

ПРИМЕНЕНИЕ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ  
НА ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЯХ  
ДЛЯ СЖАТИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ<sup>1</sup>

А. А. Барышев, Г. А. Бондаренко, Д.С. Лукомский  
(Саратов, Россия)

baryshevaa@gmail.com, gebond77@gmail.com, lukomskiids@info.sgu.ru;

Данная работа посвящена вопросу численной реализации быстрого преобразования Фурье на локальных полях, рассмотренного в работе С. Ф. Лукомского и А. М. Водолазова [1]. Необходимо отметить, что в настоящее время в информационных технологиях активно применяются алгоритмы, использующие различные свойства преобразования Фурье по разнообразным системам. Будем рассматривать применение алгоритма на примере сжатия изображений.

Под локальным полем  $K$  понимают локально компактное, вполне несвязное, недискретное, полное топологическое пространство, в котором определены непрерывные операции « $\dot{+}$ », « $\cdot$ » — сложения и умножения, для которых выполнены аксиомы поля. В поле  $K$  вводят оператор растяжения следующим образом. Единичный шар

$$\mathcal{D} = \{x \in K : |x| \leq 1\}, \mu\mathcal{D} = 1.$$

является кольцом, в котором существует единственный максимальный идеал

$$\mathcal{B} = \{x \in K : |x| < 1\}.$$

Элемент  $\mathfrak{p} \in \mathcal{B}$  с наибольшей нормой  $|\mathfrak{p}|$  называют примитивным элементом. Для него  $\mu\mathcal{B} = |\mathfrak{p}| = \frac{1}{p^s}$ , где  $p$  — простое,  $s \in \mathbb{N}$ . Если  $x \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{B}$ , то  $|x| = 1$ . Если для любого  $a \in K$  произведение  $pa \stackrel{df}{=} \underbrace{a + a + \cdots + a}_p = 0$ ,

то число  $p$  называют характеристикой поля  $K$ .

Пусть  $p$  — простое и  $s$  — натуральное. Конечное поле  $GF(p^s)$  состоит из векторов

$$\mathbf{a} = (a^{(0)}, a^{(1)}, \dots, a^{(s-1)}),$$

в которых компоненты  $a^{(j)}$  принимают значения от 0 до  $p - 1$ , операция сложения определяется покомпонентно по модулю  $p$ . Локальное поле  $K = F^{(s)}$  положительной характеристики  $p$  изоморфно множеству

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00152)

формальных степенных рядов

$$a = \sum_{i=k}^{\infty} a_i t^i, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad a_i \in GF(p^s).$$

Операции сложения и умножения определяются как сумма и произведение таких рядов. Можно считать, что локальное поле  $F^{(s)}$  характеристики  $p$  состоит из бесконечных в обе стороны последовательностей

$$a = (\dots, \mathbf{0}_{n-1}, \mathbf{a}_n, \dots, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots), \quad \mathbf{a}_j \in GF(p^s),$$

в которых лишь конечное число элементов  $\mathbf{a}_j$  с отрицательными номерами отлично от нуля.

Пусть  $f^{(N)}$  — ступенчатая функция. Обозначим ее значения на смежных классах  $K_N + \mathbf{a}_{N-1}g_{N-1} + \dots + \mathbf{a}_1g_1 + \mathbf{a}_0g_0 \subset K_0$  через

$$f_{\mathbf{a}_{N-1}\mathbf{a}_{N-2}\dots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_0}^{(N)} := f^{(N)}(K_N + \mathbf{a}_{N-1}g_{N-1} + \dots + \mathbf{a}_1g_1 + \mathbf{a}_0g_0).$$

Преобразование Фурье функции  $f^{(N)}$  совпадает с коэффициентами  $c_{\bar{\alpha}_0\bar{\alpha}_1\dots\bar{\alpha}_{N-1}}$  в разложении

$$f^{(N)} = \sum_{\bar{\alpha}_0\bar{\alpha}_1\dots\bar{\alpha}_{N-1} \in GF(p^s)} c_{\bar{\alpha}_0,\bar{\alpha}_1,\dots,\bar{\alpha}_{N-1}} \mathbf{r}_0^{\bar{\alpha}_0} \mathbf{r}_1^{\bar{\alpha}_1} \dots \mathbf{r}_{N-1}^{\bar{\alpha}_{N-1}},$$

где  $\mathbf{r}_0^{\bar{\alpha}_0}, \mathbf{r}_1^{\bar{\alpha}_1}, \dots, \mathbf{r}_{N-1}^{\bar{\alpha}_{N-1}}$  — функции Радемахера, определенные в [1]. Таким образом, преобразование Фурье вектору значений  $f_{\mathbf{a}_{N-1}\mathbf{a}_{N-2}\dots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_0}^{(N)}$  ставит в соответствие вектор коэффициентов  $c_{\bar{\alpha}_0,\bar{\alpha}_1,\dots,\bar{\alpha}_{N-1}}$ . Можно считать, что вектор значений функции  $f^{(N)}$  есть вектор

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = f_{\mathbf{a}_{N-1}\mathbf{a}_{N-2}\dots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_0}^{(N)} &= \left| \text{так как } \mathbf{a}_m = (a_m^{(0)}, a_m^{(1)}, \dots, a_m^{(s-1)}), a_m^{(j)} = \overline{0, p-1} \right| = \\ &= f_{a_{N-1}^{(0)}a_{N-1}^{(1)}\dots a_{N-1}^{(s-1)}, a_{N-2}^{(0)}a_{N-2}^{(1)}\dots a_{N-2}^{(s-1)}, \dots, a_1^{(0)}a_1^{(1)}, \dots, a_1^{(s-1)}, a_0^{(0)}a_0^{(1)}, \dots, a_0^{(s-1)}}^{(N)} \end{aligned}$$

Будем полагать, что  $f_{\mathbf{a}_{N-1}\mathbf{a}_{N-2}\dots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_0}^{(N)}$  занумерованы индексом

$$\begin{aligned} n = (a_{N-1}^{(0)} + a_{N-1}^{(1)}p + \dots + a_{N-1}^{(s-1)}p^{s-1}) + p^s(a_{N-2}^{(0)} + a_{N-2}^{(1)}p + \dots + \\ + a_{N-2}^{(s-1)}p^{s-1}) + \dots + p^{s(N-1)}(a_0^{(0)} + a_0^{(1)}p + \dots + a_0^{(s-1)}p^{s-1}). \end{aligned} \quad (1)$$

Далее приведем формулы обратного преобразования Фурье

$$f_{(\bar{\alpha}_N\dots\bar{\alpha}_n)\mathbf{a}_{n-1}\dots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_0}^{(n)} = \sum_{\bar{\alpha}_{n-1} \in GF(p^s)} p^{\frac{-s}{2}} e^{\frac{2\pi i}{p}(\bar{\alpha}_{n-1}, \mathbf{a}_{n-1})} p^{\frac{s}{2}} f_{(\bar{\alpha}_N\dots\bar{\alpha}_{n-1})\mathbf{a}_{n-2}\dots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_0}^{(n-1)}. \quad (2)$$

Так как матрица системы (2) унитарна, то ее решение имеет вид

$$f_{(\bar{\alpha}_N \dots \bar{\alpha}_{n-1})\mathbf{a}_{n-2} \dots \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_0}^{(n-1)} = \sum_{\mathbf{a}_{n-1} \in GF(p^s)} p^{-s} e^{-\frac{2\pi i}{p} (\bar{\alpha}_{n-1}, \mathbf{a}_{n-1})} f_{(\bar{\alpha}_N, \dots, \bar{\alpha}_n)\mathbf{a}_{n-1} \dots \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_0}^{(n)}, \quad (3)$$

После предпоследнего шага получаем равенства

$$f_{(\bar{\alpha}_N, \bar{\alpha}_{N-1}, \dots, \bar{\alpha}_1)\mathbf{a}_0}^{(1)} = \sum_{\bar{\alpha}_0 \in GF(p^s)} e^{\frac{2\pi i}{p} (\bar{\alpha}_0, \mathbf{a}_0)} f_{(\bar{\alpha}_N, \bar{\alpha}_{N-1}, \dots, \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_0)}^{(0)},$$

из которых находим коэффициенты Фурье  $c_{\bar{\alpha}_0 \bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_N} = f_{(\bar{\alpha}_N, \bar{\alpha}_{N-1}, \dots, \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_0)}^{(0)}$  по формулам (3). Таким образом (3) и (2) — расчетные формулы для прямого и обратного преобразования Фурье соответственно.

Общее количество операций равно  $(N+1) \cdot 2p^{2s} \cdot p^{Ns} = 2(N+1)p^{s(N+2)}$ .

Далее рассмотрим практические задачи на примере сжатия изображений. Изображение можно трактовать как матрицу фиксированного размера, элементами которой являются номера цветов точек в цветовой палитре. Разобьем исходную матрицу на подматрицы размерности  $p^N \times p^N$ , где  $p$  — простое. Данную матрицу будем рассматривать как вектор длины  $p^{sN}$ , где  $s = 2$ . Таким образом, имеем кусочно постоянную функцию  $f^N$ , принимающую  $p^{sN}$  значений. Далее к ней применяем прямое преобразование Фурье (2), сортируем коэффициенты по убыванию модуля и обнуляем некоторый процент наименьших коэффициентов. Затем применяем обратное преобразование (1) и восстанавливаем изображение.

Отметим проблемы, возникающие при реализации данного алгоритма, которые влияют на вычислительную сложность. В формулах прямого и обратного преобразования для нумерации значений функции и коэффициентов используется мультииндекс  $\mathbf{a}_{N-1}\mathbf{a}_{N-2} \dots \mathbf{a}_1\mathbf{a}_0$ , который необходимо преобразовать в десятичное представление и наоборот.

Процедуры пересчета нумерации (преобразования индексов) в приведенных формулах преобразования Фурье не рассматриваются, однако они вносят значительную вычислительную сложность в прикладной задаче.

По результатам исследования написана программа, реализующая данный алгоритм. Проведено сравнение скорости и качества сжатия данного метода со сжатием по другим системам (Хаара, Виленкина, косинус-преобразования).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лукомский С. Ф., Водолазов А. М. Быстрое дискретное преобразование Фурье на локальных полях положительной характеристики // Проблемы передачи информации. 2017. Т. 53, вып. 2. С. 60–69.