

on weighted Bergman spaces of entire functions // Contemp. Math. 2006. Vol. 404. P. 27–39.

10. Abanin A. V., Pham Trong Tien. Differentiation and integration operators on weighted Banach spaces of holomorphic functions // Math. Nachr. 2017. Vol. 290, № 8-9. P. 1144–1162.

11. Abanin A. V., Pham Trong Tien. Compactness of classical operators on weighted Banach spaces of holomorphic functions // Collect. Math. 2018. doi: 1007/s13348-016-0185-z.

12. Abanin A. V., Pham Trong Tien. Invariant subspaces for classical operators on weighted spaces of holomorphic functions // Integr. Equ. Oper. Theory. 2017. Vol. 89, № 3. P. 409–438.

УДК 517.9

О ФРЕЙМАХ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Т. И. Абанина (Ростов-на-Дону, Россия)

abaninati@mail.ru

Фреймы в гильбертовых пространствах в качестве полезного объекта исследования были определены в работе [1] в связи с некоторыми задачами теории негармонических рядов Фурье и впоследствии нашли важные применения в теории вейвлетов и сплайнов. Понятие фреймов в банаховых пространствах было введено в 1991 г. в статье [2], и с этого момента оно привлекло внимание значительного числа исследователей (см. монографию [3] и список литературы в ней). Напомним это понятие. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ — банахово пространство, $(A, \|\cdot\|_A)$ — банахово пространство числовых последовательностей, в котором сходимость по норме влечет покоординатную сходимость в A . Последовательность $F = (f_n)_{n=1}^\infty$ функционалов из сопряженного пространства X' называется A -фреймом, если выполняются условия:

- (i) $(f_n(x))_{n=1}^\infty \in A$ для любого $x \in X$;
- (ii) $\exists c, C > 0 : c\|x\|_X \leq |(f_n(x))_{n=1}^\infty|_A \leq C\|x\|_X$ для всех $x \in X$;
- (iii) Существует такой линейный непрерывный оператор $S_F : A \rightarrow X$, что $x = S_F((f_n(x))_{n=1}^\infty)$ для любого $x \in X$.

Недавно в работах [4, 5] было предложено распространение этого понятия на пространства Фреше. Однако некоторые предварительные ограничения на пространства, равно как и требования на фрейм оказались слишком обременительными. Во-первых, они исключали из рассмотрения важный класс пространств Фреше без непрерывной нормы (например, пространство $C^\infty(G)$ всех бесконечно дифференцируемых функций

на открытом множестве в \mathbb{R}^n). Во-вторых, авторы фактически требовали от фрейма в пространстве Фреше, чтобы он был фреймом в каждом из банаховых пространств его образующих. Подробный анализ недостатков определения фрейма и сопутствующих ему понятий из [4, 5] был проведен автором в [6]. Там же была предложена следующая новая концепция подхода к определению фреймов в произвольных локально выпуклых пространствах, которая полностью согласуется со случаем банаховых пространств не только формально, но и по сути.

Определение 1. Пусть X и A — полные отдельимые локально выпуклые пространства, причем A — пространство числовых последовательностей, топология которого мажорирует топологию покоординатной сходимости. Последовательность $F = (f_n)_{n=1}^\infty$ линейных непрерывных функционалов на X называется A -предфреймом для X , если оператор $R_F : x \in X \mapsto (f_n(x))_{n=1}^\infty$ является топологическим изоморфизмом из X в A . Если дополнительно известно, что R_F имеет линейный непрерывный левый обратный, то F называется A -фреймом для X .

Следующая теорема содержит критерий того, что данная последовательность функционалов образует A -(пред)фрейм. Этот критерий показывает, в частности, что определение 1 является прямым обобщением на локально выпуклые пространства определения из [2]. В ней и далее через X' обозначается пространство линейных непрерывных функционалов на X .

Теорема 1. Пусть X — полное отдельимое локально выпуклое пространство с топологией, задаваемой направленным набором преднорм P , а A — полное отдельимое локально выпуклое пространство числовых последовательностей, топология которого определяется направленным набором преднорм $(|\cdot|_q : q \in Q)$ и мажорирует топологию покоординатной сходимости. Для того чтобы последовательность $F = (f_n)_{n=1}^\infty \in (X')^\mathbb{N}$ была A -предфреймом для X , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$(F1) \quad (f_n(x))_{n=1}^\infty \in A \text{ для любого } x \in X;$$

$$(F2) \quad \forall q \in Q \exists p \in P, C > 0 : \quad |(f_n(x))_{n=1}^\infty|_q \leq Cp(x) \quad \text{для всех } x \in X;$$

$$(F3) \quad \forall p \in P \exists q \in Q, C > 0 : \quad p(x) \leq C|(f_n(x))_{n=1}^\infty|_q \quad \text{для всех } x \in X.$$

Условия (F1)–(F3) вместе с дополнительным условием:

$$(F4) \quad \text{Существует линейный непрерывный оператор восстановления } S_F : A \rightarrow X, \text{ т.е. } x = S_F((f_n(x))_{n=1}^\infty) \text{ для любого } x \in X,$$

являются необходимыми и достаточными для того, чтобы F была A -фреймом для X .

Отметим некоторые важные для приложений свойства A -фреймов, предварительно напомнив, что последовательность $F = (f_n)_{n=1}^{\infty}$ функционалов называется *тотальной* на X , если из того, что $f_n(x) = 0$ для всех n следует, что $x = 0$.

Предложение 1. *Пусть X — полное отдельимое локально выпуклое пространство, A — полное отдельимое локально выпуклое пространство числовых последовательностей, топология которого мажорирует топологию покоординатной сходимости. Если последовательность $F = (f_n)_{n=1}^{\infty} \in (X')^{\mathbb{N}}$ является A -предфреймом для X , то она тотальна на X и подпространство $R_F(X)$ замкнуто в A .*

Предложение 2. *Пусть X — полное отдельимое локально выпуклое пространство, A — полное отдельимое локально выпуклое пространство числовых последовательностей, топология которого мажорирует топологию покоординатной сходимости и последовательность $F = (f_n)_{n=1}^{\infty} \in (X')^{\mathbb{N}}$ является A -предфреймом для X . Для того чтобы эта последовательность образовывала A -фрейм для X , необходимо и достаточно, чтобы $R_F(X)$ было топологически дополненным подпространством A .*

Для пространств Фреше или сильных сопряженных к рефлексивным пространствам Фреше получаем следующую более простую интерпретацию последнего результата.

Предложение 3. *Пусть X — пространство Фреше или сильное сопряженное к рефлексивному пространству Фреше и A — аналогичное X по топологической структуре пространство числовых последовательностей, топология которого мажорирует топологию покоординатной сходимости. Для того чтобы последовательность $F = (f_n)_{n=1}^{\infty} \in (X')^{\mathbb{N}}$ была A -фреймом Фреше для X , необходимо и достаточно, чтобы F была тотальна на X и оператор R_F отображал X на замкнутое алгебраически дополненное подпространство в A .*

Отметим, что приведенные выше определение A -фрейма и критерии того, что заданная последовательность функционалов образует A -фрейм, недавно получили дальнейшее применение к ряду задач в статье [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Duffin R. G., Schaeffer A. C. A class of nonharmonic Fourier series // Trans. Amer. Math. Soc. 1952. Vol. 72. P. 341–366.
2. Gröchenig K. H. Describing functions: frames versus atomic decompositions // Monatsh. Math. 1991. Vol. 112. P. 1–41.
3. Christensen O. An Introduction to Frames and Riesz Bases. Boston : Birkhäuser, 2003. 464 p.

4. Pilipović S., Stoeva D. T., Teofanov N. Frames for Fréchet spaces // Bull. Cl. Sci. Math. Nat. Sci. Math. 2007. Vol. 32. P. 69–84.
5. Pilipović S., Stoeva D. T. Series expansions in Fréchet spaces and their duals, construction of Fréchet frames // J. Approx. Theory. 2011. Vol. 163, № 11. P. 1729–1747.
6. Абанина Т. И. К вопросу о понятии фрейма // Научное обозрение. 2013. № 9. С. 101–104.
7. Bonet J., Fernández C., Galbis A., Ribera J. M. Frames and representing systems in Fréchet spaces and their duals // Banach J. Math. Anal. Vol. 11, № 1. P. 1–20.

УДК 517.853

О ФУНКЦИИ ПСЕВДОРАССТОЯНИЯ ДО ВЫПУКЛОГО МНОЖЕСТВА

В. В. Абрамова, С. И. Дудов (Саратов, Россия)
veronika0322@rambler.ru, dudovsi@info.sgu.ru

1. Рассмотрим функцию вида

$$\varphi(x) \equiv \min_{y \in \Omega} f(y - x), \quad (1)$$

где Ω — выпуклое замкнутое множество из конечномерного действительного пространства R^p , $f(x)$ — выпуклая конечная на R^p функция, имеющая единственную точку минимума $x^* = 0_p \in R^p$. В частном случае, когда функция $f(x)$ удовлетворяет аксиомам нормы, функция $\varphi(x)$ выражает расстояние от точки x до множества Ω и уже этим интересна для приложений.

Введем обозначения: $\partial f(x)$ — субдифференциал выпуклой функции $f(x)$ в точке x ; $K(x, \Omega)$ — конус возможных направлений множества Ω в точке x ; K^+ — конус, являющийся сопряженным к конусу K ; $Q(x) = \{z \in \Omega : f(z - x) = \varphi(x)\}$.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Функция $\varphi(x)$ является выпуклой и конечной на R^p , а формулу ее субдифференциала в любой точке $x \in R^p$ можно представить в виде*

$$\partial\varphi(x) = -\{\partial f(z - x) \cap K^+(z, \Omega)\}, \quad (2)$$

где z — любая точка из множества $Q(x)$.

Замечание. Формула (2) является обобщением формулы субдифференциала функции расстояния до выпуклого множества, полученной в [1]. Отметим так же другую форму представления субдифференциала функции расстояния в [2, гл. 2].

2. Для приложений так же интересен случай, когда множество Ω является многогранным, но невыпуклым множеством, заданным в виде

$$\Omega = \{y \in R^p : \max_{i \in [1:m]} \{\langle A_i, y \rangle + b_i\} \geq 0\}, \quad (3)$$

где $A_i \in R^p, b_i \in R$.