



МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»
(СГУ)**

Программа

**вступительного испытания по специальной дисциплине
для поступающих на направление подготовки научно-педагогических
кадров в аспирантуре**

01.06.01 Математика и механика

направленности: Биомеханика;

Вещественный, комплексный и функциональный анализ;

Математическая логика, алгебра и теория чисел;

Механика деформируемого твёрдого тела

Саратов – 2019

Пояснительная записка

Предлагаемая программа вступительных испытаний призвана обеспечить полноценный отбор наиболее подготовленных кандидатов, поступающих в аспирантуру на направление подготовки 01.06.01 Математика и механика (направленности «Биомеханика», «Вещественный, комплексный и функциональный анализ», «Математическая логика, алгебра и теория чисел», «Механика деформируемого твердого тела»).

Наименование и код специальностей научных работников соответствующих направлению подготовки «Математика и механика» (направленности «Биомеханика», «Вещественный, комплексный и функциональный анализ», «Математическая логика, алгебра и теория чисел», «Механика деформируемого твердого тела»):

01.02.08 – Биомеханика;

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ;

01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел;

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела.

Каждый раздел программы содержит вопросы для соответствующей специальности научных работников.

В основе настоящей программы лежат основные понятия действительного, комплексного и функционального анализа, математической логики, алгебры и теории чисел, механики и биомеханики. Владение основами этих теорий требует общематематической культуры. С помощью настоящей программы планируется выяснить, насколько будущий аспирант обладает такой культурой и готов ли он работать над конкретными открытыми задачами соответствующей научной специальности. Структура и содержание программы отвечает характеру и уровню знаний, умений и навыков, необходимых будущему аспиранту для успешного обучения в аспирантуре и работе над диссертацией. Работа с программой нацеливает на закрепление в профессиональном сознании абитуриентов комплексного целостного знания, позволяющего в период обучения в аспирантуре, осуществлять эффективную научно-исследовательскую, преподавательскую и воспитательную деятельность. В ходе ответов на предлагаемые вопросы абитуриенту следует показать владение понятийно-терминологическим аппаратом, проявить знание основных теоретических постулатов, законов, закономерностей, противоречий, уметь охарактеризовать их место и роль в исследовательской и образовательной деятельности.

Вступительное испытание проводится в устной форме по билетам.

Содержание программы

Раздел 1. БИОМЕХАНИКА

Теория упругости

Теория напряженного и деформируемого состояний. Тензоры деформаций Грина и Альманси, тензоры напряжений Коши, Пиолы и Кирхгофа. Малые деформации и малые вращения. Обоснование линеаризации тензоров деформаций.

Потенциальная энергия деформации. Закон Гука для изотропного и анизотропного тела. Тензор упругих постоянных. Полная система уравнений теории упругости в напряжениях. Уравнения Бельтрами-Митчелла. Уравнения в перемещениях. Постановка основных задач теории упругости. Теоремы о существовании и единственности.

Вариационные принципы теории упругости. Принцип Лагранжа. Теорема Клапейрона. Теорема Бетти. Принцип Кастильяно. Вариационные методы решения задач теории упругости. Метод Ризца. Метод Бубнова-Галеркина.

Плоская деформация и плоское напряженное состояние. Функция напряжений. Дифференциальные уравнения и краевые условия для функции напряжений. Теорема Мориса Леви. Методы решения плоских задач.

Осесимметричные задачи. Представления Галеркина, Папковича, Нейбера. Кельвина, тензор Грина. Метод граничных интегральных уравнений. Первая и вторая краевые задачи для полупространства. Задача Герца. Задача Буссинеска.

Динамические задачи теории упругости. Распространение волн в неограниченной упругой среде. Продольные и поперечные волны. Поверхностные волны Рэлея. Волна Лява. Сферические волны. Собственные частоты упругих тел. Формула Рэлея.

Теория пластичности

Модели упруго-пластического тела. Постулаты теории пластичности.

Деформационная теория. Теория пластического течения. Методы решения задач теории пластичности с упрочнением и идеальная пластичность. Разгрузка. Остаточные напряжения. Условия на границе упругой и пластической областей. Задачи о кручении, о нагружении внутренним давлением цилиндра и полой сферы.

Модель жестко-пластического тела.

Плоская задача теории пластичности.

Теория вязкоупругости

Теория линейной вязкоупругости. Использование механических моделей. Спектры времен релаксации и последействия. Дифференциальная и

интегральная формы соотношений между напряжениями и деформациями. Различные типы ядер в интегральных соотношениях. Принцип температурно-временного соответствия. Постановка и методы решения задач теории вязкоупругости. Принцип Вольтерра.

Применение преобразования Лапласа. Понятие о нелинейных моделях наследственных сред.

Численные методы и применение ЭВМ для решения задач биомеханики

Численные методы решения задач биомеханики. Метод конечных элементов. Вычислительный эксперимент для решения задач биомеханики.

Биомеханические системы

Сердечно-сосудистая система. Строение и общая физиология сердца. Механическая работа сердца. Функции сосудистой системы. Свойства стенок сосудов. Функциональная организация сосудистой системы. Артериальный отдел большого круга кровообращения. Венозный отдел большого круга кровообращения. Микроциркуляция. Лимфатическая система. Регуляция кровообращения. Легочное кровообращение. Кровообращение в отдельных органах и его регуляция. Измерения давления, кровотока и объемов крови в сердечно-сосудистой системе. Кровь. Реологические свойства крови. Течение крови в сосудах и напряжение сдвига на стенке. Пульсовая волна. Экспериментальные исследования поведения стенок кровеносных сосудов. Механические свойства сосудов. Напряженно-деформированное состояние стенок кровеносных сосудов при одноосном растяжении.

Дыхательная система. Строение структур и органов дыхательных путей. Общая характеристика механических явлений в дыхательных органах человека.

Опорно-двигательная система. Строение опорно-двигательного аппарата.

Сенсорные системы. Общая характеристика глаза. Строение и функции органов слуха и равновесия.

Пищеварительная и выделительная системы. Строение и функции пищеварительной системы. Перистальтический механизм. Мочевыделительная система.

Литература

1. Бегун П.И., Шукейло Ю.А. Биомеханика. Спб.: Политехника, 2000.—463с . 2. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Тарлаковский Д.В. Теория упругости и пластичности: учебник. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
3. Ключников В.Д. Физико-математические основы прочности и пластичности. (Элементы теории определяющих соотношений): учеб. пособие для вузов по направлению «Механика». – Москва: Изд-во Моск. унта, 1994. – 189 с.

4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: учеб. пособие: в 10 т. / под ред. Л.П. Питаевского. – Москва: ФИЗМТЛИТ. – Т.7 : Теория упругости. – 5-е изд., стер. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
5. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики: учеб. Пособие.-4-е изд., стер. – Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2009.-608 с.
6. Морозов Е.М., Партон В.З. Механика упруго-пластического разрушения. М.: Наука, 1985.
7. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.:Наука, 1966.
8. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.
9. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Л.: Судостроение, 1962.
10. Новожилов В.В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958.
11. Пурия Б.А., Касьянов В.А. Биомеханика крупных кровеносных сосудов.
12. Ильюшин А.А. Пластичность. М.: Гостехиздат, 1948.
13. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979.
14. Стренг Г., Фикс Дж. Теория конечных элементов. М.:Мир, 1977.

Раздел 2. ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Теория функций действительного переменного

Мера, измеримые функции. Сходимость по мере и почти всюду. Теоремы Егорова и Лузина. Определение интеграла Лебега и его свойства. Сравнение с интегралом Римана. Предельный переход под знаком интеграла. Неопределенный интеграл Лебега. Абсолютно непрерывные функции. Интеграл Лебега как функция множества.

Пространства суммируемых функций. Пространства L_p . Ортогональные системы функций в L_2 . Ряды по ортогональным системам.

Тригонометрические ряды. Условия сходимости ряда Фурье. Единственность разложения функций в тригонометрические ряды. Преобразование Фурье.

Теория функций комплексного переменного

Интегральные представления аналитических функций. Интегральная теорема Коши. Интегральная формула Коши. Теорема о среднем. Лемма Шварца. Интеграл типа Коши. Формулы Сохоцкого.

Ряды аналитических функций. Особые точки. Вычеты. Разложения аналитических функций в ряды Тейлора и Лорана. Неравенства Коши. Нули аналитических функций. Теорема единственности. Изолированные особые

точки (однозначного характера). Теорема Коши о вычетах. Вычисления интегралов с помощью вычетов. Принцип аргумента. Теорема Руше.

Целые и мероморфные функции. Теорема Вейерштрасса о целых функциях с заданными нулями. Разложение целой функции в бесконечное произведение.

Конформные отображения. Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Принцип сохранения области. Критерий однолиственности.

Дифференциальные отображения

Обыкновенные дифференциальные уравнения. Теорема Коши о существовании и единственности решения задачи Коши. Теория линейных систем.

Уравнения математической физики. Постановка смешанной задачи. Схема метода разделения переменных для волнового уравнения. Задачи Дирихле. Задача Коши для уравнения теплопроводности в полупространстве.

Функциональный анализ

Метрические и топологические пространства. Сходимость. Полнота и пополнение метрического пространства. Принцип сжимающих отображения. Компактность в метрических и топологических пространствах.

Нормированные и топологические линейные пространства. Линейные пространства. Выпуклые множества и выпуклые функции. Теорема Хана-Банаха.

Линейные функционалы и линейные операторы. Непрерывные линейные функционалы. Общий вид линейных функционалов в гильбертовом пространстве. Сопряженное пространство. Слабая сходимость. Линейные операторы. Пространство линейных ограниченных операторов, вполне непрерывные операторы. Теория расширения симметричных операторов.

Литература

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 2004.
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.
4. Маркушевич И.А. Теория аналитических функций. Т.1, 2. С.-П.: Лань, 2009.
5. Натансон И.П. Теория функций вещественного переменного. М.: Наука, 1974.
6. Никольский С.М. Курс математического анализа. М.: Физматлит, 2001.
7. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1984.

8. Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.
9. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.1-5. С.-П.: БХВ-Петербург, 2008 - 2010.
10. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
11. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.

Раздел 3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Группы

Циклические группы (теорема Кэли). Общие теоремы о гомоморфизмах групп. Разрешимые группы. Простые группы. Произведение групп. Образующие и определяющие соотношения. Действия групп на множествах: действие сопряжением, сдвиг, транзитивные группы. Теоремы Симона. Конечные абелевы группы. Примарные абелевы группы. Основная теорема о конечных абелевых группах. Характеристики конечных абелевых групп. Двойственность. Соотношение ортогональности. Модулярные характеры.

Кольца и идеалы

Гомоморфизмы колец. Коммутативные кольца. Простой идеал. Максимальный идеал. Свойства простых и максимальных идеалов. Китайская теорема об остатках и следствия из неё. Первообразные корни по модулю n . Кольцо частных. Локальное кольцо. Кольцо главных идеалов. Теорема о факториальности целостного кольца главных идеалов. Евклидово кольцо. Теорема о факториальности кольца многочленов под факториальным кольцом. Дедекиндовы кольца. Дробные идеалы. Свойства. Теорема об максимальной и обратимости всех простых идеалов. Теорема о дедекиндовости для области целостности с группой ненулевых дробных идеалов.

Поля

Подтело. Простое тело. Присоединение. Простые расширения. Конечные расширения (теорема о степенях). Алгебраические расширения и их связь с конечными расширениями. Поле разложения (теоремы о их существовании и однозначности). Нормальные расширения (необходимые и достаточные условия для нормальности расширения). Сепарабельные и несепарабельные расширения. Теорема о числе изоморфизмов алгебраических расширений. Совершенные и несовершенные поля. Простота алгебраических расширений. Теорема о примитивном элементе. Нормы и следы. Группа Галуа. Основная теорема теории Галуа. Конечные поля. Мультипликативная группа конечного

поля. Уравнения под конечным полем (теорема Шевалли). Квадрат поля. Символ Лежандра. Квадратичный закон взаимности.

Числовые поля

Квадратичные поля. Основные алгебраические сведения. Геометрическая иллюстрация. Целые числа. Дискриминант. Единицы. Вычисление основной единицы. Квадратичные поля с однозначным разложением на простые множители.

Аналитическая теория чисел

Бесконечные произведения. Теорема Вейерштрасса и следствие из неё. Рост целых функций. Порядок и тип целой функции. Связь роста функции с числом её нулей, неравенство Йенсена. Теорема Адамара. Теорема Бореля-Каратеодори. Обобщенные ряды Дирихле. Обыкновенные ряды Дирихле. Сумматорные функции для рядов Дирихле. Ряды Дирихле с мультипликативными коэффициентами. Ряды с периодическими коэффициентами. Аналитическое продолжение на всю плоскость и L-функций Дирихле. Функциональное уравнение. Оценка модуля в критической полосе. Первая теорема Пейджа. Вторая теорема Пейджа. Теорема Зигеля (без доказательства). Аппроксимация функции.

Литература

Основная:

1. Воеводин В.В. Линейная алгебра. - СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2008.
2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. - М.: Краснодар: Лань, 2007., - М.: Физматгиз, 2007.
3. Д. К. Фаддеев. Лекции по алгебре. - СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2007.
4. Виноградов И.М. Основы теории чисел - СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2004. 5. Виноградов И.М. Основы теории чисел - СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2006.

Дополнительная:

1. С. Ленг Алгебра. М.: Мир, 1968.
2. Ван дер Варден Б.И. Современная алгебра т.1 и 2. Гостехиздат, М.-Л., 1947.
3. Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. М.: Наука, 1964.
4. Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел.
5. Постников А.Г. Введение в аналитическую теорию чисел М.: Наука.
6. Чандрасекхаран К. Арифметические функции М.: Наука, 1975.
7. Ленг С. Алгебраические числа М.: Мир, 1960.
8. Под редакцией Касселса. Алгебраическая теория чисел. М.: Наука, 1972.
9. Бурбаки Н. Гомологическая алгебра. М.: Мир 1930.

Раздел 4. МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЁРДОГО ТЕЛА

Теория упругости

Теория напряженного и деформированного состояний. Тензоры деформаций Грина и Альманси, тензоры напряжений Коши, Пиолы и Кирхгофа. Малые деформации и малые вращения. Обоснование линеаризации тензоров деформаций.

Потенциальная энергия деформации. Закон Гука для изотропного и анизотропного тела. Тензор упругих постоянных. Частные случаи анизотропии. Полная система уравнений теории упругости в напряжениях. Уравнения Бельтрами-Митчелла. Уравнения в перемещениях. Постановка основных задач теории упругости. Теоремы о существовании и единственности.

Вариационные принципы теории упругости. Принцип Лагранжа. Теорема Клапейрона. Теорема Бетти. Принцип Кастильяно. Вариационные методы решения задач теории упругости. Метод Рунда. Метод Бубнова-Галеркина.

Плоская деформация и плоское напряженное состояние. Функция напряжений. Дифференциальные уравнения и краевые условия для функции напряжений. Теорема Мориса Леви. Методы решения плоских задач. Применение теории функций комплексного переменного. Формулы Колосова-Мусхелишвили. Применение интегралов типа Коши. Использование интегральных преобразований Фурье, Ханкеля и Лапласа. Метод граничных интегральных уравнений. Методы решений краевых задач для комплексных потенциалов. Действие штампа на полуплоскость, плоскость с отверстием и разрезом.

Пространственные и осесимметричные задачи. Представления Галеркина, Папковича, Нейбера. Решение Кельвина, тензор Грина. Метод граничных интегральных уравнений. Первая и вторая краевые задачи для полупространства. Задача Герца. Задача Буссинеска.

Основные положения классической теории тонких упругих оболочек. Ковариантное дифференцирование вектора и тензора второго ранга в трехмерном Евклидовом пространстве. Деформация срединной поверхности оболочки и любой поверхности, параллельной срединной. Закон изменения поля перемещений по толщине оболочки. Внутренние усилия и моменты. Соотношения упругости. Потенциальная энергия деформации. Системы уравнений теории оболочек в усилиях – моментах, в компонентах поля перемещений. Граничные условия. Постановки задач теории оболочек и пути решения уравнений теории оболочек. Условия существования безмоментного состояния. Безмоментная теория оболочек вращения произвольного очертания. Краевые эффекты в оболочках. Модели типа Рейсснера в теории пластин и оболочек. Основные положения и уравнения теории нагретых пологих оболочек. Уравнения для температурных функций. Постановки задач статической и динамической устойчивости оболочек.

Гипотеза Франца Неймана. Вывод уравнений Дюгамеля – Неймана. Вывод уравнения теплопроводности в криволинейных координатах. Методы решения задач термоупругости.

Динамические задачи теории упругости. Распространение волн в неограниченной упругой среде. Продольные и поперечные волны. Поверхностные волны Рэлея. Волны Лява. Сферические волны. Собственные частоты упругих тел. Формула Рэлея.

Теория пластичности

Модели упруго-пластического тела. Постулаты теории пластичности. Деформационная теория. Теория пластического течения. Методы решения задач теории пластичности с упрочнением и идеальная пластичность. Разгрузка. Остаточные напряжения. Условия на границе упругой и пластической областей. Задачи о кручении, о нагружении внутренним давлением цилиндра и полой сферы.

Модель жестко-пластического тела. Вариационные принципы для предельного состояния. Определение верхней и нижней границ для предельной нагрузки.

Плоская задача теории пластичности. Уравнения плоской задачи.

Характеристики и линии скольжения. Простейшие примеры полей скольжения. Случай плоской деформации и плоского напряженного состояния. Задача о штампе и полосе с выточками.

Литература

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 1967. 266 с.
2. Ильющин А.А. Пластичность. М.:Гостехиздат, 1948.
3. Власов В.З. Общая теория оболочек. Гос. изд. технико-теоретической литерат. 1948, 784 с.
4. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Тарлаковский Д.В. Теория упругости и пластичности: учебник. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 415 с.
5. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. и др. Волны в сплошных средах. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 467 с.
6. Жилин П.А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. Санкт-Петербург. Изд-во «Нестор», 2001. 275 с.
7. Кабанов Н.И. Элементарное введение в вариационное исчисление. Изд-во СГУ, Саратов, 1978. 302 с.
8. Ключников В.Д. Физико-математические основы прочности и пластичности. (Элементы теории определяющих соотношений): учеб. пособие для вузов по направлению «Механика». – Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1994. – 189 с.

9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: учеб. пособие. : в 10 т./ под ред. Л.П. Питаевского. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
10. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики: учеб. пособие. – 4-е изд., стер. – Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2009.-608 с.
11. Морозов Е.М., Партон В.З. Механика упруго-пластического разрушения. М.: Наука, 1985.
12. Морозов Н.Ф. Лекции по избранным вопросам механики сплошных сред. Ленинград: Изд-во Ленингр. ун-та, 1975. 89 с.
13. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.:Наука, 1966.
14. Назаров А.А. Основы теории и методы расчета пологих оболочек. Ленинград, Москва: Изд-во лит. по строительству, 1966. 3302 с.
15. Новацкий В. Теория упругости. М.:Мир, 1975.
16. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Л.: Судостроение, 1962.
17. Новожилов В.В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958.
18. Огибалов П.М., Грибанов В.Ф. Термоустойчивость пластин и оболочек. Изд-во МГУ, М., 1968, 520 с.
19. Подберя Б.Е. Лекции по тензорному анализу. Москва: Изд-во МГУ, 1979. 221 с.
20. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979.
21. Седов Л.И. Механика сплошной среды [Текст]: учеб. для студентов вузов, обучающихся по специальности «Механика» : в 2 т./ Л.И. Седов; Моск. гос. ун-т им.М.В.Ломоносова. – 6-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2004.
22. Стренг Г., Фикс Дж. Теория конечных элементов. М.: Мир, 1977.

Срок действия программы вступительного испытания 3 года.

Программа утверждена Ученым советом механико-математического факультета СГУ (Протокол № 7 от 21 марта 2019 года) и согласована с Отделом по организации приема на основные образовательные программы СГУ.

Начальник отдела по организации приема
на основные образовательные программы,
ответственный секретарь Центральной
приемной комиссии СГУ



С.С. Хмелев