

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО
НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ БЛЭКА-ШОУЛЗА
С ПЕРЕМЕННОЙ ВОЛАТИЛЬНОСТЬЮ
МЕТОДОМ КРАНКА-НИКОЛЬСОНА**

Т. А. Васильева, С. С. Жолобов

Волгоградский государственный университет, Россия
E-mail: tatiana_vas@mail.ru, zholobovsemyonsergeevich@gmail.com

Данная работа посвящена численному исследованию влияния переменной волатильности на стоимость опционов. Интерес к справедливому ценообразованию опционов, вызван тем, что данные финансовые инструменты позволяют минимизировать потери от колебаний цен базовых активов. Для вычисления стоимости опционов применяется симметричная разностная схема (метод Кранка-Никольсона [1]) решения нелинейного уравнения Блэка-Шоулза [2], нелинейность которого заключается в вычислении волатильности методами Леланда и Барльса-Сонера [3]. В работе проведено численное исследование зависимости цены опциона от способа вычисления волатильности. Также, проведен анализ влияния параметров моделей Леланда и Барльса-Сонера на устойчивость численных расчетов.

**NUMERICAL SOLUTION OF NONLINEAR
BLACK-SCHOLES EQUATION WITH A VARIABLE
VOLATILITY BY THE CRANK-NICOLSON
DIFFERENCE METHOD**

T. A. Vasileva, S. S. Zholobov

This article is devoted to the numerical study of the influence of variable volatility on the options values. Interest in fair pricing of options is caused by the fact that these financial instruments allow to minimize losses from fluctuations of prices of basic assets. To calculate the value of options, a symmetric difference scheme (Crank-Nicholson method [1]) is used to solve the nonlinear Black-Scholes equation [2], the nonlinearity of which is to calculate volatility by Leland and Barls-Soner methods. The paper presents a numerical study of the dependence of the option price on the method of volatility calculation. Also, the influence of Leland [3] and Barls-Soner models [4] parameters on the stability of numerical calculations is analyzed.

1. Постановка задачи

Рассмотрим нелинейное уравнение Блэка-Шоулза

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma(S, V)^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad (1)$$

где S — цена базового актива, $V(S, t)$ — цена опциона, $\sigma = \sigma(S, V)$ — коэффициент волатильности, t — время, r — процентная ставка. Нелинейность уравнения (1) связана с нелинейностью задания волатильности, которая в данной работе задается двумя способами:

- методом Леланда [3]

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 \left(1 + \text{Lesign} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right), \quad (2)$$

где σ — волатильность из линейной модели, Le — число Леланда, определяе-

мое как

$$Le = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k}{\sigma \sqrt{\delta t}}. \quad (3)$$

Числа k и δt — константы в рамках модели: k отвечает за транзакционные издержки покупки или продажи одной акции (или другого актива), а δt — за частоту транзакций.

- Методом Барльса и Сонера [4]

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 \left(1 + e^{2(T-t)} a^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right), \quad (4)$$

здесь a — также константа в рамках модели, и от нее зависит показатель транзакционных издержек на акцию, а T есть время исполнения опциона. Нелинейное уравнение (1) решается численно методом Кранка-Никольсона [1] с применением методов вычисления волатильности Леланда [3] и Барльса-Сонера [4]. Полученные результаты расчетов анализируются.

2. Сравнительный анализ результатов численного решения

Для решения данной задачи создан программный код в среде Visual Studio на языке C# с использованием Excel для визуализации расчетов. Численные расчеты по нелинейной модели Блэка-Шоулза (1) проводятся относительно цены Put опциона $V(S, t)$ и сравниваются с решением линейного уравнения, где волатильность σ задается константой. В качестве входных данных брались значения для сеточного разбиения по осям S и t соответственно:

$N = 60, M = 100$, а также $T = 1, S = 100, r = 0,1, K = 50$. В линейной модели волатильность равна $\sigma = 0,4$.

Посредством численного эксперимента установлено, что характеристики модели Леланда, транзакционные издержки k и частота транзакций δt , напрямую влияют на цену опциона $V(S, t)$. Однако стоит отметить, что максимальное влияние достигается, когда опцион находится в состоянии «около денег», то есть, когда цена базового актива приближается к цене исполнения опциона (страйку). Следовательно, при росте k в модели Леланда цена опциона растет.

Цена опциона $V(S, t)$, полученная при решении нелинейного уравнения Блэка-Шоулза с переменной волатильности, рассчитанной по модели Леланда, превышает цену опциона, полученную линейным уравнением Блэка-Шоулза. Заметим, что при достаточно малых значения k , цена опциона, полученная нелинейным уравнением, практически совпадает с ценой опциона, рассчитанной с помощью линейной модели. Об этом свидетельствует и график, приведенный на рис. 1.

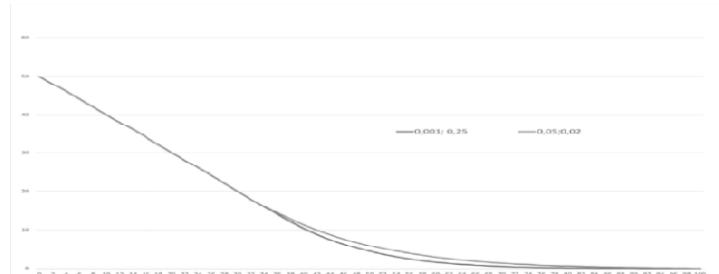


Рис. 1. Визуализация решения модели Леланда при $k = 0,05$, $\delta t = 0,02$ и $k = 0,001$, $\delta t = 0,25$ в момент времени $t = 0$

Перейдем к модели вычисления волатильности методом Барльса-Сонера (4), параметром которой служит коэффициент a . Проанализируем его влияние на расчетную стоимость опциона. Ниже приведены расчеты со следующими входными данным: $N = 60$, $M = 100$, $T = 1$, $\sigma = 0,4$, $S = 100$, $r = 0,1$, $K = 50$, $a = 0,08$.

Из рис. 2 при $a = 0,08$ видно, что решение неустойчивое, так как существует негладкий фрагмент поверхности. Для получения устойчивого численного решения подберем соответствующее сеточное соотношение γ (*mesh ratio*), вычисляемое следующим образом [6]

$$\gamma = \frac{\tau}{h^2}, \quad (5)$$

где $\tau = \frac{T}{N}$ и $h = \frac{L}{M}$ соответственно, а также определим значения параметра a .

Воспользуемся входными данным из предыдущего расчета для получения поверхности решения при значениях параметра $a = 0,08; 0,05; 0,04; 0,02$. Значение сеточного соотношения при этом $\gamma = 0,017$.

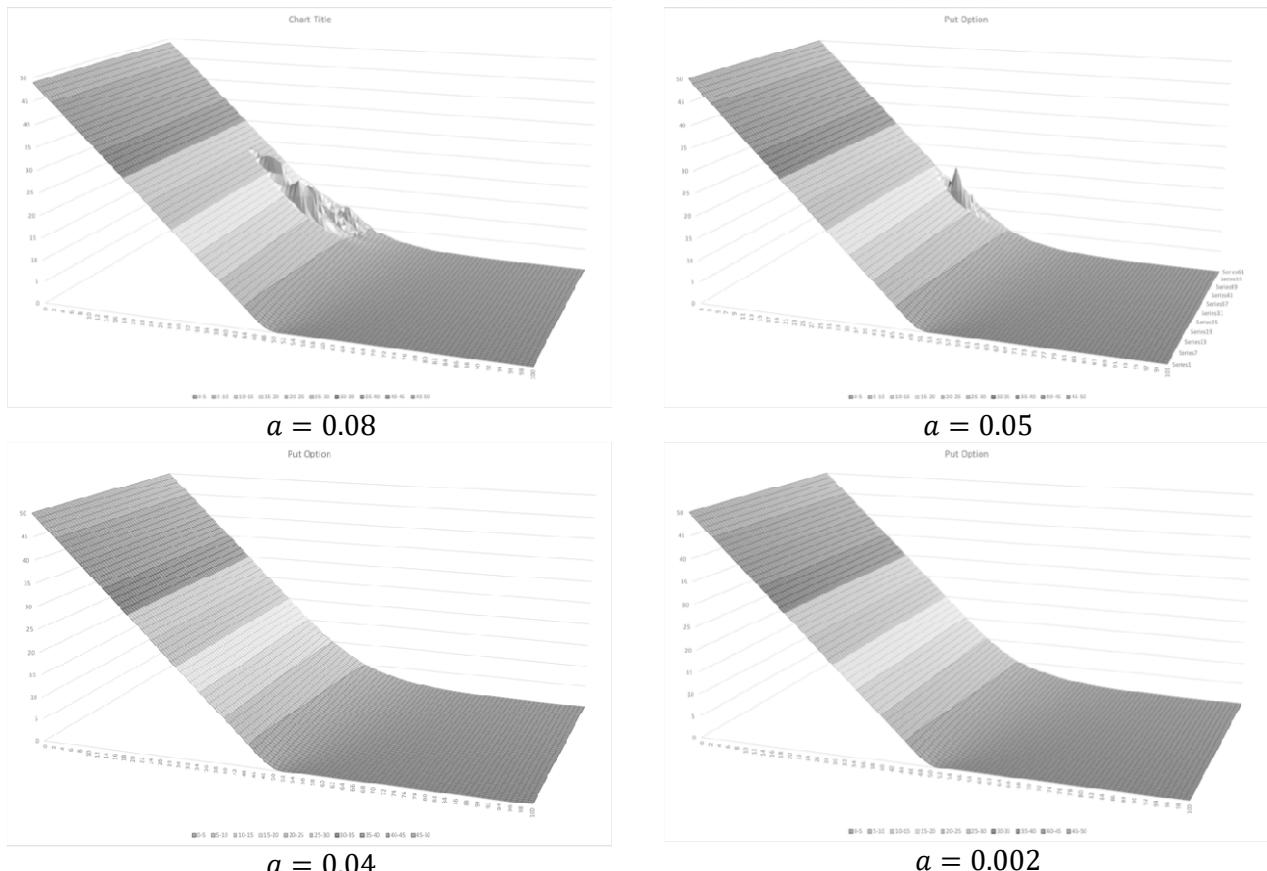


Рис. 2. Визуализация решения модели Барльса-Сонера при $\gamma = 0,017$ и значениях параметра $a=0,002, 0,04, 0,05, 0,08$

Из данной серии расчетов следует вывод о том, что при $\gamma = 0,017$ решение становится устойчивым, когда коэффициент $a \leq 0,04$. А из серии расчетов при $\gamma = 0,2$ следует, что решение является устойчивым, пока параметр $a \leq 0,1$.

Таким образом, можно сделать вывод, что данная модель зависит от сечочного соотношения γ и, чем большее значение принимает γ , тем более широкий диапазон значений может принимать параметр a .

Результаты численных расчетов нелинейной модели и решение линейного уравнения Блэка-Шоулза сравниваются на рис. 3, на котором видно, что цена опциона, вычисленная с использованием модели Барльса-Сонера отличается в большую сторону от линейной модели.

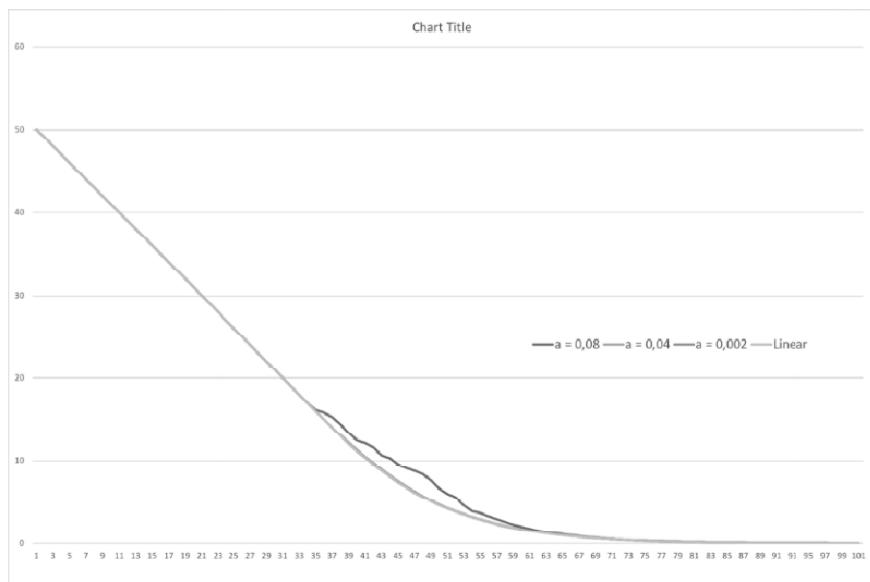


Рис. 3. Визуализация решения нелинейного уравнения с использованием модели Барльса-Сонера и линейного уравнения Блэка-Шоулза

Таким образом, из проведенных численных исследований можно сделать вывод, что использование модели Леланда вычисления волатильности при решении нелинейного нелинейное уравнение Блэка-Шоулза не имеет смысла при $k \leq 0,01$, так как в этом случае результаты $V(S,t)$ совпадают с результатами линейного уравнения Блэка-Шоулза.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Higham Desmond J. An Introduction to Financial Option Valuation / Cambridge University Press. 2005, 274 p
2. Black F. and Sholes M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities // Journal of Political Economy. 1973. № 81. P. 637-659.
3. Leland H. E. Option pricing and replication with transaction costs // The Journal of Finance. 1985. № 40. P. 1283-1301.
4. Barles G., Soner H. M., Option pricing with transaction costs and a nonlinear Black-Scholes equation // Finance and Stochastics. 1998. № 2. P. 369-397.
5. Жолобов С. С. Численная реализация разностного метода решения одного нелинейного уравнения Блэка-Шоулза: Дипломная работа, Волгоградский гос. ун-т, Волгоград, 2018. 46 с.
6. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М. : Наука, 1989. 382 с.