3. *Климкин В. М.* Срибная Т. А. Продолжение квазитреугольной субмеры // Изв. вузов. Матем. 1992. № 2. С. 42–48.

4. *Срибная Т. А.* Продолжение функции множества со значениями в частично упорядоченной полугруппе // Вестн. СамГУ. Естественнонаучная сер. 2007. № 6 (56). С. 269–280.

5. *Неве Ж.* Математические основы теории вероятностей. М.: Мир. 1969. 309 с.

6. *Богачев В. И.* Основы теории меры. М.; ИжевскЁ: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика. 2006. Т. 1. 583 с.

УДК 517.538.52+517.538.53

# ОБ АСИМПТОТИКЕ МНОГОЧЛЕНОВ ЭРМИТА – ПАДЕ[1]

**А. П. Старовойтов, Е. П. Кечко, М. В. Сидорцов**
**(Гомель, Беларусь)**
svoitov@gsu.by, ekechko@gmail.com, sidortsov@mail.ru

Пусть $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$ — произвольные различные действительные числа, а $n_0 = n, n_1 = \alpha n, n_2 = \beta n$, где $n, \alpha, \beta$ – натуральные числа ($\alpha, \beta$ — фиксированы). Будем рассматривать многочлены $A^p_{n_p}(z)$, $deg\, A^p_{n_p} \leqslant n_p - 1$, $p = 0, 1, 2$, хотя бы один из которых тождественно не равен нулю, удовлетворяющие условию

$$\sum_{p=0}^{2} A^p_{n_p}(z)\, e^{\lambda_p z} = O\left(z^{n_0+n_1+n_2-1}\right), \quad z \to 0\,. \tag{1}$$

Многочлены $\{A^p_{n_p}(z)\}^2_{p=0}$ введены Эрмитом [1] в связи с исследованием алгебраической природы числа $e$. Согласно современной терминологии (см. [2]) их называют *многочленами Эрмита – Паде 1-го рода (Latin type)* для системы экспоненциальных функций $\{e^{\lambda_p z}\}^2_{p=0}$. Диагональному случаю соответствует набор параметров, при котором $n = n_0 = n_1 = n_2$.

В настоящее время теория многочленов и аппроксимаций Эрмита – Паде (определение аппроксимаций Эрмита – Паде 1-го и 2-го рода см. в [2, 3]) активно развивается и составляет самостоятельное направление комплексного анализа и теории приближений. Традиционно аппроксимации Эрмита – Паде имеют приложения к теории диофантовых приближений, к задачам приближения аналитических функций и аналитического продолжения. Они оказались полезными в теории несимметричных разностных операторов и в теории случайных матриц.

До недавнего времени в основном изучались свойства диагональных многочленов (подробнее см. [4]). В [5] К. Драйвер и Н. Темме исследовали асимптотику недиагональных квадратичных многочленов Эрмита – Паде

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь.

и получили соответствующий результат в случае, когда $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $n_0 = n$, $n_1 = \alpha n$, $n_2 = n$.

В данной работе получено обобщение результата К. Драйвер и Н. Темме. Нами исследуются асимптотические свойства недиагональных квадратичных многочленов Эрмита – Паде 1-го рода для системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^2$, которые представляются (см. [1]) в следующем виде

$$A_{n_p}^p(z) = \frac{e^{-\lambda_p z}}{2\pi i} \int\limits_{C_p} \frac{e^{\xi z}\, d\xi}{[\varphi(\xi)]^n}, \quad 0 \leqslant p \leqslant 2, \tag{2}$$

где $\varphi(\xi) = \xi(\xi - \lambda_1)^\alpha (\xi - \lambda_2)^\beta$, а $C_p$ – граница круга с центром в точке $\lambda_p$ столь малого радиуса, что все остальные $\lambda_j$ лежат во внешности этого круга.

Пусть $x_j$, $j = 1, 2$ нули функции $\varphi'(\xi)$, т.е. $\varphi'(x_j) = 0$, $j = 1, 2$. Ясно, что $x_j$ – действительные числа и $x_1 \in (0, \lambda_1)$, $x_2 \in (\lambda_1, \lambda_2)$. Считаем, что $G$ – такая односвязная область, что $\{x_j\}_{j=1}^2 \subset G \subset \mathbb{C} \backslash \{\lambda_p\}_{p=0}^2$. Тогда (см. [6]) функция (везде далее $i$ — мнимая единица)

$$S(\xi) = -\ln \varphi(\xi),$$

где

$$S(x_1) = -\ln |\varphi(x_1)|, \text{ если } \varphi(x_1) > 0,$$

$$S(x_1) = -\ln |\varphi(x_1)| - i\pi, \text{ если } \varphi(x_1) < 0,$$

является однозначной аналитической функцией в $G$. Значение функции $S(\xi)$ вычисляются по формуле

$$S(\xi) = -\ln |\varphi(\xi)| - i[ImS(x_1) + \Delta_\gamma \arg \varphi(\xi)],$$

где кривая $\gamma$ лежит в $G$ и соединяет точки $x_1$ и $\xi$, а $\Delta_\gamma \arg \varphi(\xi)$ – приращение аргумента $\varphi(\xi)$ вдоль кривой $\gamma$.

Выбирая положительное значение корня, полагаем

$$B_n(x_j) = \sqrt{\frac{1}{2\pi n S''(x_j)}}\, e^{nS(x_j)}, \quad j = 1, 2.$$

Сформулируем основной результат.

**Теорема.** *Пусть $n_0 = n$, $n_1 = \alpha n$, $n_2 = \beta n$. Тогда для каждого фиксированного числа $z \in \mathbb{C}$ при $n \to \infty$*

$$A_{n_0}^0(z) = B_n(x_1) e^{x_1 z} \left(1 + O\left(1/n\right)\right),$$

$$A^1_{n_1}(z) = B_n(x_2)e^{(x_2-\lambda_1)z}\left(1+O\left(1/n\right)\right) - B_n(x_1)e^{(x_1-\lambda_1)z}\left(1+O\left(1/n\right)\right),$$

$$A^2_{n_2}(z) = -B_n(x_2)e^{(x_2-\lambda_2)z}\left(1+O\left(1/n\right)\right).$$

Введем обозначения

$$\rho = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+2}},$$

$$D_{n,\alpha} = \rho^{1-\alpha}(2n+\alpha n)(2n+\alpha n-2)\ldots(\alpha n+2).$$

Из теоремы получаем следствие равносильное (с учётом нормировки многочленов) теореме 3.2 из работы [5].

**Следствие**. *Пусть* $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $n_0 = n+1$, $n_1 = \alpha(n+1)$, $n_2 = n+1$. *Тогда для каждого фиксированного числа* $z \in \mathbb{C}$ *при* $n \to \infty$

$$A^0_{n_0}(z) = \frac{(-1)^{n_1+n_2}}{2^{n+1}n!}D_{n,\alpha}e^{(1-\rho)z}\left(1+O\left(1/n\right)\right),$$

$$A^1_{n_1}(z) = \frac{(-1)^{n_2}}{2^{n+1}n!}D_{n,\alpha}\left[e^{\rho z} + (-1)^{n_1+1}e^{-\rho z}\right]\left(1+O\left(1/n\right)\right),$$

$$A^2_{n_2}(z) = \frac{(-1)^{n_2+1}}{2^{n+1}n!}D_{n,\alpha}e^{-(1-\rho)z}\left(1+O\left(1/n\right)\right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Hermite C.* Sur la généralisation des fractions continues algébriques // Ann. Math. Pura. Appl. Ser. 2A. 1883. № 21. P. 289–308.

2. *Stahl H.* Asymptotics fo quadratic Hermite – Padé polynomials associated with the exponential function // Electron. Trans. Numer. Anal. 2002. Vol. 14. P. 195–222.

3. *Лопес Лагомасино Г., Медина Перальта С., Фидальго Прето У.* Аппроксимации Эрмита – Паде для некоторых систем мероморфных функций // Матем. сб. 2015. Т. 206, № 2. С. 57–76.

4. *Старовойтов А. П., Кечко Е. П.* О некоторых свойствах аппроксимаций Эрмита – Паде для набора экспоненциальных функций // Тр. МИАН. 2017. Т. 298. С. 338–355.

5. *Driver K. A., Temme N. M.* On polynomials related with Hermite–Pade approximants to the exponential function // J. Approx. Theory. 1998. № 95. P. 101–122.

6. *Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. М. : Наука, 1989. 479 с.