УДК 517.518

О ПАРАМЕТРИЗАЦИИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ВСПЛЕСКОВЫХ БАЗИСОВ НА ГРУППАХ ВИЛЕНКИНА

Ю. А. Фарков (Москва, Россия)
farkov@list.ru

Пусть p и n — натуральные числа, $p \geq 2$, $N = p^n$, и пусть $w_k(\omega)$ — функции Уолша для группы Виленкина G_p. Масштабирующее уравнение с N коэффициентами для пространства $L^2(G_p)$ определяется своей маской, т.е. полиномом вида

$$m(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \overline{w_k(\omega)}, \quad \omega \in G_p, \tag{1}$$

где c_k — коэффициенты масштабирующего уравнения. Обозначим через $m_{\boldsymbol{b}}$ маску вида (1), коэффициенты которой вычислены по вектору $\boldsymbol{b} = (b_0, b_1, \ldots, b_{N-1})$ с помощью дискретного преобразования Виленкина-Крестенсона. Компоненты вектора $\boldsymbol{b}$ представляют собой значения маски $m_{\boldsymbol{b}}$, по которым она восстанавливается однозначно (см., например, [1]).

Пусть $\boldsymbol{G}(p,n)$ — множество векторов $\boldsymbol{b} = (b_0, b_1, \ldots, b_{N-1})$ из $\mathbb{C}^N$ таких, что

$$b_0 = 1, \quad |b_l|^2 + |b_{l+p^{n-1}}|^2 + \cdots + |b_{l+(p-1)p^{n-1}}|^2 = 1, \tag{2}$$

для всех $0 \leq l \leq p^{n-1} - 1$. Метод построения по произвольному вектору $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{G}(p,n)$ ортогонального всплескового базиса в пространстве N-периодических последовательностей изложен в [2]. Из этой конструкции в пространствах периодических последовательностей получаются дискретные системы типа Хаара и аналоги всплесков Ленга (см. [2, примеры 1, 2]). В методах параметризации ортогональных всплесков с компактными носителями на вещественной прямой $\mathbb{R}$ основные ограничения связаны со свойством ортонормированности системы целых сдвигов масштабирующей функции (см., например, [3]). При определении ортогональных всплесков в $L^2(G_p)$ роль множества целых чисел играет дискретная группа H. Для того чтобы H-сдвиги масштабирующей функции, ассоциированной с маской $m_{\boldsymbol{b}}$, были ортонормированы в $L^2(G_p)$, необходимо, чтобы вектор $\boldsymbol{b}$ принадлежал множеству $\boldsymbol{G}(p,n)$ (см. [4, предложение 3.1]). Обозначим через $\boldsymbol{W}_0(p,n)$ множество векторов $\boldsymbol{b} = (b_0, b_1, \ldots, b_{N-1})$ из $\boldsymbol{G}(p,n)$, у которых $b_s \neq 0$ для всех $0 \leq s \leq p^{n-1} - 1$, а через $\boldsymbol{W}(p,n)$ — множество векторов $\boldsymbol{b}$ из $\boldsymbol{G}(p,n)$, для которых маски $m_{\boldsymbol{b}}$ удовлетворяют доказанному в [1] критерию Коэна. В общем случае задача построения ортогональных всплесков на группе G_p редуцируется [5] к проверке

ортонормированности H-сдвигов масштабирующей функции, определяемой по маске $m_{\boldsymbol{b}}$ (т.е. к проверке принадлежности вектора $\boldsymbol{b}$ множеству $\boldsymbol{W}(p,n)$). Такую проверку осуществляют тремя способами: 1) по критерию Коэна, 2) по критерию отсутствия у маски блокирующих множеств, 3) с помощью N-валидных деревьев (см. [6; 7, замечание 3.11; 8]). Метод 3) используется [9] при построении ступенчатых всплесков на локальных полях положительной характеристики. Описание множества $\boldsymbol{S}(p,n) \subset \boldsymbol{G}(p,n)$, которому соответствуют ступенчатые масштабирующие функции на G_p, дано в [7, теорема 9].

Ассоциированная с маской $m_{\boldsymbol{b}}$ масштабирующая функция порождает КМА в том и только в том случае, когда маска $m_{\boldsymbol{b}}$ не имеет блокирующих множеств (по теореме 2 из [1] это равносильно принадлежности вектора $\boldsymbol{b}$ множеству $\boldsymbol{W}(p,n)$). При увеличении p и n вычислительная сложность поиска блокирующих множеств быстро растет и для нахождения подходящих масок $m_{\boldsymbol{b}}$ используются методы 1) и 3). Например, в [6] с помощью критерия Коэна для любого $n \geq 3$ и любого $t \in [0,1)$ найден вектор $\boldsymbol{b}_t \in \boldsymbol{W}(2,n)$ такой, что ассоциированная с этим вектором масштабирующая функция φ_t является ступенчатой и на своем носителе $[0, 2^{n-1})$ представима конечной линейной комбинацией функций Уолша. Из критерия Коэна также следует, что $\boldsymbol{W}_0(p,n) \subset \boldsymbol{W}(p,n)$ (см. [1, пример 5]). Таким образом, всякий вектор $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{W}_0(p,n)$ задает по формуле (1) маску, приводящую к ортонормированному базису всплесков в $L^2(G_p)$. Известно также, что по любому вектору $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{G}(p,n) \setminus \boldsymbol{W}(p,n)$ можно построить фрейм Парсеваля в $L^2(G_p)$. Более того, при построении фреймов вместо (2) достаточно [10, 11] предполагать, что $b_0 = 1$ и $\sum_{s=0}^{p-1} |b_{l+s\,p^{n-1}}|^2 \leq 1$ (в пространствах N-периодических последовательностей [2] условие $b_0 = 1$ является лишним). В недавней работе [12] предложен алгоритм построения нестационарных всплесков на группе Виленкина, определяемой по последовательности натуральных чисел $\{p_j\}_{j=1}^{\infty}$, $p_j \geq 2$.

Дискретные вейвлет-преобразования, ассоциированные с указанными выше конструкциями на группах Виленкина, применяются для обработки изображений [13], сжатия фрактальных сигналов [14, 15], анализа финансовых временных рядов [15] и анализа геофизических данных [15, 16]. Каждое из этих преобразований по сравнению с дискретными преобразованиями Фурье, Уолша, Хаара и родственных им преобразованиями обладает большей эластичностью (выбор параметра $\boldsymbol{b}$ с помощью энтропийного, среднеквадратичного или иного критерия позволяет адаптировать применяемое преобразование к обрабатываемому сигналу). Как показано в [15], при кодировании значений обобщенной функции Вейерштрасса построенное для $p = 3$ с помощью функций Уолша дискретное всплесковое преобразование имеет преимущества по сравнению с преоб-

разованием Хаара и методом зонного кодирования. При этом число p оказывается равным числу входных каналов. В связи с этим отметим, что многоканальные всплесковые преобразования применяются в многомерных многоскоростных системах обработки сигналов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фарков Ю. А.* Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп // Матем. заметки. 2007. Т. 82, № 6. С. 934–952.

2. *Фарков Ю. А.* Дискретные вейвлеты и преобразование Виленкина – Крестенсона // Матем. заметки. 2011. Т. 89, № 6. С. 914—928.

3. *Mansour M. F.* Subspace design of compactly supported orthonormal wavelets // J. Fourier Anal. Appl. 2014. Vol. 20, № 1. P. 66—90.

4. *Фарков Ю. А.* Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69, № 3. С. 193–220.

5. *Фарков Ю. А.* Ортогональные всплески в анализе Уолша // Современные проблемы математики и механики. Т. XI. Вып. 1. Математика. К 80-летию В.А. Скворцова. Обобщенные интегралы и гармонический анализ / Под редакцией Т. П. Лукашенко и А. П. Солодова. М. : Изд-во Моск. ун-та, 2016. С. 62–75.

6. *Протасов В. Ю., Фарков Ю. А.* Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой // Матем. сборник. 2006. Т. 197, вып. 10. С. 129–160.

7. *Farkov Yu. A.* Constructions of MRA-based wavelets and frames in Walsh analysis // Poincare J. Anal. Appl. 2015. Vol. 2. Special Issue (IWWFA-II, Delhi). P. 13–36.

8. *Berdnikov G. S., Lukomskii S. F.* N-valid trees in wavelet theory on Vilenkin groups // Intern. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. 2015. Vol. 13, № 5. 1550037 (23 p.).

9. *Berdnikov G., Kruss Iu., Lukomskii S.* On orthogonal systems of shifts of scaling function on local fields of positive characteristic // Turk. J. Math. 2017. Vol. 41, № 2. P. 244—253.

10. *Farkov Yu. A., Lebedeva E. A., Skopina M. A.* Wavelet frames on Vilenkin groups and their approximation properties // Intern. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. 2015. Vol. 13, № 5. 1550036 (19 p.).

11. *Фарков Ю. А.* Фреймы Парсеваля в анализе Уолша // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 18-й междунар. Сарат. зимн. шк. Саратов : ООО «Научная книга», 2016. С. 292–298.

12. *Farkov Yu. A.* Nonstationary multiresolution analysis for Vilenkin groups // 2017 International Conference on Sampling Theory and Applications (SampTA, Tallinn, Estonia, 3-7 July 2017). P. 595–598.

13. *Farkov Yu. A., Maksimov A. Yu., Stroganov S. A.* On biorthogonal wavelets related to the Walsh functions // Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. 2011. Vol. 9. P. 485-–499.

14. *Фарков Ю. А., Борисов М. Е.* Периодические диадические всплески и кодирование фрактальных функций // Изв. вузов. Матем. 2012, № 9. С. 54—65.

15. *Родионов Е. А.* О применении вейвлетов к цифровой обработке сигналов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 2. С. 217–225. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-217-225.

16. *Любушин А. А., Родионов Е. А., Яковлев П. В.* Многомерный анализ параметров флуктуаций GPS сигналов до и после мегаземлетрясения 11 марта 2011 г. в Японии // Геофизические исследования. 2015. Т. 16, № 1. С. 14–23.