СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Царьков И. Г.* Свойства множеств, обладающих непрерывной выборкой из оператора P^δ // Матем. заметки. 1990. Т. 48, № 4. С. 122–131.

2. *Царьков И. Г.* Свойства множеств, обладающих устойчивой ε-выборкой // Матем. заметки. 2011. Т. 89, № 4. С. 608–613.

3. *Алимов А. Р., Царьков И. Г.* Связность и другие геометрические свойства солнц и чебышевских множеств // Фундаментальная и прикладная математика. 2014. Т. 63, № 4. С. 21–91.

4. *Алимов А. Р., Царьков И. Г.* Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения // Успехи математических наук. 2016. Т. 71, № 1. С. 3–84

5. *Царьков И. Г.* Непрерывная ε-выборка //Математический сборник. 2016. Т. 207, № 2 С. 123–142

6. *Царьков И. Г.* Локальная и глобальная непрерывная ε-выборка // Известия РАН. 2016. Т. 80, № 2. С. 165–184.

7. *Царьков И. Г.* Непрерывные выборки из множества ближайших и почти ближайших точек // ДАН. 2017. Т. 475, № 4. С. 1-4.

8. *Царьков И. Г.* Непрерывная выборка из многозначных отображений // Известия РАН. 2017. Т. 81, № 3. С. 189–216.

9. *А. Р. Алимов* Выборки из метрической проекции и строгая солнечность множеств с непрерывной метрической проекцией // Матем. сб. 2017. Т. 208, № 7. С. 3–18

10. *L. Górniewicz.* Topological fixed point theory of multivalued mappings. Springer, Dordrecht. 2006.

УДК 517.518.82

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА ОТ РАЦИОНАЛЬНОГО МОДУЛЯ НА СТАНДАРТНОМ ОТРЕЗКЕ

Д. Г. Цветкович Д.Г., И. В. Тихонов И.В, В. Б. Шерстюков (Москва, Россия)

dianacve@inbox.ru, ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com

Для функции $f \in C[0,1]$ полиномы Бернштейна вводят формулой

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

где C_n^k — обычные биномиальные коэффициенты. Основные сведения по теории полиномов Бернштейна представлены в [1–3].

В случае простого симметричного модуля

$$f(x) = |2x-1|, \qquad x \in [0,1], \tag{2}$$

полиномы (1) удовлетворяют специальному *правилу склеивания*

$$B_{2m+1}(f,x) = B_{2m}(f,x), \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

и для них справедливо разложение

$$B_{2m}(f,x) = 1 - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2k-1}\, C_{2k}^{k} \big(x(1-x)\big)^{k}, \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

восходящее к работе Поповичу [4] (см. также [5, 6]).

Заменим теперь (2) на произвольный рациональный модуль

$$f(x) = |qx - p|, \qquad x \in [0,1], \tag{5}$$

с изломом в точке $c = p/q \in (0,1)$, НОД $(p,q) = 1$. Для полиномов Бернштейна от функции (5) правило склеивания приобретает вид

$$B_{qm+1}(f,x) = B_{qm}(f,x), \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

очевидно обобщающий формулу (3). Подробнее про правило склеивания см. [6]. Цепочку полиномов $B_{qm}(f,x)$ при выборе (5) целесообразно выделять из общей последовательности полиномов (1).

Оказывается, для полиномов Бернштейна от любого рационального модуля можно установить аналоги разложения Поповичу (4). Используем стандартные обозначения $\lfloor a \rfloor$ и $\lceil a \rceil$ для пола и потолка числа $a \in \mathbb{R}$. Для несократимой дроби $c = p/q \in (0,1)$ и любого $m \in \mathbb{N}$ введем специальные полиномы

$$Q_{p/q,\,m}^{\nu,\,d}(x) \;=\; \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{qk+\nu}\, C_{qk+\nu}^{pk+d} \big(x^{p}(1-x)^{q-p}\big)^{k}, \quad \nu \in \mathbb{N}, \quad d \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

и два множества

$$\Delta_{p/q}^{(1)} \;=\; \{\, \nu \in \mathbb{N} :\; \nu \leqslant q-1,\; \lceil c\nu \rceil \leqslant c(\nu+1) \,\},$$

$$\Delta_{p/q}^{(2)} \;=\; \{\, \nu \in \mathbb{N} :\; \nu \leqslant q-1,\; \lceil c\nu \rceil > c(\nu+1) \,\}.$$

Тогда при выборе функции

$$f(x) = |x - c|, \qquad x \in [0,1], \tag{7}$$

с изломом в точке $c = p/q \in (0,1)$, НОД $(p,q) = 1$, справедлива формула

$$B_{qm}(f,x) = c + (1-2c)x - 2\left(P_{c,m}^{(1)}(x) \;+\; P_{c,m}^{(2)}(x)\right), \quad m \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

где

$$P_{c,m}^{(1)}(x) = \sum_{\nu \in \Delta_c^{(1)}} \big(\lceil c\nu \rceil - c\nu\big)\, x^{\lceil c\nu \rceil}(1-x)^{\nu - \lfloor c\nu \rfloor}\, Q_{c,\,m}^{\nu,\,\lceil c\nu \rceil}(x),$$

$$P^{(2)}_{c,m}(x) = \sum_{\nu\in\Delta^{(2)}_c} \left(c\nu - \lfloor c\nu \rfloor\right) x^{\lceil c\nu\rceil}(1-x)^{\nu-\lfloor c\nu\rfloor}\, Q^{\nu,\lfloor c\nu\rfloor}_{c,m}(x).$$

Полиномы $B_{qm+1}(f,x)$ тоже выражаются в виде (8) из-за наличия правила (6). Остальные полиномы

$$B_{qm+r}(f,x), \qquad r = 2,\, \dots\,,\, q-1,$$

от рационального модуля (7) допускают разложения, аналогичные (8), с соответствующими техническими поправками. Коррекция формулы (8) при возвращении к функции (5) очевидна.

В частности, для функции (2) из общей формулы (8) следует разложение Поповичу (4). Для функции $f(x) = |3x-1|$ на $[0,1]$ получим

$$\begin{aligned} B_{3m}(f,x) = 1 + x - 2\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{3k-1}\, C^{k}_{3k-1}\left(x(1-x)^2\right)^k - \\ - 2x(1-x)\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{3k+1}\, C^{k}_{3k+1}\left(x(1-x)^2\right)^k, \qquad m\in\mathbb{N}. \end{aligned}$$

Для функции $f(x) = |5x-3|$ на $[0,1]$ получим

$$\begin{aligned} B_{5m}(f,x) = 3 - x - 4x(1-x)\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{5k+1}\, C^{3k+1}_{5k+1}\left(x^3(1-x)^2\right)^k - \\ - 2x^2(1-x)^2\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{5k+3}\, C^{3k+2}_{5k+3}\left(x^3(1-x)^2\right)^k - \\ - 6\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{5k-1}\, C^{3k}_{5k-1}\left(x^3(1-x)^2\right)^k - \\ - 2x^2(1-x)\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{5k+2}\, C^{3k+1}_{5k+2}\left(x^3(1-x)^2\right)^k, \quad m\in\mathbb{N}, \end{aligned}$$

и так далее. Возникающие формулы отнюдь не очевидны.

С помощью подобных разложений можно исследовать скорость сходимости полиномов Бернштейна для любого рационального модуля (5) в области сходимости, ограниченной лемнискатой

$$\left|z^p\,(1-z)^{q-p}\right| = \left(\frac{p}{q}\right)^p \left(1-\frac{p}{q}\right)^{q-p}, \qquad z\in\mathbb{C}. \tag{9}$$

Эти же разложения полезны при изучении сходимости нулей полиномов Бернштейна к лемнискате (9), как к своему аттрактору (см. [7]).

Имеются аналогичные разложения для полиномов Бернштейна в случае произвольного модуля (7) с любым (не обязательно рациональным) значением $c \in (0,1)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lorentz G. G.* Bernstein Polynomials. Toronto : Univ. of Toronto Press, 1953. 130 p.

2. *Виденский В. С.* Многочлены Бернштейна. Учебное пособие к спецкурсу. Л. : ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1990. 64 с.

3. *Bustamante J.* Bernstein Operators and Their Properties. Birkhäuser, 2017. 420 p.

4. *Popoviciu T.* Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur // Mathematica. 1935. T. 10. P. 49–54.

5. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Приближение модуля полиномами Бернштейна // Вестник ЧелГУ. Математика. Механика. Информатика. 2012. Вып. 15. № 26. С. 6–40.

6. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Полиномы Бернштейна: старое и новое // Матем. форум. Том. 8. Часть 1. Исследования по матем. анализу. Владикавказ : ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014. С. 126–175.

7. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г.* Как выглядят аттракторы нулей для классических полиномов Бернштейна // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2017. № 2. С. 59–73.

УДК 517.5

ДВОИЧНЫЕ МАСШТАБИРУЮЩИЕ СПЛАЙН-ФУНКЦИИ[1]

С. А. Чумаченко (Саратов, Россия)

chumachenkosergei@gmail.com

Пусть $If(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt$ $(x \in [0,1])$ — оператор интегрирования, $W_{2^m-1}(x) = \prod\limits_{k=0}^{m-1} r_k(x)$ — функции Уолша, $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$.

Определение 1. Функцию

$$\varphi_m(x) = \begin{cases} 2^{\frac{m^2+3m-2}{2}} I^m W_{2^m-1}(x), & x \in [0,1], \\ 0, & x \notin [0,1]. \end{cases}$$

будем называть *двоичным базисным сплайном m-й степени.*

Для удобства, мы выбрали функции φ_m нормированными в C. В [1] было доказано, что система сжатий и сдвигов функции $\varphi_m(x)$ является базисом в пространстве $C_0[0,1]$ и справедливо неравенство

$$|f(x) - S_{2^n+j}(x)| \leq \omega_f(\frac{1}{2^{n+2}}) + \omega_f^2(\frac{1}{2^{n+2}}).$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00152).