Доказательство теоремы основано на следующем вспомогательном утверждении:

Лемма 1.*Пусть $f \in H(\mathbf{D})$, тогда для любой неотрицательной функции $\omega \in L^1(\Delta)$ справедлива оценка*

$$T_\omega(f,r) \le \int\limits_0^1 \omega(1-t)T(f,rt)dt, \quad r \in [0,1]$$

Теорема 3.*Пусть $0 < p < +\infty$, $\alpha, \beta > -1$. Тогда классы $N^p_{\alpha,\beta}$ и $S^p_{\alpha,\beta}$ совпадают.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хейман У.* Мероморфные функции. М. : Мир, 1966. 287 с. (англ. Hayman W. K. Meromorfhic functions. Oxford, 1964. 287 p.)

2. *Джрбашян М. М.* О параметрическом представлении некоторых общих классов мероморфных функций в единичном круге // Доклады АН СССР. 1964. Т. 157. № 5. С. 1024–1027.

3. *Шамоян Ф. А., Шубабко Е. Н.* Введение в теорию весовых L^p-классов мероморфных функций / Брянский государственный университет, 2009. 152 с.

4. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М. : Мир, 1973. 342 с.

5. *Джрбашян М. М.* Интегральное преобразование и представление функций в комплексной области. М. : Наука, 1966. 670 с.

УДК 517.982.256 + 515.124.4

О МНОЖЕСТВЕ ТОЧЕК ШТЕЙНЕРА ПЯТИЭЛЕМЕНТНОГО ПОДМНОЖЕСТВА ПРОСТРАНСТВА ЛИНДЕНШТРАУССА[1]

Б. Б. Беднов (Москва, Россия)

noriiii@inbox.ru

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — банахово пространство. Для заданного набора $M = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ множество точек Штейнера $\mathrm{st}(M)$ состоит из таких точек $s \in X$, для которых

$$\sum_{k=1}^{n} \|x_k - s\| = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{n} \|x_k - x\| : x \in X \right\} =: |\mathrm{st}|(M).$$

Пространство X называется предуальным к L_1 или пространством Линденштраусса, если X^* изометрически изоморфно $L_1(\mu) = L_1(E, \Sigma, \mu)$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 15-01-08335).

для некоторого множества E, некоторой σ-алгебры Σ подмножеств E и некоторой σ-аддитивной меры μ, определенной на Σ. К этому классу пространств относятся все пространства $C[K]$ действительнозначных функций, непрерывных на (хаусдорфовом) компакте K, пространства $c_0(E)$, l_∞ и многие другие. Пространство размерности n предуально к L_1 тогда и только тогда, когда оно изометрически изоморфно l_∞^n (здесь l_∞^n обозначает n-мерное пространство с нормой $\|x\| = \|(x_1, \ldots, x_n)\| = \max\{|x_i| : i \in \{1, \ldots, n\}\}$). Пространства Линденштраусса хорошо изучены (см. [1, 2], а также [3]).

В предуальном к L_1 пространстве множество точек Штейнера $\mathrm{st}(M)$ не пусто [4] для произвольного конечного множества $M \subset X$, а само множество $\mathrm{st}(M)$ можно охарактеризовать [5] при помощи метрических отрезков (*метрический отрезок* с концами a и b в банаховом пространстве X есть множество $m[a,b] = \{x \in X : \|x-a\| + \|x-b\| = \|a-b\|\}$).

Теорема А [5]. *Пусть пространство X предуально к L_1. Для множества $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$ попарно различных элементов пространства X имеет место формула*

$$|\mathrm{st}|(M, X) = \frac{1}{2} \max \left\{ \sum_{j=1}^{k} L(M_j) : M_1 \sqcup \cdots \sqcup M_k = M \right\} =: \Delta(M, X),$$

где максимум берётся по всем не менее чем двухточечным подмножествам $M_j \subset M$. Число $L(M_j)$ обозначает максимальную сумму длин рёбер цикла, обходящего все вершины из M_j по одному разу. При этом

$$\mathrm{st}(M, X) = \cap_{j=1}^{k} \mathrm{st}(M_j^*, X) = \cap m[x_p, x_q],$$

где $\{M_j^*\}_{j=1}^{k}$ — такие не менее чем двухточечные подмножества множества M, для которых $\sum\limits_{j=1}^{k} L(M_j^*) = 2 \cdot \Delta(M, X)$, а последнее пересечение берётся по тем парам индексов p, q, для которых $x_p, x_q \in M_j^*$ соединены ребром в цикле с длиной $L(M_j^*)$, обходящем множество M_j^* при каждом фиксированном $j = 1, \ldots, k$.

Заметим, что для двухточечного множества M_j цикл вырожден и состоит из одного ребра, посчитанного дважды.

Разбиение множества M из теоремы А на попарно не пересекающиеся подмножества задает в пространстве X граф Z, состоящий из циклов и отдельных ребер. Для 5-точечного множества M граф Z может быть всего двух видов: либо цикл из пяти ребер, либо цикл из трех ребер и отдельное ребро.

Если граф Z для 5-точечного множества M есть цикл, то множество $\mathrm{st}(M, X)$ характеризуется в терминах пересечения сфер пространства X следующей теоремой (при $n = 5$).

Теорема Б [5]. *Пусть n нечётно, пространство X предуально к L_1, $x_1, \ldots, x_n \in X$ различны и $\Delta(\{x_1, \ldots, x_n\}, X) = \frac{1}{2}\big(\|x_1-x_2\|+\|x_2-x_3\|+\cdots+\|x_n-x_1\|\big)$. Тогда верно равенство*

$$\mathrm{st}(\{x_1, \ldots, x_n\}, X) = m[x_1, x_2] \cap m[x_2, x_3] \cap \cdots \cap m[x_n, x_1] = \cap_{i=1}^{n} S(x_i, r_i),$$

где $r_i = 0,5\left(\sum\limits_{j=0}^{n-1}(-1)^j \cdot \|x_{i+j} - x_{i+j+1}\|\right)$ (индексы $i+j$ и $i+j+1$ считаются по модулю n), а $S(x, r)$ обозначает сферу пространства X с центром x радиуса r.

Если же граф Z для 5-точечного множества $M = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ не связен, то есть Z есть цикл, скажем, $x_1x_2x_3$ и отдельное ребро x_4x_5, то расстояние от точек x_4 и x_5 до точки $s \in \mathrm{st}(M, X)$ не всегда вычисляется однозначно. Заметим, что в этом случае $\mathrm{st}(M, X) \subset \mathrm{st}(\{x_1, x_2, x_3\}, X)$ и $\mathrm{st}(M, X) = m[x_1, x_2] \cap m[x_2, x_3] \cap m[x_3, x_1] \cap m[x_4, x_5]$.

Далее введём следующие обозначения. Пусть $r_i = \frac{1}{2}(\|x_i - x_j\| + \|x_i - x_k\| - \|x_j - x_k\|)$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Это расстояние от точки x_i до (любой) точки $s \in \mathrm{st}(\{x_1, x_2, x_3\}, X)$, что следует из теоремы Б при $n = 3$.

Лемма. *Пусть X предуально к L_1, $M = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \subset X$, граф Z для M есть цикл $x_1x_2x_3$ и отдельное ребро x_4x_5. Расстояние от x_4 до множества $\mathrm{st}(M, X)$ равно $\max_{i=1}^{3}\{\|x_i - x_4\| - r_i\} =: A_4$.*

В силу равноправия точек x_4 и x_5 в рассматриваемом случае расстояние от x_5 до множества $\mathrm{st}(M, X)$ равно $\max_{i=1}^{3}\{\|x_i - x_5\| - r_i\} =: A_5$.

Теорема. *Пусть X предуально к L_1, $M = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \subset X$, граф Z для M есть цикл $x_1x_2x_3$ и отдельное ребро x_4x_5. Тогда множество $\mathrm{st}(M, X)$ есть объединение по $\rho_4 \in [A_4, \|x_4 - x_5\| - A_5]$ пересечений сфер*

$$S(x_1, r_1) \cap S(x_2, r_2) \cap S(x_3, r_3) \cap S(x_4, \rho_4) \cap S(x_5, \|x_4 - x_5\| - \rho_4).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Grothendieck A.* Une caractérisation vectorielle-métrique des espaces L^1 // Canad. J. Math. 1955. Vol. 7, № 4. P. 552–561.

2. *Lindenstrauss J.* Extension of compact operators // Mem. Amer. Math. Soc. 1964. Vol. 48. P. 1–112.

3. *Lima Å.* Intersection properties of balls and subspaces in Banach spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1977. Vol. 227. P. 1–62.

4. *Беднов Б. Б., Бородин П. А.* Банаховы пространства, реализующие минимальные заполнения // Матем. сб. 2014. Т. 205, № 4. С. 3–19.

5. *Беднов Б. Б.* Длина минимального заполнения типа звезды // Матем. сб. 2016. Т. 207, № 8. С. 31–46.