УДК 517.5+517.9

ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КЛАССИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ В ВЕСОВЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А. В. Абанин (Ростов-на-Дону, Россия)
avabanin@sfedu.ru

Считается, что как отдельное направление динамика линейных операторов сформировалась после работы Годфруа и Шапиро [1], которые подошли к классическим результатам Биркхоффа (1929) и Маклейна (1952) о гиперцикличности и хаотичности операторов сдвига и дифференцирования с точки зрения теории динамических систем и разработали некоторые общие подходы к исследованию вопросов подобного типа. Основные результаты и обзор развития теории динамических свойств линейных операторов практически до наших дней можно найти в недавних монографиях [2, 3]. В настоящей работе будет представлен обзор недавних результатов и новых подходов к описанию динамических свойств операторов интегрирования и дифференцирования в весовых банаховых пространствах аналитических функций в единичном круге $\mathbb{D}$ или комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Наиболее полно для них исследованы вопросы гиперцикличности, хаотичности и эргодичности в среднем (см. [4–6]). С другой стороны, важный для приложений вопрос об описании циклических элементов этих операторов удавалось исследовать лишь при достаточно обременительных ограничениях на веса. Именно на нем и будет сосредоточено наше дальнейшее изложение.

Напомним, что циклическим элементом оператора $T : X \to X$ в банаховом пространстве X называется такой элемент $x \in X$, орбита которого $(T^n x : n \geq 0)$ полна в X. В ряде случаев проблему описания циклических элементов T удается свести к проблеме описания его инвариантных подпространств, то есть таких замкнутых подпространств M

в X, что $T(M) \subset M$. В связи с этим напомним интерпретацию определения Н. К. Никольского одноклеточности оператора применительно к рассматриваемым нами операторам интегрирования I и дифференцирования D. Оператор I или D, непрерывный на пространстве X аналитических в круге или на плоскости функций, содержащем все полиномы в качестве плотного подмножества, называется одноклеточным, если все его нетривиальные инвариантные подпространства исчерпываются подпространствами вида $z^n X$ (соответственно, $\mathcal{P}_n$ – семействами полиномов степени не выше n), $n \in \mathbb{N}$. С точки зрения динамических свойств, например, оператора I это означает, что любая функция $f(z) = f_0 + f_1 z + \dots$ из X с $f_0 \neq 0$ является циклическим элементом I в X (обратное утверждение очевидно). Опираясь на отмеченную взаимосвязь проблем описания циклических элементов и одноклеточных операторов мы будем ниже говорить о второй из них.

В работе [7] были сформулированы достаточные условия общего характера на банахово пространство X аналитических в единичном круге $\mathbb{D}$ функций, которые обеспечивают одноклеточность I в X. Эти условия применимы к пространствам функций не выше чем степенного роста и их проверка даже для классических пространств Бергмана $A^p_{v_\alpha}$ с $v_\alpha(z) = (1 - |z|)^{-\alpha}$ оказалась непростой задачей, которую авторам удалось решить при некоторых дополнительных ограничениях на α и p. В работе [8] были приведены достаточные условия одноклеточности I на пространствах Фока целых функций, задаваемых быстро растущими весами. И в данном случае проверку общих условий авторам удалось осуществить только для конкретных пространств Фока $\mathcal{F}^p_{v_\alpha}$, $v_\alpha(z) = e^{|z|^\alpha}$, при $\alpha \geq 2$ и всех $p > 0$. Инвариантные подпространства оператора дифференцирования изучались в работе [9], в которой было показано, что D одноклеточен на пространствах Фока $\mathcal{F}^2_{v_\alpha}$ при $0 < \alpha < 1$ и что проблема инвариантного подпространства для гильбертова пространства эквивалентна определенному свойству семейства инвариантных подпространств D на $\mathcal{F}^2_{v_1}$ (то есть, при $\alpha = 1$).

Новый подход, который позволяет получать завершенные результаты по данному направлению сразу для целых весовых шкал, основан на работах [10, 11], посвященных непрерывности и компактности I и D в пространствах Бергмана A^∞_v или Фока $\mathcal{F}^\infty_v$ голоморфных в $\mathbb{D}$ или $\mathbb{C}$ функций с равномерной оценкой, задаваемой радиальным весом v. Его подробное изложение представлено в статье [12] и заключается в следующем. Сначала задача исследуется в A^∞_v и $\mathcal{F}^\infty_v$. Решающим моментом, позволяющим в этом случае дать на нее полный ответ, является то обстоятельство, что для таких пространств можно использовать без ущерба для общности log-выпуклые веса v (по определению, это такие v, для

которых $\ln v(e^x)$ — выпуклая функция). Затем используется следующее наблюдение. Предположим, что линейный оператор T непрерывен на двух пространствах E и H. Мы говорим, что пространства E и H подобны относительно T, если найдутся такие его степени T^n и T^m, что операторы $T^n : E \to H$ и $T^m : H \to E$ корректно определены и непрерывны. Оказалось, что если E и H подобны относительно T и удовлетворяют некоторым дополнительным естественным ограничениям, то T является или не является одноклеточным в E и H одновременно. Применив это соображение и воспользовавшись случаем пространств A_v^∞ и $\mathcal{F}_v^\infty$ как эталоном, удается получить полную характеризацию инвариантных подпространств (циклических элементов) для операторов I и D в пространствах Бергмана A_v^p и Фока $\mathcal{F}_v^p$ при всех $0 < p < \infty$. Полученные на этом пути результаты не только содержат все предшествующие, но и усиливают их. Например, в [7] одноклеточность оператора интегрирования была установлена фактически только для пространств Бергмана $A_{v_\alpha}^p$ при некоторых дополнительных ограничениях на α и p. По ряду существенных причин общие результаты из [7] не удается применить к весам другого конкретного вида. В то же время, метод из [12] позволяет установить простые для проверки достаточные условия одноклеточности I в пространствах A_v^p, которые формулируются в терминах роста веса v. Например, для всех весов v с умеренным ростом (то есть, $\ln v(z) = o(\ln(1-|z|)^{-1})$ при $|z| \uparrow 1$) все пространства A_v^p одноклеточны. В качестве частного случая мы получаем отсюда, что упомянутый только что результат из [7] для конкретного веса $v(z) = (1-|z|)^{-\alpha}$ верен без никаких ограничений для всех $\alpha, p > 0$. Примерно такое же положение дел имеет место и для пространств Фока.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Godefroy G., Shapiro J. H.* Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds // J. Func. Anal. 1991. Vol. 98. P. 229–269

2. *Bayart F., Matheron E.* Dynamics of linear operators. N.Y. : Cambridge Univ. Press, 2009. 337 p.

3. *Grosse-Erdman K.-G., Peris A.* Linear chaos. London : Springer, 2011. 386 p.

4. *Bonet J.* Dynamics of the differentiation operator on weighted spaces of entire functions // Math. Z. 2009. Vol. 261, № 3. P. 629–657.

5. *Beltran M. J., Bonet J., Fernández C.* Classical operators on weighted Banach spaces of entire functions // Proc. Amer. Math. Soc. 2013. Vol. 141, № 12. P. 4293–4303.

6. *Beltran M. J.* Dynamics of differentiation and integration operators on weighted spaces of entire functions // Studia Math. 2014. Vol. 221, № 1. P. 35–60.

7. *Aleman A., Korenblum B.* Volterra invariant subspaces of H^p // Bull. Sci. Math. 2008. Vol. 132, № 6. P. 510–528.

8. Constantin O., Peláez J. A. Integral operators, embedding theorems and a Littlewood–Paley formula on weighted Fock spaces // J. Geom. Anal. 2016. Vol. 26, № 2. P. 1109–1154.

9. *Atzmon A., Brive B.* Surjectivity and invariant subspaces of differential operators

on weighted Bergman spaces of entire functions // Contemp. Math. 2006. Vol. 404. P. 27–39.

10. *Abanin A. V., Pham Trong Tien.* Differentiation and integration operators on weighted Banach spaces of holomorphic functions // Math. Nachr. 2017. Vol. 290, № 8-9. P. 1144–1162.

11. *Abanin A. V., Pham Trong Tien.* Compactness of classical operators on weighted Banach spaces of holomorphic functions // Collect. Math. 2018. doi: 1007/s13348-016-0185-z.

12. *Abanin A. V., Pham Trong Tien.* Invariant subspaces for classical operators on weighted spaces of holomorphic functions // Integr. Equ. Oper. Theory. 2017. Vol. 89, № 3. P. 409–438.

УДК 517.9

О ФРЕЙМАХ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Т. И. Абанина (Ростов-на-Дону, Россия)
abaninati@mail.ru

Фреймы в гильбертовых пространствах в качестве полезного объекта исследования были определены в работе [1] в связи с некоторыми задачами теории негармонических рядов Фурье и впоследствии нашли важные применения в теории вейвлетов и сплайнов. Понятие фреймов в банаховых пространствах было введено в 1991 г. в статье [2], и с этого момента оно привлекло внимание значительного числа исследователей (см. монографию [3] и список литературы в ней). Напомним это понятие. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ — банахово пространство, $(A, \|\cdot\|_A)$ — банахово пространство числовых последовательностей, в котором сходимость по норме влечет покоординатную сходимость в A. Последовательность $F = (f_n)_{n=1}^{\infty}$ функционалов из сопряженного пространства X' называется *A-фреймом*, если выполняются условия:

(i) $(f_n(x))_{n=1}^{\infty} \in A$ для любого $x \in X$;

(ii) $\exists\ c, C > 0: \quad c\|x\|_X \le |(f_n(x))_{n=1}^{\infty}|_A \le C\|x\|_X$ для всех $x \in X$;

(iii) Существует такой линейный непрерывный оператор $S_F : A \to X$, что $x = S_F\big((f_n(x))_{n=1}^{\infty}\big)$ для любого $x \in X$.

Недавно в работах [4, 5] было предложено распространение этого понятия на пространства Фреше. Однако некоторые предварительные ограничения на пространства, равно как и требования на фрейм оказались слишком обременительными. Во-первых, они исключали из рассмотрения важный класс пространств Фреше без непрерывной нормы (например, пространство $C^{\infty}(G)$ всех бесконечно дифференцируемых функций