Пусть существует точка $x \in M$, в которой $F(x) = *F(x)$. Тогда связность A является решением уравнений автодуальности на всем M тогда и только тогда, когда параллельный перенос U^A является решением уравнения Лапласа для лапласиана $\Delta_L^{S,\{e_n\}}$:

$$\Delta_L^{S,\{e_n\}} U^A = 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леви П.* Конкретные проблемы функционального анализа. М. : Наука, 1967. 512 с.

2. *Accardi L., Gibilisco P., Volovich I. V.* Yang-Mills gauge fields as harmonic functions for the Lévy – Laplacian // Russ. J. Math. Phys. 1994. Vol. 2., No. 2, pp. 235–250.

3. *Leandre R., Volovich I. V.* The Stochastic Lévy Laplacian and Yang-Mills equation on manifolds // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 2001. Vol. 2., № 2, pp. 151–172.

4. *Accardi L., Smolyanov O. G.* Feynman formulas for evolution equations with Lévy Laplacians on infinite-dimensional manifolds // Doklady Mathematics. 2006. Vol. 73, № 2. P. 252–257.

5. *Волков Б. О.* Лапласианы Леви и инстантоны // Тр. МИАН. 2015. Т. 290. С. 226–238.

6. *Волков Б. О.* Лапласиан Леви на четырехмерном римановом многообразии // Математика и математическое моделирование. 2016. Вып. 6. С. 1–14.

7. *Волков Б. О.* Лапласианы Леви на бесконечномерном многообразии // Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского. 2017. Т. 54. С. 91–94.

УДК 517.95

ПРИМЕРЫ СУПЕРУСТОЙЧИВЫХ ПОЛУГРУПП В ТЕОРИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Ву Нгуен Шон Тунг (Москва, Россия)

vnsontung@mail.ru

В банаховом пространстве E на отрезке $[0, T]$ рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + g, & 0 \leqslant t \leqslant T, \\ u(0) = u_0, & u(T) = u_1, \end{cases} \tag{1}$$

с неизвестным элементом $g \in E$. Здесь A — линейный замкнутый оператор в E с плотной областью определения $D(A) \subset E$, порождающий полугруппу $U(t)$ класса C_0. Элементы u_0, u_1 заданы в $D(A)$. Решением задачи (1) назовем пару $(u(t), g)$, где $u \in C^1([0, T]; E)$, $u(t) \in D(A)$ при всех $t \in [0, T]$, и $g \in E$. Задачу (1) называют *обратной задачей с финальным переопределением* (см. [1]).

Предполагаем сейчас, что полугруппа $U(t)$ является *суперустойчивой* (или *квазинильпотентной*). Это означает, что *экспоненциальный тип* полугруппы, определенный по формуле

$$\omega_0 \equiv \lim_{t\to+\infty} \left(t^{-1} \ln \|U(t)\|\right),$$

равен $-\infty$. В таком случае при любом выборе числа $\alpha > 0$ найдется константа $M = M_\alpha \geqslant 1$, для которой $\|U(t)\| \leqslant Me^{-\alpha t}$ при $t \geqslant 0$. Вырожденный класс суперустойчивых полугрупп вызвал интерес в последние десятилетия (см. [2–5]).

Согласно схеме [6] справедлив следующий результат.

Теорема 1. *Пусть оператор A порождает суперустойчивую полугруппу $U(t)$ класса C_0. Тогда при любом выборе элементов u_0, $u_1 \in D(A)$ обратная задача* (1) *имеет и притом единственное решение $(u(t), g)$. При этом элемент $g \in E$ представим рядом Неймана*

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} U(kT)f, \qquad f = A\left(U(T)u_0 - u_1\right), \tag{2}$$

сходящимся по норме пространства E, а первый компонент решения находится по формуле

$$u(t) = U(t)u_0 + \int_0^t U(t-s)g\,ds, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{3}$$

Обсудим типичные примеры суперустойчивых полугрупп, раскрывающие возможности данной теоремы.

Введем весовое банахово пространство $E \equiv L^1\left(\mathbb{R}_+,\, e^{-\gamma(x)}\,dx\right)$ с монотонно неубывающей функцией $\gamma(x) \geqslant 0$ при $x \geqslant 0$. Пусть оператор A задан в E по формуле

$$A = -\frac{d}{dx} - \sigma(x), \tag{4}$$

где $\sigma(x)$ — измеримая, неотрицательная и локально ограниченная при $x \geqslant 0$ функция. Положим

$$D(A) = \left\{\, f \in AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+) : \quad Af \in E, \quad f(0) = 0 \,\right\}. \tag{5}$$

Тогда оператор (4) порождает в $E \equiv L^1\left(\mathbb{R}_+,\, e^{-\gamma(x)}\,dx\right)$ полугруппу $U(t)$ класса C_0 по правилу

$$U(t)f(x) = \begin{cases} f(x-t)\exp\left(-\int\limits_0^t \sigma(x-s)ds\right), & x > t, \\ 0, & x \leqslant t. \end{cases} \tag{6}$$

Укажем типичные случаи, при которых полугруппа (6) является суперустойчивой.

Случай 1. Пусть $\gamma(x) = ax^p$ при $x \geqslant 0$ с некоторыми константами $a > 0$ и $p > 1$. Тогда при любом выборе измеримой, локально ограниченной функции $\sigma(x) \geqslant 0$ полугруппа (6) является суперустойчивой в пространстве $E \equiv L^1\big(\mathbb{R}_+, e^{-\gamma(x)}\,dx\big)$.

Случай 2. Пусть $\sigma(x) \geqslant bx^q$ при $x \geqslant 0$ с некоторыми константами $b > 0$ и $q > 0$. Тогда при любом выборе монотонно неубывающей функции $\gamma(x) \geqslant 0$ полугруппа (6) является суперустойчивой в пространстве $E \equiv L^1\big(\mathbb{R}_+, e^{-\gamma(x)}\,dx\big)$.

В качестве простой модели для «абстрактной» задачи (1) рассмотрим обратную задачу для уравнения переноса с поглощением на полуоси

$$\begin{cases} u_t + u_x + \sigma(x)u = g(x), \quad 0 \leqslant x < +\infty, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ u(0,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u(x,T) = u_1(x). \end{cases} \tag{7}$$

Случаи 1 и 2 дают широкий спектр возможностей для выбора коэффициента $\sigma(x) \geqslant 0$ и базового пространства $E \equiv L^1\big(\mathbb{R}_+, e^{-\gamma(x)}\,dx\big)$, при которых гарантирована корректность задачи (7).

Например, пусть $\gamma(x) \equiv 0$ и $\sigma(x) = \sqrt{x}$ при $x \geqslant 0$. Определим в пространстве $E = L^1(\mathbb{R}_+)$ область $D(A)$, построенную для оператора (4) по правилу (5). Тогда, по теореме 1 и согласно отмеченному выше случаю 2, обратная задача (7) при любом выборе функций $u_0(x)$, $u_1(x)$ из $D(A)$ имеет и притом единственное решение $(u(x,t), g(x))$, согласованное с выбором пространства $L^1(\mathbb{R}_+)$. Для нахождения решения используются аналоги формул (2), (3). Подобный подход можно распространить на многомерное уравнение переноса в неограниченной области без интеграла столкновений.

Автор благодарен И. В. Тихонову за постановку задачи и помощь в исследовании.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. N.Y.; Basel : Marcel Dekker, 2000. 723 p.

2. *Balakrishnan A. V.* On superstability of semigroups // In: M. P. Polis et al (eds.). Systems modelling and optimization. Proceedings of the 18th IFIP Conference on System Modelling and Optimization. CRC Research Notes in Mathematics. Chapman and Hall. 1999. P. 12–19.

3. *Balakrishnan A. V.* Superstability of systems // Applied Mathematics and Computation. 2005. Vol. 164, iss. 2. P. 321–326.

4. *Jian-Hua Chen, Wen-Ying Lu.* Perturbation of nilpotent semigroups and application to heat exchanger equations // Appl. Math. Letters. 2011. Vol. 24. P. 1698–1701.

5. *Creutz D., Mazo M., Preda C.* Superstability and finite time extinction for C_0-Semigroups // arXiv:0907.4812. Submitted 2013. P. 1–12.

6. *Тихонов И. В., Ву Нгуен Шон Тунг.* Метод решения обратной задачи для эволюционного уравнения с суперустойчивой полугруппой // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2017. № 2. С. 51–58.

УДК 517.521

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА СУММ ФУРЬЕ – МЕЙКСНЕРА

Р. М. Гаджимирзаев (Махачкала, Россия)
ramis3004@gmail.com

Пусть $\Omega_\delta = \{0, \delta, 2\delta, \ldots\}$, где $\delta = \frac{1}{N}$, $N > 0$. В настоящей работе для произвольной функции, заданной на множестве Ω_δ построены ряды Фурье по полиномам Мейкснера и исследованы аппроксимативные свойства их частичных сумм. В частности, получена оценка сверху для функции Лебега частичных сумм ряда Фурье по полиномам Мейкснера $M^\alpha_{n,N}(x)$.

Отметим некоторые сведения о полиномах Мейкснера.

Для $q \neq 0$ и произвольного $\alpha \in \mathbb{R}$ классические полиномы Мейкснера [1–3] можно определить с помощью равенства

$$M^\alpha_n(x) = M^\alpha_n(x, q) = \binom{n+\alpha}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^{[k]} x^{[k]}}{(\alpha+1)_k k!} \left(1 - \frac{1}{q}\right)^k,$$

где $x^{[k]} = x(x-1)\ldots(x-k+1)$, $(a)_k = a(a+1)\ldots(a+k-1)$. Хорошо известно [1–3], что при $\alpha > -1$ и $0 < q < 1$ полиномы Мейкснера $M^\alpha_n(x)$ образуют ортогональную систему на сетке $\{0, 1, \ldots\}$ с весом $\rho(x) = \rho(x, \alpha, q) = q^x \frac{\Gamma(x+\alpha+1)}{\Gamma(x+1)} (1-q)^{\alpha+1}$, а более точно имеет место следующее равенство

$$\sum_{x=0}^{\infty} m^\alpha_n(x) m^\alpha_k(x) \rho(x) = \delta_{nk}, \quad 0 < q < 1, \alpha > -1,$$

где $m^\alpha_n(x) = m^\alpha_n(x, q) = \{h^\alpha_n(q)\}^{-1/2} M^\alpha_n(x)$, $h^\alpha_n(q) = \binom{n+\alpha}{n} q^{-n} \Gamma(\alpha+1)$.

Пусть $N > 0$, $\delta = 1/N$, $q = e^{-\delta}$. Многочлены $M^\alpha_{n,N}(x) = M^\alpha_n(Nx, e^{-\delta})$ и $m^\alpha_{n,N}(x) = m^\alpha_n(Nx, e^{-\delta}) = \left\{h^\alpha_n(e^{-\delta})\right\}^{-1/2} M^\alpha_{n,N}(x)$ в случае $\alpha > -1$ образуют ортогональную и ортонормированную на Ω_δ системы с весом $\rho_N(x) = \rho(Nx; \alpha, e^{-\delta})$.