5. *Волосивец С. С., Голубов Б. И.* Абсолютная сходимость кратных рядов по мультипликативным системам // Analysis Math. Vol. 36, № 2. P. 155–172.

УДК 517.518.832

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ И ИХ СОПРЯЖЕННЫХ СРЕДНИМИ ЭЙЛЕРА

С. С. Волосивец, А. А. Тюленева (Саратов, Россия)
VolosivetsSS@mail.ru, anantuleneva@mail.ru

Пусть $1 < p < \infty$, f — 2π-периодическая измеримая ограниченная функция, $\xi = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_n = x_0 + 2\pi\}$ — разбиение периода и $æ_\xi^p(f) := \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p\right)^{1/p}$. Положим по определению $\omega_{1-1/p}(f,\delta) = \sup\{æ_\xi^p(f) : \lambda(\xi) := \max_i(x_i - x_{i-1}) \le \delta\}$. Для $1 < p < \infty$ введем пространства V_p, содержащее все f со свойством $\|f\|_{V_p} := \max(\|f\|_\infty, \omega_{1-1/p}(f, 2\pi)) < \infty$, и $C_p = \{f \in V_p : \lim\limits_{\delta\to 0} \omega_{1-1/p}(f,\delta) = 0\}$.

Далее L^p, $1 \le p < \infty$, — пространство 2π-периодических измеримых функций с конечной нормой $\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$, а для $k \in \mathbb{N}$, $\delta \in [0, 2\pi]$, рассмотрим $\omega_k(f,\delta)_p := \sup\{\|\Delta_h^k f(x)\|_p : |h| \le \delta\}$, где $\Delta_h^k f(x) = \sum\limits_{i=0}^{k} (-1)^{k-i}\binom{k}{i} f(x + ih)$. Известно, что для $f \in L^1$ существует сопряженная функция

$$\widetilde{f}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} (2\pi)^{-1} \int\limits_{\varepsilon}^{\pi} (f(x-t) - f(x+t)) ctg(t/2)\,dt.$$

По теореме М. Рисса (см. [2, гл. VIII, § 14] из $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$, следует, что $\widetilde{f} \in L^p(\mathbb{T})$. Для пространства T_n тригонометрических полиномов порядка не выше n введем n-е наилучшее приближение в V_p равенством $E_n(f)_{V_p} := \inf\limits_{t_n \in T_n} \|f - t_n\|_{V_p}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Аналогично вводятся $E_n(f)_p$ и $\omega_k(f,\delta)_{V_p}$. Величины $\omega_k(f,\delta)_X$ и $E_n(f)_X$, где $X = V_p$ или $X = p$, $1 < p < \infty$, связаны прямой и обратной теоремами приближения

$$E_n(f)_X \le C\omega_k(f, \frac{1}{n+1})_X, \quad \omega_k(f, \frac{1}{n+1})_X \le \frac{C}{n^k} \sum_{i=0}^{n} (i+1)^{k-1} E_i(f)_X,$$

где $n \in \mathbb{Z}_+$ (см. [3, гл. 5, 6]).

Пусть $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ убывает к нулю. Тогда $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию Бари (B), если $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \varepsilon_k/(k+1) = O(\varepsilon_n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, соответственно, удовлетворяет условию Бари – Стечкина (B_m), $m > 0$, если $\sum\limits_{k=1}^{n} k^{m-1}\varepsilon_{k-1} = O(n^m\varepsilon_n)$, $n \in \mathbb{N}$ (см. [4]). По определению, $f \in E_{C_p}(\varepsilon)$, если $E_n(f)_{V_p} \le \varepsilon_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, класс $E_p(\varepsilon)$ задается аналогично.

Пусть $S_n(f)(x) = a_0/2 + \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, являются частными суммами ряда Фурье функции $f \in L^1$. Рассмотрим средние Эйлера $e_n^q(f)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^{n-k}(1+q)^{-n} S_k(f)(x)$, $q \ge 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$. *Для* $f \in L^p$ *имеем*

$$\|f - e_n^q(f)\|_p \le C_1 \omega_k(f, \frac{1}{n})_p \le \frac{C_2}{n^k} \sum_{i=1}^{n} i^{k-1} E_{i-1}(f)_p, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 1 является обобщением результата Л. Ремпульской и К. Томчака [5] (для $q = 1$).

Теорема 2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$.

1. *Для* $f \in L^p$ *имеем*

$$\|\widetilde{f} - e_n^q(\widetilde{f})\|_p \le C_1 \omega_k(f, \frac{1}{n})_p \le \frac{C_2}{n^k} \sum_{i=1}^{n} i^{k-1} E_{i-1}(f)_p, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2. *Если* $\{\varepsilon_i\}_{i=0}^{\infty}$ *убывает к нулю удовлетворяет условию* (B), $f \in$ $\in E_{C_p}(\varepsilon)$, *то*

$$\|\widetilde{f} - e_n^q(\widetilde{f})\|_{V_p} \le \frac{C \ln(n+2)}{n^k} \sum_{i=1}^{n} i^{k-1} \varepsilon_{i-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 3. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $f \in C_p$, $k \in \mathbb{N}$. *Тогда верны следующие неравенства*

$$\|f - e_n^q(f)\|_\infty \le C_1 (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} q^{n-j} E_j(f)_{V_p}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\|f - e_n^q(f)\|_\infty \le C_2 \omega_k(f, 1/n)_{V_p}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Если $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ *убывает к нулю,* $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ *удовлетворяет условию* (B) *и* $f \in E_{C_p}(\varepsilon)$, *то*

$$\|\widetilde{f} - e_n^1(\widetilde{f})\|_\infty \le C_3 2^{-n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \varepsilon_j.$$

В теореме 3 используются результаты А. П. Терехина [6]. Далее показывается точность некоторых оценок теорем 1–3. Будем писать $A_n \asymp B_n$, $n \in \mathbb{N}$, если существуют $C_1, C_2 > 0$, такие что $C_1 A_n \le B_n \le C_2 A_n$.

Теорема 4. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $\{\varepsilon_k\}_{k=0}^{\infty}$ *убывает к нулю и удовлетворяет условиям* (B) *и* (B_k) *для некоторого* $k \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\sup_{f \in E_p(\varepsilon)} \|f - e_n^q(f)\|_p \asymp \sup_{f \in E_p(\varepsilon)} \|\widetilde{f} - e_n^q(\widetilde{f})\|_p \asymp \varepsilon_n \asymp n^{-k} \sum_{i=1}^{n} i^{k-1} \varepsilon_{i-1},$$

$n \in \mathbb{N}$.

Теорема 5. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\{\varepsilon_k\}_{k=0}^{\infty}$ *убывает к нулю,* $\varepsilon_k \le C\varepsilon_{k+1}$ *для* $k \in \mathbb{Z}_+$. *Если* $\{\varepsilon_k\}_{k=0}^{\infty}$ *удовлетворяет также двустороннему условию Бари* $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \varepsilon_k/(k+1) \asymp \varepsilon_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, *то*

$$\sup_{f \in E_{C_p}(\varepsilon)} \|f - e_n^q(f)\|_\infty \asymp (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} q^{n-j} \varepsilon_j, \quad n \in \mathbb{N},$$

и

$$\sup_{f \in E_{C_p}(\varepsilon)} \|\widetilde{f} - e_n^1(\widetilde{f})\|_\infty \asymp 2^{-n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \varepsilon_j, \quad n \in \mathbb{N}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wiener N.* The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients // J. Math. and Phys. 1924. Vol. 3. P. 72–94.

2. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М. : Физматгиз, 1961. 936 с.

3. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. М. : Физматгиз, 1960. 624 с.

4. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. матем. общества. 1956. Т. 5. С. 483–522.

5. *Rempulska L., Tomczak K.* On Euler and Borel means of Fourier series in Hölder spases // Proc. of A. Razmadze Math. Institute. 2006. Vol. 140. P. 141–153.

6. *Терехин А. П.* Приближение функций ограниченной p-вариации // Изв. вузов. Математика. 1965. № 2. С. 171–187.

УДК 517.9

ЛАПЛАСИАН ЛЕВИ НА МНОГООБРАЗИИ И ИНСТАНТОНЫ

Б. О. Волков (Москва, Россия)

borisvolkov1986@gmail.com

Лапласианами Леви называют бесконечномерные лапласианы, определенные по аналогии с оператором Лапласа для функций на