ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ

С. И. Страхов (Самара, Россия)
www.stepan121@mail.ru

Замкнутое подпространство H симметричного пространства X на $[0,1]$ называется сильно вложенным в X, если в H сходимость по X-норме эквивалентна сходимости по мере. Рассматриваются симметричные пространства X, все рефлексивные подпространства которых сильно вложены в X. Приведем один из результатов.

Теорема 1 [1]. *Предположим, что симметричное пространство X на отрезке $[0,1]$ обладает следующим свойством: если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, $x_n \xrightarrow{w} 0$ в X и $x_n \xrightarrow{\mu} 0$, то $\|x_n\|_X \to 0$. Тогда любое рефлексивное подпространство $Y \subset X$ сильно вложено в X.*

Теорема 1 является усилением результатов работы [2], где аналогичное утверждение было доказано для пространств Орлича, в которых выполнен аналог классического описания Данфорда-Петтиса относительно слабо компактных подмножеств пространства L_1 (см., например, [3, теорема 5.2.9]). Заметим, что согласно [4] в классе симметричных пространств X следующие свойства эквивалентны:

(1) из $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, $x_n \xrightarrow{w} 0$ в X и $x_n \xrightarrow{\mu} 0$ следует: $\|x_n\|_X \to 0$;

(2) в X имеет место аналог описания Данфорда – Петтиса относительно слабо компактных подмножеств пространства L_1.

В то же время для широкого класса симметричных пространств обратное утверждение к теореме 1 не имеет места. Если $\varphi(t)$ — вогнутая возрастающая функция на $[0,1]$, то пространство $M_0(\varphi)$ состоит из всех измеримых на $[0,1]$ функций $x = x(s)$ таких, что

$$\lim_{t\to 0} \frac{\int_0^t x^*(s)\,ds}{\varphi(t)} = 0,$$

с нормой

$$||x||_{M_0(\varphi)} := \sup_{0<t\le 1} \frac{\int_0^t x^*(s)\,ds}{\varphi(t)}.$$

Тогда, если $\varphi(t) \ge ct\ln^{1/2}(e/t)$ для некоторого $c > 0$ и всех $0 < t \le$ ≤ 1, то пространство $M_0(\psi)$ не обладает свойством (1) (и эквивалентно (2)), однако любое его рефлексивное подпространство силбно вложено в $M_0(\varphi)$.

Результаты получены совместно с С. В. Асташкиным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Асташкин С. В., Страхов С. И.* О симметричных пространствах со сходимостью по мере на рефлексивных подпространствах // Изв. вузов. Математика. 2017. (Принята к печати).

2. *Lavergne E.* Reflexive subspaces of some Orlicz spaces // Colloquium Math. 2008. Vol. 113, iss. 2. P. 333–340.

3. *Albiac F., Kalton N. J.* Topics in Banach Space Theory. Graduate Texts in Mathematics 233 (Springer, New York, 2006).

4. *Astashkin S. V., Kalton N. J., Sukochev F. A.* Cesaro mean convergence of martingale differences in rearrangement invariant spaces // Positivity. 2008. Vol. 12. P. 387–406.

УДК 517.521

NONLINEAR DIFFERENCE EQUATIONS AND POLYNOMIALS, ORTHOGONAL IN THE SOBOLEV SENSE AND GENERATED BY CLASSICAL CHEBYSHEV POLYNOMIALS OF DISCRETE VARIABLE

M. S. Sultanakhmedov (Makhachkala, Russia)
sultanakhmedov@gmail.com

We consider the Cauchy problem for the nonlinear difference equation

$$\Delta y(x) = hf(x,y), \quad y(0) = y_0, \quad h > 0, \tag{1}$$

in which the function $f(x,y)$ we shall assume as given on the Cartesian product $\Omega_N \times \mathbb{R}$, where $\Omega_N = \{0, 1, \ldots, N-1\}$. Here and below $\Delta y(x) = y(x+1) - y(x)$ is the finite difference operator.

It is required to approximate with a specified accuracy defined on Ω_{N+1} function $y = y(x)$, which represents the solution of problem (1).

Let us consider the system of polynomials $\tau_{1,n}^{\alpha,\beta}(x,N)$, $(n = 0, 1, \ldots, N)$, also defined on the net Ω_{N+1} and orthogonal in the Sobolev sense with respect to the following scalar product

$$\langle \tau_{1,n}^{\alpha,\beta}, \tau_{1,m}^{\alpha,\beta} \rangle = \tau_{1,n}^{\alpha,\beta}(0)\tau_{1,m}^{\alpha,\beta}(0) + \sum_{j=0}^{N-1} \Delta\tau_{1,n}^{\alpha,\beta}(j)\Delta\tau_{1,m}^{\alpha,\beta}(j)\mu(j),$$

where $\alpha, \beta > -1$, $\mu(x)$ – discrete weight function given by equality

$$\mu(x) = \mu(x;\alpha,\beta,N) = \frac{\Gamma(N)2^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(N+\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(x+\beta+1)\Gamma(N-x+\alpha)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x)}.$$

Polynomials $\tau_{1,n}^{\alpha,\beta}(x,N)$ are determined through the classical Chebyshev polynomials of discrete variable by the following expressions:

$$\tau_{1,0}^{\alpha,\beta}(x,N) = 1, \quad \tau_{1,k+1}^{\alpha,\beta}(x,N) = \sum_{t=0}^{x-1} \tau_k^{\alpha,\beta}(t,N).$$