

9. Пешкир Г., Ширяев А. Н. Неравенства Хинчина и мартингальное расширение сферы их действия // УМН. 1995. Т. 50, № 5(305). С. 3–62.
10. Braverman M. Sh. Independent Random Variables and Rearrangement Invariant Spaces. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1994. 116 p.
11. Blei R. Analysis in Integer and Fractional Dimensions / Cambridge Studies in Advanced Mathematics 71. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2001. 577 p.
12. Lopez-Abad J., Tradacete P. Bases of random unconditional convergence in Banach spaces // Transactions of the AMS. 2016. Vol. 368, № 12. P. 9001–9032.

УДК 517.5

СИСТЕМЫ СЖАТИЙ И СДВИГОВ В СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ¹

С. В. Асташкин (Самара, Россия),

П. А. Терехин (Саратов, Россия)

astash56@mail.ru, terekhinpa@mail.ru

Пусть $f \in L^1[0, 1]$ и $\int_0^1 f(t) dt = 0$. Системой $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ сжатий и сдвигов функции f называется последовательность

$$f_n(t) := \begin{cases} f(2^k t - j), & \text{если } t \in [\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}], \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $n = 2^k + j$, $k = 0, 1, \dots$ и $j = 0, \dots, 2^k - 1$. В частности, если $f = h_1 = \chi_{(0, \frac{1}{2})} - \chi_{(\frac{1}{2}, 1)}$, то получаем систему Хаара $\{h_n\}_{n=1}^\infty$, нормированную в L^∞ (без функции $h_0(t) = 1$).

Рассмотрим (линейный) оператор T_f , определяемый равенствами $T_f h_n = f_n$, $n = 1, 2, \dots$. Под нормой $\|T_f\|_{X \rightarrow Y}$ будем понимать обычную норму оператора $T_f : \overline{\text{span}}_X \{h_n\}_{n=1}^\infty \rightarrow Y$.

Заметим, что оператор T_f перестановочен с операторами

$$V_0 f(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} < t \leq 1, \end{cases} \quad V_1 f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ f(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Кроме того, имеем $\{f_n\}_{n=1}^\infty = \{V^\alpha f\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$, где

$$V^\alpha = V_{\alpha_1} \dots V_{\alpha_k}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{A} := \bigcup_{k=0}^{\infty} \{0, 1\}^k,$$

причем $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in \mathbb{A}$ находятся во взаимнооднозначном соответствии, определяемом двоичным разложением $n = 2^k + \sum_{\nu=1}^k \alpha_\nu 2^{k-\nu}$. Обозначим через $|\alpha| = k$ длину индекса α , а через $\alpha\beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_l)$ конкатенацию индексов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ и $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_l)$.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки (проект 1.1470.2016/1.4) и РФФИ (проект 17-01-00138) (первый автор), а также РФФИ (проект № 16-01-00152) (второй автор).

Спектром Хаара функции f называется множество индексов

$$S(f) := \{\beta \in \mathbb{A} : (f, h_\beta) \neq 0\}.$$

Скажем, что функция f имеет простой спектр Хаара, если из равенства $\alpha\beta = \alpha'\beta'$, где $\alpha, \alpha' \in \mathbb{A}$ и $\beta, \beta' \in S(f)$, следует, что $\alpha = \alpha'$ и $\beta = \beta'$.

Лемма. *Если $f \in L^2$, $f \neq 0$, и f имеет простой спектр Хаара, то система сжатий и сдвигов функции f является ортогональной. Следовательно, $\|T_f\|_{L^2 \rightarrow L^2} = \|f\|_2$.*

Банаово пространство X измеримых функций на $[0, 1]$ называется симметричным, если 1) из неравенства $|x(t)| \leq |y(t)|$ для всех $t \in [0, 1]$, где функция x измерима и $y \in X$, следует $x \in X$ и $\|x\|_X \leq \|y\|_X$; 2) из равенства

$$|\{t \in [0, 1] : |x(t)| > \tau\}| = |\{t \in [0, 1] : |y(t)| > \tau\}|$$

для всех $\tau > 0$, т.е. из равнозмеримости x и y , где функция x измерима и $y \in X$, следует $x \in X$ и $\|x\|_X = \|y\|_X$ (здесь $|A|$ — мера Лебега множества $A \subset \mathbb{R}$). Оператор растяжения σ_τ , определяемый равенством

$$\sigma_\tau x(t) = \begin{cases} x(t/\tau), & 0 \leq t \leq \min(1, \tau), \\ 0, & \min(1, \tau) < t \leq 1, \end{cases} \quad \tau > 0,$$

ограничен в каждом симметричном пространстве X . Нижний и верхний индексы Бойда пространства X определяются соотношениями

$$\alpha_X = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{X \rightarrow X}}{\ln \tau}, \quad \beta_X = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{X \rightarrow X}}{\ln \tau}.$$

Всегда $0 \leq \alpha_X \leq \beta_X \leq 1$. Если $0 < \alpha_X \leq \beta_X < 1$, то говорят, что симметричное пространство X имеет нетривиальные индексы Бойда.

Примерами симметричных пространств являются пространства L^p , Орлича L_Φ , Лоренца L_φ , Марцинкевича M_φ и др. (см. [1]).

Теорема 1. *Пусть*

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_{BMO_d} < \infty,$$

где каждая функция f_i , $\int_0^1 f_i(t) dt = 0$, имеет простой спектр Хаара. Тогда оператор T_f ограничен в каждом симметричном пространстве X с нетривиальными индексами Бойда $0 < \alpha_X \leq \beta_X < 1$.

Пусть $s \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+^s = \{\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_s) : k_1, \dots, k_s \geq 0\}$ и $\langle \mathbf{k} \rangle := k_1 + \dots + k_s$. Для $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^s$ положим

$$V^\mathbf{k} = V_0^{k_1} V_1 V_0^{k_2} V_1 \dots V_1 V_0^{k_s}.$$

Функцию вида

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^s} c_\mathbf{k} V^\mathbf{k}$$

будем называть хаосом Хаара порядка s . Обозначим \mathcal{H}_{ch}^s множество всех таких функций.

Теорема 2. Пусть $f \in \mathcal{H}_{ch}^s$, $s \in \mathbb{N}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $f \in \bigcap_{1 < q < \infty} L^q$;
- 2) функция $\widehat{f}(\mathbf{z}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^s} c_\mathbf{k} \mathbf{z}^\mathbf{k}$ аналитична в единичном поликруге \mathbb{D}^s ;
- 3) оператор T_f ограничен в каждом симметричном пространстве X с нетривиальными индексами Бойда.

Теорема 3. Пусть $f \in \mathcal{H}_{ch}^1$ — хаос Хаара порядка $s = 1$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) функция $\widehat{f}(z)$ аналитична и не обращается в нуль в \mathbb{D} ;
- 2) оператор T_f является изоморфизмом каждого сепарабельного симметричного пространства X с нетривиальными индексами Бойда.

Теорема 4. Если оператор T_f является изоморфизмом в L^{p_0} при некотором $p_0 \in (1, \infty)$, то он также является изоморфизмом в L^p для всех $1 < p < p_0$.

Заметим, что если T_f — изоморфизм сепарабельного симметричного пространства X с нетривиальными индексами Бойда, то система сжатий и сдвигов функции f эквивалентна системе Хаара и поэтому является безусловным базисом пространства X .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. М. : Наука, 1978.
2. Асташкин С. В., Терехин П. А. Об ограниченности оператора, порожденного мультисдвигом Хаара // Докл. АН. 2017. Т. 476, № 2. С. 133–135.
3. Astashkin S. V., Terekhin P. A. Sequences of dilations and translations in function spaces // J. Math. Anal. Appl. 2018. Vol. 457, № 1. P. 645–671.