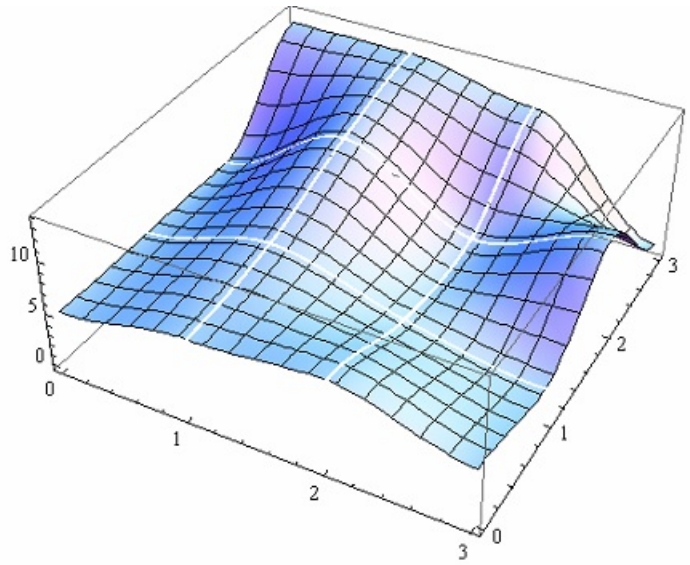

Рис. 2

Из рис. 1, 2 видно, что при использовании формул гладкой интерполяции наклон поверхности меняется плавно, что важно во многих приложениях.

Многомерные двухточечные многочлены Эрмита наряду с задачами интерполяции сеточных функций могут использоваться для аппроксимации функций многих переменных, облададающих требуемым уровнем гладкости, определяемой непрерывностью производных соответствующего порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений. Т. 1. М. : Физматлит, 1962. 464 с.

2. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. СПб. : БХВ-Петербург, 2011. 592 с.

3. *Шустов В. В.* О приближении функций двухточечными интерполяционными многочленами Эрмита // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 7. С. 1091–1108

4. *Кудрявцев Л. Д.* Математический анализ. Т. 2. М. : Высш. шк., 1981. 584 с.

УДК 517.52

О НЕУЛУЧШАЕМОСТИ S-МАЖОРАНТЫ ДЛЯ ПОТОЧЕЧНОГО ПРИЗНАКА СХОДИМОСТИ ДИНИ ПО ОБОБЩЁННЫМ СИСТЕМАМ ХААРА И УОЛША

В. И. Щербаков (Жуковский, Россия)

kafmathan@mail.ru

Пусть $p_0 = 1, \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — целочисленная последовательность с $p_n \geq 2$; $m_n = \prod\limits_{k=0}^{n} p_k$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Всякое натуральное число n единственным образом представимо в виде

$$n = \sum_{k=0}^{s} a_k m_k = a_s m_s + n', \tag{1}$$

где a_k, s и n' — целые с $0 \le a_k < p_{k+1}$, $1 \le a_s < p_{s+1}$, $0 \le n' < m_s$.

Рассмотрим группу целочисленных последовательностей $G = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} | x_n = 0, 1, \ldots p_n - 1\}$ с операцией $\dot{+}$ и обратной операцией $\dot{-}$. Окрестностями нуля в G является вложенная система подгрупп

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_n \supset \ldots$$

$$\text{с} \quad G_n = \{\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in G | x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0\};$$

фактор-группа $G_{n-1} \setminus G_n$ имеет порядок p_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Пусть $e_n = \{\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1 \text{ раз}}, 1, 0, 0, \ldots\}$ — базисные элементы в $G_n \setminus G_{n-1} \in G$. Тогда имеет место формула

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = x_1 e_1 \dot{+} x_2 e_2 \dot{+} \ldots \dot{+} x_n e_n \dot{+} \ldots (\text{ для } x \in G \text{ и целого } n \ge 0 : nx = \underbrace{x \dot{+} \ldots \dot{+} x}_{n \text{ раз}} \text{ и } 0x = 0). \tag{2}$$

Рассмотрии следующее отображение (его иногда называют отображением Монна [1, 2]:

$$G \ni x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mapsto \langle x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{m_n} \in [0, 1]. \tag{3}$$

$\{p_n\}$ — иррациональные числа отрезка $[0, 1]$, а также ноль и единица имеют единственные прообразы в G по отображению (3); числа $\frac{l}{m_n}$ $(l = 1, 2, \ldots, p_n - 1;\ n = 1, 2, \ldots)$ в G имеют два прообраза, один из которых конечен (то есть с нулями в конце последовательности: $(\frac{l}{m_n})_k = 0$ для $k > n$; его мы обозначим за $\frac{l}{m_n}$, а другой — бесконечен, который будем обозначать как $\frac{l}{m_n} - ((\frac{l}{m_n} -)_k = p_k - 1$ при $k > n)$. С учётом вышеприведённых обозначений группа последовательностей G перешла в *модифицированный отрезок* $[0, 1]$, где $\{p_n\}$ — рациональные точки «раздвоились».

Обозначим за $G_{l,n} = le_n \dot{+} G_n$ (на модифицированном отрезке $[0, 1]$ смежный класс $G_{l,n}$ соответствует отрезку $[\frac{l}{m_n}; \frac{l+1}{m_n} -]$, $l = 0, 1, \ldots p_n - 1$, $n = 1, 2, \ldots$.

Положив $\mu(x \dot{+} G_n) = \frac{1}{m_n}$, по схеме Лебега определяем меру (на борелевских множествах она совпадает с мерой Хаара) и абсолютно сходящийся интеграл на G. За $L(G)$ обозначим множество функций, интеграл от которых по группе G абсолютно сходится. Аналогично действительной прямой определяем ортогональные и ортонормированные системы функций. Рассмотрим следующие ортонормированные системы функций:

1) $\Psi = \{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty} : \psi_0(x) \equiv 1$, $\psi_{m_k}(x) = \exp\frac{2i\pi x_{k+1}}{p_{k+1}}$ и $\psi_n(x) = \prod\limits_{k=0}^{s}(\psi_{m_k}(x))^{a_k}$, а также

2) $\Gamma = \{\gamma_n(x)\}_{n=0}^{\infty} : \gamma_0(x) \equiv 1$;

$\gamma_{m_k}(x) = \begin{cases} \sqrt{m_k}\exp(\frac{2i\pi x_{k+1}}{p_{k+1}}), & \text{если } x \in G_k, \\ 0 & \text{для } x \in G \setminus G_k \end{cases}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ и $\gamma_n(x) = \gamma_{a_s m_s + n'}(x) = \left(\gamma_{m_s}\left(x \dot{-} \left(\frac{n'}{m_s}\right)\right)\right)^{a_s}$, где числа s, a_s и n'– определены равенством (1), и $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in G$.

Для $p_n \equiv 2$ система Ψ является системой Уолша [3] в нумерации Пэли [4], для $p_n \equiv p$ — системой Крестенсона [5] (либо Крестенсона – Леви); в общем случае — системой Прайса [6] либо (для простых p_n) — системой Виленкина на модифицированном отрезке $[0, 1]$ (Н. Я. Виленкин [7] систему Ψ рассматривал как систему характеров нульмерной компактной абелевой группы).

При $p_n \equiv 2$ система Γ (на отрезке $[0, 1]$) переходит в систему Хаара [8]; для $\sup\limits_n p_n < \infty$ она рассматривалась (на отрезке $[0, 1]$) Н. Я. Виленкиным [9], Б. И. Голубовым и А. И. Рубинштейном [10]; для любых p_n (также на отрезке $[0, 1]$) — Б. И. Голубовым [11]; на нульмерных компактных абелевых группах она исследовалась С. Ф. Лукомским [12].

Следующая функция (в [13] она обозначена как $q(x)$)

$$S(x) = \frac{m_n}{\sin\frac{\pi x_{n+1}}{p_{n+1}}} \quad \text{для} \quad x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in G_n \setminus G_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

является мажорантой ядер Дирихле как для систем Ψ (см. [13]), так и для Γ (см. [14]).

В [13] доказана следующая

Теорема S. *Если выполнено условие*

$$\int\limits_{G \setminus G_n} |f(x \dot{+} t) - f(x)| S(t)\, dt < \infty, \tag{4}$$

то ряд Фурье по системе Ψ от функции $f(t) \in L(G)$ сходится к ней в точке $x \in G$.

Для систем Γ условие (4) можно заменить на более слабое (см., напр. [14])

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{G_n \setminus G_n + 1} |f(x \dot{+} t) - f(x)| S(t)\, dt = 0 \tag{5}$$

(откуда, в частности, следует, что для $\sup\limits_n p_n < \infty$ Γ является системой сходимости).

На одном из семинаров по теории ортогональных и тригонометрических рядов П. Л. Ульяновым был задан вопрос: сколь минимальна функция $S(t)$. То есть если $q(t) \geq 0$ такова, что

$$\lim_{t\to 0} \frac{q(t)}{S(t)} = 0, \tag{6}$$

то существует ли функция $f(t) \in L(G)$ такая, что

$$\int\limits_{G\setminus G_n} |f(x \dot{+} t) - f(x)| q(t)\, dt < \infty, \tag{7}$$

однако её ряд Фурье по системе Ψ расходится в точке $x \in G$. Ответ даёт следующая

Теорема 1. *Для всякой функции $q(t) \geq 0$, удовлетворяющей условию (6), найдётся $f(t) \in L(G)$ такая, что выполнено (7), однако её ряд Фурье по системе Γ, а также по системе Ψ, расходится в точке $x \in G$.*

Однако я несколько изменил условие (6) (для систем Ψ), то есть показал, что верна

Теорема 2. *Пусть $q(t)$ постоянна на смежных классах $G_{l,n}$ $(l = 1, 2, \ldots, p_n - 1;\ n = 1, 2, \ldots)$ и*

$$\liminf_{t\to 0} \frac{q(t)}{S(t)} = 0. \tag{8}$$

Тогда найдётся функция $f(t) \in L(G$ такая, что выполнено (7), однако её ряд Фурье по системе Ψ расходится в точке $x \in G$.

Из этой теоремы, в частности, следует, что

1) условие $\int\limits_{G\setminus G_n} |f(x \dot{+} t) - f(x)| \langle \frac{1}{t} \rangle\, dt < \infty$ (классический признак Дини) не может гарантировать сходимости ряда Фурье от функции $f(t) \in L(G)$ по системе Ψ;

2) на группах Н. Я. Виленкина (нульмерных компактных абелевых группах) сходимость ряда Фурье по системам Н. Я. Виленкина (S-признак Дини (4)) зависит от выбора базисных элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} (e_n \in G_n \setminus G_{n+1})$.

Отметим, что для системы Γ теорема 2 уже не имеет места (то есть (даже при $\sup\limits_n p_n = \infty$) могут быть функции $q(t)$, удовлетворяющие (8), однако из условия (7) будет следовать сходимость ряда Фурье функции $f(t) \in L(G)$ в точке $x \in G$. Отметим, что обобщение П. Л. Ульянова (6) (теорема 1) остаётся справедливым и для систем Γ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Monna A. F.* Analysys non-Archimedence. Berlin ; Heidelberg ; N. Y. : Springer-Veilag, 1970. 118 p.

2. *Хренников А. Ю., Шелкович В. М.* Современный p-аддический анализ и математическая физика // Теория и приложения. М. : Физматгиз, 2012. 452 с.

3. *Walsh J. L.* A constructive of normal orthonormal functions // Amer. J. Math. 1923. Vol. 49, № 1. P. 5–24.

4. *Paley R. E. A. C.* A remarkable series of orthonormal functions // Proc. of London Math Soc. 1932. Vol. 36. P. 241–264.

5. *Chrestenson H. E.* A class of generalized Walsh functions // Pac. J. Math. 1955. Vol. 5, № 1, P. 17 –31.

6. *Price J. J.* Certain groups of orthonormal step functions // Canad. J. Math. 1957. Vol. 9, № 3. P. 413–425.

7. *Виленкин Н. Я.* Об одном классе полных ортонормальных систем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1947. Т. 11, № 4, С. 363–400.

8. *Haar A.* Zur Theorie des Orthogonalischen Functionsysteme // Mathem. Anal. 1910. B. 69. S. 331–371.

9. *Качмаж С., Штейнгауз Г.* Теория ортгональных рядов. М. : Физматгиз, 1958. Дополнения Н. Я. Виленкина, § 1, п. 6. С. 475–479.

10. *Голубов Б. И., Рубинштейн А. И.* Об одном классе систем сходимости // Матем. сб. Нов. сер. 1966. Т. 71, вып. 1. С. 96–115.

11. *Голубов Б. И.* Об одном классе полных ортонормальных систем // Сиб. матем. журн. 1968. Т. IX, № 2. С. 297–314.

12. *Лукомский С. Ф.* О рядах Хаара на компактной нульмерной группе // Изв. Сарат. ун-та Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 1. С. 24–29.

13. *Щербаков В. И.* О поточечной сходимости рядов Фурье по мультипликативным системам // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Матем. 1983. № 2. С. 37–42.

14. *Щербаков В. И.* Мажоранты ядер Дирихле и поточечные признаки Дини для обобщённых систем Хаара // Матем. заметки. 2017. Т. 101, вып. 3. С. 446–473.

УДК 517.984

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПУЧКОВ НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ КОМПАКТНЫХ ГРАФАХ[1]

В. А. Юрко (Саратов, Россия)
YurkoVA@info.sgu.ru

Исследуется обратная спектральная задача для несамосопряженных пучков дифференциальных операторов второго порядка, заданных на произвольных компактных графах при стандартных условиях склейки во внутренних вершинах и краевых условиях в граничных вершинах. Основное внимание уделено наиболее важной нелинейной обратной задаче восстановления коэффициентов дифференциальных уравнений (потенциалов) при условии, что структура графа известна априори. Для этой

[1]Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (проект № 1.1660.2017/4.6) и РФФИ (проекты № 16-01-00015, № 17-51-53180)