

$[R] \neq \text{const}$, $\psi = \text{arth} \sqrt{\frac{v_2}{u_2}}$, $\psi = \frac{S}{ab}$, $u_2 = [R] \operatorname{ch}^2 \psi$, $v_2 = [R] \operatorname{sh}^2 \psi$, где $u_2 = |OC_2|$, $v_2 = |M_2C_2|$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В. Д. Альтернативные комплексные числа (АКЧ). 1. Изображенные на плоскости. Свойства модулей // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 18-й международной Саратовской зимней школы. Саратов : Научная книга, 2016. С. 27–31.
2. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. 870 с.

УДК 517.935.2

БЫСТРЫЙ АЛГОРИТМ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В КОМБИНИРОВАННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Д. К. Андрейченко, К. П. Андрейченко, Д. В. Мельничук
(Саратов, Россия)

andreichenkodk@gmail.com, kp_andreichenko@renet.ru,
meldm007@gmail.com

Комбинированные динамические системы (КДС) представляют собой математические модели технических систем в форме систем связанных посредством условий связи и граничных условий обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. КДС с входной и выходной вектор-функциями $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N_x}$ и $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N_y}$, где t — время, рассмотрены в [1–4]. Основные теоремы о быстрых алгоритмах проверки устойчивости КДС сформулированы и доказаны в [1–3], а методы параметрического синтеза, т.е. выбора параметров обратных связей, обеспечивающих требуемое качество переходных процессов, рассмотрены в [2, 4]. После параметрического синтеза требуется выполнить прямое численное моделирование переходных процессов в нелинейных КДС, что является нетривиальной вычислительной задачей. Уравнения движения КДС можно привести к виду, аналогичному [2, 4]

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_t t), \quad \mathbf{h} = \int_S \mathbb{H}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}) dS, \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbb{F}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_t t), \quad \mathbf{r} \in \Omega, \quad \mathbb{G}(\mathbf{u}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu})|_S = 0, \quad (2)$$

$$\mathbf{y}(0) = 0, \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = 0. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{N_r}$ — независимые пространственные координаты, $\Omega \subset \mathbb{R}^{N_r}$ — область, занятая объектами управления с распределенными по пространству параметрами, $S = \partial\Omega$ — граница области, $\mathbf{u} : \mathbb{R}^{N_r} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N_u}$ характеризует движение объектов управления с распределенными по пространству параметрами, $\mathbf{h} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N_h}$, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{N_x} \times \mathbb{R}^{N_y} \times \mathbb{R}^{N_h} \times \mathbb{R}^{N_\mu} \times \mathbb{R}^{N_t} \rightarrow \mathbb{R}^{N_y}$, операторы $\mathbb{F}, \mathbb{G}, \mathbb{H}$ соответствуют уравнениям в частных производных, граничным условиям и условиям связи; $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^{N_\mu}$ — параметры, характеризующие типовые нелинейности, $\boldsymbol{\mu}_t \in \mathbb{R}^{N_t}$ — параметры, характеризующие нестационарность (зависимость от времени некоторых коэффициентов модельных уравнений); $(\dot{\cdot}) = d(\cdot)/dt$ либо $(\dot{\cdot}) = \partial(\cdot)/\partial t$. Полагаем, что функция \mathbf{f} дифференцируема по \mathbf{y} , \mathbf{h} , операторы $\mathbb{F}, \mathbb{G}, \mathbb{H}$ дифференцируемы по \mathbf{u} , а также дифференцируемы по \mathbf{y} и $\dot{\mathbf{y}}$.

Дискретизация уравнений в частных производных по независимым пространственным переменным выполняется на основе проекционного метода Галёркина. Пусть $\mathbf{W}_k(\mathbf{r}), \mathbf{W}_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{N_u}, k = 1, 2, \dots$, — полная система функций в области Ω ; $\Gamma_k(\mathbf{r}|_S), \Gamma_k : S \rightarrow \mathbb{R}^{N_G}, k = 1, 2, \dots$, — полная система функций на границе $S = \partial\Omega$. Полагаем

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \approx \sum_{k=1}^{N_\Omega+N_S} u_k(t) \mathbf{W}_k(\mathbf{r}). \quad (4)$$

Для того, чтобы приблизенно выполнить уравнения (2), требуем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{W}_k(\mathbf{r}) d\Omega &= \int_{\Omega} \mathbb{F}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_t t) \cdot \mathbf{W}_k(\mathbf{r}) d\Omega, \quad k = \overline{1, N_\Omega}, \\ \int_S \mathbb{G}(\mathbf{u}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}) \cdot \Gamma_k(\mathbf{r}) dS &= 0, \quad k = \overline{1, N_S}. \end{aligned} \quad (5)$$

где $(\cdot) \cdot (\cdot)$ — скалярное произведение векторов соответствующей размерности. Из (1), (3), (4), (5) следует задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (достаточно большой размерности)

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_t), \quad \mathbf{Y}(0) = 0, \quad \mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_{N_y}, u_1, u_2, \dots, u_{N_\Omega})^T, \quad (6)$$

приведение которой к нормальной форме (6) аналогично нахождению вектора $\dot{\mathbf{Y}}$ по известному в текущий момент времени t вектору \mathbf{Y} . Далее (6) интегрируется численно жестко устойчивым ФДН-методом [5]. При этом наибольшие затраты времени связаны с вычислением матрицы Якоби $\partial\mathbf{F}(t, \mathbf{Y}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_t)/\partial\mathbf{Y}$.

Линеаризованные уравнения возмущенного движения КДС (1)–(3) и

ее дискретного аналога (6) имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{y}}} &= \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_t t)}{\partial \mathbf{y}} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_t t)}{\partial \mathbf{h}} \hat{\mathbf{h}}, \\ \hat{\mathbf{h}} &= \int_S \frac{\partial \mathbb{H}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu})}{\partial \mathbf{u}} \hat{\mathbf{u}} dS, \quad \dot{\hat{\mathbf{u}}} = \mathbb{L}^{(F)}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{y}}, \dot{\hat{\mathbf{y}}}), \quad \mathbf{r} \in \Omega, \\ \mathbb{L}^{(F)}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{y}}, \dot{\hat{\mathbf{y}}}) &= \frac{\partial \mathbb{F}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_t t)}{\partial \mathbf{u}} \hat{\mathbf{u}} + \\ &+ \frac{\partial \mathbb{F}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_t t)}{\partial \mathbf{y}} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbb{F}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_t t)}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \dot{\hat{\mathbf{y}}},\end{aligned}\tag{7}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{L}^{(G)}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{y}}) \Big|_S &= 0, \quad S = \partial\Omega, \\ \mathbb{L}^{(G)}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{y}}) &= \frac{\partial \mathbb{G}(\mathbf{u}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu})}{\partial \mathbf{u}} \hat{\mathbf{u}} + \frac{\partial \mathbb{G}(\mathbf{u}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu})}{\partial \mathbf{y}} \hat{\mathbf{y}}, \\ \dot{\hat{\mathbf{Y}}} &= \frac{\partial \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}, \boldsymbol{\mu})}{\partial \mathbf{Y}} \hat{\mathbf{Y}}.\end{aligned}\tag{8}$$

Теорема 1. Пусть функция \mathbf{f} дифференцируема по \mathbf{y} , \mathbf{h} , операторы \mathbb{F} , \mathbb{G} , \mathbb{H} дифференцируемы по Фреше по \mathbf{u} , а также дифференцируемы по \mathbf{y} и $\dot{\mathbf{y}}$. Тогда, в предположении $\hat{\mathbf{Y}} = [Y_j]$, $Y_j = \delta_k^j$, $k, j = \overline{1, N_y + N_\Omega}$, где δ_k^j — символ Кронекера, k -й столбец матрицы Якоби $\partial \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_t)/\partial \mathbf{Y}$ может быть вычислен на основе применения к линейным уравнениям возмущенного движения КДС (7) того же самого варианта проекционного метода Галеркина, на основе которого из исходных нелинейных уравнений КДС (1)–(3) получена нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений (6).

Замечание 1. При численном интегрировании задачи Коши (6) матрица $\partial \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_t)/\partial \mathbf{Y}$ может быть вычислена с гораздо меньшей точностью, чем правые части $\mathbf{F}(t, \mathbf{Y}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_t)$, и в уравнениях возмущенного движения КДС (7) можно отбросить малые слагаемые, что существенно сокращает трудоемкость алгоритма.

Следствие 1. Столбцы матрицы $\partial \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_t)/\partial \mathbf{Y}$ могут быть вычислены независимо, т.е. параллельно.

Замечание 2. Еще более эффективное распараллеливание вычислений при моделировании переходных процессов в нелинейных КДС может быть основано на том, что для различных $\boldsymbol{\mu}$ и $\boldsymbol{\mu}_t$ численное интегрирование начально-краевых задач (1)–(3), т.е. задач Коши (6), может быть выполнено независимо, т.е. параллельно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П. К теории комбинированных динамических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 3. С. 54–69.

2. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П. Моделирование, анализ и синтез комбинированных динамических систем : учеб. пособие. Саратов : Райт-Экспо, 2013. 144 с.

3. Портенко М. С., Мельничук Д. В., Андрейченко Д. К. Условия аналитичности характеристического и возмущающих квазимногочленов комбинированных динамических систем // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 2. С. 208–217. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-208-217.

4. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П., Мельничук Д. В., Портенко М. С. Адаптивный алгоритм параметрического синтеза комбинированных динамических систем // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 465–475. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-465-475.

5. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М : Мир, 1999. 512 с.

УДК 517.518

**О СХОДИМОСТИ ПОЧТИ ВСЮДУ
ПО ПРЯМОУГОЛЬНИКАМ КРАТНЫХ
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ¹**
Н. Ю. Антонов (Екатеринбург, Россия)
Nikolai.Antonov@imm.uran.ru

Пусть $d \in \mathbb{N}$; $\mathbb{T}^d = [0, 2\pi]^d$ — d -мерный тор; $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ — неубывающая функция; $\varphi(L)(\mathbb{T}^d)$ — множество определенных на \mathbb{T}^d комплекснозначных функций f , для которых функция $\varphi(|f|)$ суммируема на \mathbb{T}^d ; $C(\mathbb{T}^d)$ — множество функций, непрерывных на \mathbb{T}^d . Для $f \in L(\mathbb{T}^d)$ и вектора $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_d)$ с неотрицательными целочисленными координатами через $S_{\mathbf{n}}(f, \mathbf{x})$ будем обозначать значение \mathbf{n} -й прямоугольной частичной суммы кратного тригонометрического ряда Фурье функции f в точке $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d$.

Пусть $\lambda \geq 1$. Кратный ряд Фурье функции f называется λ -сходящимся в точке $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d$, если существует предел

$$\lim_{\min\{n_j: 1 \leq j \leq d\} \rightarrow +\infty} S_{\mathbf{n}}(f, \mathbf{x}), \quad (1)$$

рассматриваемый только по тем векторам $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_d)$, для которых $1/\lambda \leq n_i/n_j \leq \lambda$, $1 \leq i, j \leq d$. В случае $\lambda = 1$ λ -сходимость называется сходимостью по кубам, а в случае $\lambda = +\infty$, то есть без ограничений на соотношения между координатами вектора \mathbf{n} , — сходимостью по Прингсхайму.

Известно [1], что если $f \in L(\ln^+ L)^d \ln^+ \ln^+ \ln^+ L(\mathbb{T}^d)$, то кратный тригонометрический ряд Фурье функции f сходится почти всюду на \mathbb{T}^d .

¹Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).