

КРИТЕРИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ε -ВЫБОРОК¹

И. Г. Царьков (Москва, Россия)
 tsar@mech.math.msu.su

В связи с большим количеством различных нелинейных и невыпуклых приближающих объектов в различных функциональных пространствах (например, в L_p , $C(Q)$, W_p^r) становятся актуальными задачи изучения устойчивости как наилучших приближений, так и почти наилучших. И в этом случае теоретический и практический интерес приобретает задача построения устойчивого алгоритма аппроксимации. Часто классические объекты аппроксимации не являются компактными в каком-нибудь смысле (сильном или слабом), и при приближении элементы наилучшего приближения могут не существовать или не быть единственными, тем не менее даже в этом случае удается строить устойчивые выборки из операторов почти наилучших приближений. Для самих же наилучших элементов приближений представляет интерес их характеристизация среди других элементов приближающего множества (т.е. изучение их солнечных свойств). Аппарат непрерывных выборок из операторов ε -проекций часто предоставляет возможность для ответа на эти вопросы. Некоторые результаты, связанные с этой тематикой, можно посмотреть в работах [1–9].

Через $B(x, r)$ и $\mathring{B}(x, r)$ обозначим соответственно замкнутый и открытый шар в линейном полунормированном пространстве $\mathcal{X} = (X, \|\cdot\|)$ с центром x радиуса r , т.е. соответственно множества $\{y \in X \mid \|y - x\| \leq r\}$ и $\{y \in X \mid \|y - x\| < r\}$. Через $S(x, r)$ обозначим сферу с центром x радиуса r , т.е. множество $\{y \in X \mid \|y - x\| = r\}$.

Для произвольного множества M в некотором полунормированном пространстве \mathcal{X} через $\varrho(y, M)$ ($y \in X, M \subset X$) обозначим расстояние до множества M , т.е. величину $\inf_{z \in M} \|z - y\|$.

Через $P_M x$ обозначим множество всех ближайших точек из M для $x \in X$, т.е. множество $\{y \in M \mid \|y - x\| = \varrho(x, M)\}$. Для произвольных $x \in X$ и $\delta > 0$ рассмотрим также метрические δ -проекции $P_M^\delta x$ и $\mathring{P}_M^\delta x$ представляющие собой соответственно множества $\{y \in M \mid \|y - x\| \leq \varrho(x, M) + \delta\} = M \cap B(x, \varrho(x, M) + \delta)$ и $\{y \in M \mid \|y - x\| < \varrho(x, M) + \delta\} = M \cap \mathring{B}(x, \varrho(x, M) + \delta)$. Аналогично определяются соответствующие проекции и в случае, когда $\delta = \delta(\cdot)$ — положительная функция на X или на каком-то его подмножестве.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00295-а).

Определение 1. Пусть $\varepsilon > 0$, $M \subset X$. Отображение $\varphi : X \rightarrow M$ называется *аддитивной* (*мультипликативной*) ε -выборкой, если для всех $x \in X$ выполняется неравенство

$$\|\varphi(x) - x\| < \varrho(x, M) + \varepsilon$$

(соответственно $\|\varphi(x) - x\| \leq (1 + \varepsilon)\varrho(x, M)$). В случае, когда эти неравенства выполняются на некотором множестве $E \subset X$ будем говорить о ε -выборке на E .

Определение 2. Множество A в полуметрическом пространстве (Y, ν) называется *бесконечно связным*, если для всех $n \in \mathbb{N}$ и единичного шара $B \subset \mathbb{R}^n$ и произвольного непрерывного отображения $\varphi : \partial B \rightarrow A$ существует непрерывное продолжение $\tilde{\varphi} : B \rightarrow A$.

Определение 3. Множество $M \subset X$ называется *\mathring{B} -бесконечно связным*, если пересечение множества M с любым открытым шаром либо пусто, либо бесконечно связно. Множество $M \subset X$ называется *\mathring{B} -стягиваемым*, если пересечение множества M с любым открытым (замкнутым) шаром либо пусто, либо стягиваемо.

Определение 4. Компакт Y называется *клеточноподобным*, если существует абсолютный окрестностный ретракт Z и вложение $i : Y \rightarrow Z$ такое, что образ $i(Y)$ стягиваем в любой своей окрестности $U \subset Z$ (см. [10]).

Отметим, что счетное пересечение стягиваемых компактов, образующих вложенную последовательность, является клеточноподобным (см. [10]).

Определение 5. Пусть M — непустое подмножество линейного нормированного пространства $(X, \|\cdot\|)$. Точку $x \in X$ называют *точкой аппроксимативной компактности*, если для любой последовательности $\{y_n\} \subset M : \|x - y_n\| \rightarrow \varrho(x, M)$ ($n \rightarrow \infty$) существует подпоследовательность $\{y_{n_k}\}$, сходящаяся к некоторой точке $y_0 \in M$. Обозначение $x \in AC(M)$. Если $AC(M) = X$, то множество M называется *аппроксимативно компактным*.

Теорема 1. Пусть X — банахово пространство, $M \subset X$ аппроксимативно компактное множество. Тогда следующие условия равносильны:

- 1) M обладает непрерывной ε -выборкой для всех $\varepsilon > 0$;
- 2) $P_M x$ является UV^∞ -множеством для всех $x \in X$;
- 3) $P_M x$ является клеточноподобным множеством для всех $x \in X$;
- 4) M является \mathring{B} -бесконечно связным множеством;
- 5) M является \mathring{B} -стягиваемым множеством.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Царьков И. Г. Свойства множеств, обладающих непрерывной выборкой из оператора P^δ // Матем. заметки. 1990. Т. 48, № 4. С. 122–131.
2. Царьков И. Г. Свойства множеств, обладающих устойчивой ε -выборкой // Матем. заметки. 2011. Т. 89, № 4. С. 608–613.
3. Алимов А. Р., Царьков И. Г. Связность и другие геометрические свойства солнц и чебышевских множеств // Фундаментальная и прикладная математика. 2014. Т. 63, № 4. С. 21–91.
4. Алимов А. Р., Царьков И. Г. Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения // Успехи математических наук. 2016. Т. 71, № 1. С. 3–84.
5. Царьков И. Г. Непрерывная ε -выборка // Математический сборник. 2016. Т. 207, № 2 С. 123–142.
6. Царьков И. Г. Локальная и глобальная непрерывная ε -выборка // Известия РАН. 2016. Т. 80, № 2. С. 165–184.
7. Царьков И. Г. Непрерывные выборки из множества ближайших и почти ближайших точек // ДАН. 2017. Т. 475, № 4. С. 1–4.
8. Царьков И. Г. Непрерывная выборка из многозначных отображений // Известия РАН. 2017. Т. 81, № 3. С. 189–216.
9. А. Р. Алимов Выборки из метрической проекции и строгая солнечность множеств с непрерывной метрической проекцией // Матем. сб. 2017. Т. 208, № 7. С. 3–18
10. L. Górniewicz. Topological fixed point theory of multivalued mappings. Springer, Dordrecht. 2006.

УДК 517.518.82

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА ОТ РАЦИОНАЛЬНОГО МОДУЛЯ НА СТАНДАРТНОМ ОТРЕЗКЕ

Д. Г. Цветкович Д.Г., И. В. Тихонов И.В, В. Б. Шерстюков
(Москва, Россия)

dianacve@inbox.ru, ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com

Для функции $f \in C[0, 1]$ полиномы Бернштейна вводят формулой

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

где C_n^k — обычные биномиальные коэффициенты. Основные сведения по теории полиномов Бернштейна представлены в [1–3].

В случае простого симметричного модуля

$$f(x) = |2x - 1|, \quad x \in [0, 1], \quad (2)$$

полиномы (1) удовлетворяют специальному правилу склеивания

$$B_{2m+1}(f, x) = B_{2m}(f, x), \quad m \in \mathbb{N}, \quad (3)$$