Следствие. *В n-мерном действительном банаховом пространстве X длина кратчайшей сети зависит только от попарных расстояний между точками тогда и только тогда, когда X изометрически изоморфно либо l_2^n, либо l_∞^n.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иванов А. О., Тужилин А. А.* Теория экстремальных сетей. Ижевск : ИКИ, 2003. 424 с.

2. *Беднов Б. Б., Бородин П. А.* Банаховы пространства, реализующие минимальные заполнения // Матем. сб. 2014. Т. 205, № 4. С. 3–20.

3. *Lindenstrauss J.* Extension of compact operators // Mem. Amer. Math. Soc. 1964. Vol. 48. P. 1–112.

УДК 517.984

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА С УСЛОВИЕМ РАЗРЫВА[1]

С. А. Бутерин (Саратов, Россия)

buterinsa@info.sgu.ru

Пусть $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — спектр краевой задачи $L = L(M, \alpha_0, \alpha_1, \beta)$ вида

$$-y''(x) + \int_0^x M(x-t)y'(t)\,dt = \lambda y(x), \quad x \in \Big(0, \frac{\pi}{2}\Big) \cup \Big(\frac{\pi}{2}, \pi\Big), \tag{1}$$

$$y\Big(\frac{\pi}{2}+0\Big) = \alpha_0 y\Big(\frac{\pi}{2}-0\Big), \quad y'\Big(\frac{\pi}{2}+0\Big) = \alpha_1 y'\Big(\frac{\pi}{2}-0\Big) + \beta y\Big(\frac{\pi}{2}-0\Big), \tag{2}$$

$$y(0) = y(\pi) = 0, \tag{3}$$

где $(\pi - x)M(x) \in L_2(0,\pi)$ — комплекснозначная функция, а α_j, β — комплексные числа, причем $\alpha_0 + \alpha_1 \neq 0$. Доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Собственные значения задачи L имеют вид*

$$\lambda_k = (k + \kappa_k)^2, \quad \{\kappa_k\} \in l_2. \tag{4}$$

Исследуется обратная задача восстановления функции $M(x)$ по спектру $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ в предположении, что числа $\alpha_0, \alpha_1, \beta$ известны. Наиболее полные результаты по обратным спектральным задачам получены для дифференциальных операторов (см. обзор в [1]). В частности, обратная задача для оператора Штурма – Лиувилля с условиями разрыва изучалась в [2, 3]. Различные аспекты обратных задач для интегро-дифференциальных операторов без разрыва исследовались в [4–9] и

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 17-11-01193).

других работах. Что касается интегро-дифференциальных операторов с условиями разрыва, то для операторов первого порядка обратная задача изучалась в [10, 11], а для операторов второго порядка исследовался лишь вопрос единственности решения обратной задачи в специальном случае, когда терпит разрыв только y', но его величина зависит от λ (см. [12]). В данной работе установлена единственность решения и получены необходимые и достаточные условия разрешимости рассматриваемой обратной задачи при условии, что $\alpha_0 + \alpha_1 \notin (-\infty, 0]$, т. е. справедлива

Теорема 2. *Пусть заданы* α_0, α_1, $\beta \in \mathbb{C}$, $\alpha_0+\alpha_1 \notin (-\infty, 0]$. *Тогда для произвольный последовательности комплексных чисел* $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *вида* (4) *существует единственная (с точностью до значений на множестве меры нуль) функция* $M(x)$, $(\pi - x)M(x) \in L_2(0, \pi)$, *такая что последовательность* $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *является спектром соответствующей краевой задачи* $L(M, \alpha_0, \alpha_1, \beta)$.

Схема доказательства. Можно показать, что собственные значения краевой задачи L совпадают с нулями функции

$$\Delta(\lambda) = S(\pi, \lambda) + \Big((\alpha_0 - 1)C(a, \lambda) + (\alpha_1 - 1)S'(a, \lambda) + \beta S(a, \lambda)\Big)S(a, \lambda),$$

где $a = \pi/2$, а $C(x, \lambda)$, $S(x, \lambda)$ — решения уравнения (1), удовлетворяющие начальным условиям $C(0, \lambda) = S'(0, \lambda) = 1$, $C'(0, \lambda) = S(0, \lambda) = 0$. Справедливы следующие представления (см. [5, 8]):

$$S(x, \lambda) = \frac{\sin \rho x}{\rho} + \int\limits_0^x P(x, x-t)\frac{\sin \rho t}{\rho}\, dt, \quad C(x, \lambda) = 1 - \lambda \int\limits_0^x S(t, \lambda)\, dt, \quad (5)$$

где

$$P(x, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(x-t)^\nu}{\nu!} N^{*\nu}(t), \quad (6)$$

$$N^{*1}(x) = N(x), \quad N^{*(\nu+1)}(x) = N * N^{*\nu}(x) = \int\limits_0^x N(x-t)N^{*\nu}(t)\, dt,$$

а функция $N(x)$, $(\pi - x)N(x) \in L_2(0, \pi)$, является решением уравнения

$$M(x) = 2N(x) - \int\limits_0^x dt \int\limits_0^t N(t-\tau)N(\tau)\, d\tau, \quad 0 < x < \pi. \quad (7)$$

С помощью (5), (6) доказывается следующее представление:

$$\Delta(\lambda) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}\frac{\sin \rho\pi}{\rho} + \int\limits_0^\pi w(x)\frac{\sin \rho x}{\rho}\, dx, \quad w(x) \in L_2(0, \pi), \quad (8)$$

при этом

$$w(x) = A(x; \alpha_0, \alpha_1, \beta, N), \tag{9}$$

где A — некоторый оператор, нелинейно зависящий от функции $N(x)$.

Отметим, что теорема 1 является следствием представления (8). Для доказательства же теоремы 2 нужно посмотреть на соотношение (9), как на нелинейное уравнение относительно функции $N(x)$. Развивая метод, использованный в работе [5], можно показать, что если $\alpha_0+\alpha_1 \notin (-\infty, 0]$, то для всякой функции $w(x) \in L_2(0,\pi)$ нелинейное уравнение (9) имеет единственное решение $N(x)$, $(\pi - x)N(x) \in L_2(0,\pi)$.

Далее, используя (8) и теорему Адамара, можно показать, что для функции $\Delta(\lambda)$ имеет место также представление

$$\Delta(\lambda) = \pi \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k - \lambda}{k^2}. \tag{10}$$

Кроме того, известным методом (см., например, [5]) доказывается, что для всякой последовательности комплексных чисел вида (4) функция $\Delta(\lambda)$, определенная по формуле (10), имеет вид (8).

Таким образом, доказательство теоремы 2 носит конструктивный характер и состоит из следующих шагов. По заданным числам λ_k, $k \in \mathbb{N}$, вида (4) и известным α_0, α_1 строим функцию $\Delta(\lambda)$ по формуле (10). Решая уравнения (9) с функцией $w(x) \in L_2(0,\pi)$ из представления (8) для построенной функции $\Delta(\lambda)$, находим $N(x)$, $(\pi - x)N(x) \in L_2(0,\pi)$. Наконец, строим функцию $M(x)$, $(\pi - x)M(x) \in L_2(0,\pi)$, по формуле (7). Нетрудно увидеть, что заданная последовательность $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ является спектром построенной краевой задачи $L(M, \alpha_0, \alpha_1, \beta)$ вида (1)–(3). Единственность следует из единственности решения уравнения (9). $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : Физматлит, 2007. 384 с.

2. *Юрко В. А.* О краевых задачах с условиями разрыва внутри интервала // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 8. С. 1139–1140.

3. *Freiling G., Yurko V. A.* Inverse spectral problems for singular non-selfadjoint differential operators with discontinuities in an interior point // Inverse Problems. 2002. Vol. 18. P. 757–773.

4. *Юрко В. А.* Обратная задача для интегро-дифференциальных операторов // Матем. заметки. 1991. Т. 50, № 5. С. 134–146.

5. *Buterin S. A.* On an inverse spectral problem for a convolution integro-differential operator // Results in Math. 2007. Vol. 50. № 3–4. P. 173–181.

6. *Курышова Ю. В.* Обратная спектральная задача для интегро-дифференциальных операторов // Матем. заметки. 2007. Т. 81. № 6. С. 855–866.

7. *Бутерин С. А.* О восстановлении сверточного возмущения оператора Штурма–Лиувилля по спектру // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 1. С. 146–149.

8. *Buterin S. A., Choque Rivero A. E.* On inverse problem for a convolution integro-differential operator with Robin boundary conditions // Appl. Math. Letters. 2015. Vol. 48. P. 150–155.

9. *Bondarenko N., Buterin S.* On recovering the Dirac operator with an integral delay from the spectrum // Results in Math. 2017. Vol. 71. P. 1521–1529.

10. *Бутерин С. А.* Обратная спектральная задача для интегро-дифференциальных операторов с условием разрыва // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2015. Вып. 17. С. 9–12.

11. *Buterin S. A.* On an inverse spectral problem for first-order integro-differential operators with discontinuities // Appl. Math. Letters. 2018. Vol. 78. P. 65–71.

12. *Manafov M. Dzh.* An inverse spectral problem for Sturm – Liouville operator with integral delay // Electron. J. Diff. Eqns. 2017. Vol. 2017, №. 12. P. 1–8.

УДК 517.95

ДИСКРЕТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА[1]

В. Б. Васильев (Белгород, Россия)
vbv57l@inbox.ru

Для исследования дискретных аналогов псевдодифференциальных уравнений [1, 2] мы будем использовать дискретное преобразование Фурье для определения дискретных пространств Соболева – Слободецкого, которые очень удобны для изучения дискретных псевдодифференциальных уравнений.

Обозначим $u_d(\tilde{x})$ функцию дискретного аргумента $\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^m, h > 0$, и $\tilde{u}_d(\xi), \xi \in \hbar\mathbb{T}^m, \hbar = h^{-1}, \mathbb{T}^m = [-\pi, \pi]^m$, — ее дискретное преобразование Фурье

$$(F_d u_d)(\xi) = \sum_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^m} u_d(\tilde{x}) e^{i\tilde{x}\cdot\xi} h^m.$$

Обозначим $\zeta^2 = h^{-2} \sum\limits_{k=1}^{m} (e^{-ih\cdot\xi_k} - 1)^2$ и введем следующее

Определение 1. *Пространство* $H^s(h\mathbb{Z}^m)$ состоит из дискретных функций $u_d(\tilde{x})$, для которых следующая норма

$$\|u_d\|_s = \left(\int\limits_{\hbar\mathbb{T}^m} (1 + |\zeta^2|)^s |\tilde{u}_d(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}$$

конечна.

Далее, пусть $D = \mathbb{R}^m_+ = \{x \in \mathbb{R}^m : x = (x', x_m), x_m > 0\}$, и $D_d = D \cap h\mathbb{Z}^m$ — дискретная область.

Определение 2. *Пространство* $H^s(D_d)$ состоит из дискретных функций пространства $H^s(h\mathbb{Z}^m)$, носители которых содержатся в $\overline{D_d}$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 1.7311.2017/БЧ).