Теорема 1 доказана С. В. Конягиным, теорема 2 — П. А. Бородиным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fekete M.* Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten // Math. Zeitschrift. 1923. Bd. 17. S. 228–249.

2. *Бородин П. А.* Плотность полугруппы в банаховом пространстве // Изв. РАН. Сер. матем. 2014. Т. 78, № 6. С. 21–48.

УДК 517.521

ТЕОРЕМА ШТОЛЬЦА И ЕЕ ОБРАЩЕНИЕ

Г. Г. Брайчев (Москва, Россия)
Braichev@mail.ru

Теорема Штольца [1] является дискретным аналогом теоремы Бернулли – Лопиталя. Приведем ее в общей форме — с верхними и нижними пределами вместо обычных (см., например, [2]).

Теорема Штольца. *Пусть x_n и y_n — вещественные последовательности, причем y_n строго монотонна. Если обе последовательности являются бесконечно малыми или y_n — бесконечно большая, а x_n — произвольная, то выполняются неравенства*

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}, \qquad \varlimsup_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}. \tag{1}$$

Представим сначала равномерные оценки рассматриваемых отношений двух последовательностей.

Теорема 1. *Пусть последовательность x_n выпукла, а последо- вательность y_n положительна и строго возрастает. Пусть, далее, с неотрицательными константами m, M, $m \le M$, выполнено условие*

$$m \le \frac{x_n}{y_n} \le M, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда справедлива двусторонняя оценка

$$M\, s_1^+(\theta) \le \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \le M\, s_2(\theta), \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

где $\theta = \dfrac{m}{M}$, *а величины* $s_1(\theta)$, $s_2(\theta)$ *определяются формулами*

$$s_1(\theta) = \inf_{n\ge 2} \frac{1}{y_n - y_{n-1}} \sup_{k<n} \frac{y_k - \theta y_n}{k-n},$$

$$s_2(\theta) = \sup_{n\geq 1} \frac{1}{y_{n+1} - y_n} \inf_{k>n} \frac{y_k - \theta y_n}{k-n}.$$

Оценка (2) справедлива и для строго убывающих последовательностей y_n, если величины $s_1(\theta)$, $s_2(\theta)$ заменить соответственно на $p_1(\theta)$, $p_2(\theta)$, определяемые формулами

$$p_1(\theta) = \inf_{n\geq 1} \frac{1}{y_{n+1} - y_n} \inf_{k>n} \frac{y_k - \theta y_n}{k-n},$$
$$p_2(\theta) = \sup_{n\geq 2} \frac{1}{y_n - y_{n-1}} \sup_{k<n} \frac{y_k - \theta y_n}{k-n}.$$

Исследование случаев равенства в оценках (1) и получение неравенств противоположного смысла требует дополнительных (тауберовых) условий на эталонные последовательности y_n, с ростом или убыванием которых сравнивают поведение исследуемых последовательностей x_n. Например, обращение теоремы Штольца справедливо для *быстрорастущих последовательностей* y_n , которые по определению (см. [3]) удовлетворяют условию

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} \to +\infty, \qquad n \to \infty.$$

Приводимые ниже теоремы представляют дополнения и уточнения соответствующих результатов работы [3].

Теорема 2. *Пусть x_n и y_n — положительные последовательности, причем y_n быстрорастущая. Тогда имеет место равенство*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_n}{y_n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n},$$

а если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{x_n}{y_n} < +\infty$, *то также выполняется равенство*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_n}{y_n} = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$$

Следующее обращение теоремы Штольца справедливо для выпуклых последовательностей. Напомним, что последовательность y_n называется выпуклой, если с ростом n возрастает последовательность $y_{n+1} - y_n$.

Теорема 3. *Пусть x_n и y_n — положительные выпуклые последовательности, причем y_n удовлетворяет условиям*

$$\frac{y_n}{n} \to \infty, \qquad \frac{y_{n+1}}{y_n} = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \qquad n \to \infty.$$

Тогда выполняются равенства

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{x_n}{y_n} \;=\; \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{x_n}{y_n} \;=\; \underline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

Для последовательностей, имеющих промежуточный рост, чем предусмотренный в теоремах 2 и 3, справедлив следующий результат

Теорема 4. *Пусть последовательность x_n положительна и выпукла, а последовательность y_n положительна и строго возрастает. Пусть далее*

$$m = \underline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{x_n}{y_n}, \qquad M = \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{x_n}{y_n}.$$

Тогда выполняется неравенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \le\; M\,\tilde{s}_2(\theta).$$

Если, кроме того, y_n имеет лакуны Адамара, т. е. $\underline{\lim_{n\to\infty}}\,\dfrac{y_{n+1}}{y_n} > 1$, то выполняется и неравенство

$$M\,\max\{\tilde{s}_1(\theta),\,0\} \;\leqslant\; \underline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

Здесь $\theta = \dfrac{m}{M}$, а величины $\tilde{s}_1(\theta)$, $\tilde{s}_2(\theta)$ задаются формулами

$$\tilde{s}_1(\theta) = \underline{\lim_{l\to\infty}}\,\inf_{n\ge l+1}\,\frac{1}{y_n-y_{n-1}}\,\sup_{l\le k<n}\,\frac{y_k-\theta y_n}{k-n},$$
$$\tilde{s}_2(\theta) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{1}{y_{n+1}-y_n}\,\inf_{k>n}\,\frac{y_k-\theta y_n}{k-n}.$$

В качестве иллюстрации приведем характерный пример с эталонной последовательностью экспоненциального роста.

Пусть положительная последовательность y_n имеет лакуны Адамара, и $p = \underline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{y_{n+1}}{y_n} > 1$. Пусть далее x_n — произвольная воз- растающая выпуклая последовательность, удовлетворяющая условиям

$$m = \underline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{x_n}{y_n}, \quad M = \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{x_n}{y_n}.$$

Тогда выполняются неравенства

$$\frac{mp-M}{p-1} \le \underline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}, \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \le \frac{Mp-m}{p-1}.$$

Полученные неравенства точны, в чем можно убедиться на примере последовательности $y_n = e^{\alpha n}$.

Утверждение, аналогичное теореме 4, верно и когда последовательность y_n строго убывает к нулю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stolz O.* Vorlesungen Uber allgemeine Arithmetik: nach den Neuen Ansichten. Leipzig : Teubners, 1885. P. 173–175.

2. *Брайчев Г. Г.* Введение в теорию роста выпуклых и целых функций. М. : Прометей, 2005. 232 с.

3. *Абанин А. В., Юделевич В. В.* Об обращении теоремы Штольца // Изв. вузов. Северо-кавказский регион. Естественные науки. 2016. № 2. С. 5–9.

УДК 517.9

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ С ИНВОЛЮЦИЕЙ, РАССМАТРИВАЕМОГО В КЛАССЕ РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ [1]

М. Ш. Бурлуцкая (Воронеж, Россия)

bmsh2001@mail.ru

Исследование классических решений функционально-дифференциальных уравнений с инволюцией $\nu(x) = 1 - x$ на отрезке $[0, 1]$ и соответствующих операторов обычно приводит к исследованию систем Дирака (с потенциалом специального симметричного вида), решение которых необходимо удовлетворяет дополнительному условию в неподвижной точке инволюции $x = 1/2$ (см., например, [1], [2]). Простейшее же уравнение с инволюцией $y'(x) = \lambda y(1-x)$ легко приводится к простейшему уравнению второго порядка $y''(x) = -\lambda^2 y(x)$. Однако, если допустить конечный разрыв у решения уравнения с инволюцией (т.е. рассматривать его в классе разрывных решений из пространства $C^1([0, 1/2) \cup (1/2, 1]))$, то удается установить его эквивалентность и системе Дирака, и уравнению Штурма-Лиувилля, заданным на отрезке $[0, 1/2]$, но теперь уже произвольными непрерывными потенциалами [3]. Здесь мы установим связь между классическим решением смешанной задачи для волнового уравнения и решением смешанной задачи для уравнения с инволюцией, рассматриваемым в классе разрывных функций. Соотношения между классическими решениями таких задач в случае уравнений с нулевыми потенциалами исследовались в [4].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 16-11-10125, выполняемый в Воронежском госуниверситете)