Замечание 2. В случае поля $\mathbb{Q}_p$ всегда есть нетождественная функция, обладающая системой ортогональных сдвигов, исключение только $p = 2$ и $M = 1$, что доказано в [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Козырев С. В.* Теория всплесков как p-адический спектральный анализ // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66, № 2. С. 149-–158.

2. *Albeverio S., Evdokimov S., Skopina M.* p-Adic Multiresolution Analysis and Wavelet Frames // J. Fourier Anal Appl. 2010. Vol. 16, № 5. P. 693–714.

3. *Evdokimov S., Skopina M.* On orthogonal p-adic wavelet bases // J. Math. Anal. and Appl. 2015. Vol. 424, № 2. P. 952–965.

4. *Evdokimov S.*, On non-compactly supported p-adic wavelets // J. Math. Anal. and Appl. 2016. Vol. 443, № 2. P. 1260–1266

5. *Водолазов А. М., Лукомский С. Ф.* Ортогональные системы сдвигов в поле p-адических чисел //Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 14, вып. 3. С. 256–262. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-256-262.

6. *Водолазов А. М., Лукомский С. Ф.* Системы сдвигов в локальных полях нулевой характеристики // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2017. Т. 455. С. 25-–32.

УДК 517.444

МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ СВЕРТКИ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

С. С. Волосивец (Саратов, Россия), Б. И. Голубов (Долгопрудный, Россия)

golubov@mail.mipt.ru, volosivetsss@mail.ru

Введение

Пусть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, такая что $2 \le p_j \le N$. Положим $p_{-j} = p_j$ для всех $j \in \mathbb{N}$, $m_j = p_1 ... p_j$ при $j \in \mathbb{N}$, $m_0 = 1$ и $m_{-l} = m_l$ при $l \in \mathbb{N}$. Тогда каждому числу $x \in \mathbb{R}_+$ можно сопоставить разложение

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_{-j} m_{j-1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{m_j}, \quad 0 \le x_n < p_n, \quad x_j \in \mathbb{Z} \cap [0, p_j), \quad |j| \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Здесь в первой сумме из (1) присутствует конечное число слагаемых и разложение определяется однозначно, если для чисел вида $x = k/m_l$, $k, l \in \mathbb{N}$, брать разложение с конечным числом $x_j \ne 0$. Если $x, y \in \mathbb{R}_+$ записаны в виде (1), то по определению $x \oplus y = z = \sum\limits_{j=1}^{\infty} z_{-j} m_{j-1} + \sum\limits_{j=1}^{\infty} z_j / m_j$, $z_j \in \mathbb{Z} \cap [0, p_j)$, $|j| \in \mathbb{N}$, где $z_j = x_j + y_j \pmod{p_j}$. Эта операция не определена, если $z_j = p_j - 1$ для всех $j \ge j_0$, т.е. для счетного множества y при

фиксированном $x \in \mathbb{R}_+$. Аналогично определяется обратная операция $x \ominus y$.

Для $x, y \in \mathbb{R}_+$, записанных в виде (1), определим ядро $\chi(x,y)$ равенством $\chi(x,y) = \exp\left(2\pi i \sum\limits_{j=1}^{\infty}(x_j y_{-j} + x_{-j} y_j)/p_j\right)$. Для почти всех пар $(x,z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ при фиксированном $y \in \mathbb{R}_+$ имеем равенство $\chi(x \oplus z, y) = \chi(x,y)\chi(z,y)$ и $\chi(x \ominus z, y) = \chi(x,y)\overline{\chi(z,y)}$. В частности, верно равенство $\chi(x, 0 \ominus y) = \overline{\chi(x,y)}$, $x, y \in \mathbb{R}_+$. Отсюда следует, что $\chi(x,y)$ постоянна по x на всех промежутках $I_j^k = [j/m_k, (j+1)/m_k)$, $j \in \mathbb{Z}_+$, при $0 \le y < m_k$ (см. [1, § 1.5]). Далее $D_y(x) = \int_0^y \chi(x,t)\,dt$, $x, y \in \mathbb{R}_+$.

Пространства $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \le p < \infty$, состоят из измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}_+$ функций, для которых $\|f\|_p = \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+} |f(t)|^p dt\right)^{1/p} < \infty$. При $p = \infty$ для ограниченных на $\mathbb{R}_+$ функций f ($f \in B(\mathbb{R}_+)$) будем использовать равномерную норму $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}_+} |f(x)|$. Через $Lip^*(\alpha, p)$ обозначим пространство функций $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, таких что $\|f(\cdot \oplus h) - f(\cdot)\|_p = O(h^\alpha)$.

Для $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ мультипликативное **P**-преобразование Фурье (см. [1] и [2]) задается формулой $\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(y)\overline{\chi(x,y)}\,dy$, где правая часть является интегралом Лебега. Для $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p \le 2$, **P**-преобразование Фурье вводится, как предел $\int_0^a f(y)\overline{\chi(x,y)}\,dy$ в $L^q(\mathbb{R}_+)$, $1/p + 1/q = 1$, при $a \to +\infty$. Согласно [1, гл. 6, теорема 6.1.7], имеет место аналог неравенства Хаусдорфа-Юнга

$$\|\widehat{f}\|_q \le \|f\|_p, \quad f \in L^p(\mathbb{R}_+), \quad 1 \le p \le 2. \tag{2}$$

Для $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, согласно (2), $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}_+)$. При этом справедлив аналог равенства Парсеваля – Планшереля $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$, который легко выводится из теоремы 6.2.4 в [1].

Наконец для убывающей на $(0, \infty)$ к нулю и нитегрируемой в окрестности нуля функции f мы определим $\widehat{f}(x)$, как несобственный интеграл $\int_0^\infty f(y)\overline{\chi(x,y)}\,dy$ (см. [3]).

Мультипликативной сверткой функций $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ называется $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(x \ominus t) g(t)\,dt$, если последний интеграл существует. Пусть G_n — пространство функций, постоянных на всех промежутках I_k^n, $k \in \mathbb{Z}_+$, для некоторого $n \in \mathbb{Z}_+$, и $\mathcal{E}_{m_n}(f)_p = \inf\{\|f - g\|_p : g \in G_n\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $1 \le p < \infty$. Рассмотрим также модуль непрерывности

$$\omega_n(f)_p := \sup_{0 < h < 1/m_n} \|f(\cdot \ominus h) - f(\cdot)\|_p.$$

Пусть $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \le p < \infty$. Тогда справедливо неравенство А. В. Ефимова [1, § 10.5]

$$\mathcal{E}_{m_n}(f)_p \le \|f - f * D_{m_n}\|_p \le \omega_n(f)_p \le 2\mathcal{E}_{m_n}(f)_p.$$

Далее мы изучаем условия интегрируемости преобразования Фурье от сверток $h = f * g$ и асимптотическое поведение интегральных норм $\widehat{h}X_{[m_n,\infty)}$. При этом большое внимание уделяется доказательству неулучшаемости этих условий. В случае тригонометрических рядов абсолютная сходимость и ее обобщения для периодических сверток изучались М. и Ш. Изуми [4] и К. Оневиром [5], а для мультипликативных систем — К.Оневиром [6] и одним из авторов [7].

Отметим следующий результат из [5].

Теорема A. 1. *Если $g, h \in L^p_{2\pi}$, $1 < p \le 2$, $1/p + 1/q = 1$, то ряд из модулей коэффициентов Фурье в степени $q/2$ их 2π-периодической свертки $(g * h)_{2\pi}$ сходится.*

2. *Для любого $1 < p \le 2$ найдутся $g, h \in L^p_{2\pi}$,такие что ряд из модулей коэффициентов Фурье в любой степени $\beta < q/2$ их 2π-периодической свертки $(g * h)_{2\pi}$ расходится.*

Величины

$$\rho_n^{(r)}(h) = \left(\sum_{|k| \ge n} |c_k(h)|^r \right)^{1/r},$$

где $\{c_k(h)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ – последовательность комплексных коэффициентов Фурье функции h, являющейся 2π-периодической сверткой функций f и g, и их взаимосвязь с наилучшими приближениями f и g изучались Н. А. Ильясовым [8-10]. Так, в [8] им была установлена

Теорема B. 1. *Пусть $1 < p \le 2$, $f, g \in L^p(\mathbb{T})$, h — 2π-периодическая свертка f и g, $\gamma = p'/2$, где $1/p + 1/p' = 1$. Тогда*

$$\rho_{n+1}^{(\gamma)}(h) \le C(p) E_n(f)_{L^p(\mathbb{T})} E_n(g)_{L^p(\mathbb{T})},$$

где $E_n(f)_{L^p(\mathbb{T})}$ — наилучшее приближение f тригонометрическими полиномами порядка не выше n в $L^p(\mathbb{T})$.

2. *Пусть $1 < p \le 2$, $\alpha, \beta > 0$, $\gamma = p'/2$, где $1/p + 1/p' = 1$. Тогда существуют $f, g \in L^p(\mathbb{T})$, такие что $E_n(f)_{L^p(\mathbb{T})} \asymp n^{-\alpha}$, $E_n(g)_{L^p(\mathbb{T})} \asymp$ $\asymp n^{-\beta}$ и для 2π-периодической свертки h функций f и g имеем*

$$\rho_{n+1}^{(\gamma)}(h) \asymp n^{-\alpha-\beta}.$$

Здесь $A_n \asymp B_n$, если $A_n = O(B_n)$ и $B_n = O(A_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

В [10] была доказана

Теорема C. *Множество непрерывных 2π-периодических функций h со свойством $\rho_{n+1}^{(1)}(h) = O(\lambda_n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, где $\lambda_n \downarrow 0$, совпадает с множеством 2π-периодических сверток функций f и g, таких что $E_n(f)_{L^2(\mathbb{T})}, E_n(g)_{L^2(\mathbb{T})} = O(\lambda_n^{1/2})$.*

Основные результаты

Важным средством при доказательстве неулучшаемости условий интегрируемости является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $g(x)$ не возрастает на $(0,\infty)$, $g \in L^1[0,1)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, $1 < p \le 2$. Тогда существование $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, такой что $\widehat{f} = g$ п.в. на $\mathbb{R}_+$, равносильно выполнению условия $g(x)x^{1-2/p} \in L^p(\mathbb{R}_+)$. При выполнении этого условия имеют место следующие неравенства*

$$\|f(x)\|_p \le C\|g(x)x^{1-2/p}\|_p, \tag{3}$$

$$\mathcal{E}_{m_n}(f)_p \le C\left(m_n^{p-1}g^p(m_n) + \int_{m_n}^{\infty} g^p(x)x^{p-2}\,dx\right)^{1/p}. \tag{4}$$

При этом константы в неравенствах (3) и (4) не зависят от g и $n \in \in \mathbb{Z}_+$.

Для косинус-преобразования Фурье близкие к теореме 1 результаты принадлежат Харди и Литтлвуду (см. [11, глава 4, теоремы 79, 80, 82]. Оценка (4) является аналогом оценки А. А. Конюшкова для наилучших приближений сумм тригонометрических рядов [12].

Теорема 2 является аналогом теоремы A (см. теоремы 4 и 5 из [5]) для тригонометрических рядов.

Теорема 2. 1. *Пусть $g, h \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \le p \le 4/3$, $1/p + 1/q = 1$, $f = g * h$. Тогда $\hat{f} \in L^{q/2}(\mathbb{R}_+)$.*

2. *Если $1 < p \le 4/3$, $1/p + 1/q = 1$, то существуют $g, h \in L^p(\mathbb{R}_+)$, такие что для $f = g * h$ имеем $\hat{f} \notin L^r(\mathbb{R}_+)$ при всех $0 < r < q/2$.*

Теорема 3. 1. *Пусть $1 \le p \le 2$, $1 < q \le 2$, $1/p + 1/q \ge 3/2$, $\alpha > 0$. Если $g \in Lip^*(\alpha, p)$, $h \in L^q(\mathbb{R}_+)$ и $f = g * h$, то*

$$\hat{f} \in L^{\beta}(\mathbb{R}_+), \quad pq/(\alpha pq + 2pq - p - q) < \beta < pq/(2pq - p - q).$$

2. *Пусть $1 \le p \le 2$, $1 < q \le 2$, $\alpha > 0$, $3/2 \le 1/p + 1/q < \alpha + 2 - 1/q$. Тогда существуют $g \in Lip^*(\alpha, p)$ и $h \in L^q(\mathbb{R}_+)$, такие что*

$$(g * h)\hat{} \notin L^{\beta_0}(\mathbb{R}_+), \quad \beta_0 = pq/(\alpha pq + 2pq - p - q)).$$

Следствие 1. 1. *Пусть $1 \le p \le 2$, $1 < q \le 2$, и $\alpha > 1/p + 1/q - 1$. Если $g \in Lip^*(\alpha, p)$, $h \in L^q(\mathbb{R}_+)$, то для $f = g * h$ имеем $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}_+)$.*

2. *Пусть* $1 \le p \le 2$, $1 < q \le 2$, $0 < \alpha = 1/p + 1/q - 1$. *Тогда существуют* $g \in Lip^*(\alpha, p)$ *и* $h \in L^q(\mathbb{R}_+)$, *такие что* $(g * h)\hat{} \notin L^1(\mathbb{R}_+)$.

Утверждение пункта 1 теоремы 3 и следствие 1 являются аналогами теоремы 6, следствия 5 и теоремы 7 из [6] для мультипликативных систем. Дальнейшие результаты в этом направлении см. в [7]. Теоремы 2, 3 и следствие 1 были опубликованы в [13].

Следующая теорема является аналогом теоремы C.

Теорема 4. *Пусть* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *такова что* $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}_+)$, $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ *убывает к нулю. Тогда* f *удовлетворяет соотношению* $\int_{m_n}^{\infty} |\widehat{f}(t)|\, dt = O(\varepsilon_n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, *в том и только в том случае, когда* $f = g * h$, *где* $g, h \in L^2(\mathbb{R}_+)$ *и при этом*

$$\mathcal{E}_{m_n}(g)_2 = O(\varepsilon_n^{1/2}), \quad \mathcal{E}_{m_n}(h)_2 = O(\varepsilon_n^{1/2}), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Теорема 5. 1. *Пусть* $1 < q_1, q_2 < 2$, $3/2 < 1/q_1 + 1/q_2 < 2$, $1/r = 1/q_1 + 1/q_2 - 1$, $1/r + 1/r' = 1$. *Если* $f \in L^{q_1}(\mathbb{R}_+)$, $g \in L^{q_2}(\mathbb{R}_+)$, *то* $h = f * g \in L^r(\mathbb{R}_+)$ *и справедливы неравенства*

$$\|\widehat{h}\|_{r'} \le \|f\|_{q_1} \|g\|_{q_2}, \quad \left(\int_{m_n}^{\infty} |\widehat{h}(t)|^{r'}\, dt \right)^{1/r'} \le 4 \mathcal{E}_{m_n}(f)_{q_1} \mathcal{E}_{m_n}(g)_{q_2}. \tag{5}$$

2. *В условиях п. 1 для* $2 \ge \theta > r$ *и* $0 < \gamma < r'$ *найдутся* $f_0 \in L^{q_1}(\mathbb{R}_+)$ *и* $g_0 \in L^{q_2}(\mathbb{R}_+)$, *такие что* $h_0 = f_0 * g_0 \notin L^{\theta}(\mathbb{R}_+)$ *и* $\widehat{h_0} \notin L^{\gamma}(\mathbb{R}_+)$.

Более общее утверждение, чем существование $h_0 = f_0 * g_0 \notin L^{\theta}(\mathbb{R}_+)$, можно найти в теореме 1.1 (iii) из [14] для локально-компактных, но не компактных групп. Наше доказательство является более простым.

Утверждения части 1 теоремы 5 справедливы при $1 \le q_1, q_2 \le 2$ и $3/2 \le 1/q_1 + 1/q_2 \le 2$. В случае $r' = \infty$ во втором неравенстве (5) в левой части вместо интеграла рассматриваем $\|\widehat{h} X_{[m_n, \infty)}\|_{\infty}$. В теореме 6 устанавливается точность этого утверждения в достаточно общей ситуации.

Теорема 6. *Пусть* $1 \le q_1, q_2 \le 2$, $3/2 \le 1/q_1 + 1/q_2 \le 2$, $1/r = 1/q_1 + 1/q_2 - 1$ *и* $1/r + 1/r' = 1$, *последовательности* $\{\nu_n\}_{n=0}^{\infty}$ *и* $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ *убывают к нулю и для них выполнены условия*

$$\sum_{k=n}^{\infty} \nu_k^{q_1} = O(\nu_n^{q_1}), \quad \sum_{k=n}^{\infty} \mu_k^{q_2} = O(\mu_n^{q_2}), \quad \nu_n \le C \nu_{n+1}, \quad \mu_n \le C \mu_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Тогда существуют функции $f_0 \in L^{q_1}(\mathbb{R}_+)$ *и* $g_0 \in L^{q_2}(\mathbb{R}_+)$, *такие что* $\mathcal{E}_{m_n}(f_0)_{q_1} \asymp \nu_n$, $\mathcal{E}_{m_n}(g_0)_{q_2} \asymp \mu_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, *и для* $h_0 = f_0 * g_0 \in L^r(\mathbb{R}_+)$ *верно соотношение*

$$\left(\int_{m_n}^{\infty} (\widehat{h_0(x)})^{r'}\, dx \right)^{1/r'} \asymp \nu_n \mu_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Из теорем 5 и 6, в частности, следует аналог теоремы B.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М. : Наука, 1987. 344 с.

2. *Виленкин Н. Я.* К теории интегралов Фурье на топологических группах // Матем. сб. 1952. Т. 30, № 2. С. 233–244.

3. *Golubov B. I., Volosivets S. S.* On the integrability and uniform convergence of multiplicative Fourier transform // Georgian Math. J. 2009. Vol. 16, № 3. P. 533–546.

4. *Izumi M., Izumi S.-I.* Absolute convergence of Fourier series of convolution functions // J. Approx. Theory, 1968. Vol. 1, № 1. P. 103–109.

5. *Onneweer C. W.* On absolutely convergent Fourier series // Arkiv Mat. 1974. Vol. 12, № 1–2. P. 51–58.

6. *Onneweer C. W.* Absolute convergence of Fourier series on certain groops. II // Duke Math. J. 1974. Vol. 41, № 3. P. 679–688.

7. *Волосивец С. С.* О сходимости рядов из коэффициентов Фурье мультипликативных сверток // Изв. вузов. Математика. 2008. № 11. С. 27–39.

8. *Ilyasov N. A.* To the M.Riesz theorem on absolute convergence of the trigonometric Fourier series // Transactions of NAS of Azerbaijan. Ser. Phys.-Tech. and Math. Sci. 2004. Vol. 24, № 1. P. 113–120.

9. *Ilyasov N. A.* To the M.Riesz theorem on absolute convergence of the trigonometric Fourier series (second report) // Transactions of NAS of Azerbaijan. Ser. Phys.-Tech. and Math. Sci. 2004. Vol. 24, № 4. P. 135–142.

10. *Ильясов Н. А.* Скоростная L_p-версия критерия М.Рисса абсолютной сходимости тригонометрических рядов Фурье // Тр. ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 193–202.

11. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М. : Гостехиздат, 1948. 480 с.

12. *Конюшков А. А.* Наилучшие приближения и тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье // Матем. сб. 1958. Т. 44(86), № 1. С. 53–84.

13. *Голубов Б. И., Волосивец С. С.* Обобщенная весовая интегрируемость мультипликативных преобразований Фурье // Тр. МФТИ. 2011. Т. 3, № 1. С. 49–56.

14. *Quek T. S., Yap L. Y. H.* Sharpness of Young's inequality for convolution // Math. Scand. 1983. Vol. 53, № 2. P. 221–237.

УДК 517.518

ОБОБЩЕННАЯ АБСОЛЮТНАЯ СХОДИМОСТЬ ПРОСТЫХ И ДВОЙНЫХ РЯДОВ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ

С. С. Волосивец, М. А. Кузнецова (Саратов, Россия)

VolosivetsSS@mail.ru

Пусть $\mathbf{P}=\{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, такая что $2 \le p_j \le N$ при всех $j \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}_j = \{0, 1, \dots, p_j - 1\}$. По определению полагаем $m_0 = 1$, $m_n = p_1 \dots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда каждое число $x \in [0, 1)$ имеет разложение $x = \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j m_j^{-1}$, $x_j \in \mathbb{Z}_j$. Это разложение определяется