Из теорем 5 и 6, в частности, следует аналог теоремы B.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М. : Наука, 1987. 344 с.

2. *Виленкин Н. Я.* К теории интегралов Фурье на топологических группах // Матем. сб. 1952. Т. 30, № 2. С. 233–244.

3. *Golubov B. I., Volosivets S. S.* On the integrability and uniform convergence of multiplicative Fourier transform // Georgian Math. J. 2009. Vol. 16, № 3. P. 533–546.

4. *Izumi M., Izumi S.-I.* Absolute convergence of Fourier series of convolution functions // J. Approx. Theory, 1968. Vol. 1, № 1. P. 103–109.

5. *Onneweer C. W.* On absolutely convergent Fourier series // Arkiv Mat. 1974. Vol. 12, № 1–2. P. 51–58.

6. *Onneweer C. W.* Absolute convergence of Fourier series on certain groops. II // Duke Math. J. 1974. Vol. 41, № 3. P. 679–688.

7. *Волосивец С. С.* О сходимости рядов из коэффициентов Фурье мультипликативных сверток // Изв. вузов. Математика. 2008. № 11. С. 27–39.

8. *Ilyasov N. A.* To the M.Riesz theorem on absolute convergence of the trigonometric Fourier series // Transactions of NAS of Azerbaijan. Ser. Phys.-Tech. and Math. Sci. 2004. Vol. 24, № 1. P. 113–120.

9. *Ilyasov N. A.* To the M.Riesz theorem on absolute convergence of the trigonometric Fourier series (second report) // Transactions of NAS of Azerbaijan. Ser. Phys.-Tech. and Math. Sci. 2004. Vol. 24, № 4. P. 135–142.

10. *Ильясов Н. А.* Скоростная L_p-версия критерия М.Рисса абсолютной сходимости тригонометрических рядов Фурье // Тр. ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 193–202.

11. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М. : Гостехиздат, 1948. 480 с.

12. *Конюшков А. А.* Наилучшие приближения и тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье // Матем. сб. 1958. Т. 44(86), № 1. С. 53–84.

13. *Голубов Б. И., Волосивец С. С.* Обобщенная весовая интегрируемость мультипликативных преобразований Фурье // Тр. МФТИ. 2011. Т. 3, № 1. С. 49–56.

14. *Quek T. S., Yap L. Y. H.* Sharpness of Young's inequality for convolution // Math. Scand. 1983. Vol. 53, № 2. P. 221–237.

УДК 517.518

ОБОБЩЕННАЯ АБСОЛЮТНАЯ СХОДИМОСТЬ ПРОСТЫХ И ДВОЙНЫХ РЯДОВ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ

С. С. Волосивец, М. А. Кузнецова (Саратов, Россия)

VolosivetsSS@mail.ru

Пусть $\mathbf{P}=\{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, такая что $2 \le p_j \le N$ при всех $j \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}_j = \{0, 1, \dots, p_j - 1\}$. По определению полагаем $m_0 = 1$, $m_n = p_1 \dots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда каждое число $x \in [0, 1)$ имеет разложение $x = \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j m_j^{-1}$, $x_j \in \mathbb{Z}_j$. Это разложение определяется

однозначно, если при $x = k/m_n$, $0 < k < m_n$, $k \in \mathbb{Z}$, брать разложение с конечным числом ненулевых x_j. Каждое $k \in \mathbb{Z}_+$ однозначно представимо в виде $k = \sum\limits_{j=1}^{\infty} k_j m_{j-1}$, $k_j \in \mathbb{Z}_j$. Для чисел $x \in [0,1)$ и $k \in \mathbb{Z}_+$ положим по определению $\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j k_j / p_j\right)\right)$. Система $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ ортонормирована и полна в $L^1[0,1)$ (см. [1, гл. 1,§ 1.5]). Для $f \in L^1[0,1)$ коэффициенты Фурье и частичная сумма Фурье задаются формулами

$$\hat{f}(i) = \int_0^1 f(t)\overline{\chi_i(t)}\,dt,\ i \in \mathbb{Z}_+, \quad S_n(f)(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \hat{f}(i)\chi_i(x),\ n \in \mathbb{N}.$$

Как обычно, пространство $L^p[0,1)$, $1 \le p < \infty$, снабжено нормой $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$. Пусть $\mathcal{P}_n = \{f \in L[0,1) : \hat{f}(i) = 0, i \ge n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Определим наилучшее приближение для $f \in L^p[0,1)$, $1 \le p < \infty$, формулой $E_n(f)_p = \inf\{\|f - Q\|_p : Q \in \mathcal{P}_n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Система $\{\chi_i(x)\chi_j(y)\}_{i,j=0}^{\infty}$ также ортонормирована и полна в $L^1[0,1)^2$, что позволяет определить для $f \in L^1[0,1)^2$ коэффициенты Фурье

$$\hat{f}(i,j) = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\overline{\chi_i(x)\chi_j(y)}\,dx\,dy, \quad i,j \in \mathbb{Z}_+$$

и частичную сумму Фурье

$$S_{mn}(f)(x,y) = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} \hat{f}(i,j)\chi_i(x)\chi_j(y), \quad m,n \in \mathbb{N}.$$

Пространство $L^p[0,1)^2$ снабжено нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 \int_0^1 |f(x,y)|^p\,dx\,dy\right)^{1/p}.$$

Если $\mathcal{P}_{mn} = \{f \in L^1[0,1)^2 : \hat{f}(i,j) = 0 \text{ при } i \ge m \text{ или } j \ge n\}$, то $E_{mn}(f)_p = \inf\{\|f - Q\|_p : Q \in \mathcal{P}_{mn}\}$, $m,n \in \mathbb{N}$. Через $C^*[0,1)$, соответственно, через $C^*[0,1)^2$ с нормами $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1)} |f(x)|$ или $\|f\|_\infty = \sup\limits_{(x,y)\in[0,1)} |f(x,y)|$ мы обозначим замыкание полиномов по системе $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, соответственно, по системе $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ по норме $\|\cdot\|_\infty$.

Введем $\mathbf{P}$-ичное пространство Харди

$$H(\mathbf{P},[0,1)) = \left\{f \in L[0,1) : M(f) = \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} |S_{m_n}(f)(x)| \in L[0,1)\right\}$$

с нормой $\|f\|_H = \|M(f)\|_1$. В двумерном случае пространство Харди $H(\mathbf{P},[0,1))^2$ определяется аналогично с помощью максимальной функции $M(f)(x,y) = \sup\limits_{k,n\in\mathbb{Z}_+} |S_{m_k,m_n}(f)(x,y)|$ (см. [2]). Величины $E_n(f)_\infty$ и $E_{mn}(f)_\infty$, $E_n(f)_H$ и $E_{mn}(f)_H$, определяются так же, как и выше.

Пусть $\alpha \geq 1$. Будем говорить, что последовательность $\gamma = \{\gamma_k\}_{k=0}^\infty$ принадлежит классу $A(\alpha) = A(\mathbf{P},\alpha)$, если $\gamma_k > 0$ при всех k и

$$\left(\sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} \gamma_k^\alpha\right)^{1/\alpha} \leq C m_n^{(1-\alpha)/\alpha} \sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-1} \gamma_k =: C m_n^{(1-\alpha)/\alpha}\Gamma_n, \quad n\in\mathbb{N}.$$

При $n=0$ предполагаем, что аналогичное неравенство верно для $\Gamma_0 = \gamma_0$. Данное определение введено в работе Л. Гоголадзе и Р. Месхиа [3] при $m_n = 2^n$. Будем считать, что последовательность $\gamma = \{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$ принадлежит классу $A(\infty)$, если $\gamma_k > 0$ при всех k и $\max\limits_{m_n<k\leq m_{n+1}} \gamma_k \leq C m_n^{-1}\Gamma_n$, $n\in\mathbb{N}$. Пусть $\gamma = \{\gamma_{ij}\}_{i,j=0}^\infty$ — положительная двойная последовательность, $\alpha \geq 1$. Рассмотрим множества индексов

$$R_l = \{(i,j) : 0\leq i,j < m_l,\ i,j\in\mathbb{Z}\} \setminus \{(i,j) : 0\leq i,j < m_{l-1},\ i,j\in\mathbb{Z}\},$$

где $l\in\mathbb{N}$, $R_0 = \{(0,0)\}$. Если при всех $l\in\mathbb{N}$ верно неравенство

$$\left(\sum_{i,j\in R_l} \gamma_{ij}^\alpha\right)^{1/\alpha} \leq C m_l^{2/\alpha-2} \sum_{i,j\in R_{l-1}} \gamma_{ij} =: C m_l^{2/\alpha-2}\Gamma_{l-1}^{(2)}, \quad l\in\mathbb{N},$$

то $\{\gamma_{ij}\}_{i,j=0}^\infty$ принадлежит классу $A(\alpha,2) = A(\alpha,2,\mathbf{P})$ (см. [4]). Класс $A(\infty,2) = A(\infty,2,\mathbf{P})$ определяется аналогично.

Теорема 1. 1. *Пусть $f\in H(\mathbf{P},[0,1))$, $0<r\leq 1$, $\gamma = \{\gamma_k\}_{k=0}^\infty \in A(1/(1-r))$. Если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^\infty \gamma_k E_k^r(f)_H$, то ряд $\sum\limits_{k=0}^\infty \gamma_k |\hat{f}(k)|^r$ также сходится.*

2. *Пусть $\{\varepsilon_k\}_{k=0}^\infty$ убывает к нулю, удовлетворяет условию Бари $\sum\limits_{k=n}^\infty \varepsilon_k/k = O(\varepsilon_n)$, $n\in\mathbb{N}$, и $\varepsilon_m \leq C\varepsilon_n$ при $n\in[m,2m]$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^\infty \gamma_k\varepsilon_k^r$ расходится. Тогда существует функция $f_0\in H(\mathbf{P},[0,1))$, такая что $E_n(f_0)_H = O(\varepsilon_n)$, $n\in\mathbb{Z}_+$, и ряд $\sum\limits_{k=0}^\infty \gamma_k|\hat{f}_0(k)|^r$ расходится.*

Теорема 2. 1. *Пусть $f\in L^p[0,1)$, $2<p<\infty$, или $f\in C^*[0,1)$, $0<r\leq 2$, $\gamma = \{\gamma_k\}_{k=0}^\infty \in A(2/(2-r))$. Если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^\infty \gamma_k k^{-r/2} E_k^r(f)_p$, то ряд $\sum\limits_{k=0}^\infty \gamma_k|\hat{f}(k)|^r$ также сходится.*

2. *Пусть* $p_i \equiv q$, $\{\varepsilon_k\}_{k=0}^{\infty}$ *убывает к нулю, удовлетворяет условию Бари* $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \varepsilon_k/k = O(\varepsilon_n)$, $n \in \mathbb{N}$, *и* $\varepsilon_m \le C_1\varepsilon_n$ *при* $n \in [m, 2m]$, *а ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \gamma_k \varepsilon_k^r$ *расходится. Тогда существует функция* $f_0 \in C^*[0,1)$, *такая что* $E_n(f_0)_\infty = O(\varepsilon_n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, *и ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \gamma_k |\hat{f}_0(k)|^r$ *расходится.*

Теорема 3. 1. *Пусть* $f \in H(\mathbf{P}, [0,1)^2)$, $0 < r \le 1$, $\gamma = \{\gamma_{ij}\}_{i,j=0}^{\infty} \in A(1/(1-r), 2)$. *Если сходится ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \Gamma_k^{(2)} E_{m_k,m_k}^r(f)_H$, *то ряд* $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty} \gamma_{ij} |\hat{f}(i,j)|^r$ *также сходится.*

2. *Пусть* $\{\omega_k\}_{k=0}^{\infty}$ *убывает к нулю, удовлетворяет условию Бари* $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \omega_k = O(\omega_n)$, $n \in \mathbb{N}$, *а* γ *такова, что* $\Gamma_k^{(2)} = O\left(\sum\limits_{i=m_{k-1}}^{m_k-1}\sum\limits_{i=m_{k-1}}^{m_k-1} \gamma_{ij}\right)$. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \Gamma_k^{(2)} \omega_k^r$ *расходится, то существует функция* $f_0 \in H(\mathbf{P}, [0,1)^2)$, *такая что* $E_{m_k,m_k}(f_0)_H = O(\omega_k)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, *и ряд* $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{ij} |\hat{f}_0(i,j)|^r$ *расходится.*

Теорема 4. 1. *Пусть* $f \in L^p[0,1)^2$, $2 < p < \infty$, *или* $f \in C^*[0,1)^2$, $0 < r \le 2$, $\gamma = \{\gamma_{ij}\}_{i,j=0}^{\infty} \in A(2/(2-r), 2)$. *Если сходится ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \Gamma_k^{(2)} q^{-rk} E_{q^k,q^k}^r(f)_p$, *то ряд* $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty} \gamma_{ij} |\hat{f}(i,j)|^r$ *также сходится.*

2. *Пусть* $p_i \equiv q$, $\{\omega_k\}_{k=0}^{\infty}$ *убывает к нулю, удовлетворяет условию Бари* $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \omega_k = O(\omega_n)$, $n \in \mathbb{N}$. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^{-kr} \Gamma_k^{(2)} \omega_k^r$ *расходится, то существует функция* $f_0 \in C^*[0,1)^2$, *такая что* $E_{m_k,m_k}(f_0)_\infty = O(\omega_k)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, *и ряд* $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty} \gamma_{ij} |\hat{f}_0(i,j)|^r$ *расходится.*

Теоремы 1–4 обобщают в некотором смысле результаты из [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М. : Наука, 1987. 344 с.

2. *Weisz F.* Martingale Hardy spaces and their application in Fourier analysis. Berlin : Springer, 1994. 228 p.

3. *Gogoladze L., Meskhia R.* On the absolute convergence of trigonometric Fourier series // Proc. Razmadze Math. Inst. 2008. Vol. 141. P. 29–40.

4. *Golubov B. I., Volosivets S. S.* Generalized absolute convergence of single and double Fourier series with respect to multiplicative systems // Analysis Mathematica. 2012. Vol. 38, № 2. P. 105–122

5. *Волосивец С. С., Голубов Б. И.* Абсолютная сходимость кратных рядов по мультипликативным системам // Analysis Math. Vol. 36, № 2. P. 155–172.

УДК 517.518.832

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ И ИХ СОПРЯЖЕННЫХ СРЕДНИМИ ЭЙЛЕРА

С. С. Волосивец, А. А. Тюленева (Саратов, Россия)
VolosivetsSS@mail.ru, anantuleneva@mail.ru

Пусть $1 < p < \infty$, f — 2π-периодическая измеримая ограниченная функция, $\xi = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_n = x_0 + 2\pi\}$ — разбиение периода и $æ_\xi^p(f) := \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p\right)^{1/p}$. Положим по определению $\omega_{1-1/p}(f,\delta) = \sup\{æ_\xi^p(f) : \lambda(\xi) := \max_i(x_i - x_{i-1}) \le \delta\}$. Для $1 < p < \infty$ введем пространства V_p, содержащее все f со свойством $\|f\|_{V_p} := \max(\|f\|_\infty, \omega_{1-1/p}(f, 2\pi)) < \infty$, и $C_p = \{f \in V_p : \lim\limits_{\delta\to 0} \omega_{1-1/p}(f,\delta) = 0\}$.

Далее L^p, $1 \le p < \infty$, — пространство 2π-периодических измеримых функций с конечной нормой $\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$, а для $k \in \mathbb{N}$, $\delta \in [0, 2\pi]$, рассмотрим $\omega_k(f,\delta)_p := \sup\{\|\Delta_h^k f(x)\|_p : |h| \le \delta\}$, где $\Delta_h^k f(x) = \sum\limits_{i=0}^{k} (-1)^{k-i}\binom{k}{i} f(x + ih)$. Известно, что для $f \in L^1$ существует сопряженная функция

$$\widetilde{f}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} (2\pi)^{-1} \int\limits_{\varepsilon}^{\pi} (f(x-t) - f(x+t)) ctg(t/2)\,dt.$$

По теореме М. Рисса (см. [2, гл. VIII, § 14] из $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$, следует, что $\widetilde{f} \in L^p(\mathbb{T})$. Для пространства T_n тригонометрических полиномов порядка не выше n введем n-е наилучшее приближение в V_p равенством $E_n(f)_{V_p} := \inf\limits_{t_n \in T_n} \|f - t_n\|_{V_p}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Аналогично вводятся $E_n(f)_p$ и $\omega_k(f,\delta)_{V_p}$. Величины $\omega_k(f,\delta)_X$ и $E_n(f)_X$, где $X = V_p$ или $X = p$, $1 < p < \infty$, связаны прямой и обратной теоремами приближения

$$E_n(f)_X \le C\omega_k(f, \frac{1}{n+1})_X, \quad \omega_k(f, \frac{1}{n+1})_X \le \frac{C}{n^k} \sum_{i=0}^{n} (i+1)^{k-1} E_i(f)_X,$$

где $n \in \mathbb{Z}_+$ (см. [3, гл. 5, 6]).