In current work we propose a new approach to the approximate solution of (1), based on decomposition of the function $y(x)$ on the grid Ω_{N+1} into a finite Fourier series by polynomials $\tau_{1,n}^{\alpha,\beta}(x,N)$:

$$y(x) = y(0) + \sum_{k=0}^{N-1} \hat{y}_{1,k+1}\tau_{1,k+1}^{\alpha,\beta}(x,N), \quad x \in \Omega_{N+1}.$$

where

$$\hat{y}_{1,k+1} = \sum_{t=0}^{N-1} \Delta y(j)\tau_k^{\alpha,\beta}(j,N)\mu(j), \quad (k \geq 0).$$

We note that the obtained results can be generalized to systems of difference equations of the form $\Delta y(x) = hf(x,y), \quad y(0) = y_0$, with $f = (f_1, \ldots, f_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$.

Moreover, problem (1) is of interest in connection with the fact, that the issue of the approximate solution of the Cauchy problem for ordinary differential equation

$$y'(x) = hf(x,y), \quad y(0) = y_0, \quad h > 0,$$

can be reduced to it.

УДК 517.5

РАСХОДИМОСТЬ СУММ МОДУЛЕЙ БЛОКОВ РЯДОВ ФУРЬЕ – УОЛША ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

С. А. Теляковский, Н. Н. Холщевникова (Москва, Россия)
sergeyaltel@ya.ru, kholshchevnikova@gmail.com

Пусть f — функция ограниченной вариации на промежутке $[0,1)$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k w_k(x)$$

ее ряд Фурье – Уолша. Рассматривается система Уолша в нумерации Пэли. Как известно, ряды Фурье функций ограниченной вариации по тригонометрической системе всюду сходятся. В случае системы Уолша такие ряды сходятся в каждой точке непрерывности функции f (и даже в точках, где выполняется более слабое условие непрерывности), но могут расходиться в точках разрыва, хотя и ограниченно. Пусть $\{n_j\}$ —

строго возрастающая последовательность номеров. Рассмотрим вопрос о сходимости ряда по модулям блоков

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\sum_{n=n_j}^{n_{j+1}-1} c_n w_n(x)|,$$

в метрике $L^{\infty}[0,1)$.

В работах [1–4] для тригонометрических рядов Фурье функций ограниченной вариации исследовались условия на последовательность их разбиения на блоки, при которых ряд по блокам абсолютно сходится к суммируемой функции, к ограниченной функции, к функции суммируемой с квадратом. Напомним первый и второй результаты, так как для соответствующих вопросов получены решения и в случае системы Уолша.

Пусть $\{n_j\}$ — строго возрастающая последовательность номеров, f — функция ограниченной вариации на $[-\pi,\pi]$ и

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

ее ряд Фурье.

В работе [1] установлено достаточное условие на последовательность $\{n_j\}$ для того, чтобы для всякой функции ограниченной вариации ее ряд Фурье абсолютно сходился по блокам к суммируемой функции, а именно,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} |\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)| \in L[-\pi,\pi]. \tag{1}$$

Это следующее условие:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\log(\min(n_j, n_{j+1} - n_j + 1))}{n_j} < \infty.$$

В статье [2] показано, что это условие является и необходимым в данном вопросе. При этом само условие можно записать в эквивалентной форме:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\log(n_{j+1} - n_j + 1)}{n_{j+1}} < \infty.$$

В работе [5] рассмотрена аналогичная задача для рядов Фурье функций ограниченной вариации по системе Уолша – Пэли.

Приведем несколько обозначений и определений. Всякое неотрицательное целое число n имеет двоичное разложение вида $n = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k 2^k$, где $\varepsilon_k = 0$ или 1. *Вариацией* такого числа n называется величина

$$V(n) = \sum_{k=1}^{\infty} |\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}| + \varepsilon_0.$$

Пусть n_{j+1} и n_j имеют двоичные разложения $n_{j+1} = 2^{l_1} + 2^{l_2} + \ldots + 2^{l_\nu} + 2^{l_{\nu+1}} + \ldots + 2^{l_s}, n_j = 2^{m_1} + 2^{m_2} + \ldots + 2^{m_\mu} + 2^{l_{\nu+1}} + \ldots + 2^{l_s}$, причем $m_\mu < l_\nu$. Тогда положим $\tilde{n}_{j+1} = 2^{l_1} + 2^{l_2} + \ldots + 2^{l_\nu}$, $\tilde{n}_j = 2^{m_1} + 2^{m_2} + \ldots + 2^{m_\mu}$.

В [5] доказана

Теорема 1. *Пусть $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Для того, чтобы для всякой функции ограниченной вариации сумма ряда*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\sum_{n=n_j}^{n_{j+1}-1} c_n w_n(x)|,$$

где c_n — коэффициенты Фурье-Уолша этой функции, принадлежала пространству $L[0,1)$, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\max(V(\tilde{n}_{j+1}, V(\tilde{n}_j)}{n_{j+1}}.$$

Показано, что условие на $\{n_j\}$ слабее, чем соответствующее условие в тригонометическом случае.

В случае сходимости ряда (1) к ограниченной функции необходимые и достаточные условия получены в работе [3].

Теорема 2. *Пусть $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Для того, чтобы для каждой функции ограниченной вариации*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| \in L^{\infty}[-\pi, \pi],$$

где a_k, b_k — коэффициенты Фурье этой функции, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{n_j} \min(n_i, n_{i+1} - n_i) \leq M, \quad i = 1, 2, ...,$$

где M — некоторая постоянная.

Для рядов по системе Уолша в аналогичном случае получается совсем другой результат, а именно, справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть* $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ *— строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда найдется функция ограниченной вариации, для которой существенная верхняя грань величины*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \Big| \sum_{n=n_j}^{n_{j+1}-1} c_n w_n(x) \Big|$$

равна бесконечности.

Для каждой последовательности эта верхняя грань достигается на характеристической функции некоторого отрезка $[0, \xi]$, зависящего от последовательности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Telyakovskii S. A.* Some properties of Fourier series of functions with bounded variation // East J. Approx. 2004. Vol. 10, № 1–2. P. 215–218.

2. *Trigub R. M.* A note on the paper of Telyakovski "Certain properties of Fourier series of functions with bounded variation" // East J. Approx. 2007. Vol. 13, № 1. P. 1–6.

3. *Белов А. С., Теляковский С. А.* Усиление теорем Дирихле–Жордана и Янга о рядах Фурье функций ограниченной вариации // Матем. сб. 2007 Т. 198, № 6. С. 25–40.

4. *Теляковский С. А.* Некоторые свойства рядов Фурье функций ограниченной вариации // Тр. ИММ УрО РАН. 2005. Т. 11, № 2. С. 168–174.

5. *Малыхин Ю. В., Теляковский С. А., Холщевникова Н. Н.* Интегрируемость суммы модулей блоков рядов Фурье-Уолша функций ограниченной вариации // Тр. МИАН. 2015. Т. 290. С. 323–334.

УДК 517.5

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ ХАРДИ – ЛИТТЛВУДА

Т. Е. Тилеубаев (Астана, Казахстан)

Tileubaev@mail.ru

Пусть $1 \le p \le \infty, \alpha > -\frac{1}{2}$. Через $L_{p,\alpha}$ обозначим пространство, состоящее из измеримых функций $f(x)$ на $[0, \infty)$ для которых конечна норма

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left(\int_0^{\infty} |f|^p x^{2\alpha+1} dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty.$$

Обозначим через $L_{\infty,\alpha}$ множество всех функций $f(x)$, которые равномерно непрерывны и ограничены на $[0, \infty)$.