

где $S_{2^n+j}(x)$ — значение частичных сумм в точке x , ω_f , ω_f^2 — модули непрерывности первого и второго порядка.

Обозначим $F(x) = \varphi_m(\frac{x}{2^m})$. Отметим, что $\text{supp}F = [0, 2^m]$.

Теорема 1. Справедливо равенство

$$F(x) = \frac{1}{2^m} F(2x - 0) + \sum_{t=1}^{2^m-1} \frac{1}{2^{m-1}} F(2x - t) + \frac{1}{2^m} F(2x - 2^m)$$

При каждом $n \in \mathbb{Z}$ образуем подпространства

$$V_n = \overline{(2^{\frac{n}{2}} F(2^n x + k))_{k \in \mathbb{Z}}}$$

Определение 2. Если выполнены условия (аксиомы)

- A1) $V_n \in V_{n+1}$;
- A2) $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n = L_2(\mathbb{R})$;
- A3) $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} V_n = 0$,

то совокупность $(V_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ называют *обобщенным кратномасштабным анализом*. Говорят также, что функция F порождает *обобщенный КМА*.

Теорема 2. Совокупность $(V_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ образует обобщенный КМА.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чумаченко С. А. Об одном из аналогов системы Фабера – Шаудера // Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского. 2016. Т. 53. С. 163.
2. Hongkai Zhao, editor Mathematics in image processing // IAS/Park City mathematics series. 2013. Vol. 19. P. 245.
3. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М. : АЦФ, 1999. 550 с.
4. Аубакиров Т. У., Бокаев Н. А. О новом классе систем функций типа Фабера – Шаудера // Матем. заметки. 2007. Т. 82, № 5. С. 643–651.

УДК 517.518

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ГЛАДКИМИ ФУНКЦИЯМИ НА ТРЕУГОЛЬНОЙ СЕТКЕ¹

С. А. Чумаченко, А. М. Шеина (Саратов, Россия)
chumachenkosa@info.sgu.ru, sheinaam@info.sgu.ru

Рассмотрим третью функцию Уолша. Проинтегрировав дважды эту функцию, получим гладкую функцию

$$\psi(x) = (4I)^2 \omega_3(x),$$

¹Работа Чумаченко С. А. поддержана грантом РФФИ 16-01-00152а.

где $If(x) = \int_0^x f(t)dt$ – оператор интегрирования. Можно выписать явное представление функции $\psi(x)$:

$$\psi(x) = \begin{cases} 8x^2, & x \in (0, \frac{1}{4}], \\ -1 + 8x - 8x^2, & x \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}], \\ 8(1 - 2x + x^2), & x \in (\frac{3}{4}, 1], \\ 0, & x \notin (0, 1). \end{cases}$$

Можно заметить, что функция $\psi(x)$ является сплайном второй степени. Ранее эта функция была рассмотрена в [1], [2].

Рассмотрим функцию

$$\psi(x, y) = \psi \left(\sqrt{\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2} \right),$$

то есть функцию, полученную вращением функции $\psi(x)$ вокруг оси симметрии.

Ставится задача об оценке точности интерполяции функции $f(x, y)$ над треугольной сеткой, порожденной правильными треугольниками со стороной d , псевдомногочленом

$$P(x, y) = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \cdot \psi \left(\frac{2}{d}(x - x_k), \frac{2}{d}(y - y_k) \right),$$

где (x_k, y_k) – узлы треугольной сетки.

Для оценки точности интерполяции на ребре треугольной сетки верна следующая теорема

Теорема. Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в области $D \subset \mathbb{R}$, (M_k) – равномерная треугольная сетка в D со стороной d , $P(x, y)$ – интерполяционный псевдомногочлен, построенный по этой сетке. Тогда для точек (x, y) , лежащих на ребре $[M_{k_1}, M_{k_2}]$, справедлива оценка

$$|f(x, y) - P(x, y)| \leq 2\omega_d(f) + 0.036|f(M_{k_3}) - f(M_{k_4})|d^2,$$

где M_{k_3} и M_{k_4} вершины треугольников со стороной $[M_{k_1}, M_{k_2}]$, $\omega_d(f)$ – модуль непрерывности функции f .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Чумаченко С. А. Об одном из аналогов системы Фабера – Шаудера // Тр. Мат. Центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 53. 2016. Т. 53. С. 163–164.

2. Шеина А. М. О сходимости орторекурсивного разложения по гладкой системе типа Фабера – Шаудера // Математика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2017. Вып. 19. С. 107–111.

УДК 517.53

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОГО ВИДА В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Ф. А. Шамоян (Брянск, Россия)

shamoyanfa@yandex.ru, shamoyanfa@yandex.ru

1. Пусть $\mathbb{C}_+^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Im} z_j > 0, j = 1, \dots, n\}$, $N(\mathbb{C}_+^n) = \{f : f(z) = \frac{h_1(z)}{h_2(z)}, h_j(z) \in H^\infty(\mathbb{C}_+^n), j = 1, 2, h_2(z) \neq 0, z \in \mathbb{C}_+^n\}$ — класс функций ограниченного вида в \mathbb{C}_+^n . В одномерном случае класс $N(\mathbb{C}_+^n)$ совпадает с классом \mathbb{P} . Неванлины в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+ := \mathbb{C}_+^1$ (см. [1]), при $n \geq 2$ класс Неванлины, т.е класс функций f , для которых $\ln|f|$ имеет n — гармоническую мажоранту и $N(\mathbb{C}_+^n)$ совершенно разные (см. [2, 3]). Известно, что если f принадлежит классу В. И. Смирнова $N^+(\mathbb{C}_+^n)$ (см. [2, 4]) и ее граничные значения на \mathbb{R}^n принадлежат $L^1(\mathbb{R}^n)$, то f принадлежит классу Харди $H^1(\mathbb{C}_+^n)$ и тем самым преобразование Фурье этой функции $\hat{f}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \exp^{-itx} dt$ обращается в нуль на $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}_+^n$. Простой пример функции

$$f_a(z) = \prod_{j=1}^n e^{(-ia_j z_j)} \frac{1}{(i + z_j)^2}, \quad z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}_+^n, \quad (1)$$

$a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n$, показывает, что такое утверждение не верно для $N(\mathbb{C}_+^n)$. При $n = 1$ в работе [5] было установлено, что если $\hat{f}(x) \rightarrow 0$, при $x \rightarrow -\infty$, достаточно сильно, то функция $\hat{f}(x)$ равна нулю тождественно на \mathbb{R}_- . При этом найдено необходимое и достаточное условие на скорость этого убывания при которых справедливо упомянутое утверждение. Для доказательства указанного результата существенную роль сыграло факторизационное представление функции из класса $N(\mathbb{C}_+)$ (см. [1]).

При $n \geq 2$ хорошо известно, что такие представления отсутствуют (см. [2, 3]). Здесь мы предложим другой подход для доказательства таких результатов при $n \geq 2$. Кроме того, приведем, на наш взгляд, ряд интересных приложений в теории квазианалитических классов функций.

2. Пусть $M(r) = M(r_1, \dots, r_{j-1}, r_n) \in \mathbb{R}_+^n$ положительная, монотонно растущая функция по каждой переменной $r_j \in \mathbb{R}_+$, $1 \leq j \leq n$, при фиксированных $r' = (r_1, \dots, r_{j-1}, r_{j+1}, r_n) \in \mathbb{R}_+^{n-1}$, такая что