УДК 517.98

О НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ В ВЫПУКЛЫХ НОРМИРОВАННЫХ КОНУСАХ[1]

Ф. С. Стонякин (Симферополь, Россия)
fedyor@mail.ru

Многие задачи анализа приводят к необходимости вместо линейных пространств рассматривать так называемые абстрактные выпуклые конусы. Теория выпуклых конусов с нормой (далее — нормированных конусов) активно развивается, в этой области известно немало современных работ (см., например [1–3]). Отметим, что класс нормированных конусов значительно шире класса линейных пространств: даже в двухмерном линейном пространстве можно определить топологически неэквивалентные нормированные конусы, не допускающие линейного инъективного изометричного вложения ни в какое нормированное пространство.

Пример 1. Множество X числовых пар (a, b), где $a \geqslant 0$, $b \in \mathbb{R}$, причём $b = 0$ означает $a = 0$. Норма в X вводится следующим образом: $\|(a, b)\|_X = a + b^2/a$ при $a \neq 0$ и $\|(0, 0)\|_X = 0$. Отметим, что единичный шар $B_X(0) = \{(a, b) \in X \mid \|(a, b)\|_X \leqslant 1\}$ есть круг радиуса $1/2$ с центром в точке $(0, 1/2)$.

Настоящая работа посвящена аналогу известной теоремы Банаха-Алаоглу о $*$-слабой компактности единичного шара в сопряжённом пространстве для специального класса нормированных конусов, а также некоторым приложениям к экстремальным задачам.

Недавно нами (см. [4]) был выделен класс отделимых нормированных конусов X, точки которых можно разделить функционалами вида

$$p_\ell(x) = \max\{0, \ell(x)\} \; \forall x \in X, \tag{1}$$

где $\ell : X \to \mathbb{R}$ — линейны и ограничены по норме ($\ell(x) \leqslant C||x|| \; \forall x \in X$ при некотором $C > 0$), причем $\ell(x_0) \geqslant 0$ для некоторого $x_0 \neq 0$.

Набор $\widehat{X}^*_{sub}$ функционалов вида (1) мы назовём *субсопряженным конусом.* На этом множестве можно ввести операции сложения и умножения на неотрицательный скаляр следующим образом: $p_{\ell_1} \oplus p_{\ell_1} := p_{\ell_1+\ell_2}$, $\lambda \cdot p_\ell := p_{\lambda \cdot \ell}$ для произвольных ℓ_1, ℓ_2 и $\lambda \geqslant 0$. Относительно введённых операций $\widehat{X}^*_{sub}$ будет нормированным конусом с нормой

$$||p_\ell||_{\widehat{X}^*_{sub}} := \sup_{x \neq 0} \frac{p_\ell(x)}{||x||}.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских учёных-кандидатов наук (проект МК-176.2017.1).

Отметим (см. [4]), что всякий отделимый нормированный конус можно метризовать. Точнее говоря, в отделимом нормированном конусе существует такая однородная метрика $d_X : X \times X \to \mathbb{R}$, что $d_X(0, x) = ||x||$ $\forall\, x \in X$. При этом в нормированных пространствах $(E, ||\cdot||)$ будут верны неравенства:

$$\frac{1}{2}||x-y|| \leqslant d_E(x,y) \leqslant ||x-y|| \quad x, y \in E.$$

Естественно можно ввести $*$-слабую сходимость последовательность в субсопряженном конусе $\widehat{X}^*_{sub}$ к нормированному конусу X:

$$p_\ell = *\text{-}\lim_{n\to\infty} p_{\ell_n}, \text{ если } p_\ell(x) = \lim_{n\to\infty} p_{\ell_n}(x) \quad \forall x \in X.$$

Справедлив следующий аналог теоремы Банаха-Алаоглу в классе нормированных конусов.

Теорема 1. *Если (X, d_X) — сепарабельное метрическое пространство, то $B^* = \{p_\ell \in \widehat{X}^*_{sub} \mid ||p_\ell||_{\widehat{X}^*_{sub}} \leqslant 1\}$ — компактное метрическое пространство для некоторой метрики.*

Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение о существовании минимума функционала, заданного на $*$-замкнутом подмножестве конуса $X = \widehat{Y}^*_{sub}$ для некоторого отделимого d_Y-сепарабельного нормированного конуса Y.

Теорема 2. *Пусть $X = \widehat{Y}^*_{sub}$, Y — отделимый d_Y-сепарабельный нормированный конус, $f : A \to \mathbb{R}$ — собственный функционал ($f(x) > -\infty$ $\forall x \in A$), непрерывный на замкнутом выпуклом множестве A в стандартной конус-топологии, порождённой системой окрестностей $B_\varepsilon(x) = \{x+h \mid \|h\| \leqslant \varepsilon,\, h \in X\}$ точек $x \in X$, $\varepsilon > 0$. Тогда существует такой элемент $a_0 \in A$, что $f(a_0) = \min\limits_{x\in A} f(x)$, а также последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in A$, для которой $f(a_0) = \lim\limits_{k\to+\infty} f(a_k)$.*

Отметим, что функционал f может быть собственным в конусе X, но несобственным во всяком нормированном пространстве $E_X \supset X$. К примеру, этот будет верно для функционала $f((a,b)) = -b^2/a$ в нормированном конусе X из примера 1.

Теоремы 1 и 2 удобно применять в случае $X = \widehat{X}^*_{sub}$. Будем называть такие конусы X *самосопряжёнными.* Самосопряжённым будет, например, нормированный конус из примера 1.

С использованием теоремы 2 можно доказать разрешимость задачи о существовании ближайшей к $x_0 \notin A$ точки $*$-слабо компактного выпуклого множества A, если для некоторого нормированного конуса Y верно

$X = \widehat{Y}^*_{sub}$. Заметим, что аналогичные задачи в линейных пространствах с несимметричной нормой рассмотрены Г. Е. Ивановым, например, в [5].

Расстоянием от точки $x_0 \in A$ до множества A будем называть величину

$$\rho(x_0, A) := \inf\{\varepsilon > 0 \mid A \cap x_0 + \varepsilon B_X(0) \neq \varnothing\},$$

где $B_X(0) = \{x \in X \mid ||x|| \leqslant 1\}$.

В отличие от расстояний в нормированных (и несимметрично нормированных [5]) пространствах, в нормированном конусе X возможно $A \cap \{x_0 + \varepsilon B_X(0)\} = \varnothing \ \forall \varepsilon > 0$. В таком случае будем полагать, что $\rho(x_0, A) = +\infty$. Например, так будет в случае $X = \{(a,b) \mid a, b \geqslant 0\}$ при $||(a,b)||_X = \sqrt{a^2 + b^2}$ для множества $A = \{(a,b) \mid \max\{a,b\} \leqslant 1\}$ и точки $x_0 = (2,2)$.

Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение о разрешимости задачи нахождения ρ-ближайшей точки множества A к точке $x_0 \notin A$.

Теорема 3. *Пусть A — $*$-слабо замкнутое подмножество нормированного конуса $X = \widehat{Y}^*_{sub}$ для некоторого нормированного конуса Y, где (Y, d_Y) — сепарабельное метрическое пространство. Если $\rho(x_0, A) < +\infty$, то существует $a_0 \in A : a_0 = x_0 + h$, где $h \in X$ и $||h|| = \rho(x_0, A)$.*

В нормированных конусах можно ввести, вообще говоря, отличную от ρ, функцию расстояния от точки $x_0 \in X$ до множества $A \subset X$:

$$\widehat{\rho}(x_0, A) := \inf\{\varepsilon > 0 \mid x_0 \in A + \varepsilon B_X(0)\}.$$

Для задачи о наилучшем приближении с точки зрения $\widehat{\rho}$ справедлив аналог теоремы 3 для $*$-слабо компактного подмножества $A \subset X$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Selinger P.* Towards a semantics for higher-order quantum computation // Proc. 2nd Intern. Workshop on Quantum Programming Languages. 2004. Vol. 33. P. 127–143.

2. *Garcia-Raffi L. M., Romaguera S., Sanchez-Perez E. A., Valero O.* Metrizability of the unit ball of the dual of a quasi-normed cone // Bollettino dell'Unione Matematica Italiana. 2004. 7-B:8. P. 483–492.

3. *Romaguera S., Sanchez-Perez E. A., Valero O.* A Characterization of Generalized Monotone Normed Cones // Acta Math. Sinica. English Ser. 2007. Vol. 23, iss. 6. P. 1067–1074.

4. *Stonyakin F. S.* Subdifferential calculus in abstract convex cones // Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V. F. Demyanov). 2017. P. 316–319.

5. *Ivanov G. E.* Weak convexity of sets and functions in a Banach space // J. Convex Analysis. 2015. Vol. 22, iss. 2. P. 365–398.