

8. Buterin S. A., Choque Rivero A. E. On inverse problem for a convolution integro-differential operator with Robin boundary conditions // Appl. Math. Letters. 2015. Vol. 48. P. 150–155.

9. Bondarenko N., Buterin S. On recovering the Dirac operator with an integral delay from the spectrum // Results in Math. 2017. Vol. 71. P. 1521–1529.

10. Бутерин С. А. Обратная спектральная задача для интегро-дифференциальных операторов с условием разрыва // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2015. Вып. 17. С. 9–12.

11. Buterin S. A. On an inverse spectral problem for first-order integro-differential operators with discontinuities // Appl. Math. Letters. 2018. Vol. 78. P. 65–71.

12. Manafov M. Dzh. An inverse spectral problem for Sturm–Liouville operator with integral delay // Electron. J. Diff. Eqns. 2017. Vol. 2017, №. 12. P. 1–8.

УДК 517.95

ДИСКРЕТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА¹

В. Б. Васильев (Белгород, Россия)

vbv571@inbox.ru

Для исследования дискретных аналогов псевдодифференциальных уравнений [1, 2] мы будем использовать дискретное преобразование Фурье для определения дискретных пространств Соболева–Слободецкого, которые очень удобны для изучения дискретных псевдодифференциальных уравнений.

Обозначим $u_d(\tilde{x})$ функцию дискретного аргумента $\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^m$, $h > 0$, и $\tilde{u}_d(\xi)$, $\xi \in \hbar\mathbb{T}^m$, $\hbar = h^{-1}$, $\mathbb{T}^m = [-\pi, \pi]^m$, — ее дискретное преобразование Фурье

$$(F_d u_d)(\xi) = \sum_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^m} u_d(\tilde{x}) e^{i\tilde{x} \cdot \xi} h^m.$$

Обозначим $\zeta^2 = h^{-2} \sum_{k=1}^m (e^{-ih \cdot \xi_k} - 1)^2$ и введем следующее

Определение 1. Пространство $H^s(h\mathbb{Z}^m)$ состоит из дискретных функций $u_d(\tilde{x})$, для которых следующая норма

$$\|u_d\|_s = \left(\int_{\hbar\mathbb{T}^m} (1 + |\zeta^2|)^s |\tilde{u}_d(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}$$

конечна.

Далее, пусть $D = \mathbb{R}_+^m = \{x \in \mathbb{R}^m : x = (x', x_m), x_m > 0\}$, и $D_d = D \cap h\mathbb{Z}^m$ — дискретная область.

Определение 2. Пространство $H^s(D_d)$ состоит из дискретных функций пространства $H^s(h\mathbb{Z}^m)$, носители которых содержатся в $\overline{D_d}$.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 1.7311.2017/БЧ).

Норма в пространстве $H^s(D_d)$ индуцируется нормой пространства $H^s(h\mathbb{Z}^m)$. Пространство $H_0^s(D_d)$ состоит из дискретных функций u_d с носителем в D_d , причем эти функции должны допускать продолжение на все пространство $H^s(h\mathbb{Z}^m)$. Норма в пространстве $H_0^s(D_d)$ дается формулой

$$\|u_d\|_s^+ = \inf \|\ell u_d\|_s,$$

где infimum берется по всевозможным продолжениям ℓ .

Пусть $\tilde{A}_d(\xi)$ — периодическая функция на \mathbb{R}^m с основным кубом периодов $\hbar\mathbb{T}^m$. Такие функции мы называем символами.

Определение 3. Дискретным псевдодифференциальным оператором A_d в дискретной области D_d называется оператор следующего вида

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y} \in h\mathbb{Z}^m} \int_{\hbar\mathbb{T}^m} \tilde{A}_d(\xi) e^{i(\tilde{x}-\tilde{y}) \cdot \xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x} \in D_d.$$

Класс E_α состоит из символов, удовлетворяющих следующему условию

$$c_1(1 + |\zeta^2|)^{\alpha/2} \leq |A_d(\xi)| \leq c_2(1 + |\zeta^2|)^{\alpha/2}$$

с положительными постоянными c_1, c_2 , не зависящими от h .

Обозначим $\Pi_\pm = \{(\xi', \xi_m \pm i\tau), \tau > 0\}$, $\xi = (\xi', \xi_m) \in \mathbb{T}^m$.

Определение 4. Периодической факторизацией эллиптического символа $A_d(\xi) \in E_\alpha$ называется его представление в виде

$$A_d(\xi) = A_{d,+}(\xi) A_{d,-}(\xi),$$

где сомножители $A_{d,\pm}(\xi)$ допускают аналитическое продолжение в полу-полосы $\hbar\Pi_\pm$ по последней переменной ξ_m при почти всех фиксированных $\xi' \in \hbar\mathbb{T}^{m-1}$ и удовлетворяют оценкам

$$|A_{d,+}^{\pm 1}(\xi)| \leq c_1(1 + |\hat{\zeta}^2|)^{\pm \frac{\alpha}{2}}, \quad |A_{d,-}^{\pm 1}(\xi)| \leq c_2(1 + |\hat{\zeta}^2|)^{\pm \frac{\alpha-\alpha}{2}},$$

с постоянными c_1, c_2 , не зависящими от h ,

$$\hat{\zeta}^2 \equiv \hbar^2 \left(\sum_{k=1}^{m-1} (e^{-ih\xi_k} - 1)^2 + (e^{-ih(\xi_m + i\tau)} - 1)^2 \right), \quad \xi_m + i\tau \in \hbar\Pi_\pm.$$

Число $\alpha \in \mathbb{R}$ называется индексом периодической факторизации.

Для случая $\alpha - s = -n + \delta, n \in \mathbb{N}, |\delta| < 1/2$, мы рассмотрим следующее достаточно общее уравнение

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) + \sum_{j=0}^n K_j \left(\tilde{b}_j(\tilde{x}') \otimes \delta(\tilde{x}_m) \right) = v_d(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in D_d, \quad (1)$$

с неизвестными функциями $u_d, \tilde{b}_j, j = 0, 1, \dots, n$, а K_j — заданные псевдодифференциальные операторы с символами $K_j(\xi) \in E_{\alpha_j}$.

Замечание. Мы говорим «оператор типа потенциала», потому что оператор K_j действует следующим образом. Если обозначить $\hat{K}_j(\tilde{x})$ «ядро» псевдодифференциального оператора K_j , мы получим

$$K_j \left(\tilde{b}_j(\tilde{x}') \otimes \delta(\tilde{x}_m) \right) = \sum_{\tilde{y} \in h\mathbb{Z}^{m-1}} \hat{K}_j(\tilde{x}' - \tilde{y}', \tilde{x}_m) b_j(\tilde{y}') h^{m-1}.$$

Это действительно дискретный оператор типа потенциала.

Продолжив правую часть и применив дискретное преобразование Фурье, мы получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=0}^n t_{kj}(\xi') \tilde{b}_j(\xi') = f_k(\xi'), \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

где

$$t_{kj}(\xi') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \left(\frac{e^{ih\xi_m} - 1}{h} \right)^k \frac{K_j(\xi', \xi_m)}{A_{d,-}(\xi', \xi_m)} d\xi_m,$$

$$f_k(\xi') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \left(\frac{e^{ih\xi_m} - 1}{h} \right)^k A_{d,-}^{-1}(\xi', \xi_m) \widetilde{(\ell v_d)}(\xi', \xi_m) d\xi_m.$$

Теорема. Пусть $\alpha - s = -n + \delta, n \in \mathbb{N}, |\delta| < 1/2$. Тогда уравнение (1) имеет единственное решение $u_d \in H^s(h\mathbb{Z}^m)$, $c_j \in H^{s_j}(h\mathbb{Z}^{m-1})$, $s_j = s - \alpha + \alpha_j + 1/2$, $j = 0, 1, \dots, n$, тогда и только тогда, когда

$$ess \inf_{\xi' \in h\mathbb{T}^{m-1}} |\det(t_{kj}(\xi'))_{k,j=0}^n| > 0.$$

Справедлива априорная оценка

$$\|u_d\|_s \leq a \|v_d\|_{s-\alpha}^+, \quad \|b_j\|_{s_j} \leq a_j \|v_d\|_{s-\alpha}^+, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

с постоянными a, a_1, \dots, a_n , не зависящими от h .

Некоторые предшествующие исследования и технические подробности содержатся в работах [3–5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эскин Г. И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М. : Наука, 1973. 236 с.
2. Васильев В. Б. Мультиплекторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. М. : URSS, 2010. 135 с.

3. Vasilyev V. B. Potential like operators in the theory of boundary value problems in non-smooth domains // Azerb. J. Math. 2012. Vol. 2, № 2. P. 117–128.
4. Васильев А. В., Васильев В. Б. Периодическая задача Римана и дискретные уравнения в свертках // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, вып. 5. С. 642–649.
5. Vasilyev A. V., Vasilyev V. B. Difference equations in a multidimensional space // Math. Model. Anal. 2016. Vol. 21, № 3. P. 336–349.

УДК 517.9

**ЭНТРОПИЙНЫЕ ЧИСЛА ВЕСОВЫХ КЛАССОВ
СОБОЛЕВА: НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ
ПРЕДЕЛЬНОГО СЛУЧАЯ¹**
А. А. Васильева (Москва, Россия)
vasilyeva_nastya@inbox.ru

Пусть $T : X \rightarrow Y$ — линейный непрерывный оператор. Энтропийные числа оператора T для $k \in \mathbb{N}$ определяются равенством

$$e_k(T) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \exists y_1, \dots, y_{2^{k-1}} \in Y : T(B_X) \subset \bigcup_{i=1}^{2^{k-1}} (y_i + \varepsilon B_Y) \right\}.$$

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область, $g, v : \Omega \rightarrow (0, \infty)$ — измеримые функции. Обозначим через $l_{r,d}$ число компонент обобщенной вектор-функции $\nabla^r f$ и положим

$$W_{p,g}^r(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists \psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{l_{r,d}} : \|\psi\|_{L_p(\Omega)} \leq 1, \nabla^r f = g \cdot \psi \right\}$$

$\left(\text{соответствующую функцию } \psi \text{ обозначим через } \frac{\nabla^r f}{g} \right),$

$$\|f\|_{L_{q,v}(\Omega)} = \|f\|_{q,v} = \|fv\|_{L_q(\Omega)}, \quad L_{q,v}(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \|f\|_{q,v} < \infty\}.$$

Для $x \in \mathbb{R}^d$ и $a > 0$ обозначим через $B_a(x)$ замкнутый евклидов шар в \mathbb{R}^d радиуса a с центром в точке x .

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область, $a > 0$. Мы скажем, что $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$, если существует точка $x_* \in \Omega$ такая, что для любого $x \in \Omega$ существуют число $T(x) > 0$ и число $\gamma_x : [0, T(x)] \rightarrow \Omega$ со следующими свойствами: 1) γ_x имеет натуральную параметризацию, 2) $\gamma_x(0) = x$, $\gamma_x(T(x)) = x_*$, 3) $B_{at}(\gamma_x(t)) \subset \Omega$ для любого $t \in [0, T(x)]$.

Область Ω удовлетворяет условию Джона, если $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$ для некоторого $a > 0$.

Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ — непустой компакт, $h : (0, 1] \rightarrow (0, \infty)$ неубывающая функция. Скажем, что Γ является h -множеством, если существуют число

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00295).