(m)},y^{(j+1)},\ldots y^{(m)})=y^{(j)}$. Обозначим $\varphi(\Omega_{\mathbf{r}})=G_\tau$. Ясно, что так как $\varphi$ – гомоморфизм, то $G_{\mathbf{r}}$ образуют покрытия множества $G$, а значит и множества $K$. Поэтому из этого покрытия $G_\tau$ можно выбрать конечное подпокрытие $(G_{\tau_k})_{k=1}^N$ компакта $K$. По этим открытым множествам $G_{\tau_k}$ построим разложение единицы $\gamma_k(\tau)$. Так же как при доказательстве теоремы 7.1

$$\int\limits_G f(\mathbf{x})\,d\mu(\mathbf{x})=\sum_{k=1}^N\int\limits_{G_{\tau_k}}\gamma_k(\mathbf{x})f(\mathbf{x})\,d\mu(\mathbf{x}).$$

Будем производить замену в интеграле

$$\int\limits_{G_{\tau_k}}\gamma_k(\mathbf{x})f(\mathbf{x})\,d\mu(\mathbf{x}).$$

4) Докажем равенство (14.1) для произвольного диффеоморфизма. Так как $\varphi:\ \Omega\overset{\text{на}}{\to}G$ диффеоморфизм, то $\varphi^{-1}(\varphi(\mathbf{t}))\equiv\mathbf{t}$ на $\Omega$. Поэтому при всех $\mathbf{t}\in\Omega$

$$\frac{D\varphi^{-1}(\mathbf{x})}{D\mathbf{x}}\cdot\frac{D\varphi(\mathbf{t})}{D\mathbf{t}}=\frac{D\mathbf{t}}{D\mathbf{t}}=detE=1,$$

где $E$ – единичная матрица размерности $m\times n$. Из этого равенства следует, что $\forall\ \mathbf{t}\in\Omega\quad\frac{D\varphi(\mathbf{t})}{D\mathbf{t}}\neq0$.

Выберем произвольную точку $\tau\in\Omega$. В этой точке $\frac{D\varphi(\mathbf{t})}{D\mathbf{t}}\neq0$ и, значит, существует элемент этой матрицы отличный от нуля. Пусть это $\left.\frac{\partial\varphi^{(i)}}{\partial t^{(j)}}\right|_{\mathbf{t}=\tau}\neq0$.

Определим отображение $\psi_\tau$ равенствами (14.8). Вычислим Якобиан этого отображения в точке $\mathbf{t}=\tau$. Имеем

$$\frac{\psi_\tau(\mathbf{t})}{D\mathbf{t}}=\begin{vmatrix}
1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\\
0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\
\frac{\partial\varphi^{(j)}}{\partial t^{(1)}} & \ldots & \ldots & \frac{\partial\varphi^{(j)}}{\partial t^{(j-1)}} & \frac{\partial\varphi^{(j)}}{\partial t^{(j-1)}} & \frac{\partial\varphi^{(j)}}{\partial t^{(j)}} & \ldots & \frac{\partial\varphi^{(j)}}{\partial t^{(m)}}\\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1
\end{vmatrix}=$$

$$=\left.\frac{\partial\varphi^{(i)}}{\partial t^{(j)}}\right|_{\mathbf{t}=\tau}\neq0.$$

По теореме о неявных функциях систему уравнений (14.8) в некоторой окрестности $\Omega_\tau$ точки $\tau$ можно разрешить относительно переменных $t^{(1)}, t^{(2)}, \dots, t^{(m)}$. Иными словами в $\Omega_\tau$ существует обратная функция $\psi_\tau^{-1}$, определенная равенствами (14.9). Очевидно, что

$$\varphi^{(i)}(y^{(1)}, \dots, y^{(j-1)}, \Theta^{(i)}(y^{(1)}, \dots, y^{(m)}, y^{(j+1)}, \dots y^{(m)}) = y^{(j)} \tag{14.10}$$

Из теоремы о неявных функциях следует, что окрестность $\Omega_\tau$ можно выбрать так, что $\psi_\tau$ есть диффеоморфизм открытого множества $\Omega_\tau$ на открытое множество $U_\tau \subset G$. Обозначим $G_\tau = \varphi(\Omega_\tau)$. Ясно, что $G_\tau$ – открытое множество и совокупность всех множеств $G_\tau$ образует покрытие множества $G$, а значит и компакта $K$. Из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие $(G_{\tau_k})_{k=1}^N$ компакта $K$. Обозначим через $(\gamma_k(\mathbf{x}))_{k=1}^N$ разложение единицы, построенное по множествам $(G_{\tau_k})$. Также как при доказательстве теоремы 7.1 убеждаемся, что

$$\int\limits_G f(\mathbf{x})\, d\mu(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^N \int\limits_{G_{\tau_k}} \gamma_k(\mathbf{x}) f(\mathbf{x})\, d\mu(\mathbf{x}). \tag{14.11}$$

Будем проводить замену переменной в каждом интеграле в правой части (14.11). Отображение $\varphi$ представим в виде $\varphi = \varphi \circ \psi_{\tau_k}^{-1} \circ \psi_{\tau_k}$.
Отображение $\varphi \circ \psi_{\tau_k}^{-1}$ есть диффеоморфизм множества $U_{\tau_k}$ на $G_{\tau_k}$ и

$$\varphi^{(i)}(\psi_\tau^{-1}(\mathbf{y})) = y^{(j)},$$

т.е. $\varphi \circ \psi_{\tau_k}^{-1}$ имеет такой же вид, как в пункте 3). Поэтому по доказанному в пункте 3)

$$\int\limits_{G_{\tau_k}} \gamma_k(\mathbf{x}) f(\mathbf{x})\, d\mu(\mathbf{x}) = \int\limits_{U_{\tau_k}} \gamma_k(\varphi \circ \psi_{\tau_k}^{-1}(\mathbf{y})) f(\varphi \circ \psi_{\tau_k}^{-1}(\mathbf{y})) \cdot$$

$$\cdot \left| \frac{D\varphi(t)}{Dt} \right| \cdot \left| \frac{D\psi_{\tau_k}^{-1}(\mathbf{y})}{D\mathbf{y}} \right| d\mu(\mathbf{y}) =$$

$$= \int\limits_{U_{\tau_k}} \gamma_k(\varphi \circ \psi_{\tau_k}^{-1}(\mathbf{y})) f(\varphi \circ \psi_{\tau_k}^{-1}(\mathbf{y})) \cdot \left| \frac{D\left(\varphi \circ \psi_{\tau_k}^{-1}(\mathbf{y})\right)}{D\mathbf{y}} \right| d\mu(\mathbf{y}).$$

Теперь делаем замену $\mathbf{y} = \psi_{\tau_k}(\mathbf{t})$. Так как отображение $\psi_{\tau_k}(\mathbf{t})$ есть диффеоморфизм $\Omega_{\tau_k}$ на $U_{\tau_k}$ и имеет такой же вид, и даже более простой, как в пункте 3). Поэтому снова можно воспользоваться результатами пункта 3), выполняя замену переменных

$$\int\limits_{G_{\tau_k}} \gamma_k(\mathbf{x}) f(\mathbf{x})\, d\mu(\mathbf{x}) = \int\limits_{\Omega_{\tau_k}} \gamma_k(\varphi \circ \psi_{\tau_k}^{-1} \psi_{\tau_k}(\mathbf{t})) f(\varphi \circ \psi_{\tau_k}^{-1} \circ \psi_{\tau_k}(\mathbf{t})) \cdot$$

$$\cdot \left| \frac{D\left(\varphi \circ \psi_{\tau_k}^{-1}(\psi_{\tau_k}(\mathbf{t}))\right)}{D\mathbf{y}} \right| \cdot \left| \frac{\psi_{\tau_k}(\mathbf{t})}{D\mathbf{t}} \right| d\mu(\mathbf{t}).$$

По свойствам Якобианов

$$\left| \frac{D\varphi \circ \psi_{\tau_k}^{-1}(\psi_{\tau_k}(\mathbf{t}))}{D\mathbf{y}} \right| \cdot \left| \frac{\psi_{\tau_k}(\mathbf{t})}{D\mathbf{t}} \right| = \left| \frac{D\left(\varphi \circ \psi_{\tau_k}^{-1} \circ \psi_{\tau_k}(\mathbf{t})\right)}{D\mathbf{t}} \right| = \left| \frac{D\varphi(\mathbf{t})}{d\mathbf{t}} \right|$$

и значит

$$\int\limits_{G_{\tau_k}} \gamma_k(\mathbf{x}) f(\mathbf{x})\, d\mu(\mathbf{x}) = \int\limits_{\Omega_{\tau_k}} \gamma_k(\varphi(\mathbf{t})) f(\varphi(\mathbf{t})) \left| \frac{D\varphi(\mathbf{t})}{d\mathbf{t}} \right| d\mu(\mathbf{t}).$$

Просуммируем эти равенства по $k = 1$ до $N$, получим

$$\int\limits_{G} f(\mathbf{x})\, d\mu(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\Omega_{\tau_k}} \gamma_k(\varphi(\mathbf{t})) f(\varphi(\mathbf{t})) \left| \frac{D\varphi(\mathbf{t})}{d\mathbf{t}} \right| d\mu(\mathbf{t}). \tag{14.12}$$

Но $(\gamma_k(\varphi(\mathbf{t})))_{k=1}^{N}$ есть разложение единицы, построенное по множествам $\Omega_{\tau_k}$, и $\bigcup\limits_{k=1}^{N} \Omega_{\tau_k}$ содержит часть? функции $f(\varphi(\mathbf{t}))$, равный $\varphi^{-1}(K)$. Поэтому правая часть в (14.12) равна

$$\int\limits_{\Omega} f(\varphi(\mathbf{t})) \left| \frac{D\varphi(\mathbf{t})}{d\mathbf{t}} \right| d\mu(\mathbf{t})$$

и теорема доказана. □

**Замечание.** Доказанная теорема справедлива при более слабых предположениях относительно функции $\varphi(\mathbf{x})$, а именно, справедлива следующая

**Теорема 14.2** *Пусть $G, \Omega \subset \mathbb{R}^m$ $(m > 1)$ открытые множества;*
*$\varphi :\ \Omega \overset{на}{\to} G$ – диффеоморфизм.*
*Если $f \in L(G)$, то $f(\varphi(\mathbf{t})) \left| \frac{D\varphi(\mathbf{t})}{d\mathbf{t}} \right| \in L(\Omega)$ и справедливо равенство*

$$(L) \int\limits_{G} f(\mathbf{x})\, d\mu(\mathbf{x}) = (L) \int\limits_{\Omega} f(\varphi(\mathbf{t})) \left| \frac{D\varphi(\mathbf{t})}{d\mathbf{t}} \right| d\mu(\mathbf{t})$$

**Пример.**